

Теорема Ван Дер Вардена и игры 2

Серия Е

Проблемы Ван Дер Варденского типа можно рассматривать в классическом, плотностном (типа теоремы Семиреди) и в игровом аспектах.

Классическая версия

1. Целочисленные точки плоскости раскрашены в k цветов. Докажите, что найдется одноцветный прямоугольник с вершинами в целых точках.
2. Целочисленные точки пространства раскрашены в k цветов. Докажите, что найдется одноцветный параллелепипед с вершинами в целых точках.
3. Сформулируйте и докажите n -мерный аналог предыдущих задач.
4. Докажите, что аналог задачи E1 верен для раскраски целочисленных точек прямоугольника:
 - а) Размера $(k+1) \times (k^{(k+1)} + 1)$
 - б) Размера $(k+1) \times (kC_k^2 + 1)$
5. Сформулируйте и докажите аналоги предыдущей задачи для:
 - а) Трехмерной сетки
 - б) n -мерной сетки
6. Целочисленные точки квадрата $S \times S$ красятся в k цветов. Получите оценку на S при которой найдется одноцветный прямоугольник.
7. Назовем **l-решеткой** множество из l^2 точек, получаемых как пересечение l вертикальных прямых с l горизонтальными. Докажите, что при раскраске плоскости в k цветов найдется l -решетка.
8. Целочисленные точки квадрата $S \times S$ красятся в k цветов. Получите оценку на S при которой найдется l -решетка.

Плотностная версия

Определим понятие **плотности** для целочисленных точек на плоскости: скажем, что какой-либо цвет имеет плотность k , если последовательность

$$a_n = \frac{\text{Количество черных точек внутри квадрата } n \times n \text{ с центром в точке } (0; 0)}{n^2}$$

стремится к k .

9. Докажите, что при раскраске некоторых точек плоскости в черный цвет с плотностью 1% найдется черный прямоугольник.
10. Сформулируйте и докажите аналогичное условие для:
 - а) Пространства
 - б) n -мерного пространства
11. Докажите, что при раскраске некоторых точек плоскости в черный цвет с плотностью 1% найдется одноцветная l -решетка.

Игровая версия

12. Двое играют на бесконечной клетчатой плоскости в следующую игру. Первый ходит крестиком в свободную клетку, второй отвечает ему k нулями. Цель первого – прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат. Цель второго – помешать ему. Докажите, что первый сможет победить.
13. В условиях предыдущей задачи найдите минимальное число ходов необходимых первому для победы.
14. Решите 12 задачу для параллелепипеда в пространстве. Постарайтесь как можно лучше оценить число ходов.
15. Решите задачу 12 для l -решеток. Постарайтесь как можно лучше оценить число ходов.

Дополнительные задачи к серии А

8. Докажите в условиях задачи А1, что первый сможет построить прогрессию длины 5.

Дополнительные задачи к серии Б

7. Пусть квадрат $S \times S$ разбит на многоугольники. Некоторые из них покрашены в черный цвет (с границей) так, что суммарная площадь закрашенных многоугольников равна 1% от площади всего квадрата.
 - а) Докажите, что существует такое S , что внутри квадрата всегда можно найти прямоугольный треугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата, единичной площади с черными вершинами.
 - б)* Докажите, что существует такое S , что внутри квадрата всегда можно найти прямоугольник единичной площади с черными вершинами.