

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Зобова Александра Александровна

**ДИНАМИКА СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С
КОНТАКТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**

01.02.01 — Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Научный консультант:	Карапетян Александр Владиленович, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Болотник Николай Николаевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, главный научный сотрудник Иванов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической механики, НИУ Московский физико-технический институт, профессор Кобрин Александр Исаакович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт энергомашиностроения и механики, кафедра робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, НИУ МЭИ, профессор

Защита диссертации состоится «04» сентября 2020 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.10 Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

E-mail: dissovet.msu.01.10@math.msu.ru

С диссертацией, а также со сведениями о регистрации участия в защите в удаленном интерактивном режиме можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: <http://istina.msu.ru/dissertations/302130842/>

Автореферат разослан «29» июня 2020 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.01.10

доктор физико-математических наук, доц.

А.В. Влахова

Общая характеристика работы

Цель работы состоит в изучении динамики механических систем, в которых тела контактируют с опорной поверхностью, и качественном сравнении решений задач, получаемых при использовании различных моделей контакта. Изучаются как базовые задачи (о динамике шара и цилиндра), так и более сложные — о системах многих твердых тел (экипаж с омниколесами, дифференциальный привод, рояльное колесо). Рассмотрены модели, в которых область контактного взаимодействия имеет конечный, но малый по сравнению с характерным масштабом системы размер. Выявляются свойства таких моделей, их влияние на динамику систем, проводится сравнение с классическим сухим трением Кулона и реакциями неголономных связей. Кроме этого, изучается влияние массивности тел, контактирующих с опорой, на реализацию идеальных неголономных связей и динамику системы в целом (на примере омниэкипажа).

Актуальность. Моделирование динамики систем, в которые входят контактирующие друг с другом и с внешними объектами тела, необходимо для разработки конструкций новых машин, транспортных и робототехнических комплексов и систем управления для них. Для управления автономными роботами требуется моделирование динамической системы и окружающих предметов на бортовых компьютерах, что повышает требования к скорости и точности численного моделирования. Сложность процессов, происходящих в реальных системах в области контактного взаимодействия, обусловленная шероховатостью и анизотропностью поверхностей, повышением температуры, присутствием смазки и т.д., приводит к трудностям при создании одновременно точных и достаточно простых моделей трения. В связи с этим число расчетных схем и физических моделей, предлагаемых для описания контактного взаимодействия, очень велико. Сравнение свойств этих моделей, проявляющихся в задачах динамики систем твердых тел, определение областей их применимости, определение подходящих

аппроксимаций в разных областях фазового пространства является актуальной фундаментальной задачей теоретической механики.

Научная новизна и основные результаты. Все включенные в диссертацию результаты являются новыми. В работах соискателя с соавторами проведен качественный анализ динамики омниэкипажа в безынерционной модели и при учете массы роликов на колесе; разработана простая аналитическая модель прекращения проскальзывания при смене ролика в контакте. Аналитически исследована динамика абсолютно твердого однородного шара, катящегося с проскальзыванием вдоль пружинного основания, описываемого моделью Кельвина–Фойгта. При этом сила и момент сопротивления движению являются, во-первых, результатом действия инфинитезимальных сил сухого трения Кулона, а во-вторых, несимметричного распределения давлений в области контактного взаимодействия, которое зависит от скорости центра шара. Эта модель обобщена на случай контакта выпуклого тела с различными главными кривизнами в точке контакта. Показано, что в этом случае распределение давлений зависит также и от угловой скорости тела. При изучении динамики торможения цилиндра на вязкоупругом полупространстве впервые использованы решения задач вязкоупругости в квазистатической постановке в случае плоской деформации.

Теоретическая и практическая значимость. Проведенные исследования расширяют представления о влиянии на динамику систем трения, возникающего в области контактного взаимодействия выпуклых твердых тел. Используемые методы моделирования и исследования динамики механических систем могут применяться при решении других задач, например, задач управления колесными системами.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при проведении исследований в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной мате-

матики имени М.В. Келдыша РАН и научно-исследовательских центрах, занимающихся исследованием динамики систем твердых тел и проектированием колесных робототехнических систем.

Методология и методы. Результаты исследования обоснованы методами теоретической механики и качественными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В первой главе применяются теории систем с неголономными связями, устойчивости, удара. Во второй главе применяются методы построения асимптотических разложений по малому параметру, теория функций Ляпунова. В третьей главе, кроме уже указанных, используется метод исследования системы на основании бифуркационных диаграмм Смейла. В четвертой главе применяются численные методы решения алгебраических уравнений и численного интегрирования задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Положения, выносимые на защиту:

1. При движении по инерции экипажа с роликонесущими колесами, для которых принимается безынерционная модель, при любом расположении колес уравнения движения допускают линейный первый интеграл и интеграл энергии. Этих интегралов достаточно для сведения задачи об интегрировании уравнений движения к квадратурам и качественного анализа динамики системы.
2. В динамике экипажа с омниколесами с массивными роликами константы циклических первых интегралов, соответствующих свободным роликам омниколес, сохраняются при смене ролика в контакте. Вследствие этого порядок системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику экипажа на участках движения без смены контакта, понижается до $3 + N$, где N — число омниколес.

3. Движение однородного шара по горизонтальной вязко-упругой плоскости в общем случае состоит из четырех качественно различных этапов: первый — релаксация вертикальных колебаний, второй — уменьшение проскальзывания почти линейно по времени, третий — почти экспоненциальное уменьшение проскальзывания аналогично задаче с трением Контенсу, четвертый — движение в окрестности асимптотической траектории, когда скорость вращения убывает сначала почти линейно, а скорость центра масс — почти экспоненциально вплоть до полной остановки шара. Наибольшую длительность имеют второй и четвертый этапы.
4. Учет протяженности области взаимодействия при контакте выпуклого тела и основания приводит к естественной модели диссипативного момента, который влияет на качественную картину динамики механической системы. В частности, этот момент гарантирует возвращение волчка тип-топ в устойчивое положение равновесия. При его отсутствии финальным движением является либо перманентное вращение на ножке волчка, либо прецессионное движение.
5. Сочетание модели пружинного основания Кельвина–Фойгта и закона сухого трения Кулона формирует динамическую модель сухого трения при контакте с этим основанием абсолютно твердого выпуклого тела. В этой модели компоненты результирующей силы и момента зависят от скорости точки касания, угловой скорости твердого тела и глубины погружения в основание.
6. Учет сцепления материалов в области контактного взаимодействия в задаче о движении цилиндра,двигающегося со скольжением по полупространству с горизонтальной границей, приводит к следующим эффектам:

- экспоненциальному переходу к финальному движению в случае упругих материалов;
 - изменению типа финального движения в случае вязкоупругих материалов.
7. Финальным движением цилиндра при качении с проскальзыванием по деформируемому основанию является: качение без проскальзывания с постоянной скоростью центра масс (случай одинаковых упругих материалов цилиндра и полупространства); вращение вокруг горизонтальной оси с постоянной угловой скоростью, при этом центр масс неподвижен (случай абсолютно жесткого цилиндра и вязкоупругого полупространства); полная остановка (случай одинаковых вязкоупругих материалов).
 8. В случае одинаковых вязкоупругих материалов в задаче можно выделить быструю и медленную переменную, причем релаксация быстрой переменной при почти постоянной медленной соответствует второму этапу торможения шара на вязкоупругой плоскости (положение 3), а последующее убывание медленной переменной – четвертому этапу.

Достоверность и обоснованность. Все положения, выносимые на защиту, обоснованы строгими математическими методами. Результаты, полученные с помощью численного моделирования, верифицированы аналитическими методами, например, методом малого параметра.

Апробация. Результаты прошли апробацию на ряде международных и всероссийских конференций:

1. Международный семинар 53rd Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, Technische Universität Ilmenau, 2008
2. Международная научная конференция по механике «Пятые Поляховские чтения», 2009

3. Международная конференция IUTAM Symposium on Dynamics Modeling and Interaction Control in Virtual and Real Environments, 2010
4. Международная конференция по динамике систем твердых тел ECCOMAS Thematic Conference Multibody Dynamics, 2015
5. Международный семинар по моделям качения в динамике систем твердых тел EUROMECH Colloquium 578 Rolling Contact Mechanics for Multibody System Dynamics, 2017
6. Международная конференция по динамике систем твердых тел The 5th Joint International Conference on Multibody System Dynamics, 2018
7. Международная конференция по динамике систем твердых тел ECCOMAS Multibody Dynamics, 2019
8. XI, XII Всероссийские съезды по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, Уфа, 2015, 2019)
9. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», 2017
10. Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко, 2019
11. Всероссийская конференция молодых учёных-механиков, 2017
12. Научная конференция «Ломоносовские чтения», 2008 – 2019

Результаты также были представлены соискателем на следующих научных семинарах:

1. Семинар по аналитической механике и теории устойчивости имени В.В. Румянцева под руководством профессора А.В. Карапетяна (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова)
2. Семинар департамента технической механики факультета инженерной механики, Технический университет Илмменау, Германия (Seminar of the Department of Technical Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, TU Ilmenau, Germany).
3. Семинар «Гамильтоновы системы и статистическая механика» под руководством академика В.В. Козлова, академика Д.В. Трещева и чл.-корр. С.В. Болотина (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова)
4. Семинар по теории управления и динамике систем под руководством академика Ф.Л. Черноусько (Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН)
5. Семинар имени А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению под руководством профессора В.В. Александрова (механико-математический факультет, Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова)

Исследования были проведены в рамках поддержанных грантами проектов, в которых соискатель выступала в роли руководителя (грант МК-698.2010.1, РФФИ 12-01-31059) или основного исполнителя (гранты РФФИ, 2003 – 2020 годы).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 30 печатных работах, 16 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WebOfScience, Scopus и RSCI, 3 статьи опубликованы в журналах, входящих в список ВАК, 4 статьи опубликованы в сборниках трудов международных конференций, включенных в международные базы Scopus либо Web Of Science.

Личный вклад. Диссертация подготовлена на основе работ, опубликованных как лично соискателем, так и в соавторстве. Первая глава подготовлена на основе статей, опубликованных в соавторстве с Я.В. Татариновым, с которым обсуждались постановки задач и полученные результаты, а также статей в соавторстве с К.В. Герасимовым и Г.Н. Моисеевым, которые были подготовлены по результатам диссертационной и курсовых работ. Постановки задач, методы исследования и анализ результатов принадлежат соискателю. Вторая глава подготовлена на основе публикации в соавторстве с Д.В. Трещевым, который предложил способ построения модели контакта шара и вязкоупругого основания, постановки рассматриваемых динамических задач и участвовал в обсуждении полученных результатов. Третья глава подготовлена на основе публикаций, опубликованных соискателем лично и в соавторстве с научным консультантом А.В. Карапетяном, которому принадлежит метод качественного исследования динамики на основе бифуркационных диаграмм Смейла. Все результаты (как аналитические, так численные расчеты) и их анализ принадлежат соискателю. Способ обобщения модели трения второй главы на случай контакта произвольного выпуклого тела и вязкоупругого основания и постановки динамических задач, рассмотренных в третьей главе, предложены соискателем. Четвертая глава написана на основании статей, опубликованных совместно с И.Г. Горячевой, которая участвовала в обсуждении постановок динамических задач и влиянии свойств решений квазистатических контактных задач на динамику системы. Все аналитические и численные результаты исследования динамических задач, рассмотренных в четвертой главе, принадлежат соискателю лично. Все положения, выносимые на защиту, и основные результаты работы получены лично соискателем.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации 258 страниц, рисунков 62. Список литературы содержит 163 наименования.

Содержание работы

Во **введении** дана общая характеристика работы и ее цель, обосновывается актуальность исследования, описываются методы решения поставленных задач. Указываются сведения об апробации результатов и их публикации. Приведен подробный обзор литературы по моделям трения, используемых при решении задач динамики систем твердых тел (феноменологические модели трения качения, трение Контенсу–Эрисмана–Журавлева и его модификации, модели, используемые при численном моделировании систем твердых тел и др.).

В **первой главе** рассматривается динамика маневренного экипажа, оснащенного роликонесущими колесами. Экипаж движется по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. На ободе каждого роликонесущего колеса укреплены ролики, которыми оно может опираться на несущую поверхность. Ролик может свободно вращаться относительно некоторой неподвижной в диске колеса оси. Для колес “omni-wheel” ось вращения ролика является касательной к ободу диска, для колес “mecanum” она повернута на угол 45° . Колесо такого типа обладает следующим свойством: его центр может двигаться по прямой под углом к плоскости диска (при этом опорный ролик вращается, а диск колеса нет).

Изучена динамика экипажа с безынерционной моделью роликонесущего колеса: колесо представляет собой абсолютно твердый диск, наинизшая точка которого проскальзывает без трения в некотором выделенном направлении. Полностью исследована динамика экипажа при движении по инерции. Найдены два первых интеграла — энергии и линейный по псевдоскоростям. Исследована устойчивость управляемых стационарных движений при постоянных управлениях.

Проведено уточнение безынерционной модели: омниколесо рассматривается как система твердых тел — диск колеса и массивные ролики на его ободе. Такая модель усложняет исследование системы, но позволяет точнее моделировать ее динамику и дать оценку погрешностей, возникающих при использо-

вании безынерционной модели омниколеса. Описание контакта проводится в рамках неголономной модели: предполагается, что контактирующий ролик не скользит по опорной плоскости. Показано, что масса ролика качественно влияет на динамику системы — при учете массы всего лишь одного ролика на переднем колесе меняется вид финального движения экипажа, хотя условия устойчивости прямолинейных движений остаются прежними.

Рассматривается моделирование симметричного экипажа с массивными роликами на каждом омниколесе. Проведен анализ уравнений движения: найдены дополнительные члены, возникающие по сравнению с безынерционным случаем. Показано, что линейный интеграл разрушается и становится медленно меняющейся функцией времени при малом моменте инерции ролика. Предложена модель прекращения скольжения входящего в контакт с опорной плоскостью ролика. Предполагается, что сила трения в контакте настолько велика, что скольжение прекращается почти мгновенно, при этом псевдоскорости изменяются согласно классической теории удара. Проведено понижение порядка системы по Раусу: показано, что замкнутая система уравнений движения состоит из трех динамических уравнений, описывающих изменение скорости центра масс и угловой скорости платформы, и N кинематических соотношений, задающих скорости поворота колес. Динамические уравнения включают в качестве параметров константы циклических первых интегралов свободных роликов.

Показано качественное совпадение решений при численном моделировании движения рассматриваемой конструкции омниэкипажа для трех моделей контакта: (а) описанный выше идеальный неголономный контакт “с ударами”, (б) модель вязкого трения с большим коэффициентом вязкости и (в) модель сухого трения с насыщением, регуляризованная линейным участком в окрестности нулевой скорости. Первая модель обладает наименьшей размерностью фазового пространства, поэтому она наиболее удобна для моделирования и анализа

подобных систем.

Во второй главе предложена модель взаимодействия абсолютно твердого шара с деформируемой плоскостью. Во время движения шар продавливает плоскость, при этом возникает область контактного взаимодействия. Предполагается, что в каждой инфинитезимальной области пятна контакта возникают силы трех типов:

1. Сила упругости, пропорциональная нормальной деформации опорной плоскости.
2. Сила вязкого трения, пропорциональная скорости нормальной деформации опорной плоскости.
3. Сила сухого трения, определяемая законом Кулона.

Таким образом, опорная плоскость представляет собой среду Кельвина-Фойгта, в которой также имеются силы сухого трения. Введем необходимые для формулировки результатов обозначения. Опорная плоскость Oxy моделируется как совокупность вертикальных одномерных элементов, которые не взаимодействуют друг с другом. Для вычисления плотности вертикальной силы $f_z e_z$, с которой каждый элемент действует на помещенное на плоскость тело, используется модель Кельвина-Фойгта:

$$f_z = \begin{cases} -kz - \nu \dot{z}, & \text{если } -kz - \nu \dot{z} > 0, \\ 0, & \text{если } -kz - \nu \dot{z} \leq 0, \end{cases} \quad k > 0, \nu > 0.$$

Здесь z — координата верхней точки элемента плоскости в точке P , $\dot{z}$ — его скорость. Предположения о вертикальности элементов опорной плоскости и о малости области контактного взаимодействия влекут следующую зависимость плотности f_z при контакте абсолютно твердого шара радиуса a :

$$f_z = \frac{ka}{2}(\theta_0^2 - \theta^2) + \nu v \theta \cos \beta - \nu v_z. \quad (1)$$

Здесь θ и β — сферические координаты точек в области контакта: угол $0 \leq \theta \leq \theta_0$ отсчитывается от вертикали, проходящей через центр шара, до радиус-вектора точки, угол $\beta \bmod 2\pi$ отсчитывается от направления e_1 горизонтальной составляющей

скорости центра шара $v\mathbf{e}_1$ до проекции радиуса-вектора точки в области контакта на плоскость Oxy ; угол θ_0 характеризует глубину погружения шара, так что вертикальная координата центра C шара имеет вид $z_C = a \cos \theta_0$; $v_z \mathbf{e}_z$ — вертикальная составляющая скорости центра шара. Отметим, что взаимодействие тела и опорной плоскости происходит только в тех точках, где $f_z \geq 0$: для множества I таких точек используется название “пятно контакта”. Таким образом, форма пятна контакта существенно зависит от скорости центра масс шара, то есть распределение давлений внутри области контакта является динамическим.

В элементе $d\Sigma$ области контакта действует сила трения, описываемая законом Кулона. Ее плотность задается соотношением $-\lambda n \mathbf{v}^\parallel / |\mathbf{v}^\parallel|$, где $\lambda > 0$ — коэффициент трения, n — плотность силы, направленной по нормали $\mathbf{n}$ к поверхности тела, $\mathbf{v}^\parallel$ — проекция скорости точки тела на касательную к телу плоскость. Далее, плотность нормальной реакции n и плотность горизонтальной силы, действующей на тело, вычисляется из равенства сил, спроектированного на некоторый ортогональный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z$ (одинаковый для всех точек в области контактного взаимодействия):

$$f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_z \mathbf{e}_z = n \mathbf{n} - \lambda n \mathbf{v}^\parallel / |\mathbf{v}^\parallel|.$$

Поскольку плотность вертикальной силы f_z , единичный вектор $\mathbf{n}$ и скорость $\mathbf{v}^\parallel$ являются известными функциями высоты центра шара, вертикальной и горизонтальной составляющих ее скорости, угловой скорости шара, то это равенство позволяет вычислить плотности горизонтальных сил f_1, f_2 . Результирующая сила и момент силы относительно центра области контакта вычисляется с помощью интегрирования этих плот-

ностей по пятну контакта:

$$F_z = \iint_I f_z d\Sigma = a^2 \iint_I f_z \theta d\theta d\beta,$$

$$F_1 = \iint_I f_1 d\Sigma, \quad F_2 = \iint_I f_2 d\Sigma,$$

$$\mathbf{M} = a \iint_I [(\theta \cos \beta \mathbf{e}_1 + \theta \sin \beta \mathbf{e}_2) \times (f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_z \mathbf{e}_z)] d\Sigma.$$

Введены безразмерные параметры задачи:

1. малый параметр $\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{mg}{ka^3}} \ll 1$, которому пропорциональна глубина погружения шара массы m в горизонтальную опорную плоскость в равновесии под действием силы тяжести (g — ускорение свободного падения);
2. параметр $\varkappa = \frac{a^{3/2} \nu^3 g^{1/2}}{mk^2}$, задающий соотношение между коэффициентом жесткости k и вязкости ν . Предполагается, что параметр $\varkappa$ порядка единицы. При этом параметр $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon \varkappa)^{1/3} \ll 1$

Изучен процесс прямого удара шара об опорную плоскость. Вычислен коэффициент восстановления при ударе: вследствие неидеальной упругости материала он существенно зависит от скорости до удара; аналитически вычислены асимптотики этой функции при стремлении скорости до удара к нулю и бесконечности.

Проведено аналитическое исследование качения с проскальзыванием однородного шара на горизонтальной вязкоупругой плоскости при некоторых довольно общих предположениях на начальные условия. Исследование основывается на последовательных аппроксимациях зависимости силы и момента взаимодействия, принимающих во внимание соотношения величин

фазовых переменных, а именно, скорости скольжения, скорости центра масс и компонент угловой скорости. Движение шара разбито на четыре качественно различных этапа, для каждого из которых получена оценка его длительности в безразмерном времени $\tau = \sqrt{g/a} t$, достаточно простые аппроксимации силы и момента взаимодействия, и описан процесс изменения фазовых переменных.

На первом этапе движения, длительность которого $T_I = \mathcal{O}(\varepsilon \hat{\varepsilon}^{-1} |\ln \hat{\varepsilon}|)$ мала, происходит релаксация вертикальных колебаний центра шара. При этом безразмерная глубина погружения шара $s = \theta_0^2/2$ приходит в $(\hat{\varepsilon}\varepsilon)^2$ -окрестность значения $\varepsilon^2 \rho_0^2/2$, где $\rho_0 = \sqrt[4]{4/\pi}$, и остается в этой окрестности в течение всего дальнейшего движения.

Во время второго этапа движения, длящегося в течение промежутка времени $T_{II} \sim 1$, шар движется по плоскости с проскальзыванием. Это движение с точностью до $\mathcal{O}(\hat{\varepsilon})$ описывается классической задачей о движении однородного шара по плоскости с силой трения Кулона. Скорость проскальзывания приблизительно линейно убывает с величины порядка единицы до $\mathcal{O}(\hat{\varepsilon}^2)$. Центр масс шара движется по параболе. Схематические зависимости скорости проскальзывания v_s , угловой скорости верчения ω_z , горизонтальных компонент угловой скорости ω_h и скорости центра масс v на разных этапах движения представлены на рис. 1.

На третьем этапе движения скорость проскальзывания уменьшается до величины порядка $\varepsilon \hat{\varepsilon}$ за малое время $T_{III} = \mathcal{O}(\varepsilon \hat{\varepsilon}^{-1}) + \mathcal{O}(\varepsilon |\ln \hat{\varepsilon}|)$. Угловая скорость и скорость центра масс шара в течение этого времени изменяются незначительно. Сила трения аналогична силе трения Контенсу.

Длительность четвертого этапа $T_{IV} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1} \hat{\varepsilon}^{-1} |\ln \hat{\varepsilon}|)$ наибольшая. На этом этапе скорость проскальзывания остается порядка $\mathcal{O}(\varepsilon \hat{\varepsilon})$ и начинает проявляться динамическое распределение давлений в пятне контакта — боковая (перпендикулярная скорости проскальзывания) компонента силы трения становится сравнима с продольной компонентой. В фазовом

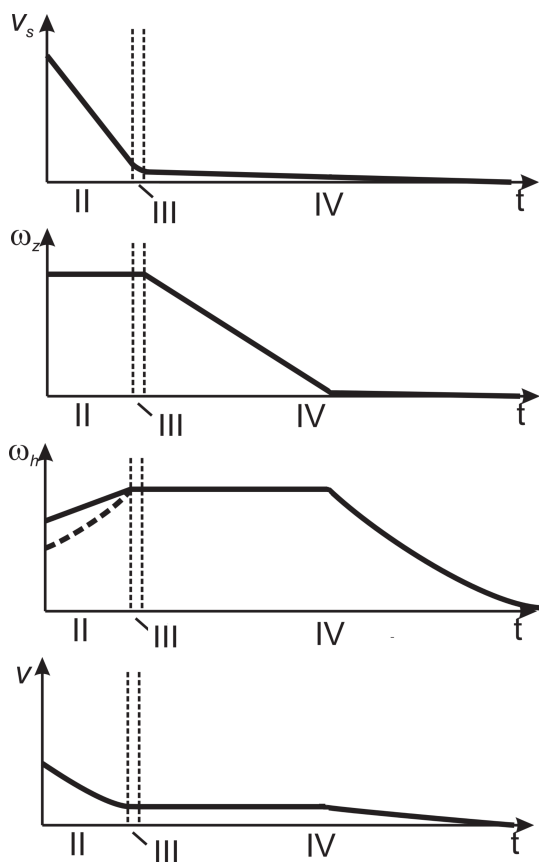


Рис. 1. Схематическая зависимость основных кинематических характеристик от времени

пространстве за время порядка $\mathcal{O}(\varepsilon |\ln \hat{\varepsilon}|)$ происходит выход в окрестность асимптотической траектории, на которой скорость проскальзывания в направлении скорости центра масс порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ и пропорциональна величине скорости центра масс, а в перпендикулярном направлении — порядка $\mathcal{O}(\varepsilon \hat{\varepsilon})$ и пропорциональна произведению скорости центра масс на угловую скорость верчения; далее изображающая точка остается в окрестности этой траектории вплоть до остановки шара. На асимптотической траектории угловая скорость верчения за время порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ убывает почти линейно до величины порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Далее стремление ω_z к нулю замедляется, так что ее величина остается пропорциональна скорости центра масс с коэффициентом порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Скорость центра масс убывает почти экспоненциально с малым показателем порядка $\mathcal{O}(\varepsilon \hat{\varepsilon})$ до остановки шара.

Таким образом, если исключить из рассмотрения малосущественные по причине своей кратковременности этапы I и III и начальный переходный отрезок этапа IV, то движение шара по горизонтальной плоскости с точностью до малых поправок описывается двумя классическими моделями. На этапе II это движение шара по недеформируемой горизонтальной плоскости под действием кулонова трения, приложенного в точке контакта. На этапе IV после быстрого выхода в окрестность асимптотической траектории это неголономное качение без проскальзывания при наличии малых моментов качения M_2 (направленного противоположно горизонтальной составляющей угловой скорости шара ω_h) и верчения M_z (направленного противоположно вертикальной компоненте угловой скорости ω_z), задаваемых соотношениями

$$\frac{M_2}{mga} = -\varepsilon \hat{\varepsilon} \omega_h \sqrt{\frac{a}{g}}, \quad \frac{M_z}{mga} = -\varepsilon \lambda \frac{8\rho_0}{15} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{5\pi\rho_0^2} \left(\frac{v}{a\omega_z} \right)^2 \right).$$

В третьей главе изучается влияние ненулевой площади области контактного взаимодействия, динамического перераспределения давлений и сил сухого трения Кулона на дина-

мику систем. Сначала рассматривается динамика волчка тип-топ. Такой волчок (также называемый “китайским” волчком и волчком Томсона) состоит из шарового сегмента большого радиуса и цилиндрической ножки на плоской части сегмента. Положение равновесия волчка с опорой на сегмент большого радиуса (ножкой вверх) устойчиво, но если быстро закрутить его в этом положении, то происходит быстрый переворот волчка на ножку; затем скорость вращения уменьшается и волчок постепенно возвращается к опоре на шаровой сегмент. Рассматривается движение волчка на неподвижной горизонтальной плоскости: помимо силы тяжести, на волчок в области контакта действует силы со стороны опорной плоскости. Волчок моделируется либо динамически симметричным шаром со смещенным центром масс, либо динамически симметричным телом, ограниченным двумя сферическими сегментами (рис. 2). Если момент $\mathbf{M}$ сил взаимодействия относительно точки ка-

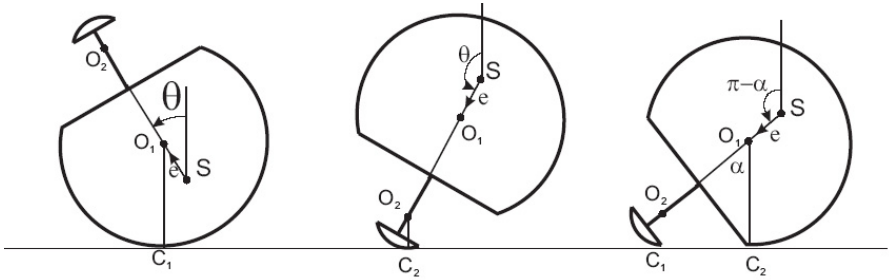


Рис. 2. Двусферический волчок: обозначения

сания (т.е. его наинизшей точки) равен нулю, то уравнения движения допускают первый интеграл — интеграл Джелетта:

$$K = -\frac{1}{r}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = k = \text{const.}$$

Здесь r — радиус шара, $\mathbf{J}$ — оператор инерции относительно центра масс S , $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость шара, $\mathbf{r} = ce - r\gamma$ —

радиус-вектор $\mathbf{SC}$ точки контакта, s — расстояние от центра шара до центра масс, $\mathbf{e}$ — единичный орт оси волчка, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор восходящей вертикали. В случае двусферического волчка символы s , r , $\mathbf{r}$ имеют нижний индекс i , соответствующий сферическому сегменту ($i = 1$ — сегмент большего радиуса, соответствующий основанию, $i = 2$ — сегмент меньшего радиуса, т.е. ножка волчка). Интегралы Джеллета различны для областей фазового пространства, соответствующих опоре на основание и ножку. При переходе из одной области в другую константы интегралов не сохраняются.

Существование этого интеграла позволяет проводить качественное исследование динамики системы с помощью бифуркационных диаграмм Смейла. Так как полная механическая энергия волчка

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$$

— невозрастающая функция времени, то согласно модифицированной теории Рауса,¹ стационарные движения волчка соответствуют критическим точкам эффективного потенциала, который определяется как минимум энергии на фиксированном уровне интеграла Джеллета:

$$V = \min_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}} H(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})|_{K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})=k} = V(\boldsymbol{\gamma}, k).$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость центра масс волчка.

Существуют три типа стационарных движений волчка: перманентные вращения с вертикальной осью волчка — с наименьшим расположением центра масс $\theta = 0$ и с наивысшим $\theta = \pi$ — и прецессионные движения волчка $\theta = \text{const}$. На всех стационарных движениях волчка скорость скольжения $\mathbf{u}$ равна нулю, поэтому энергия при $\mathbf{M} = 0$ сохраняется. Поскольку при всех рассматриваемых в работе моделях трения $(\mathbf{F}, \mathbf{u}) < 0$ при $\mathbf{u} \neq 0$, то на всех других движениях волчка энергия убывает.

¹А. В. Карапетян. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998, 168 с.

Нестационарные движения волчка изображаются движением точки по плоскости (p^2, h) . Величина $p^2 = \frac{1}{J_3 m g c} k^2$, пропорциональная константе интеграла Джелетта, остается постоянной при $\mathbf{M} = 0$ и медленно меняется при $\mathbf{M} \neq 0$ (предполагается, что мощность момента $\mathbf{M}$ много меньше мощности силы трения: $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) \ll (\mathbf{F}, \mathbf{u})$ при $\mathbf{u} \neq 0$). Переменная h — это значение полной механической энергии. Множества стационарных движений на этой плоскости (диаграммы Смейла) представляют собой прямые Σ_+ ($\theta = 0$), Σ_- ($\theta = \pi$) для перманентных движений и кривую Σ прецессионных движений. Если $\mathbf{M} = 0$, точки плоскости (p^2, h) под действием фазового потока двигаются по параллельным прямым вниз $p^2 = \text{const}$, $\dot{h} < 0$ и при $t \rightarrow \infty$ стремятся к некоторой неподвижной точке σ_0 на одном из множеств $\Sigma_{\pm}$, Σ , являющейся устойчивым стационарным движением при заданном значении p^2 . Если $\mathbf{M} \neq 0$, то энергия быстро убывает, так что изображающая точка приходит в окрестность точки σ_0 , при этом p^2 меняется мало. Далее вследствие действия момента $\mathbf{M}$ происходит медленный дрейф изображающей точки вдоль кривых Σ_- , Σ , Σ_+ .

Движение с переворотами, описанное выше, на этой плоскости представляет собой следующую кривую (рис. 3, слева). В начальный момент скорость вращения и, следовательно, величина p^2 достаточно велика и соответствует неустойчивым движениям на основании при $\theta = 0$, значение полной механической энергии h превышает соответствующее значение на Σ_+ . Далее энергия h быстро убывает, при этом кривая пересекает прямую Σ_+ (т.к. перманентные вращения неустойчивы) и двигается к прямой Σ_- . Этот участок, обозначенный P_1 , соответствует перевороту волчка с основания на ножку. Далее, пока точка находится в окрестности Σ_- волчок продолжает вращаться на ножке с уменьшающейся скоростью вращения, величина p^2 убывает (участок P_2). При некотором значении p^2 вращения становятся неустойчивыми и изображающая точка начинает двигаться вдоль кривой устойчивых стационарных движений Σ (участок P_3). Таким образом волчок возвращает-

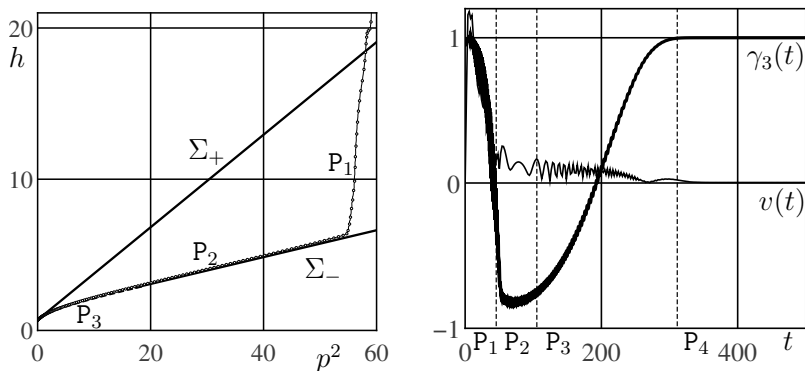


Рис. 3. Переворот волчка с основания на ножку и возвращение в положение равновесия. Слева: прямые перманентных вращений Σ_- , Σ_+ и нестационарное движение (тонкая линия) на плоскости (p^2, h) . Справа: нестационарное движение: скорость центра $v(t)$ – тонкая линия, наклон оси $\gamma_3(t)$ – жирная линия.

ся на основание и продолжает вращение при $\theta \approx 0$ вплоть до полной остановки (участок P_4).

Проведено сравнение динамики при различных моделях трения: сухое трение, трение Контенсу, модель вязкоупругой плоскости с сухим трением. Показано, что классическая модель трения Кулона не позволяет описать переворот волчка тип-топ с ножки на основание и его возвращение в положение равновесия. Модели, учитывающие протяженность области контактного взаимодействия (трение Контенсу, двухпараметрическая модель трения А.В. Карапетяна, модель второй главы), предсказывают второй переворот. Результаты численного интегрирования совпадают с качественным анализом, который проведен с помощью диаграмм Смейла. На рис. 3 представлены траектория изображающей точки на плоскости (p^2, h) при нестационарном движении волчка и зависимости скорости центра масс $v(t)$ и наклон оси волчка $\gamma_3(t) = (\gamma, e)$ от времени.

Далее модель контакта шара и вязкоупругой плоскости второй главы распространяется на случай произвольного выпуклого абсолютно твердого тела. Поверхность тела в окрестности точки касания M аппроксимируется эллиптическим параболоидом, которое в осях $M\xi\eta z$, жестко связанных с телом, задается уравнением

$$\zeta = \frac{A\xi^2 + B\eta^2}{2}.$$

Параметры $A = 1/(2R_1) > 0$, $B = 1/(2R_2) > 0$ зависят от формы поверхности в точке касания M : R_1 и R_2 — главные кривизны поверхности тела. Используя те же предположения, что и в главе 2, получим, что плотность вертикальной силы в точке плоскости с координатами ξ и η имеет вид:

$$f_z = -k(z + \zeta(\xi, \eta)) - \nu[v_z - \omega_\eta\xi + \omega_\xi\eta + A\xi(-v_\xi + \omega_z\eta - \omega_\eta\zeta(\xi, \eta)) + B\eta(-v_\eta - \omega_z\xi + \omega_\xi\zeta(\xi, \eta))].$$

Здесь $z < 0$ — координата точки касания M , (v_ξ, v_η, v_z) и $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_z)$ — проекции скорости точки M и угловой скорости тела на оси $M\xi\eta z$. Полученное распределение с точностью до $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ совпадает с распределением (1) при $A = B$. В отличие от случая контакта шара и плоскости, это распределение зависит от всех компонент угловой скорости тела.

Рассмотрены свойства предложенной модели на некоторых базовых движениях (мгновенные скольжение, верчение, качение и их комбинации). Приведем здесь случай комбинации скольжения и верчения: пусть мгновенное движение параболоида таково, что скорость точки касания направлена вдоль главной оси параболоида $\mathbf{v}_M = u\mathbf{e}_\xi$, угловая скорость направлена по нормали к опорной плоскости $\boldsymbol{\omega} = \omega_z\mathbf{e}_z$. Графики компонент результирующей силы $\mathbf{F} = F_\xi\mathbf{e}_\xi + F_\eta\mathbf{e}_\eta$ и момента трения относительно точки M показаны на рис. 4. Отметим, что трение скольжения F_ξ , боковое трение F_η и трение качения M_η не монотонно зависят от скорости скольжения u : абсолютное значение этих функций возрастает до некоторого максимума, после чего убывает.

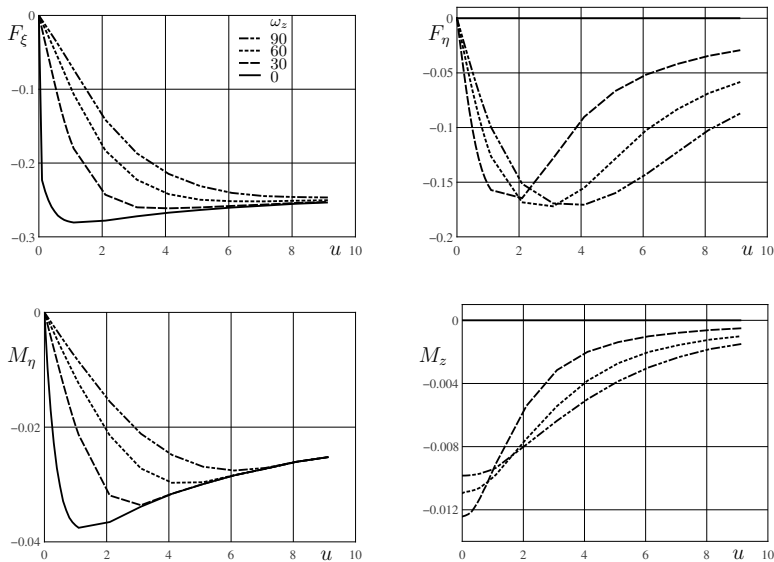


Рис. 4. Трение скольжения F_ξ , боковое трение F_η , трение качения M_η и трение верчения M_z в случае комбинации скольжения и верчения. Скорость верчения принимает значения $\omega_z = 0$ (сплошная линия); 30 (пунктирная); 60 (штриховая); 90 (штрих-пунктирная линии).

В качестве примера тела с различными кривизнами в точке касания рассматривается эллипсоид вращения. Если дополнительно потребовать, чтобы при движении эллипсоида его экваториальное сечение остается перпендикулярным опорной плоскости, то, несмотря на смену точки контакта, главные кривизны в ней остаются постоянными. Таким образом можно моделировать абсолютно твердое колесо мобильного экипажа.

Рассматривается динамика колеса в невесомой вилке (ро-яльного колеса), к которой приложена постоянная внешняя сила $T\mathbf{e}_x$ (рис. 5, слева). Рассмотрены две модели взаимодействия абсолютно твердого колеса с горизонтальной плоско-

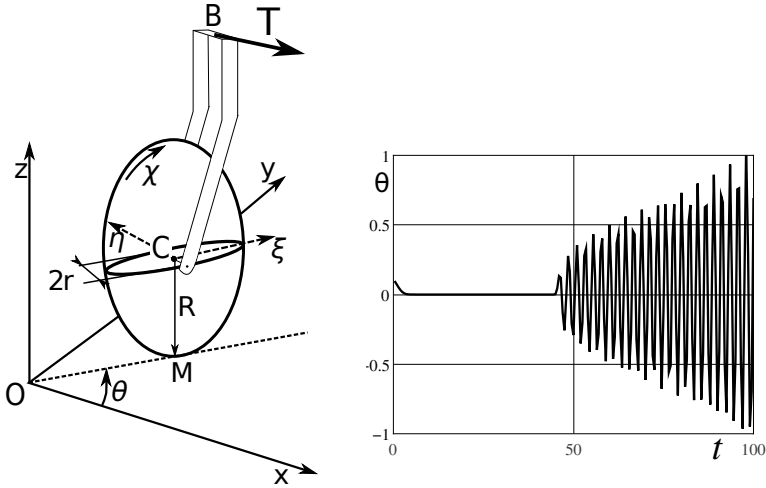


Рис. 5. Рояльное колесо. Возникновение колебаний угла курса θ колеса при разгоне.

стью: движение колеса без проскальзывания и модель вязкоупругого основания с сухим трением, описанная выше. В первом случае реакция связи вычисляется с помощью уравнений движения и уравнений неголономных связей, выражающих отсутствие проскальзывания. Построен фазовый портрет системы на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$, где θ — угол курса, т.е. угол между неподвижной осью Ox и средней плоскостью колеса. Указаны области отсутствия проскальзывания в предположении, что связь реализуется сухим трением покоя Кулона. Прямолinéйные движения колеса с центром масс позади точки приложения внешней силы устойчивы (курсовой угол $\theta = 0$), причем проскальзывание не возникает при любой скорости колеса. В случае идеальной связи для любого сколь угодно малого начального возмущения по курсовому углу при достижении некоторой скорости возникает проскальзывание колеса. Если колесо не проскальзывает и на него действует вязкое трение качения и верчения (случай неидеальной связи)

$$M_{\eta} = -c_1 \dot{\chi}, \quad M_z = -c_2 \dot{\theta}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0,$$

то указанное прямолинейное движение $\theta = 0$ является асимптотически устойчивым. Для малых значений внешней силы $T < fmg$ (f — коэффициент трения покоя) существует окрестность движения $\theta = 0$, при старте из которой проскальзывания не возникает, следовательно, не возникают и нарастающие со временем колебания колеса относительно вертикальной оси.

Далее рассматривается динамика колеса в вилке при использовании модели вязкоупругой плоскости (колесо моделируется сжатым эллипсоидом вращения, экваториальная плоскость которого остается вертикальной во все время движения). Численное интегрирование уравнений движения выявило возникновение нарастающих колебаний колеса относительно вертикальной оси, напоминающее явление шимми (рис. 5, справа): это связано с зависимостью момента верчения от поперечной составляющей скорости скольжения. Показано, что существуют стационарные движения, параметры которых зависят от скорости центра колеса. Отмечено, что на этих движениях в пятне контакта происходит смена направления проскальзывания точек колеса относительно элементов плоскости. При движении деформируемых тел в таком случае в контакте возникает область сцепления материалов, которая существенно влияет на результирующую силу взаимодействия и, следовательно, на динамику системы. Влиянию сцепления материалов на динамику тела посвящена четвертая глава работы.

В **четвертой главе** рассматривается плоскопараллельное движение бесконечного цилиндра радиуса R с массой m и моментом инерции J на единицу длины, катящегося с проскальзыванием по деформируемому полупространству с горизонтальной границей (рис. 6 слева). Пусть $O\xi\eta z$ — неподвижная система отсчета, система $C'xyz$ движется поступательно, ось $C'z$ является вертикальной проекцией оси цилиндра на границу опорного полупространства. Ось Cz цилиндра движется со скоростью $V\mathbf{e}_\xi$, цилиндр вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{e}_z$. Предполагается, что скорости V и ωR малы по сравнению со скоростями распространения возмущений в деформи-

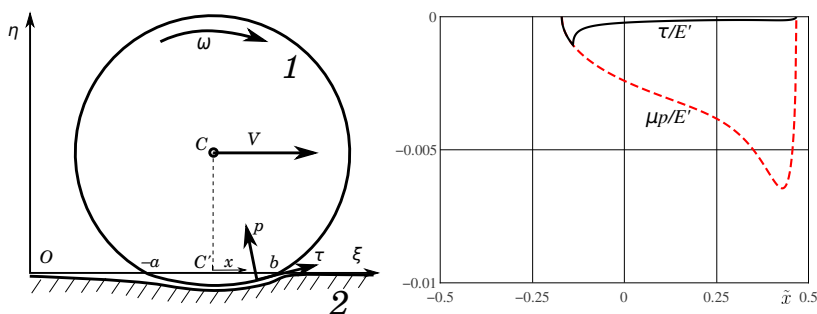


Рис. 6. Торможение цилиндра, катящегося с проскальзыванием по вязкоупругому полупространству. Распределения, пропорциональные касательным $\tau(\tilde{x})$ и нормальным напряжениям $p(\tilde{x})$, в области контактного взаимодействия $x = l_0 \tilde{x} \in [-a, b]$ при частичном сцеплении материалов.

руемой среде, что позволяет использовать аналитические решения квазистатических задач упругости и вязкоупругости.² Область контактного взаимодействия представляет собой полосу $x \in [-a, b]$, в которой происходит скольжение или сцепление точек контактирующих тел, при этом связь касательных $\tau(x)$ и нормальных напряжений $p(x)$ описывается законом Амонтона–Кулона: $|\tau(x)| = \mu p(x)$ при относительном проскальзывании частиц материалов и $|\tau(x)| < \mu p(x)$ при их сцеплении (рис. 6 справа). Цилиндр и опорное полупространство представляют собой деформируемую среду, в которой задаются линейные соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций и их производными по времени. Важное отличие этой постановки от модели вязкоупругой плоскости второй и третьей глав заключается в учете, во-первых, взаимодействия соседних элементов материала, во-вторых, возможного сцепления материалов контактирующих тел. Это влечет качественные отличия силы и момента трения от класси-

²И. Г. Горячева. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001, 478 с.

ческих и феноменологических моделей при малом относительном проскальзывании тел.

Рассматриваются три динамические задачи: задача о качении с проскальзыванием упругого цилиндра по упругому полупространству из того же материала с сухим трением; задача о движении абсолютно твердого цилиндра по вязкоупругому полупространству в отсутствие касательных напряжений; задача о движении вязкоупругого цилиндра по полупространству из того же материала с сухим трением. Во всех трех случаях, помимо силы и момента контактного взаимодействия, на цилиндр действует только сила тяжести. Несмотря на неявное задание параметров контактного взаимодействия, удастся провести качественный анализ общего решения задачи.

Вводятся безразмерные параметры задачи:

$$\alpha = \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} \geq 1, \quad \kappa = \frac{R}{l_0} = \sqrt{\frac{E'R}{32P}} \gg 1 \quad \left(E' = \frac{\pi E}{1 - \nu^2} \right).$$

Параметр α задает отношение времени последействия T_ε к времени релаксации T_σ и равен единице для упругих материалов; параметр κ представляет собой отношение радиуса цилиндра к длине участка контактного взаимодействия в покое $l_0 = \sqrt{32RP/E'}$ и зависит от модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν материала и веса цилиндра $P = mg$ на единицу длины. Параметр

$$\gamma = \frac{gT_\varepsilon^2}{R}$$

задает соотношение масштаба времени, задаваемого ускорением свободного падения g , радиусом цилиндра R и времени последействия T_ε .

Уравнения движения цилиндра имеют простой вид:

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{t}} = \gamma \left(\tilde{Q} - \frac{\tilde{M}}{2} \right), \quad j \frac{d\tilde{\omega}}{d\tilde{t}} = -\gamma \left(\tilde{Q} + \frac{\tilde{M}}{2} \right). \quad (2)$$

Здесь используются безразмерные величины

$$\tilde{t} = t/T_\varepsilon, \quad \tilde{V} = T_\varepsilon V/R, \quad \tilde{\omega} = T_\varepsilon \omega, \quad j = J/(mR^2) = 1/2.$$

Функции $\tilde{Q} = \tilde{Q}(\tilde{V}, \delta)$ и $\tilde{M} = \tilde{M}(\tilde{V})$ являются результатом интегрирования обезразмеренных касательных напряжений $\tau(x)$ и момента нормальных напряжений $\tilde{x} p(\tilde{x})$ по области контактного взаимодействия $\tilde{x} \in [-a/l_0, b/l_0]$. Таким образом, система (2) замкнута.

В случае упругих материалов ($\alpha = 1$) область контактного взаимодействия и распределение давлений $p(\tilde{x})$ симметричны относительно $C'z$. В этом случае $\tilde{M} = 0$, а величина силы трения зависит только от относительного проскальзывания $\delta = (\tilde{\omega} - \tilde{V})/\tilde{V}$:

$$\tilde{Q} = \begin{cases} \mu \operatorname{sign}(\tilde{\omega} - \tilde{V}), & |\delta| \geq \frac{\mu}{2\kappa}, \\ \mu \operatorname{sign}(\tilde{\omega} - \tilde{V}) \frac{4\kappa|\delta|}{\mu} \left(1 - \frac{\kappa|\delta|}{\mu}\right), & |\delta| < \frac{\mu}{2\kappa}. \end{cases}$$

Таким образом, что величина силы $\tilde{Q}$ меньше силы трения скольжения Кулона при малом относительном проскальзывании δ .

Уравнения движения допускают линейный первый интеграл $C = \tilde{V} + j\tilde{\omega}$. При $C = 0$ относительное сцепление постоянно $\delta = -\frac{1+j}{j}$, поэтому происходит остановка цилиндра за конечное время. При всех других начальных условиях с течением времени проскальзывание экспоненциально стремится к нулю $\delta \rightarrow 0$, так что финальным движением является качение при постоянных $\tilde{V}$ и $\tilde{\omega}$ с полным сцеплением материалов.

Далее рассматривается задача о скольжении абсолютно твердого цилиндра по вязкоупругому полупространству $\alpha > 1$ при $\mu = 0$. В этом случае приложенные к недеформирующейся поверхности цилиндра нормальные напряжения дают вклад только в силу трения, направленную противоположно скорости $\tilde{V}$. Следующие параметры контактного взаимодействия зависят от $\tilde{V}$ и безразмерных параметров κ, α : отношение длины области контактного взаимодействия к длине в покое $\lambda = (a + b)/l_0$ вычисляется при решении некоторого нелинейного уравнения, содержащего спецфункции; параметр $\varepsilon = \frac{b-a}{b+a}$, за-

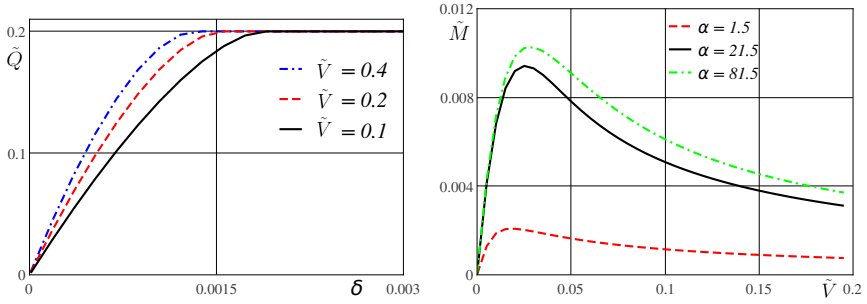


Рис. 7. Слева: $\tilde{Q}(\delta)$ при $\tilde{V} = 0.1, 0.2, 0.4$ и $\alpha = 11$; справа: $\tilde{M}(\tilde{V})$ при $\alpha = 1.5, 21.5, 81.5$. Параметры $\mu = 0.2, \kappa = 29.1$.

дающий смещение области контакта относительно оси $C'z$, зависит от λ и $\tilde{V}$. Несмотря на то, что эти параметры, а также результирующая сила заданы в неявном виде, удалось установить некоторые аналитические свойства решений системы уравнений. Построена зависимость времени и расстояния до остановки при фиксированном начальном значении скорости $\tilde{V}_0$ от вязкого параметра α . Финальным движением цилиндра является равномерное вращение вокруг неподвижной оси $\tilde{V} = 0, \tilde{\omega} = \text{const}$. Таким образом, остановка цилиндра происходит из-за несимметричности давлений в области контактного взаимодействия.

При торможении вязкоупругого цилиндра на полупространстве из того же материала на динамику влияют оба выявленных фактора — как сцепление материалов, так и несимметричность давлений. Графики функций $\tilde{Q}(\tilde{V}, \delta)$ и $\tilde{M}(\tilde{V})$ представлены на рис. 7. Критическое значение относительного проскальзывания

$$\delta_{\alpha}^*(\tilde{V}) = \frac{\mu\lambda(1 + \varepsilon)}{2\kappa}$$

зависит от скорости $\tilde{V}$. При $|\delta| < \delta_{\alpha}^*(\tilde{V})$ в области контактного взаимодействия возникает сцепление материалов.

Результат численного интегрирования системы (2) представлен на рис. 8. В каждом из трех показанных движений в

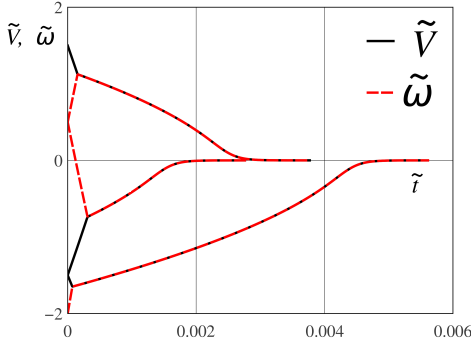


Рис. 8. Торможение вязкоупругого цилиндра, показаны зависимости $\tilde{V}(\tilde{t})$ и $\tilde{\omega}(\tilde{t})$ при разных начальных условиях.

начальный момент точки цилиндра и полупространства скользят относительно друг друга. В режиме полного проскальзывания (первый этап движения), разность $\tilde{\omega} - \tilde{V}$ убывает со временем почти линейно. Таким образом, графики $\tilde{V}(\tilde{t})$ и $\tilde{\omega}(\tilde{t})$ сближаются. В некоторый момент времени относительное проскальзывание $\delta(\tilde{t})$ достигает критического значения δ_α^* : возникает частичное сцепление материалов (второй этап движения). Начиная с этого момента, графики $\tilde{V}(\tilde{t})$ и $\tilde{\omega}(\tilde{t})$ почти совпадают. Такой режим продолжается вплоть до остановки цилиндра, при этом абсолютные значения $\tilde{V}(\tilde{t}), \tilde{\omega}(\tilde{t})$ убывают.

Поскольку $\tilde{M}(\tilde{V}) = \mathcal{O}((\alpha - 1)\kappa^{-1})$, а $\tilde{Q}(\tilde{V}, \delta)$ при полном проскальзывании имеет порядок конечного коэффициента трения μ , то анализ торможения цилиндра можно провести с помощью теории малых возмущений. Введены быстрая и медленная переменные: это скорость проскальзывания $V_s = \tilde{V}\delta$ и величина $C = \tilde{V} + j\tilde{\omega}$, сохраняющаяся при $\alpha = 1$. При анализе динамики в этих переменных получено качественное описание торможения на фазовой плоскости. На рис. 9 слева показан фазовый портрет системы. Видно, что скорость проскальзывания сначала достаточно быстро убывает, достигая малых по величине значений, после чего начинается дрейф системы вдоль

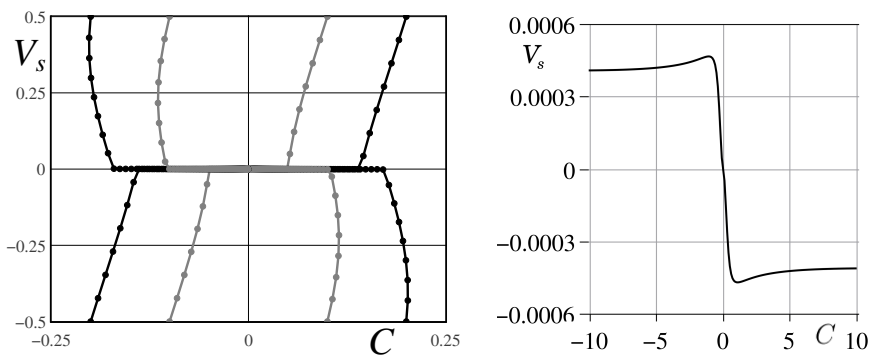


Рис. 9. Слева: фазовый портрет в переменных (C, V_s) . Точками на кривых отмечены равные промежутки времени. Справа: медленная поверхность.

медленной поверхности, показанной на рис. 9 справа.

В **заключении** приведены основные результаты и выводы работы, а также направления дальнейших исследований.

Основные результаты

1. Исследована задача о движении омниэкипажа — мобильного экипажа с роликонесущими колесами (омни- и меканум-колесами) — по горизонтальной плоскости. Изучена безынерционная модель колеса, в которой не учитывается масса роликов на ободе: предполагается, что колесо, моделируемое твердым диском, может скользить без трения в направлении, трансверсальном его плоскости, и катиться без проскальзывания в направлении оси ролика. Для движения по инерции дано полное описание динамики на основе найденных первых интегралов; исследована устойчивость управляемых стационарных движений при постоянных управляющих воздействиях.
2. Рассмотрено влияние массы роликов на динамику экипажа. Модель расширена за счет моделирования роликов как абсолютно твердых тел, свободно вращающихся относительно осей, закрепленных в дисках колес. Ролики не проскальзывают относительно опорной плоскости. Выявлена структура уравнений движения: показана связь с безынерционной моделью; найдены первые интегралы, соответствующие свободным, т.е. не состоящим в контакте с плоскостью, роликам. Исследовано влияние массивности ролика на устойчивость прямолинейных движений омниэкипажа по инерции: показано, что учет массы ролика влияет на характер финального движения экипажа.
3. Разработана и изучена модель прекращения скольжения вновь входящего в контакт с опорной плоскостью ролика: предполагается, что время прекращения скольжения мало по сравнению с характерным масштабом времени движения, поэтому расчет псевдоскоростей выполняется с помощью теории удара. Показано сохранение констант упомянутых выше первых интегралов после перехода колеса с одного ролика на другой. Это наблюдение позво-

ляет существенно понизить порядок системы уравнений движения.

4. Разработана модель контакта абсолютно твердого тела и вязкоупругого основания с сухим трением в пятне контакта. Предполагается, что одномерные элементы, составляющие вязкоупругую плоскость, не изгибаются и при относительном проскальзывании действуют на погруженное в основание тело с силой, описываемой классической моделью сухого трения скольжения Кулона. Сцепление материалов не учитывается. Показано, что результирующая сила и момент взаимодействия тела и основания существенно зависят не только от глубины погружения, но и от скорости (линейной и угловой), с которой тело движется относительно основания.
5. Аналитически решена задача о движении со скольжением однородного шара вдоль вязкоупругого основания. В задаче выделен малый параметр, определяющий отношение размера области контактного взаимодействия к радиусу шара; при этом вязкие члены в восстанавливающей силе элемента основания предполагаются существенными. Это позволило аналитически выделить в силе и моменте взаимодействия члены, оказывающие наибольшее влияние на динамику. Выделено четыре качественно различных этапа движения шара: 1) релаксация вертикальных колебаний; 2) движение с существенным проскальзыванием, которое описывается в рамках классической задачи о движении однородного шара по плоскости с силой трения скольжения Кулона; 3) короткий этап с небольшим проскальзыванием, в течение которого сила трения аналогична силе трения Контенсу; 4) движение с малым проскальзыванием в окрестности некоторой асимптотической траектории, на которой проскальзывание почти постоянно, скорость вращения убывает почти линейно, а скорость центра масс и, следовательно, ско-

рость качения убывают экспоненциально.

6. Изучена задача о движении волчка тип-топ на плоскости с трением. Рассмотрена модель как сферического, так и двусферического волчка. На основании анализа устойчивости стационарных движений и построенных диаграмм Смейла проведен качественный анализ нестационарных движений и показано соответствие ему численных результатов. Расчеты проведены для модели классического сухого трения Кулона, трения Контенсу и одномерной вязкоупругой модели.
7. Исследовано движение ведомого рояльного колеса по плоскости с трением: рассмотрена идеальная и диссипативная модель неголономной связи и модель вязкоупругого основания с сухим трением. Показано, что в последнем случае на стационарных движениях колеса возникает смена направления проскальзывания в пятне контакта, что сигнализирует о необходимости учета сцепления материалов при взаимодействии. Кроме того, в этом случае численно обнаружено возникновение колебаний угла курса при разгоне колеса.
8. Рассмотрена динамика плоскопараллельного движения цилиндра с горизонтальной осью по деформируемому основанию с использованием решений задач упругости и вязкоупругости с учетом возможного сцепления материалов в области контактного взаимодействия.
9. В задаче о движении упругого цилиндра по упругому основанию проведено исследование динамики, построен фазовый портрет системы. Показано, что переход к финальному движению (качению без проскальзывания) происходит экспоненциально, а не линейно как в случае точечного контакта и классического закона Кулона, что связано с уменьшением силы трения вследствие сцепления.

10. Проведено исследование движения абсолютно жесткого цилиндра по вязкоупругому полупространству в предположении, что касательные напряжения отсутствуют, а также исследована задача о движении вязкоупругого цилиндра по полупространству из того же материала при условии, что касательные напряжения описываются законом Кулона в режиме сцепления и относительного скольжения. Проведен качественный анализ описанных задач, исследована зависимость времени торможения и пройденного расстояния до остановки, проанализированы результаты численного интегрирования задачи Коши динамических уравнений, описывающих торможение цилиндра.
11. В задаче о движении вязкоупругого цилиндра по вязкоупругой плоскости с учетом кулоновских касательных напряжений в области контактного взаимодействия введены быстрая и медленная переменная. Показано, что динамика быстрой переменной аналогична динамике торможения упругого цилиндра на упругом основании, а динамика медленной переменной — динамике торможения жесткого цилиндра при его скольжении по гладкой вязкоупругой плоскости.

Список публикаций

По результатам работы опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах **WebOfScience**, **Scopus** и **RSCI**, следующие статьи:

1. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Свободные и управляемые движения некоторой модели экипажа с роликоне-сущими колесами // Вестник московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2008. № 6. С. 62–65. = Free and controlled motions of an omniwheel vehicle // Moscow University Mechanics Bulletin. 2008. Vol. 63, no. 6. P. 146–150. (Scopus IF 0,5)
2. Зобова А. А., Карапетян А. В. Анализ стационарных движений волчка тип-топ // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 6. С. 867–877. = Analysis of the steady motions of the tippe top // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Vol. 73, no. 6. P. 623–630. (WoS IF 0,517)
3. Зобова А. А., Татаринов Я. В. Динамика экипажа с роликоне-сущими колесами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 13–22 = The dynamics of an omni-mobile vehicle // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Vol. 73, no. 1. P. 8–15. (WoS IF 0,517)
4. Zobova A. A. Comments on the paper by M.C. Ciocci, B. Malengier, B. Langerock, and B. Grimonprez “Towards a prototype of a spherical tippe top” // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. Vol. 17, no. 3-4. P. 367–369. (WoS IF 1,124)
5. Зобова А. А. Различные модели трения в динамике двухсферического волчка // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2013. № 2. С. 21–28. = Various friction models in two-sphere top dynamics // Mechanics of Solids. 2013. Vol. 48, no. 2. P. 134–139. (WoS IF 0,508)

6. Зобова А. А., Трещев Д. В. Шар на вязкоупругой плоскости // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2013. Т. 281. С. 98–126. = Ball on a viscoelastic plane // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. Vol. 281. P. 98–126. (WoS IF 0,686)
7. Зобова А. А. Обзор моделей распределенного сухого трения // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80, № 2. С. 194–206 = A review of models of distributed dry friction // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2016. Vol. 80, no. 2. P. 141–148. (WoS IF 0,517)
8. Multi-physics modelling of a compliant humanoid robot / A. A. Zobova, T. Habra, N. Van der Noot et al. // Multibody System Dynamics. 2017. Vol. 39, no. 1. P. 95–114. (WoS IF 2,298)
9. Karapetyan A. V., Zobova A. A. Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, no. 6. P. 1007–1013. (Scopus IF 1,0)
10. Герасимов К. В., Зобова А. А. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 4. С. 427–440. = On the motion of a symmetrical vehicle with omniwheels with massive rollers // Mechanics of Solids. 2018. Vol. 53, no. S2. — P. 32–42. (WoS IF 0,508)
11. Зобова А. А., Горячева И. Г. Динамическая задача о качении с проскальзыванием упругого цилиндра по упругому полупространству // Доклады Академии наук. 2018. Т. 481, № 1. С. 24–26. = Dynamics of rolling with a microslip for an elastic cylinder on an elastic half-space // Doklady Physics. 2018. Vol. 63, no. 7. P. 263–265 (WoS IF 0,539)

12. Моисеев Г. Н., Зобова А. А. Устойчивость прямолинейных движений омни-экипажа с учетом инерционности роликов колес // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. № 6. С. 78–82. = Stability of the rectilinear motion of an omni vehicle with consideration of wheel roller inertia // Moscow University Mechanics Bulletin. 2018. Vol. 73, no. 6. P. 145–148. (Scopus IF 0,5)
13. Zobova A. A. Dry friction distributed over a contact patch between a rigid body and a visco-elastic plane // Multibody System Dynamics. 2019. Vol. 45, no. 2. P. 203–222. (WoS IF 2,298)
14. Горячева И. Г., Зобова А. А. Динамика упругого цилиндра на упругом основании // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 1. С. 39-46 = Dynamics of the motion of an elastic cylinder along an elastic foundation // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54, no. 2. P. 271–277. (WoS IF 0,508)
15. Горячева И. Г., Зобова А. А. Торможение жесткого цилиндра, скользящего по вязкоупругому основанию // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 2. С. 215–227. = Deceleration of a rigid cylinder sliding along a viscoelastic foundation // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54, no. 2. P. 278–288. (WoS IF 0,508)
16. Goryacheva I. G., Zobova A. A. Dynamics of a viscoelastic cylinder on viscoelastic half-space // Acta Mechanica. 2020. Vol. 231, no. 6. – P. 2217–2230 (WoS IF 2,138)

Опубликованы статьи в журналах, входящих в **список ВАК**:

17. Зобова А. А. Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 771–783.

18. Зобова А. А. Комментарий к работе М.К.Чоччи и др. “К созданию прототипа сферического китайского волчка” // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 2. С. 427–430.
19. Герасимов К.В., Зобова А.А. Динамика экипажа на омни-колесах с массивными роликами с учетом смены ролика в контакте с опорной плоскостью // Труды МАИ. 2018. № 101.

Также опубликованы статьи в сборниках трудов международных конференций, включенных в международные базы **Scopus** либо **Web Of Science**:

20. Zobova A. A. Different models of friction in double-spherical tippe-top dynamics // Proceedings of the IUTAM Symposium on Dynamics Modeling and Interaction Control in Virtual and Real Environments. Vol. 30 of IUTAM Bookseries. Springer, 2010. P. 265–272.
21. Multi-physics modelling of a compliant humanoid robot / A. A. Zobova, T. Habra, N. Van Der Noot et al. // Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2015, Multibody Dynamics 2015. 2015. P. 1458–1469.
22. Gerasimov K. V., Zobova A. A., Kosenko I. I. Omni-vehicle dynamical models mutual matching for different roller–floor contact models // Multibody Dynamics 2019. Vol. 53 of Computational Methods in Applied Sciences. Springer International Publishing Cham, Switzerland, 2020. P. 511–517.
23. Zobova A. A., Gerasimov K. V., Kosenko I. I. Adjustment of non-holonomic constraints by absolutely inelastic tangent impact in the dynamics of an omni-vehicle // Multibody Dynamics 2019. Vol. 53 of Computational Methods in Applied Sciences. Springer International Publishing Cham, Switzerland, 2020. P. 518–525.

Прочие печатные работы:

24. Зобова А. А. Нестационарные движения двусферического китайского волчка // Вестн. Нижегород. у-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 143–144.
25. Зобова А. А. Аппроксимация сил и моментов трения в модели вязко-упругой плоскости // Современные проблемы математики и механики. Т. 7 из Выпуск 2. Математика. Механика. Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ Москва, 2013. С. 44–52.
26. Зобова А. А. Распределенное сухое трение при контакте твердого тела и вязко-упругой плоскости // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды XI Международной Четаевской конференции. Казань, 13-17 июня 2017 г. Т. 1. КНИТУ-КАИ Казань, 2017. С. 386–396.
27. Zobova A. A. The shimmy phenomenon in dynamics of driven rigid castor wheel // Proceedings of the 5th Joint International Conference on Multibody System Dynamics. Instituto Superior Técnico University of Lisbon Lisboa, Portugal, 2018. P. 1–12.
28. Зобова А. А. Асимптотическое разделение движений при качении с проскальзыванием вязкоупругого цилиндра // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовниченко. Т. 1. МАКС Пресс Москва, 2019. С. 703–706.
29. Зобова А. А., Горячева И. Г. Анализ динамики торможения цилиндра с учетом распределения контактных напряжений для упругих и вязкоупругих тел // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4-х томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. Т. 1. РИЦ БашГУ Уфа, 2019. С. 16–18.

30. Зобова А. А. Быстрые и медленные переменные в задаче о качении с проскальзыванием вязкоупругого цилиндра по полупространству // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4-х томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. Т. 1. РИЦ БашГУ Уфа, 2019. С. 73 – 74.