А. В. Бадьин, Изометрические погружения двумерных римановых метрик отрицательной кривизны в E^3, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, номер 2, 47–56

Таким образом, для исследуемых решений типа бегущих волн уравнения sin-Гордона (при выполнении условий (33)) найдены в трехмерном евклидовом пространстве E^3 соответствующие им псевдосферические поверхности, определяемые формулами (34).

Полученный геометрический результат может быть положен в основу разработки геометрических алгоритмов распознавания различных нелинейных бегущих волн, например солитонов, описываемых уравнением sin-Гордона. А именно по каждой имеющейся волне $u_{\text{экс}}$ (обнаруженной, например, в эксперименте) можно в соответствии с изложенной геометрической методикой численно найти ее геометрический образ — псевдосферическую поверхность в E^3 и затем идентифицировать тип волны. Построенные псевдосферические поверхности (см. рис. 1—4) принимаются при этом как эталонные. Такой подход может быть, в частности, эффективен для обнаружения солитонных волн (им отвечают псевдосфера и винтовая поверхность), экспериментальное исследование которых достаточно затруднительно.

Автор выражает признательность доценту А. Г. Попову за полезные обсуждения работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93—011—16076).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыдов А. С. Солитоны в молекулярных системах. Киев, 1984.
2. Позняк Э. Г., Попов А. Г. Уравнение синус-Гордона: геометрия и физика//Математика. Кибернетика. Т. 6. М., 1991.
3. Попов А. Г. Полная геометрическая интерпретация односолитонного решения произвольной амплитуды уравнения sin-Гордона//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 5. 3—8.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1994. № 2

УДК 514.7

А. В. Бадьин

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОГРУЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ В E^3

В настоящей статье рассматриваются изометрические погружения в E^3 двумерных метрик отрицательной кривизны. К таким метрикам относится (как метрика постоянной отрицательной кривизны) метрика плоскости Лобачевского.

В п. 1 изучается одна разновидность уравнений погружения — так называемые уравнения виртуальных асимптотических сетей. При несколько сниженных требованиях гладкости доказывается, что если характеристики разных семейств этих уравнений в некоторой точке касаются друг друга, то эти характеристики совпадают между собой и являются геодезической линией. Аналогичный результат справедлив для системы уравнений теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах. В п. 2 доказывается невозможность некоторого специального расположения асимптотических на погруженной в E^3 области плоскости Лобачевского.

Всюду в тексте считается, что греческие индексы пробегают значения 1, 2; латинские — 1, 2, 3. Принято соглашение о суммировании по повторяющимся тензорным индексам.

1. Уравнения виртуальных асимптотических сетей. Пусть $A \subseteq R^2$, A — открытое множество, $G_{\alpha\beta} \in C^4(A)$ — риманова метрика, $K<0$ — ее кривизна, $Q = \frac{1}{2} \ln \sqrt{-K}$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — символы Кристоффеля, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — дискриминантный тензор [1, с. 250].

Пусть T_1, $T_2 \in C^1(A)$ — поля единичных, линейно независимых векторов, а $b_{\alpha\beta} \in C^1(A)$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ — тензорное поле, удовлетворяющее уравнениям Гаусса и Петерсона—Кодацци [2]. В [3, с. 362; 4, с. 242] показано, что для того чтобы T_1, T_2 были полями асимптотических векторов некоторого поля $b_{\alpha\beta}$, необходимо и достаточно выполнения уравнений виртуальных асимптотических сетей

$$L_\alpha T^{\lambda}_{3-\alpha} = (\varepsilon_{\beta\gamma} T^{\beta}_{\alpha} T^{\gamma}_{3-\alpha}) \, \varepsilon_{\mu}^{\cdot\lambda} T^{\mu}_{3-\alpha} L_{3-\alpha} Q, \tag{1}$$

где α, $\lambda = 1, 2$; $L_\alpha = T^{\delta}_{\alpha} \nabla_\delta$.

Пусть теперь в A заданы векторные поля

$$T^{\lambda}_{\alpha} \in C^{(0,1)}(A), \ G_{\delta\mu} T^{\delta}_{\alpha} T^{\mu}_{\alpha} \neq 0, \ \lambda, \ \alpha = 1, \ 2.$$

Введем функции $S_\alpha(\tau, x) = (S^1_\alpha, S^2_\alpha)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\tau} S^{\lambda}_{\alpha}(\tau, x) = T^{\lambda}_{\alpha}(S_\alpha(\tau, x)), \\ S^{\lambda}_{\alpha}(0, x) = x^{\lambda}. \end{cases} \quad \lambda, \ \alpha = 1, \ 2, \tag{2}$$

Так как множество A открыто, то при $x \in A$, $\alpha = 1,2$ максимальная область определения S_α есть интервал $(h_\alpha(x), H_\alpha(x))$, $h_\alpha < 0$, $H_\alpha > 0$; может быть, $h_\alpha = -\infty$ и (или) $H_\alpha = +\infty$. Множество $l_\alpha(x) = S_\alpha((h_\alpha(x), H_\alpha(x)), x)$ назовем характеристикой семейства α. Пусть $\mathfrak{M}$ — тензорное поле на A и $(\mathfrak{M} \circ S_\alpha)(\tau, x)$ имеет производную по τ в точке $\tau = 0$. Обозначим

$$L_\alpha \mathfrak{M}(x) = \frac{D}{d\varepsilon} \mathfrak{M}(S_\alpha(\varepsilon, x)) |_{\varepsilon=0}$$

$\left(\text{здесь } \dfrac{D}{d\varepsilon} \text{ — абсолютная производная}\right)$.

Пусть $T_{3-\alpha}$ допускает действие оператором L_α, $\alpha = 1,2$, и справедливы соотношения (1).

Теорема. *Если в некоторой точке $x_0 \in A$ векторы $T_1(x_0)$ и $T_2(x_0)$ линейно зависимы, то кривые $l_1(x_0)$ и $l_2(x_0)$ совпадают между собой и с максимально продолженной геодезической, проходящей через x_0 в направлении $T_1(x_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим $l_1(x_0)$. Обозначим $A_0 = \{\tau \in (h_1(x_0), H_1(x_0))$: $T_1(S_1(\tau, x_0))$ и $T_2(S_1(\tau, x_0))$ линейно зависимы$\}$, очевидно $A_0 \neq \varnothing$. Так как $T_\alpha \neq 0$, то на A_0 имеем

$$T_2(S_1(\tau, x_0)) = \sigma(\tau) T_1(S_1(\tau, x_0)), \ \sigma(\tau) \neq 0.$$

Легко вывести, что множество A_0 замкнуто на $(h_1(x_0), H_1(x_0))$. Если, кроме того, A_0 открыто, то $A_0 = (h_1(x_0), H_1(x_0))$. Обозначим $\varphi(\tau) = \int\limits_0^{\tau} \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}$, $\psi(t)$ — обратная функция к $\varphi(\tau)$. Легко доказать, что $S_2(t, x_0) = S_1(\psi(t), x_0)$ и $l_1(x_0) = l_2(x_0)$. Из (2) и известных свойств S_α получаем

$$(L_2 T_1)(S_2(t, x_0)) = \left(\sigma(\tau) \frac{D}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} S_1(\tau, x_0) \right) \right) \Bigg|_{\tau=\psi(t)}.$$

В силу (1) имеем $\frac{D]}{d\tau}\left(\frac{\partial S_1}{\partial\tau}\right)=0$, т. е. $l_1(x_0)$ — геодезическая; можно показать, что она максимально продолжена.

Итак, доказываем, что множество A_0 открыто. Пусть $\tau_*\in A_0$, $x_*=S_1(\tau_*, x_0)$, тогда $T_1(x_*)$ и $T_2(x_*)$ линейно зависимы. Проведем через x_* C^∞-гладкую кривую ξ перпендикулярно $T_1(x_*)$. В некоторой окрестности Ω_0 точки x_* введем полугеодезическую систему координат с базой в ξ так, чтобы ξ перешла в OY, а x_* — в начало координат, тогда Q, $G_{\alpha\beta}\in C^2(\bar{\Omega}_0)$,

$$T_1^2(0,\ 0)=T_2^2(0,\ 0)=0,\ T_\alpha^1(0,\ 0)\neq 0,\ \alpha=1,\ 2.$$

Без ограничения общности можно считать, что в новых координатах $\Omega_0=(-\delta_0, \delta_0)\times(-\Delta, \Delta)$, где Δ, $\delta_0>0$ и Δ, δ_0 столь малы, что $T_\alpha^1\neq 0$, $\alpha=1, 2$ в $\bar{\Omega}_0$. Обозначим

$$K_1=\max_{\lambda,\alpha=1,2}\|T_\alpha^\lambda\|_{C(\bar{\Omega}_0)},\ K_2=\min_{\alpha=1,2}\inf_{\bar{\Omega}_0}|T_\alpha^1|$$

(тогда $K_2>0$), $\varkappa_0$ — максимальная из констант Липшица функций T_α^λ на $\bar{\Omega}_0$,

$$K_3=\max\{\max_{\alpha,\beta=1,2}\|G_{\alpha\beta}\|_{C^1(\bar{\Omega}_0)},\ \max_{\alpha,\beta=1,2}\|\varepsilon_{\alpha\beta}\|_{C^1(\bar{\Omega}_0)},$$

$$\max_{\alpha,\beta=1,2}\|\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\beta}\|_{C^1(\bar{\Omega}_0)},\ \max_{\alpha,\beta,\gamma=1,2}\|\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\|_{C^1(\bar{\Omega}_0)},\ \|Q\|_{C^2(\bar{\Omega}_0)}\},$$

$$C_1=32K_3K_1^2(16K_3^2K_1^2+1)/K_2,\ \varkappa=C_1+2\varkappa_0\left(1+\frac{4K_1}{K_2}\right).$$

Пусть Ω — область, ограниченная прямыми $y=\pm\Delta\pm\frac{4K_1}{K_2}$, $x=\pm\delta$, где $\delta>0$, $\delta<\min\left\{\delta_0,\ \frac{4K_1}{K_2}\right\}$. Рассмотрим функциональное пространство $P=\{(a_1^1,\ a_1^2,\ a_2^1,\ a_2^2): a_\alpha^\lambda\in C^{(0,1)}(\bar{\Omega}),\ \lambda,\ \alpha=1,\ 2\}$. Будем обозначать $a=(a_1^1,\ a_1^2,\ a_2^1,\ a_2^2)$, $\|a\|=\max_{\lambda,\alpha=1,2}\|a_\alpha^\lambda\|_{C(\bar{\Omega})}$, $L(a_\alpha^\lambda)$ — константа Липшица функции a_α^λ на $\bar{\Omega}$, $L(a)=\max_{\lambda,\alpha=1,2}L(a_\alpha^\lambda)$. Рассмотрим

$$P_1=\left\{a\in P: \|a\|\leqslant 2K_1;\ \min_{\alpha=1,2}\inf_{\bar{\Omega}}|a_\alpha^1|\geqslant\frac{K_2}{2};\ L(a)\leqslant 2\varkappa\right\}.$$

Очевидно, $T=(T_1^1,\ T_1^2,\ T_2^1,\ T_2^2)\in P_1$.

Пусть $a\in P_1$, введем функцию $Y_\alpha(X, x, y)$:

$$Y_\alpha(X,\ x,\ y)=y+\int_x^X\frac{a_\alpha^2(t,\ Y_\alpha(t,\ x,\ y))}{a_\alpha^1(t,\ Y_\alpha(t,\ x,\ y))}dt. \qquad (3)$$

Максимальная область определения функции Y_α — сегмент $[\bar{X}_\alpha(x,\ y),\ \bar{\bar{X}}_\alpha(x,\ y)]$. Можно показать, используя оценки на a и вид Ω, что

$$0,\ x\in[\bar{X}_\alpha,\ \bar{\bar{X}}_\alpha]. \qquad (4)$$

Если $x\in\bar{\Omega}$, то, поскольку $T_\alpha^1\neq 0$, связный участок $l_\alpha(x)$, лежащий в $\bar{\Omega}$, однозначно проектируется на OX и может быть представлен как график функции Y_α при $a_\alpha^\lambda=T_\alpha^\lambda$.

Обозначим $\overset{(0)}{T}{}^{\lambda}_{\alpha}(x, y)=T^{\lambda}_{\alpha}(0, y)$, очевидно $\overset{(0)}{T}\in P_1$. Пусть уже построено $\overset{(k)}{T}{}^{\lambda}_{\alpha}$ и определено $\overset{(k)}{Y}_{\alpha}$ по $\overset{(k)}{T}$. Обозначим

$$F^{\lambda}(x, y, a_{\alpha}, a_{3-\alpha})=\frac{(\varepsilon_{\beta\gamma}a^{\beta}_{\alpha}a^{\gamma}_{3-\alpha})\,(\varepsilon_{\beta\cdot}^{\ \lambda}a^{\beta}_{3-\alpha})\,a^{\mu}_{3-\alpha}\nabla_{\mu}Q-\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}a^{\beta}_{\alpha}a^{\gamma}_{3-\alpha}}{a^{1}_{\alpha}}. \tag{5}$$

Определим

$$\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(x, y)=\int_0^x(F^{\lambda}(\xi, \eta, \overset{(k)}{T}_{\alpha}, \overset{(k)}{T}_{3-\alpha}))(t, \overset{(k)}{Y}_{\alpha}(t, x, y))\,dt+$$

$$+T^{\lambda}_{3-\alpha}(0, \overset{(k)}{Y}_{\alpha}(0, x, y)).$$

Пусть либо $0\leqslant X\leqslant x\leqslant\tilde{x}\leqslant\delta$, либо $-\delta\leqslant\tilde{x}\leqslant x\leqslant X\leqslant 0$; (x, y), $(\tilde{x}, \tilde{y})\in\overline{\Omega}$, тогда в силу (4) x, $X\in[\overline{X}(\tilde{x}, \tilde{y}), \overline{\overline{X}}(\tilde{x}, \tilde{y})]$, $X\in[\overline{X}(x, y), \overline{\overline{X}}(x, y)]$ и можно рассмотреть $|Y_{\alpha}(X, x, y)-Y_{\alpha}(X, \tilde{x}, \tilde{y})|$. Несложные вычисления дают

$$|Y_{\alpha}(X, x, y)-Y_{\alpha}(X, \tilde{x}, \tilde{y})|\leqslant\left(1+\frac{4K_1}{K_2}\right)(|x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|)+$$

$$+\frac{4\varkappa(K_2+4K_1)}{K_2^2}\left|\int_x^X|Y_{\alpha}(t, x, y)-Y_{\alpha}(t, \tilde{x}, \tilde{y})|\,dt\right|.$$

Используя неравенство Гронуолла, имеем

$$|Y_{\alpha}(X, x, y)-Y_{\alpha}(X, \tilde{x}, \tilde{y})|\leqslant$$

$$\leqslant\left(1+\frac{4K_1}{K_2}\right)e^{\frac{8\varkappa\delta(K_2+4K_1)}{K_2^2}}(|x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|)=$$

$$=\gamma(\delta)(|x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|). \tag{6}$$

Из (5) несложно получить

$$|\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(x, y)|\leqslant K_1+\delta C_1,\quad |\overset{(k+1)}{T}{}^{1}_{3-\alpha}(x, y)|\geqslant K_2-\delta C_1. \tag{7}$$

Оценим $L_{k+1}=L(\overset{(k+1)}{T})$:

$$|\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(x, y)-\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(\tilde{x}, \tilde{y})|\leqslant\varkappa_0\,|\overset{(k)}{Y}_{\alpha}(0, x, y)-\overset{(k)}{Y}_{\alpha}(0, \tilde{x}, \tilde{y})|+$$

$$+\left|\int_0^x|F^{\lambda}(\xi, \eta, \overset{(k)}{T}_{\alpha}, \overset{(k)}{T}_{3-\alpha})(t, \overset{(k)}{Y}_{\alpha}(t, x, y))-\right.$$

$$\left.-F^{\lambda}(\xi, \eta, \overset{(k)}{T}_{\alpha}, \overset{(k)}{T}_{3-\alpha})(t, \overset{(k)}{Y}_{\alpha}(t, \tilde{x}, \tilde{y}))|\,dt\right|+C_1|x-\tilde{x}|.$$

Очевидно, найдутся такие константы C_2, $C_3>0$, зависящие только от K_1, K_2, K_3, что $\left|\frac{\partial F^{\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right|\leqslant C_2$ и $\left|\frac{\partial F^{\lambda}}{\partial\overset{(k)}{T}{}^{\beta}_{\alpha}}\right|\leqslant C_3$. Отсюда, применяя к F^{λ} формулу Лагранжа, используя (6) и тот факт, что $\overset{(k)}{T}\in P_1$, получаем

$$|\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(x, y)-\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(\tilde{x}, \tilde{y})|\leqslant(C_1+(\delta(C_2+8C_3\varkappa)+\varkappa_0)\gamma(\delta))\times$$

$$\times(|x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|).$$

Тогда

$$L_{k+1} \leqslant C_1 + (\varkappa_0 + \delta (C_2 + 8C_3\varkappa))\,\gamma(\delta). \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) видно, что если δ достаточно мало, то $\overset{(k+1)}{T} \in$ $\in P_1$, причем выбор δ не зависит от k. Рекурсивно определена последовательность $\{\overset{(k)}{T}\}_{k=0}^{+\infty}$.

Пусть уже показано, что $\overset{(k)}{T}{}^{\lambda}_{\alpha}(x, 0) = T^{\lambda}_{\alpha}(0, 0)$ (для $k=0$ это, очевидно, справедливо). Так как $\overset{(k)}{T}{}^{2}_{\alpha}(x, 0) = T^{2}_{\alpha}(0, 0) = 0$, то в силу единственности решения о. д. у. $\overset{(k)}{Y}_{\alpha}(X, x, 0) \equiv 0$; тогда

$$\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(x, 0) = T^{\lambda}_{3-\alpha}(0, 0) + \int_0^x F^{\lambda}(t, 0, T_{\alpha}(0, 0), T_{3-\alpha}(0, 0))\,dt.$$

Поскольку векторы $T_{\alpha}(0, 0)$ и $T_{3-\alpha}(0, 0)$ линейно зависимы, то

$$\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(x, 0) = T^{\lambda}_{3-\lambda}(0, 0) - \int_0^x \frac{\Gamma^{\lambda}_{11}(t, 0)\, T^{1}_{\alpha}(0, 0)\, T^{1}_{3-\alpha}(0, 0)}{T^{1}_{\alpha}(0, 0)}\,dt.$$

Учитывая, что система координат полугеодезическая, получаем $\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(x, 0) = T^{\lambda}_{3-\alpha}(0, 0)$. По индукции для всех k

$$\overset{(k)}{T}{}^{\lambda}_{\alpha}(x, 0) = T^{\lambda}_{\alpha}(0, 0),\ \lambda,\ \alpha = 1, 2. \tag{9}$$

Ввиду (1)

$$T^{\lambda}_{3-\alpha}(x, y) = \int_0^x F^{\lambda}(\xi, \eta, T_{\alpha}, T_{3-\alpha})(t, Y_{\alpha}(t, x, y))\,dt +$$

$$+ T^{\lambda}_{3-\alpha}(0, Y_{\alpha}(0, x, y)). \tag{10}$$

Используя (3), несложно получить

$$|\overset{(k)}{Y}_{\alpha}(X, x, y) - Y_{\alpha}(X, x, y)| \leqslant \frac{4\delta (K_2 + 4K_1)}{K_2^2} \|\overset{(k)}{T} - T\| +$$

$$+ \frac{4\varkappa (K_2 + 4K_1)}{K_2^2} \left| \int_x^X |\overset{(k)}{Y}_{\alpha}(t, x, y) - Y_{\alpha}(t, x, y)|\,dt \right|.$$

Согласно неравенству Гронуолла

$$|\overset{(k)}{Y}_{\alpha}(X, x, y) - Y_{\alpha}(X, x, y)| \leqslant \frac{4\delta\gamma(\delta)}{K_2} \|\overset{(k)}{T} - T\|. \tag{11}$$

Оценим $\|\overset{(k+1)}{T} - T\|$, используя (5) и (10):

$$|\overset{(k+1)}{T}{}^{\lambda}_{3-\alpha}(x, y) - T^{\lambda}_{3-\alpha}(x, y)| \leqslant \left| \int_0^x |F^{\lambda}(\xi, \eta, \overset{(k)}{T}_{\alpha}, \overset{(k)}{T}_{3-\alpha})(t, \overset{(k)}{Y}_{\alpha}(t, x, y)) -\right.$$

$$\left. - F^{\lambda}(\xi, \eta, T_{\alpha}, T_{3-\alpha})(t, Y_{\alpha}(t, x, y))|\,dt \right| + \varkappa_0\, |\overset{(k)}{Y}_{\alpha}(0, x, y) - Y_{\alpha}(0, x, y)|.$$

Применяя формулу Лагранжа и неравенство (11), заключаем

$$\|\overset{(k+1)}{T}-T\|\leqslant 4\delta\,\|\overset{(k)}{T}-T\|\left(C_3+\frac{\gamma(\delta)}{K_2}\left((8C_3\varkappa+C_2)\,\delta+\varkappa_0\right)\right). \tag{12}$$

Из (12) видно, что если δ достаточно мало, то для всех k $\|\overset{(k+1)}{T}-T\|\leqslant$ $\leqslant q\,\|\overset{(k)}{T}-T\|$, где $q<1$. Следовательно, $\|\overset{(k+1)}{T}-T\|\leqslant q^{k+1}\,\|\overset{(0)}{T}-T\|$, т. е. $\overset{(k)}{T}{}^{\lambda}_{\alpha}(x,\ y)\rightrightarrows T^{\lambda}_{\alpha}(x,\ y)$ при $k\to\infty$. Тогда ввиду (9)

$$T^{\lambda}_{\alpha}(x,\ 0)=T^{\lambda}_{\alpha}(0,\ 0),$$

откуда получаем, что $Y_{\alpha}(X,\ x,\ 0)\equiv 0$ и $T_1(x,\ 0)$, $T_2(x,\ 0)$ линейно зависимы, т. е. $T_1(X,\ Y_{\alpha}(X,\ x,\ 0))$ и $T_2(X,\ Y_{\alpha}(X,\ x,\ 0))$ линейно зависимы. Таким образом, векторы T_1 и T_2 линейно зависимы на $l_1(x_0)$ в некоторой окрестности τ_*, что и требовалось доказать.

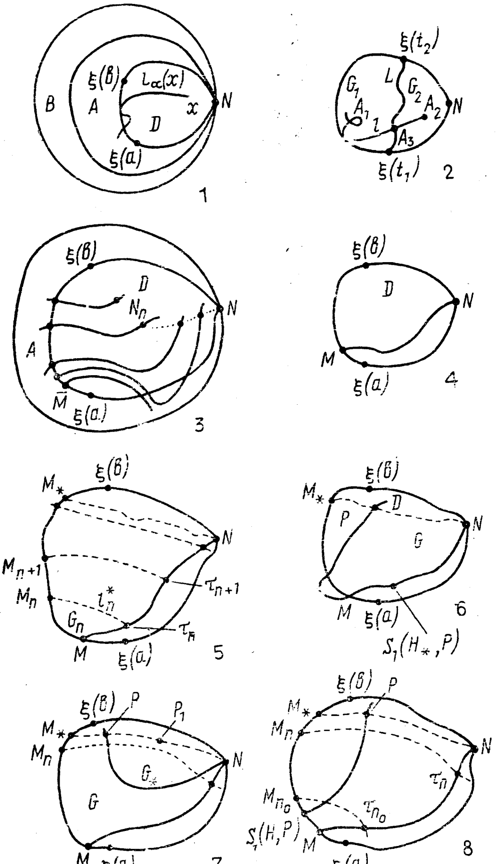

Рис. 1—8

Замечание. Для системы уравнений теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах [5, с. 50] также можно ввести понятие $C^{(0,1)}$-гладкого решения. Можно показать, что наличие такого решения влечет наличие решения системы (1) с теми же характеристическими кривыми, поэтому доказанный результат непосредственно переносится на уравнения в римановых инвариантах.

2. Доказательство невозможности некоторого специального расположения асимптотических на погруженной в E^3 области плоскости Лобачевского ($Л^2$). Пусть плоскость Лобачевского смоделирована в круге Пуанкаре B. Пусть $D\subseteq B$, D — открытое множество, ∂D — простая замкнутая кривая, $\partial B\cap\partial D=\{N\}$. Обозначим через $x^1{}_N$, $x^2{}_N$ координаты точки N. Пусть $\bar{D}\backslash\{N\}\subseteq A\subseteq B$, A — открытое односвязное множество; F: $A\to E^3$, $F\in$ $\in C^3(A)$ — изометрическое погружение, тогда в A определены поля единичных в метрике Лобачевского асимптотических векторов T_1, $T_2\in C^1(A)$. Введем функции $S_{\alpha}(\tau, x)$, как ранее.

Введем на ∂D параметризацию функциями $\xi^{\lambda}(t)\in C(R)$, периодическими с периодом 1, $\xi^{\lambda}(0)=\xi^{\lambda}(1)=x^{\lambda}_N$, $\lambda=1,\ 2$.

Обозначим $[a_1,\ a_2]=\{y:\min\{a_1,\ a_2\}\leqslant y\leqslant\max\{a_1,\ a_2\}\}$.

Пусть найдутся такие a и b: $0<a<b<1$, что (рис. 1)

$$\forall\alpha=1,\ 2, \forall x\in\overline{D}\setminus\{N\}\ \exists\tau\in(h_\alpha(x),\ H_\alpha(x))\,(S_\alpha(\tau,\ x)\in\xi([a,\ b])\wedge$$
$$\wedge\forall p\in[0,\ \tau]\,(S_\alpha(p,\ x)\in\overline{D}\setminus\{N\})). \tag{13}$$

Теорема. *Погружение F не может удовлетворять условию* (13).

Доказательство. Предположим противное: существует погружение F, удовлетворяющее (13).

Везде далее считаем, что $x\in\overline{D}\setminus\{N\}$ и $\alpha=1,2$. Обозначим

$$\overline{V}_\alpha(x)=\{\tau\in(h_\alpha(x),\ H_\alpha(x)) : \forall p\in[0,\ \tau]\,(S_\alpha(p,\ x)\in\overline{D}\setminus\{N\})\}$$

$(\overline{V}_\alpha(x)\neq\varnothing)$, $\overline{h}_\alpha(x)=\inf\overline{V}_\alpha(x)$, $\overline{H}_\alpha(x)=\sup\overline{V}_\alpha(x)$, может быть, $\overline{h}_\alpha=-\infty$ и (или) $\overline{H}_\alpha=+\infty$.

Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

(I). Так как A — односвязное множество, то каждая характеристика — простая кривая [6, с. 287].

(II). Пусть $Q_1\subseteq A$, Q_1 — замкнутое множество, тогда найдутся такие τ_1, τ_2: $h_\alpha(x)<\tau_1<\tau_2<H_\alpha(x)$, что $S_\alpha(\tau,x)\notin Q_1$ при $\tau<\tau_1$ и $\tau>\tau_2$. Действительно, если это не так, то характеристика имеет предельную точку, тогда [7, с. 282] ее предельное множество содержит замкнутую характеристику, что противоречит (I).

(III). Если $\overline{H}_\alpha(x)=+\infty$ $(\overline{h}_\alpha(x)=-\infty)$, то $\lim\limits_{\tau\to+\infty}S_\alpha(\tau,\ x)=N$ $(\lim\limits_{\tau\to-\infty}S_\alpha(\tau,\ x)=N)$. Легко следует из (II).

Можно показать, что если $\overline{H}_\alpha(x)\in R$ $(\overline{h}_\alpha(x)\in R)$, то $\overline{H}_\alpha(x)<H_\alpha$ $(\overline{h}_\alpha>h_\alpha)$. Обозначим $I_\alpha(x)=[\overline{h}_\alpha(x),\ \overline{H}_\alpha(x)]\cap R$, тогда $S_\alpha(\tau,\ x)\in\overline{D}\setminus\{N\}$ при $\tau\in I_\alpha(x)$. Переобозначим $l_\alpha(x)=S_\alpha(I_\alpha(x),\ x)$.

(IV). Очевидно, $l_\alpha(x_1)$ и $l_\alpha(x_2)$, $x_{1,2}\in\overline{D}\setminus\{N\}$, либо не пересекаются, либо совпадают.

(V). Две характеристики разных семейств могут иметь не более одной общей точки. Это следует из формулы Гаусса—Боннэ и формулы для кривизны асимптотической [8].

Пусть $t_2>t_1$, $t_2-t_1<1$; L — простая дуга, соединяющая $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$, причем $(L\setminus\{\xi(t_1),\xi(t_2)\})\subseteq D$, тогда $L\cup\xi([t_1,t_2])$ и $L\cup\xi([t_2,t_1+1])$ — простые замкнутые кривые, ограничивающие множества G_1 и G_2. В этом случае $G_1\cap G_2=\varnothing$ и $D=G_1\cup G_2\cup(L\setminus\{\xi(t_1),\ \xi(t_2)\})$ [6, с. 363].

(VI). Легко показать, что если $A_1\in\overline{G}_1$ и $A_2\in\overline{G}_2$, l — непрерывная кривая, соединяющая A_1 и A_2, $l\subseteq\overline{D}$, то найдется такая точка A_3, что $A_3\in L\cap l$ и дуга $(A_2,A_3)\subseteq\overline{G}_2$ (рис. 2).

Выберем $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$, $N_n\to N$, $N_n\in\overline{D}\setminus\{N\}$. Согласно (13), для каждого n найдется такое число $\tau_n\in I_1(N_n)$, что $S_1(\tau_n,\ N_n)\in\xi([a,\ b])$. Без ограничения общности можно считать, что все τ_n одного знака. Пусть для определенности $\tau_n<0$ (случай $\tau_n>0$ рассматривается аналогично). По теореме Больцано—Вейерштрасса можно выбрать $\{N_{n_k}\}$ так, что $S_1(\tau_{n_k},\ N_{n_k})\to\overline{M}\in\xi([a,\ b])$. Обозначим $x_k=S_1(\tau_{n_k},\ N_{n_k})$. Рассмотрим $l_1(\overline{M})$ и покажем, что $\overline{H}_1(\overline{M})=+\infty$ (рис. 3).

Пусть это не так, тогда $\overline{H}_1(\overline{M})\in R$ и $\overline{H}_1(\overline{M})<H_1(\overline{M})$, т. е. найдется такое число $\tau_*\in(\overline{H}_1(\overline{M}),\ H_1(\overline{M}))$, что $S_1(\tau_*,\ \overline{M})\in A\setminus\overline{D}$. Так как τ — натуральный параметр, $\tau_{n_k}<0$, $N_{n_k}\to N$, то $-\tau_{n_k}\to+\infty$ и $\tau_*\in(0,\ \overline{H}_1(x_k))$ при достаточно больших k. Поскольку $A\setminus\overline{D}$ — открытое множество, а решение системы о.д.у. устойчиво по начальным данным, то $S_1(\tau_*,\ x_k)\in A\setminus\overline{D}$ при больших k, что противоречит последнему утверждению предыдущей фразы.

Согласно утверждению (III) $\lim\limits_{\tau\to+\infty} S_1(\tau, \overline{M})=N$. В силу (II) найдется такая точка $M\in S_1([0, +\infty), \overline{M})\cap\xi([a, b])$, что $S_1(\tau, M)\notin\xi([a, b])$ при $\tau>0$. Пусть $t_M\in[a, b]$: $M=\xi(t_M)$ (рис. 4).

Построим теперь $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0<\tau_n<\tau_{n+1}\to+\infty$; согласно (13), для каждого n найдутся такие $t_n\in[a, b]$ и $\overline{\tau}_n\in I_2(\xi(t_n))$, что $S_2(\overline{\tau}_n, \xi(t_n))=$ $=S_1(\tau_n, M)$. Обозначим $M_n=\xi(t_n)$ (рис. 5).

Без ограничения общности можно считать, что все $\overline{\tau}_n$ одного знака, а t_n лежат по одну сторону от t_M; $S_2(\tau, M_n)\notin\xi([a, b])$ при $\tau\in$ $\in(0, \overline{\tau}_n]$. Пусть для определенности $\overline{\tau}_n>0$ и $t_n\geqslant t_M$ (остальные случаи рассматриваются аналогично).

В силу утверждения (V) $t_M<t_n\leqslant b$. Обозначим $l_n^*=S_2([0, \overline{\tau}_n], M_n)\cup$ $\cup S_1([0, \tau_n], M)$, тогда $l_n^*\cup\xi([t_M, t_n])$ — простая замкнутая кривая, ограничивающая множество G_n.

Покажем, что $t_{n+1}>t_n$. Пусть это не так, тогда $\xi(t_{n+1})\in\overline{G}_n$. Можно показать, что $S_1(\tau_{n+1}, M)\notin\overline{G}_n$, тогда, согласно утверждению (VI), $S_2([0, \overline{\tau}_{n+1}], M_{n+1})\cap l_n^*\neq\varnothing$. Так как ввиду (V) $S_2([0, \overline{\tau}_{n+1}], M_{n+1})\cap$ $\cap S_1([0, \tau_n], M)=\varnothing$, то $S_2([0, \overline{\tau}_{n+1}], M_{n+1})\cap S_2([0, \overline{\tau}_n], M_n)\neq\varnothing$ и из утверждения (IV) имеем $l_2(M_n)=l_2(M_{n+1})$, что противоречит (V).

Итак, $t_M<t_n<t_{n+1}<b$, тогда $t_n\to t_*\in(t_M, b]$, $t_n<t_*$. Обозначим $M_*=\xi(t_*)$. Поскольку $S_1(\tau_n, M)\to N$, то, проводя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых доказывалось, что $\overline{H}_1(\overline{M})=+\infty$, убеждаемся, что $\overline{H}_2(M_*)=+\infty$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} S_2(\tau, M_*)=N$.

Обозначим $V=\{\tau\geqslant 0 : S_2(\tau, M_*)\in S_1([0, +\infty), M)\}$,

$$H=\begin{cases}\inf V, & V\neq\varnothing;\\ +\infty, & V=\varnothing.\end{cases}$$

Очевидно, $H\in V$, если $V\neq\varnothing$. В силу построения M $H>0$.

(VII). $S_2([0, H), M_*)\cap\xi([t_M, t_*))=\varnothing$. Пусть это не так, тогда найдутся такие $\tau_*\in(0, H)$ и $\overline{t}_*\in[t_M, t_*)$, что $S_2(\tau_*, M_*)=\xi(\overline{t}_*)$. Следовательно, можно указать такое n_0, что $t_{n_0}>\overline{t}_*$, т. е. $\xi(\overline{t}_*)\in\overline{G}_{n_0}$. Можно показать, что $M_*\notin\overline{G}_{n_0}$. Согласно (VI) и в силу построения H

$$S_2([0, \tau_*], M_*)\cap S_2([0, \overline{\tau}_{n_0}], M_{n_0})\neq\varnothing,$$

т. е. из утверждения (IV) имеем $l_2(M_*)=l_2(M_{n_0})$. Аналогично $l_2(M_*)=$ $=l_2(M_{n_0+1})$, что противоречит (V).

(VIII). $S_2([0, +\infty), M_*)\cap S_1([0, +\infty), M)=\varnothing$.

Это утверждение легко получить, используя (VII) и рассуждая, как при доказательстве неравенства $t_n<t_{n+1}$.

Итак,

$$\xi([t_M, t_*])\cup S_2([0, +\infty), M_*)\cup S_1([0, +\infty), M)\cup\{N\}$$

— простая замкнутая кривая, ограничивающая множество G.

(IX). $S_2([0, \overline{\tau}_n], M_n)\cap S_2([0, +\infty), M_*)\neq\varnothing$.

Если это не так, то найдутся такие τ_1^0 и τ_2^0 : $\tau_1^0\geqslant 0$, $\tau_2^0\in[0, \overline{\tau}_n]$, что $S_2(\tau_1^0, M_*)=S_2(\tau_2^0, M_n)$. Используя известные свойства функции $S_\alpha(\tau, x)$, получаем

$$S_2(\tau_1^0, M_*)=S_2(\tau_2^0-\overline{\tau}_n, S_2(\overline{\tau}_n, M_n)),$$

$$S_1(\tau_n, M)=S_2(\overline{\tau}_n, M_n)=S_2(\tau_1^0+\overline{\tau}_n-\tau_2^0, M_*),$$

а поскольку $\tau_1^0+\bar{\tau}_n-\tau_2^0 \geqslant 0$, это противоречит (VIII) (заметим, что совпадение знаков τ_1^0 и $\bar{\tau}_n-\tau_2^0$ не зависит от предположения о знаке $\bar{\tau}_n$).

(X). $S_2([0, \tau_n], M_n) \subseteq \bar{G}$.

Это легко выводится из (VI) и (V), (IX).

Рассмотрим точку $P=S_2(1, M_*)$. Так как векторы $T_1(P)$ и $T_2(P)$ линейно независимы, то [6, с. 230] найдется такое $\varepsilon \neq 0$, что $S_1((0, \varepsilon), P) \subseteq G$. Легко показать, что существует такое $H \neq 0$, что $S_1(\tau, P) \notin \notin \xi([t_M, t_*))$ при $\tau \in [0, H)$ и $((0, \varepsilon) \subseteq (0, H))$ $S_1(H, P) \in \xi([t_M, t_*))$, если $H \in (h_1(P), H_1(P))$.

Заметим [рис. 6], что если найдутся $H_* \in [0, H)$ и $\tau_* \geqslant 0$, такие, что $S_1(H_*, P)=S_1(\tau_* M)$, то $P=S_1(\tau_*-H_*, M)$, т. е. $H_* \geqslant \tau_*$. Тогда $M=S_1(H_*-\tau_*, P)$ и $M \in S_1([0, H), P)$, что противоречит построению H.

(XI). Учитывая (V), заключаем отсюда, что $S_1((0,H),P) \subseteq G$. Пусть для определенности $H>0$ (случай $H<0$ рассматривается аналогично).

Покажем, что $H<H_1(P)$. Действительно, если это не так, то $H= =H_1(P)=\bar{H}_1(P)$ в силу (XI), т. е. $\bar{H}_1(P)=+\infty$ и $\lim\limits_{\tau\to+\infty} S_1(\tau, P)=N$. Итак,

$$S_2([1, +\infty), M_*) \cup S_1([0, +\infty), P) \cup \{N\}$$

—простая замкнутая кривая, ограничивающая $G_* \subset G$ (рис. 7). Рассмотрим точку $P_1=S_2(2, M_*)$. Очевидно, $S_2(2, M_n) \to P_1$. Так как $P_1 \notin \partial(\bar{G} \setminus \bar{G}_*)$, то при больших n имеем $S_2(2, M_n) \in \bar{G}_*$ и $S_2(2, M_n) \notin S_1([0, +\infty), P)$, тогда, согласно утверждению, аналогичному (VI), но сформулированному для G,

$$S_2([0, 2), M_n) \cap S_1([0, +\infty), P) \neq \varnothing.$$

Очевидно, $S_2(\bar{\tau}_n, M_n) \notin \bar{G}_*$, поэтому $S_2([2, \bar{\tau}_n], M_n) \cap S_1([0, +\infty), P) \neq \varnothing$, что противоречит (V).

Итак, существует $t_0 \in [t_M, t_*) : S_1(H, P)=\xi(t_1)$ (рис. 8). Найдется n_0: $t_n>t_0$ при $n \geqslant n_0$. Очевидно, $P \notin \bar{G}_n$, поэтому в силу (VI) (для G) найдутся такие $p_n \in [0, H]$ и $\tau_n^* \in [0, \bar{\tau}_n]$, что $S_1(p_n, P)=S_2(\tau_n^*, M_n)$. Рассмотрим четырехугольник

$$S_1([p_{n_0}, p_n], P) \cup S_1([\tau_{n_0}, \tau_n], M) \cup S_2([\tau_{n_0}^*, \bar{\tau}_{n_0}], M_{n_0}) \cup S_2([\tau_n^*, \bar{\tau}_n], M_n),$$

где $n>n_0$. По свойству Чебышева

$$L(S_1([p_{n_0}, p_n], P))=L(S_1([\tau_{n_0}, \tau_n], M))$$

(здесь L означает длину), однако $L(S_1([p_{n_0}, p_n], P)) \leqslant L(S_1([0, H], P))$, а $L(S_1([\tau_{n_0}, \tau_n], M)) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Это противоречие и завершает доказательство теоремы.

Автор глубоко благодарен профессору Э. Г. Позняку за постоянное внимание и помощь.

Работа велась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93—011—16076).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М., 1974.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1967.
3. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. II. М.; Л., 1948.

4. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.
5. Позняк Э. Г. Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства//Успехи матем. наук. 1973. XXVIII, вып. 41 (172). 47—76.
6. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., 1961.
7. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Дополнение к главам V и VI. М.; Л., 1947.
8. Бакельман И. Я., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию в целом. М. 1973.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1994. № 2

УДК 51

И. Х. Сабитов

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПРОВЕРКИ ИЗГИБАЕМОСТИ МНОГОГРАННИКА

1. Изгибанием поверхности называется такая непрерывная ее деформация, при которой длины всех кривых на поверхности остаются неизменными; иначе говоря, изгибание есть непрерывное изометрическое преобразование поверхности. Когда говорят об изгибании многогранника, то обычно имеют в виду, что в ходе изометрической деформации грани его движутся как твердые тела. Если грани треугольные, то изгибание сводится к деформации многогранника с сохранением длин его ребер. В общем случае постоянства длин ребер недостаточно для сохранения граней как твердых тел, поэтому для того, чтобы с изгибаниями можно было работать в терминах длин ребер, поступают так: нетреугольные грани разбивают некоторой системой диагоналей на треугольники, эти диагонали включают в число ребер и таким образом по отношению к исходному многограннику расширяют класс допустимых деформаций — нетреугольным граням разрешается «перегибаться» по проведенным диагоналям. Очевидно, что при этом метрика на многограннике остается неизменной, так как длины кривых на гранях не изменяются. В дальнейшем предполагаем, что все грани многогранника треугольные.

Всякое непрерывное движение многогранника в пространстве как твердого в целом тела является некоторым его изгибанием, которое называется тривиальным изгибанием. Если все изгибания многогранника сводятся только к тривиальным, то многогранник называется неизгибаемым. Чтобы устранить тривиальные изгибания, на деформацию многогранника накладывают дополнительные условия, исключающие его непрерывные движения в пространстве.

2. Почти все многогранники неизгибаемы: для многогранников топологического типа сферы это доказано в [1], а для многогранников общего топологического типа — в [2]. Вместе с тем известны примеры изгибаемых многогранников (Bricard, 1897 г.; Connelly, 1977 г.; литературу об этом см., например, в [3]). Хотя наугад взятый многогранник с геометрической вероятностью 1 будет неизгибаемым, тем не менее в действительности он может оказаться изгибаемым, поэтому нужно иметь некоторую процедуру проверки его изгибаемости или неизгибаемости. Известные достаточные условия неизгибаемости (выпуклость или некоторое специальное комбинаторно-геометрическое строение многогранника) охватывают лишь сравнительно узкий класс многогранников, а искать какой-либо работоспособный необходимый и достаточный признак изгибаемости представляется довольно