МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Лу Ли

Гомологические методы в коммутативной алгебре и алгебраической геометрии

01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2020

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители: **Пионтковский Дмитрий Игоревич**,
доктор физ.-мат. наук,
профессор.

Гайфуллин Сергей Александрович,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент.

Официальные оппоненты: **Туганбаев Аскар Аканович**,
доктор физ.-мат. наук, профессор
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
профессор кафедры высшей математики

Царев Андрей Валерьевич,
доктор физ.-мат. наук,
Московский педагогический государственный университет
профессор кафедры алгебры

Елагин Алексей Дмитриевич,
кандидат физ.-мат. наук,
Национальный исследовательский университет «ВШЭ»
научный сотрудник Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений

Защита диссертации состоится 23 октября 2020 года в 16^{45} на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 при ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.
E-mail: VGChdissovet@yandex.ru
С диссертацией, а также со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/321976094/
Автореферат разослан «23» сентября 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.01.17 ФГБОУ МГУ
доктор физико-математических наук, доцент
Чирский В.Г.,

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Гомологическая алгебра - ветвь алгебры, изучающая алгебраические объекты, заимствованные из алгебраической топологии. Первыми гомологические методы в алгебре применили в 40-х годах XX века Д. К. Фаддеев, С. Эйленберг и С. Маклейн при изучении расширений групп. Гомологическая алгебра играет важную роль в алгебраической топологии, применяется во многих разделах алгебры, таких, как теория групп, теория алгебр, алгебраическая геометрия, теория Галуа.

Аксиоматическое построение гомологических теорий опирается на понятие производных функторов, введенное Картаном и Эйленбергом. Эта техника была развита Гротендиком и в дальнейшем привела к введению Вердье новых понятий: производной категории и производных функторов между ними. Категорные основания позволяют переносить теоремы гомологической алгебры с одной ситуации на другую, часто значительно более общую.

В диссертации предпринят ряд таких обобщений. В частности, известные теоремы из теории модулей над коммутативными кольцами обобщаются на случай градуированных моделей над кольцами, градуированными группами; свойства регулярного локуса коммутативного нетерова кольца обобщается на случай нетеровой схемы; свойства категории особенностей горенштейновых колец переносятся на горенштейновы схемы. Результаты диссертации, таким образом, относятся к следующим трем областям.

- **Градуированные аналоги некоторых классических теорем**

В последнее время отмечается значительный интерес к кольцам и другим алгебраическим структурам, снабжённым градуировкой. Это объясняется тем, что многие важные классы колец, например кольца многочленов, матричные кольца, групповые кольца, допускают естественную градуировку.

В теории градуированных колец вводятся стандартные градуированные аналоги понятий классической теории колец, которые принято обозначать приставкой «gr-». Например, gr-артинов (gr-нётеров) модуль - это градуированный модуль с условием минимальности (максимальности) для градуированных подмодулей.

Естественный и важный вопрос в теории градуированных колец состоит в том, чтобы найти градуированные аналоги некоторых классических теорем.

Например, Ч. Парк в своей работе[1] доказал теорему Крулля о главном идеале, теорему Крулля-Акизуки и теорему Мори-Нагата в градуированном случае. Дж. Белл и Дж. Чжан[2] в своей работе доказали, что если A и B - две (некоммутативные) $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры, конечно порожденные в первой степени, и если A изоморфна B как неградуированная алгебра, то они также изоморфны друг другу как градуированные алгебры. Дж. Чен и Й. Ким в своей работе[3] показывают, что если градуированный подмодуль нетерова модуля не может быть записан как собственное пересечение градуированных подмодулей, то он не может быть записан как собственное пересечение подмодулей.

Как представляется автору, разложение инъективных модулей над нётеровыми кольцами и проективных модулей над артиновыми кольцами являются одними из наиболее красивых и важных результатов в коммутативной алгебре. Наша первая цель - доказать аналогичные результаты для градуированных колец. Это важно для нас, чтобы понять структуру модулей над градуированными кольцами.

• Триангулированные эквивалентности и горенштейновы схемы

В классической коммутативной алгебре классы горенштейных колец и колец Коэна-Маколея относятся к числу наиболее важных классов колец с многочисленными приложениями в алгебраической геометрии и комбинаторике. Условие горенштейности давно введено в смежные области. Его первое воплощение было, вероятно, в работе[4] Феликса, Гальперина и Томаса о горенштейных пространствах в топологии.

Категория особенностей является важным инвариантом для колец бесконечной глобальной размерности и для сингулярных многообразий. Пусть R — коммутативное нетерово кольцо. Категория особенностей определяется как фактор триангулированной категории $\mathbf{D}^b(mod(R))$ по

[1]C. Park and M. Park. Integral closure of a graded Noetherian domain. Journal of the Korean Mathematical Society, 48(3):449–464, 2011.

[2]J. Bell and J. Zhang. An isomorphism lemma for graded rings. Proceedings of the American Mathematical Society, 145(3):989–994, 2017.

[3]J. Chen and Y. Kim. Graded-irreducible modules are irreducible. Communicationsin Algebra, 45(5):1907–1913, 2017.

[4]Yves Felix, Stephen Halperin, and Jean Claude Thomas. Gorenstein spaces. Advancesin Mathematics, 71(1):92—112, 1988.

полной триангулированной подкатегории совершенных комплексов $\mathfrak{Perf}(R)$. Категория особенностей измеряет гомологическую особенность алгебры: алгебра имеет конечную глобальную размерность тогда и только тогда, когда ее категория особенностей тривиальна[5], отсюда происходит название.

Аналогично, пусть X является нетеровой схемой. Категория особенностей определяется как фактор триангулированной категории $\mathbf{D}^b(coh(X))$ по полной триангулированной подкатегории совершенных комплексов $\mathfrak{Perf}(X)$.

Категории особенностей изучались многими учеными. Например, Бухвайц доказал замечательную теорему:

Теорема 1 *(Бухвайц) Предположим, что R является горенштейновым кольцом. Его категория особенностей $\mathbf{D}_{sg}(R)$ триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных модулей Коэна-Маколея $\underline{\mathbf{MCM}}(R)$.*

Здесь стабильная категория $\underline{\mathbf{MCM}}(R)$ максимальных модулей Коэна-Маколея над R определяется следующим образом. Объектами являются максимальные R-модули Коэна-Маколея, т.е., $M \in mod(R)$ с $Ext^i_R(M, R) = 0$ для всех $i > 0$. Группа морфизмов $Hom_{\underline{\mathbf{MCM}}(R)}(M, N)$ определяется как факторгруппа абелевой группы $Hom_R(M, N)$ по подгруппе морфизмов $M \to N$, пропускаемых через проективные R-модули конечного типа.

Теорема Бухвайца сводит изучение категории особенностей к исследованию подобной категории небольшого классического класса модулей – максимальных модулей Коэна-Маколея.

Одна из наших целей — доказать аналогичный результат для горенштейновой схемы $(X, \mathcal{O}_X)$.

• Классические генераторы и регулярный локус

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, а $\mathcal{S}$ — непустая полная подкатегория в $\mathcal{A}$. $\mathcal{S}$ называется *толстой подкатегорией* при условии, что она замкнута относительно прямых слагаемых и обладает свойством «два из трех» для точных последовательностей: для любой точной последовательности

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \qquad (0.1)$$

[5]Dieter Happel. On Gorenstein Algebras. In Representation Theory of Finite Groupsand Finite-Dimensional Algebras, pages 389–404. Springer, 1991.

в $\mathcal{A}$, если два из X, Y, Z находятся в $\mathcal{S}$, то и третий. Для объекта G в $\mathcal{A}$ мы пишем $thick_{\mathcal{A}}(G)$ для наименьшей толстой подкатегории $\mathcal{A}$, содержащей G. Объект G называется *классическим генератором* для $\mathcal{A}$, если $thick_{\mathcal{A}}(G) = \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{C}$ — триангулированная категория. Пусть E является объектом в $\mathcal{C}$. Обозначим $\langle E\rangle_1$ строго полную подкатегорию в $\mathcal{C}$, состоящую из объектов в $\mathcal{C}$, изоморфных прямым слагаемым конечных прямых сумм

$$\bigoplus_{i=1,2,\ldots,r} E[n_i] \tag{0.2}$$

сдвигов E. Для $n > 1$ пусть $\langle E\rangle_n$ обозначает полную подкатегорию категории $\mathcal{C}$, состоящую из объектов в $\mathcal{C}$, изоморфных прямым слагаемым объектов X, которые вписываются в треугольник

$$A \to X \to B \to A[1], \tag{0.3}$$

где A является объектом в $\langle E\rangle_1$, а B является объектом в $\langle E\rangle_{n-1}$. Подкатегория $\langle E\rangle := \bigcup_n^{+\infty}\langle E\rangle_n$ является триангулированной подкатегорией категории $\mathcal{C}$. Пусть E является объектом в $\mathcal{C}$. Мы говорим, что E является *классическим генератором* категории $\mathcal{C}$, если $\langle E\rangle = \mathcal{C}$. Мы говорим, что E является *сильным генератором*, если $\langle E\rangle_n = \mathcal{C}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Пусть R — коммутативное нетерово кольцо. *Регулярный локус* $Reg(R)$ в R - это множество точек $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, таких что $R_{\mathfrak{p}}$ является регулярным локальным кольцом.

Срикант Б. Айенгар и Рио Такахаши утверждают замечательную теорему[6]:

Теорема 2 *Для коммутативного нетерового кольца R следующие условия эквивалентны:*

- *(1) $Reg(R/\mathfrak{p})$ содержит непустое открытое подмножество для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*
- *(2) $Reg(R/\mathfrak{p})$ открыто для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*
- *(3) Абелева категория $mod(R/\mathfrak{p})$ имеет генератор для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*
- *(4) Триангулированная категория $\mathbf{D}^b(mod(R/\mathfrak{p}))$ имеет генератор для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*

[6] Srikanth B. Iyengar and R. Takahashi. Openness of the Regular Locus and Generatorsfor Module Categories. Acta Mathematica Vietnamica, 44(1):207–212, 2019.

- *(5) Триангулированная категория $\mathbf{D}_{sg}(mod(R/\mathfrak{p}))$ имеет генератор для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*

Когда они выполняются, абелева категория $mod(R)$ и триангулированные категории $\mathbf{D}^b(mod(R))$, $\mathbf{D}_{sg}(R)$ имеют классические генераторы.

Теорема Сриканта Б. Айенгара и Рио Такахаши - прекрасный результат. Одна из наших целей — доказать аналогичный результат для нетеровой схемы $(X, \mathcal{O}_X)$.

Цели диссертации

Целью настоящей работы является нахождение градуированных аналогов некоторых классических теорем, изучение категории особенностей схем.

Научная новизна

Все оснавные результаты диссертации являются новыми и полученными автором самостоятельно. Их оиасание приведено в разделах "Содержание работы"и "Заключение".

Положения выносимые на защиту

- Доказательство теоремы, что каждый градуированный инъективный модуль над gr-нетеровым кольцом имеет неразложимое разложение.

- Доказательство теоремы, что каждый конечнопорожденный градуированный проективный модуль над gr-артиновым кольцом является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективный модулей.

- Получение формулы для выражения градуированных чисел Басса с помощью функтора Ext для градуированных модулей.

- Доказательство теоремы, что левый точный радикальный функтор F имеет вид Γ_V для замкнутого по специализации подмножества V.

- Доказательство теоремы, что если схема является горенштейновой, нетеровой, отделимой, с конечной размерностью Крулля и категория когерентных пучков содержит достаточно много локально свободных пучков, тогда ее категория особенностей триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных пучков Коэна-Маколея.

- Получение необходимого и достаточного условия, чтобы категория особенностей нетеровой схемы имела классический генератор.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы гомологической алгебры, коммутотивной алгебры и алгебраической геометрии.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Однако, доказательства многих результатов конструктивны. Результаты и методы могут быть применены в коммутативной алгебре, в алгебраической геометрии.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на «Международной конференции, посвящённой 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ» в г. Москве в 2019 г.;

- на «Международной алгебраической конференции, посвящённой 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша» в г. Москве в 2018 г.;

- на международной концеренции «Современные проблемы математики и ее приложений» в г. Екатеринбурге в 2019 г.;

- на международной концеренции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» в г. Туле в 2019 г.;

- на научно-исследовательском семинаре и на семинаре «Коммутативная алгебра» кафедры высшей алгебры МГУ.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности, 3 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science или Scopus.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 48 наименований. Общий объем диссертации составляет 56 страницу.

Содержание работы

Во введении описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов; обосновывается актуальность темы.

В **первой главе** приведены необходимые факты из теории триангулированных категорий, включая описание некоторых категорий комплексов, гомотопической категории, локализации категории и производной категории. Введены основные определения.

Во **второй главе** и в **третьей главе** мы докажем структурную теорему для gr-инъективных модулей над gr-нётеровыми G-градуированными коммутативными кольцами и структурную теорему для gr-конечнопорожденных gr-проективных модулей над gr-артиновыми G-градуированными коммутативными кольцами. Мы дадим определение G-градуированных чисел Басса и получим формулу для выражения G-градуированных чисел Басса с помощью функтора Ext для градуированных модулей. Покажем, что левый точный радикальный функтор F имеет вид Γ_V для замкнутого по специализации подмножества V.

Основная теорема 1 *Пусть R — gr-нётерово G-градуированное коммутативное кольцо, где G — некоторая линейно упорядоченная абелевая группа. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) Если $0 \neq E$ — gr-инъективный модуль, то E является прямой суммой неразложимых gr-инъективных модулей.*

- *(2) Если $0 \neq E$ — неразложимый gr-инъективный модуль, то $End_{Gr(R)}(E)$ является локальным кольцом.*

- *(3) Если $0 \neq E$ — неразложимый gr-инъективный модуль, то $E = E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g))$, где $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$ и $g \in G$.*

- *(4) Если $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in Spec^{gr}(R)$, $g, h \in G$ и $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$,тогда $E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g)) \neq E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{q}}(h))$.*

Основная теорема 2 *Пусть R — gr-артино G-градуированное коммутативное кольцо, где G — некоторая линейно упорядоченная абелевая группа. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) R является конечным произведением gr-артиновых gr-локальных колец:*
$$R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n. \qquad (0.4)$$
$End_{Gr(R)}(P_i) = (P_i)_e$ является локальным кольцом. Если $R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m$, где P_i и N_j являются gr-артиновыми gr-локальными кольцами, то $m = n$, и существует такая биекция $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, что $N_i \cong P_{\pi(i)}$. Здесь $P_1, P_2, \ldots, P_n$ являются попарно неизоморфными gr-неразложимыми прямыми слагаемыми модуля R.
- *(2) $J^{gr}(P_i)$ является единственным gr-максимальным подмодулем модуля P_i, и $S_i = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}$ является gr-простым модулем.*
- *(3) Если S является gr-простым R-модулем, тогда существует такие P_i и $g \in G$, что $S = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}(g)$.*
- *(4) Если $0 \neq P$ является gr-конечнопорожденным gr-проективным модулем, то P является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективных модулей.*
- *(5) Если $0 \neq P$ является неразложимым gr-проективным модулем, то существуют такие P_i и $g \in G$, что $P \cong P_i(g)$.*
- *(6) Если $i \neq j$, то $\frac{P_i}{J^{gr}(P_i)} \neq \frac{P_j}{J^{gr}(P_j)}$.*

Основная теорема 3 *Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным коммутативным кольцом и $M \in gr(R)$. Тогда $\mu_i^{gr}(\mathfrak{p}, g, M) = dim_{\kappa_{(\mathfrak{p})}} Ext^i_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, M_{(\mathfrak{p})}(g))$.*

Основная теорема 4 *Следующие условия эквивалентны для точного слево предрадикального функтора F в $Gr(R)$.*

- *(1) F является радикальным функтором.*
- *(2) F сохраняет инъективность.*
- *(3) F является функтором сечения с носителем в замкнутом по специализации подмножестве множества $Spec^{gr}(R)$.*
- *(4) $\mathbf{R}F$ является абстрактным функтором локальных когомологий.*

Локально нетерова схема X называется горенштейновой, если кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ горенштейново для всех $x \in X$.

Говорят, что схема X удовлетворяет условию (**ELF**), если она отделима, нетерова, с конечной размерностью Крулля, и категория $coh(X)$ содержит достаточно много локально свободных пучков. Например, любая квази-проективная схема удовлетворяет этим условиям.

Стабильная категория $\underline{\mathbf{MCM}}(X)$ максимальных пучков Коэна-Маколея над X определяется следующим образом. Объектами являются максимальные $\mathcal{O}_X$-пучки Коэна-Маколея, т.е., $\mathcal{F} \in coh(X)$ с $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i > 0$. Группа морфизмов $Hom_{\underline{\mathbf{MCM}}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ определяется как факторгруппа абелевой группы $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ по подгруппе морфизмов $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, пропускаемых через локально свободные $\mathcal{O}_X$-пучки конечного типа.

В **четвертой главе** мы докажем, что если схема является горенштейновой, нетеровой, отделимой, с конечной размерностью Крулля и категория когерентных пучков содержит достаточно много локально свободных пучков, тогда ее категория особенностей триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных пучков Коэна-Маколея.

Основная теорема 5 *Пусть* $(X, \mathcal{O}_X)$ *– Горенштейна схема, удовлетворяющая условию* (**ELF**). *Тогда категория особенностей* $\mathbf{D}_{sg}(X)$ *триангулированно эквивалентна стабильной категории* $\underline{\mathbf{MCM}}(X)$ *максимальных пучков Коэна-Маколея над* X.

В **пятой главе** мы даем необходимое и достаточное условие, чтобы категория особенностей нетеровой схемы имела классический генератор.

Регулярный локус $Reg(X)$ в нетеровой схеме X - это множество точек $x \in X$, таких что $\mathcal{O}_{X,x}$ является регулярным локальным кольцом.

Основная теорема 6 *Следующие условия эквивалентны для нетеровой схемы* X:

- *(1)* $Reg(Z)$ *содержит непустое открытое подмножество для каждой целой замкнутой подсхемы* $Z \subset X$.
- *(2)* $Reg(Z)$ *открыто для каждой целой замкнутой подсхемы* $Z \subset X$.
- *(3) Абелева категория* $coh(Z)$ *имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы* $Z \subset X$.

- *(4) Триангулированная категория* $\mathbf{D}^b(coh(Z))$ *имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы* $Z \subset X$.

- *(5) Триангулированная категория* $\mathbf{D}_{sg}(Z)$ *имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы* $Z \subset X$.

Когда они выполняются, абелева категория $coh(X)$ *и триангулированные категории* $\mathbf{D}^b(coh(X))$, $\mathbf{D}_{sg}(X)$ *имеют классические генераторы.*

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителям Д. И. Пионтковскому и С. А. Гайфуллину за многочисленные и плодотворные беседы, повлиявшие не только на содержание диссертации, но и на стиль мышления диссертанта. Автор хранит благодарную память о Евгении Соломоновиче Голоде. Евгений Соломонович был для меня не только учителем, но и образцом в жизни и в науке. Автор благодарен Л. В. Кузьмину за многочисленную помощь в самых разных вопросах и интересные математические дискуссии. Автор также очень признателен коллективу кафедры высшей алгебры за прекрасную атмосферу. Работа выполнена при поддержке **Китайского стипендиального совета**.

Заключение

В диссертации были найдены градуированные аналоги некоторых классических теорем, рассмотрены категории особенностей схем. Основные результаты исследования:

- Доказано, что каждый градуированный инъективный модуль над gr-нетеровым кольцом имеет неразложимое разложение.

- Доказано, что каждый конечнопорожденный градуированный проективный модуль над gr-артиновым кольцом является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективный модулей.

- Найдена формула для выражения градуированных чисел Басса с помощью функтора Ext для градуированных модулей.

- Доказано, что левый точный радикальный функтор F имеет вид Γ_V для замкнутого по специализации подмножества V.

- Доказано, что если схема является горенштейновой, нетеровой, отделимой, с конечной размерностью Крулля и категория когерентных пучков содержит достаточно много локально свободных пучков, тогда ее категория особенностей триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных пучков Коэна-Маколея.

- Получено необходимое и достаточное условие, чтобы категория особенностей нетеровой схемы имела классический генератор.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

- [**1**] Li Lu, "Triangle equivalences and Gorenstein schemes", International Journal of Mathematics and Computer Science, Volume 15, No. 1, p. 301-307.

  Журнал индексируется в Web of Science/ Scopus.

  Импакт-фактор 0.7 (Scopus)

- [**2**] Li Lu, "Gr-injective modules and gr-projective modules over G-graded commutative rings Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, Volume 478, p. 172-193.

  Журнал индексируется в Web of Science/ Scopus.

  Импакт-фактор 0.300 (Scopus)

- [**3**] Li Lu, "Structural theorem for gr-injective modules over gr-noetherian G-graded commutative ring and local cohomology functors", Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University, Volume 53, p. 127-137.

  Журнал индексируется в Web of Science/ Scopus.

  Импакт-фактор 0.1 (Scopus)