

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ
ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2015 г. М. О. Мамчурев

Дана корректная постановка начальной задачи для параболического уравнения второго порядка, содержащего частные дробные производные в смысле Римана–Лиувилля по одной из двух независимых переменных. Доказаны теоремы существования и единственности решения поставленной задачи.

DOI: 10.1134/S0374064115090034

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}u \equiv (D_{0y}^\alpha + bD_{0y}^\beta)u(x, y) - u_{xx}(x, y) + cu(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где $\alpha = 2\beta \in]0, 2[$, b, c – заданные действительные числа, $f(x, y)$ – заданная действительная функция, D_{0y}^ν – оператор дробного (в смысле Римана–Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка ν [1, с. 9].

При $b = c = 0$ уравнение (1) совпадает с диффузионно-волновым уравнением

$$D_{0y}^\alpha u(x, y) - u_{xx}(x, y) = f(x, y). \quad (2)$$

Библиографию работ, посвященных исследованию задачи Коши для уравнения (2), его аналога с регуляризованной дробной производной и их многомерных обобщений, можно найти в монографии [2] и работе [3].

Краевые задачи для уравнения (1) при $0 < \alpha < 1$ исследовались в работах [4] и [5]. Для уравнения вида (1) с регуляризованной дробной производной задача Коши исследовалась методами интегральных преобразований Фурье и Лапласа в работах [6, 7], методом разделения переменных – в работах [7, 8]. В работах [5, 9] построено фундаментальное решение уравнения (1), исследованы его свойства и получено общее представление регулярных решений в прямоугольной области. Фундаментальное решение $\Gamma(x - t, y - s)$ уравнения (1) определяется равенством

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{2} \int_{|x|}^{\infty} g(y, \tau) h_0(x, \tau) d\tau,$$

где

$$g(y, \tau) = \frac{e^{b_1 \tau}}{y} e_{1, \beta}^{1, 0} \left(-\frac{\tau}{y^\beta} \right), \quad h_0(x, \tau) = \begin{cases} J_0(|a| \sqrt{\tau^2 - x^2}), & b^2 < 4c, \\ I_0(a \sqrt{\tau^2 - x^2}), & b^2 \geq 4c, \end{cases}$$

$e_{\alpha, \beta}^{\mu, \delta}(\xi)$ – функция типа Райта [2, с. 23], $J_0(z)$ и $I_0(z)$ – функции Бесселя, $b_1 = -b/2$, $a = \sqrt{b^2 - 4c}/2$ ($a = i\sqrt{|b^2 - 4c|}/2$ при $b^2 < 4c$).

Из теоремы об общем представлении решений из [9] следует, что при $1 < \alpha < 2$ наличие в уравнении (1) младшего члена $D_{0y}^\beta u(x, y)$ влияет на корректность постановок начальных и начально-краевых задач для уравнения (1).

В данной работе исследуется корректность задачи Коши в следующей постановке.

Задача 1. В области $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < T\}$ найти решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} [D_{0y}^{\alpha-k} + b(n-k)D_{0y}^{\beta-k}]u(x, y) = \tau_k(x), \quad k = 1, n, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\tau_k(x)$ – заданные функции ($k = 1, n$), число $n \in \{1, 2\}$ такое, что $n - 1 < \alpha \leq n$.

Следует отметить, что для обыкновенных дифференциальных уравнений видоизмененная задача Коши впервые сформулирована в монографии [1, с. 125].

2. Теорема существования решения. Пусть $\Omega_0 = \{(x, y) : a_1 < x < a_2, 0 < y < T\}$. Обозначим через $C^{1,q}[a_1, a_2]$ пространство непрерывно дифференцируемых на $[a_1, a_2]$ функций, производные которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем q .

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть функции $\tau_k(x)$ ($k = 1, n$) удовлетворяют условиям

$$\tau_1(x) \in C[a_1, a_2]; \quad \tau_2(x) \in C^{1,q}[a_1, a_2], \quad q > \frac{1-\beta}{\beta}, \quad \text{при } n = 2. \quad (3)$$

Тогда функция

$$u_0(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{a_1}^{a_2} \tau_k(t) \frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}} \Gamma(x-t, y) dt$$

является решением уравнения (1) из класса $D_{0y}^\alpha u_0, D_{0y}^\beta u_0, \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 \in C(\Omega_0)$, и удовлетворяет условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} [D_{0y}^{\alpha-k} + b(n-k)D_{0y}^{\beta-k}]u_0(x, y) = \tau_k(x), \quad k = 1, n, \quad a_1 < x < a_2. \quad (4)$$

Доказательство. Из свойств 2, 4 и 5 функции $\Gamma(x, y)$ [9] следует, что $u_0 = u_0(x, y)$ – решение уравнения (1) такое, что $D_{0y}^\alpha u_0, D_{0y}^\beta u_0, \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 \in C(\Omega_0)$.

Докажем, что $u_0(x, y)$ удовлетворяет условиям (4). Из свойств 2 и 8 функции $\Gamma(x, y)$ [9] следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-k} \int_{a_1}^{a_2} \tau_k(t) \frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}} \Gamma(x-t, y) dt = \tau_k(x), \quad k = 1, n. \quad (5)$$

Из (5) при $k = 1$ следует выполнение условия (4) в случае $n = 1$.

Дальнейшее доказательство относится к случаю $n = 2$. Из оценки (свойство 4 функции $\Gamma(x, y)$ [9])

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} D_{0y}^\nu \Gamma(x, y) \right| \leq C|x|^{-\theta} y^{\beta(1-m+\theta)-\nu-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad \theta \geq 0, \quad (6)$$

следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{k(\beta-1)} \int_{a_1}^{a_2} \tau_1(t) \Gamma(x-t, y) dt = 0, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

В силу предельных равенств (5) и (7) (при $k = 2$) легко видеть, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-2} u_0(x, y) = \tau_2(x).$$

В силу свойства 2 функции $\Gamma(x, y)$ [9] имеем

$$\begin{aligned} & [D_{0y}^{\alpha-1} + bD_{0y}^{\beta-1}]u_0(x, y) = \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \tau_1(t) D_{0y}^{\alpha-1} \Gamma(x-t, y) dt + \int_{a_1}^{a_2} \tau_1(t) D_{0y}^{\beta-1} \Gamma(x-t, y) dt + \int_{a_1}^{a_2} \tau_2(t) [D_{0y}^\alpha + bD_{0y}^\beta] \Gamma(x-t, y) dt. \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу, используя при этом равенства (5) и (7) (при $k = 1$), получаем равенство

$$\lim_{y \rightarrow 0} [D_{0y}^{\alpha-1} + bD_{0y}^{\beta-1}]u_0(x, y) = \tau_1(x) + \lim_{y \rightarrow 0} \int_{a_1}^{a_2} \tau_2(t) [D_{0y}^{\alpha} + bD_{0y}^{\beta}] \Gamma(x-t, y) dt. \quad (8)$$

Используя формулы дифференцирования функции $\Gamma(x, y)$ (свойство 3 [9]), будем иметь

$$\begin{aligned} [D_{0y}^{\alpha} + bD_{0y}^{\beta}] \Gamma(x, y) &= \int_{|x|}^{\infty} g(y, \tau) \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - b_1^2 \right) h_0(x, \tau) d\tau + \frac{a}{2} |x| g(y, |x|) - \frac{\partial}{\partial |x|} g(y, |x|) = \\ &= S_1(x, y) + S_2(x, y) + S_3(x, y). \end{aligned} \quad (9)$$

Для первых двух слагаемых в правой части равенства (9) в силу леммы 1 из работы [9] и оценки [9]

$$|g(y, |x|)| \leq C|x|^{-\theta-1}y^{\beta+\beta\theta-1}, \quad \theta \geq 0, \quad (10)$$

справедлива оценка

$$|S_k(x, y)| < C|x|^{-\theta}y^{\beta+\beta\theta-1}, \quad \theta > 0, \quad k = 1, 2,$$

из которой следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{a_1}^{a_2} \tau_2(t) S_k(x-t, y) dt = 0, \quad k = 1, 2. \quad (11)$$

Учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial |x-t|} g(y, |x-t|) = -\operatorname{sign}(x-t) \frac{\partial}{\partial t} g(y, |x-t|)$$

и используя формулу интегрирования по частям, преобразуем интеграл

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} \tau_2(t) S_3(x-t, y) dt &= \sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^x \tau_2(t) \frac{\partial}{\partial t} g(y, |x-t|) dt = \\ &= \sum_{i=1}^2 \tau_2(a_i) g(y, |x-a_i|) + \sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^x [\tau_2'(x) - \tau_2'(t)] g(y, |x-t|) dt + \tau_2'(x) \int_{x-a_1}^{a_2-x} g(y, \xi) d\xi = \\ &= S_{31}(x, y) + S_{32}(x, y) + S_{33}(x, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Выбрав в (10) $\theta > (1-\beta)/\beta$, найдем предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} S_{31}(x, y) = 0, \quad a_1 < x < a_2. \quad (13)$$

Применяя оценку (10) и условие (3), получаем неравенство

$$|S_{32}(x, y)| \leq Cy^{\beta+\beta\theta-1} \left(\int_0^{x-a_1} + \int_0^{a_2-x} \right) \xi^{q-\theta-1} d\xi.$$

Из последнего при $q > \theta > (1-\beta)/\beta$ имеем, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} S_{32}(x, y) = 0. \quad (14)$$

Для слагаемого $S_{33}(x, y)$ в силу формул интегрирования и автотрансформации функции типа Райта [2, с. 24, 27] при $x \neq a_i$ ($i = 1, 2$) справедлива оценка

$$|S_{33}(x, y)| \leq e^{b_1(a_2-a_1)} \tau'_2(x) \left| y^{\beta-1} e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{\xi}{y^\beta} \right) \right|_{\xi=x-a_1}^{\xi=a_2-x} \leq C y^{\beta+\beta\theta-1},$$

из которой следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} S_{33}(x, y) = 0, \quad a_1 < x < a_2. \quad (15)$$

Из соотношений (8)–(15) вытекает, что $\lim_{y \rightarrow 0} [D_{0y}^{\alpha-1} + bD_{0y}^{\beta-1}]u_0(x, y) = \tau_1(x)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $y^{n-\alpha}f(x, y) \in C(\bar{\Omega}_0)$, функция $f(x, y)$ удовлетворяет в области Ω_0 условию Гёльдера по переменной x . Тогда функция

$$F(x, y) = \int_0^y \int_{a_1}^{a_2} \Gamma(x-t, y-s) f(t, s) dt ds$$

– регулярное (см. [9]) в области Ω_0 решение уравнения (1), удовлетворяющее однородным условиям (4).

Доказательство. Благодаря оценке (6) нетрудно видеть, что

$$D_{0y}^\beta F(x, y) = \int_0^y \int_{a_1}^{a_2} f(t, s) D_{ys}^\beta \Gamma(x-t, y-s) dt ds \in C(\Omega_0). \quad (16)$$

В силу свойств 6 и 8 функции $\Gamma(x, y)$ из [9], а также с учетом равенств $\Gamma_{tt} = \Gamma_{xx}$ и $\Gamma_t = -\Gamma_x$ получим

$$\begin{aligned} D_{0y}^\alpha F(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y ds \int_{a_1}^{a_2} D_{ys}^{\alpha-1} \Gamma(x-t, y-s) f(t, s) dt = \\ &= f(x, y) + \int_0^y ds \int_{a_1}^{a_2} D_{ys}^\alpha \Gamma(x-t, y-s) [f(t, s) - f(x, s)] dt + \int_0^y f(x, s) ds \int_{a_1}^{a_2} D_{ys}^\alpha \Gamma(x-t, y-s) dt = \\ &= \int_0^y ds \int_{a_1}^{a_2} D_{ys}^\alpha \Gamma(x-t, y-s) [f(t, s) - f(x, s)] dt - \int_0^y f(x, s) ds \int_{a_1}^{a_2} (bD_{ys}^\beta + c) \Gamma(x-t, y-s) dt + \\ &\quad + f(x, y) + \int_0^y f(x, s) [\Gamma_x(x-a_1, y-s) - \Gamma_x(x-a_2, y-s)] ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Из оценки (6) и условия

$$|f(x, y) - f(t, y)| \leq K|x-t|^q y^{\alpha-n}, \quad K = \text{const} > 0, \quad 0 < q < 1, \quad (18)$$

следует, что интегралы в правой части равенства (17) сходятся абсолютно и равномерно по всем $(x, y) \in \Omega_0$. Таким образом, $D_{0y}^\alpha F(x, y) \in C(\Omega_0)$.

Для нахождения производной $\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, y)$ рассмотрим функцию

$$F_{\delta_1, \delta_2}(x, y) = \int_0^y ds \left(\int_{a_1}^{x-\delta_1} + \int_{x+\delta_2}^{a_2} \right) \Gamma_x(x-t, y-s) f(t, s) dt.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} F_{\delta_1, \delta_2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \in C(\Omega_0).$$

Из оценки (6) и условия (18) следует, что ее производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_{\delta_1, \delta_2}(x, y) &= \int_0^y \Gamma_x(\delta_1, y-s) f(x-\delta_1, s) ds - \int_0^y \Gamma_x(-\delta_2, y-s) f(x+\delta_2, s) ds + \\ &+ \int_0^y ds \left(\int_{a_1}^{x-\delta_1} + \int_{x+\delta_2}^{a_2} \right) [f(t, s) - f(x, s)] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma(x-t, y-s) dt - \\ &- \int_0^y [\Gamma_x(\delta_1, y-s) - \Gamma_x(-\delta_2, y-s)] f(x, s) ds + \int_0^y [\Gamma_x(x-a_1, y-s) - \Gamma_x(x-a_2, y-s)] f(x, s) ds \end{aligned}$$

при $\delta_1 \rightarrow 0$ и $\delta_2 \rightarrow 0$ непрерывна в Ω_0 . Следовательно,

$$\lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} \frac{\partial}{\partial x} F_{\delta_1, \delta_2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} F_{\delta_1, \delta_2}(x, y)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, y) &= \int_0^y ds \int_{a_1}^{a_2} [f(t, s) - f(x, s)] \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma(x-t, y-s) dt + \\ &+ \int_0^y [\Gamma_x(x-a_1, y-s) - \Gamma_x(x-a_2, y-s)] f(x, s) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

Из равенств (16), (17) и (19) следует, что $\mathbf{L}F(x, y) = f(x, y)$, причем $\frac{\partial^2}{\partial x^2} F, D_{0y}^\alpha F, D_{0y}^\beta F \in C(\Omega_0)$.

В силу оценки (6)

$$|D_{0y}^\nu F(x, y)| \leq C[(x-a_1)^{1-\theta} + (a_2-x)^{1-\theta}] y^{\beta(3+\theta)-n-\nu}, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad 0 < \theta < 1,$$

откуда следует включение $D_{0y}^{\alpha-n} F(x, y) \in C(\overline{\Omega}_0)$, а также, что при $n=1$ выполняется равенство $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} F(x, y) = 0$, а при $n=2$ – условия

$$\lim_{y \rightarrow 0} [D_{0y}^{\alpha-1} + b D_{0y}^{\beta-1}] F(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-2} F(x, y) = 0.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. При $|x| \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial x^m} D_{0y}^\nu \Gamma(x, y) &= O(\exp(-\rho_\beta(y)|x|^\varepsilon)), \quad \beta - \nu - \beta m \geq 0, \\ \frac{\partial^m}{\partial x^m} D_{0y}^\nu \Gamma(x, y) &= O(\exp(-\rho_\beta^*(y)|x|^\varepsilon)), \quad \beta - \nu - \beta m < 1, \end{aligned} \quad (20)$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = 1/(1-\beta)$, $\rho_\beta(y) = (1-\beta)(\beta y^{-1})^{\beta/(1-\beta)}$, $\rho_\beta^*(y) = \rho_\beta(y)\theta - \delta$, θ и δ – произвольные числа из интервала $]0, 1[$.

Доказательство леммы 3 аналогично доказательству свойства 4 матрицы $\Gamma(x, y)$ из работы [10].

Аналогично лемме 2 из работы [11] с помощью леммы 3 доказывается

Лемма 4. Пусть $\tau_k(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $y^{n-\alpha} f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ и при $|x| \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\tau_k(x) = O(\exp(\rho|x|^\varepsilon)), \quad (21)$$

$$y^{n-\alpha} f(x, y) = O(\exp(\rho|x|^\varepsilon)), \quad (22)$$

где $\varepsilon = 1/(1 - \beta)$, $\rho < (1 - \beta)(\beta/T)^{\beta/(1-\beta)}$. Тогда справедливы следующие включения:

$$\int_{x \pm \delta}^{\pm \infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} D_{0y}^\nu \Gamma(x - t, y) \tau_k(t) dt, \int_0^y \int_{x \pm \delta}^{\pm \infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} D_{ys}^\nu \Gamma(x - t, y - s) f(t, s) dt ds \in C(\Omega),$$

где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Замечание. При дополнительных условиях (21) и (22) с помощью лемм 3 и 4 нетрудно видеть, что леммы 1 и 2 верны и в случае, когда величины a_1 и a_2 или одна из них бесконечны.

Из лемм 1 и 2 с учетом последнего замечания следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть функции $\tau_k(x)$ ($k = 1, n$) удовлетворяют условиям

$$\tau_1(x) \in C(\mathbb{R}); \quad \tau_2(x) \in C^{1,q}(\mathbb{R}), \quad q > \frac{1-\beta}{\beta}, \quad \text{при } n = 2,$$

$y^{n-\alpha} f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, функция $f(x, y)$ удовлетворяет в области Ω условию Гёльдера по переменной x , при $|x| \rightarrow \infty$ выполняются соотношения (21) и (22). Тогда функция

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_k(t) \frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}} \Gamma(x - t, y) dt + \int_0^y \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x - t, y - s) f(t, s) dt ds$$

является регулярным [9] решением задачи 1.

3. Единственность решения. Имеет место

Теорема 2. Существует не более одного регулярного решения $u(x, y)$ задачи 1 в классе функций, удовлетворяющих для некоторого $\sigma > 0$ условию

$$y^{n-\alpha} u(x, y) = O(\exp(\sigma|x|^\varepsilon)) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Доказательство. Пусть функция $h_r(t)$ такая, что $h_r(t) \in C^2(\mathbb{R})$,

$$h_r(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq r, \\ 0, & |t| \geq r + 1, \end{cases}$$

и $0 \leq h_r(t) \leq 1$, $|h'_r(t)| \leq C$, $|h''_r(t)| \leq C$, где $C = \text{const} > 0$.

Из свойства 6 функции $\Gamma(x, y)$ [9] следует, что

$$\mathbf{L}^* h_r(t) \Gamma(x - t; y - s) = -h''_r(t) \Gamma(x - t, y - s) - 2h'_r(t) \Gamma_t(x - t, y - s). \quad (24)$$

С учетом (24) и теоремы 1 [9] получим, что регулярное в области

$$\Omega_r = \{(x, y) : |x| < r + 1, 0 < y < T\}$$

решение однородной задачи 1 представимо в виде

$$u(x, y) = \int_0^y \left(\int_{-r-1}^{-r} + \int_r^{r+1} \right) [h''_r \Gamma + 2h'_r \Gamma_t] u(t, s) dt ds. \quad (25)$$

Учитывая оценку (20) и то, что в силу (23) при достаточно большом r имеет место неравенство

$$|u(x, y)| \leq Cy^{n-\alpha} \exp(\sigma|x|^\varepsilon),$$

из (25) получаем

$$|u(x, y)| \leq C \left(\int_{-r-1}^{-r} + \int_r^{r+1} \right) \int_0^y (y-s)^{\alpha-n} \exp[-\rho_\beta(s)|x-t|^\varepsilon + \sigma|t|^\varepsilon] ds dt.$$

Устремляя r к бесконечности, из последнего неравенства получаем, что $u(x, y) \equiv 0$ в полосе

$$\Omega_1 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y \leq T_1\},$$

где $T_1 = \beta[(1-\beta)/\sigma]^{(1-\beta)/\beta}$. Это доказывается так же, как и в доказательстве теоремы 2 из работы [11].

Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в полосе $\Omega_2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, T_1 < y \leq 2T_1\}$. Рассмотрим функцию $v(x, z) = u(x, T_1 + z)$, где $z = y - T_1$. Поскольку $u(x, y) \equiv 0$ в Ω_1 , то

$$D_{0y}^\nu u(x, y) = D_{T_1y}^\nu u(x, y) = D_{0z}^\nu v(x, z).$$

Отсюда следует, что для любых $(x, z) \in \Omega_1$ функция $v(x, z)$ является решением однородной задачи 1. Поэтому из доказанного выше следует, что $v(x, z) \equiv 0$ для всех $(x, z) \in \Omega_1$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ для всех $(x, y) \in \Omega_2$.

Точно так же доказывается, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\Omega_3 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 2T_1 < y \leq 3T_1\}$ и т.д. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
2. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.
3. *Kochubei A.N.* Cauchy problem for fractional diffusion-wave equations with variable coefficients // *Applicable Analysis*. 2014. V. 93. № 10. P. 2211–2242.
4. *Мамчурев М.О.* Общее представление решения уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами в прямоугольной области // *Изв. Кабардино-Балкарского научного центра РАН*. 2004. № 2 (12). С. 116–118.
5. *Мамчурев М.О.* Краевые задачи для уравнения диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами // *Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. академии наук*. 2005. Т. 7. № 2. С. 38–45.
6. *Orsinger E., Beghin L.* Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with brownian time // *Probability Theory and Related Fields*. 2004. V. 128. № 1. P. 141–160.
7. *Huang F.* Analytic solution of the time-fractional telegraph equation // *J. of Appl. Math.* 2009. V. 2009. Article ID 890158, 9 pages.
8. *Chen J., Liu F., Anh V.* Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables // *J. of Math. Anal. and Appl.* 2008. V. 338. № 2. P. 1364–1377.
9. *Мамчурев М.О.* Фундаментальное решение нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // *Дифференц. уравнения*. 2015. Т. 51. № 5. С. 611–620.
10. *Мамчурев М.О.* Фундаментальное решение системы уравнений с частными производными дробного порядка // *Дифференц. уравнения*. 2010. Т. 46. № 8. С. 1113–1124.
11. *Мамчурев М.О.* Задача Коши в нелокальной постановке для системы уравнений с частными производными дробного порядка // *Дифференц. уравнения*. 2012. Т. 48. № 3. С. 351–358.

Институт прикладной математики
и автоматизации, г. Нальчик

Поступила в редакцию
15.12.2014 г.