ОТЗЫВ

научного руководителя
о диссертации Платоновой Ксении Сергеевны
«Групповой анализ кинетических уравнений и проблема замыкания моментной системы»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

К.С. Платонова поступила в аспирантуру кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ в 2014 году после окончания с отличием этого же факультета. Перед ней была поставлена задача исследования, связанного с идеей построения связей между различными моделями с помощью средств группового анализа. В данном случае речь шла о том, чтобы из кинетических уравнений (микромодель), например, уравнения Больцмана или Власова, получить уравнения механики сплошной среды (макромодель).

Сам переход между этими моделями изучался многими авторами, начиная с Максвелла и Больцмана; схема перехода от микропеременных, характеризующих состояние частиц, к макропеременным, характеризующим состояние среды так же восходит к работам этих авторов и состоит в вычислении моментов функции, характеризующей плотность распределения частиц по пространству и по скоростям. Нулевой момент (то есть просто интеграл по скоростям) естественно интерпретируется как плотность массы, моменты нулевого порядка – как плотность импульса, из моментов третьего порядка получаются плотность энергии. Соответствующие уравнения (называемые «моментными») для этих величин, получаемые интегрированием (с соответствующими степенными множителями) уравнения Больцмана, оказываются чрезвычайно близкими к уравнениям сплошной среды, однако в целом отличаются от них тем, что образуют бесконечную систему.

Основной вопрос, таким образом, состоит в том, чтобы «урезать» моментную систему и замкнуть ее некоторым образом так, чтобы получить уравнения сплошной среды. В этом, собственно, и состоит основная проблема. Она решалась разными авторами, исходя из различных соображений. Самым распространенным является метод возмущений, восходящий к идеям Гильберта, наиболее проработанный вариант которого известен как метод Чепмена-Энскога. Несмотря на изобилие работ, посвященных этой теме, окончательной формы замыкания, не подвергаемой критике, пока что нет.

Предлагаемый нами для решения этой проблемы подход состоит в том, чтобы, вычислив группу симметрий уравнения Больцмана, перенести ее на макропеременные, найти инварианты этой группы, и уже с их помощью осуществить замыкание.

Поставленная перед диссертантом задача звучала так: нужно выяснить, реализуема ли эта схема в принципе и можно ли этим путем получать осмысленные с точки зрения физики результаты. Для начала предлагалось разобраться с более простым одномерным случаем (в котором, кстати, уравнение Больцмана превращается в уравнение Лиувилля, поскольку интеграл исчезает), и потом уже подумать о том, что можно сделать для многомерного. Отмечу, что изначально положительный ответ на этот вопрос был совершенно неочевиден (даже для одномерного случая), и в процессе исследования сомнения в реализуемости данной схемы возникали регулярно. Таким образом, автор работы решал настоящую исследовательскую задачу, связанную с не теряющей актуальности проблемой связи между кинетическими уравнениями и уравнениями сплошной среды.

Следует подчеркнуть, что по-настоящему исследовательский характер работы существенно повлиял на ее трудоемкость, поскольку по мере изучения проблемы пришлось несколько раз трансформировать постановку задачи, вводя дополнительные условия, обеспечивающие удержание того или иного «физического смысла». Поэтому представленные в диссертации результаты (в особенности результаты 1-й главы) – это как минимум «третья итерация», которая дала уже полную ясность и в плане правильной постановки задачи, и в плане полученных результатов.

В итоге автором диссертации заявленная схема практически реализована в одномерном случае, и даже удалось отчасти перенести эту схему на случай трехмерный. Для одномерного уравнения выполнена полная групповая классификация уравнений по внешней силе (в максимальной общности – предположении, что она зависит от всех переменных: времени, координаты, скорости, фазовой плотности распределения частиц); действие полученных групп симметрий удалось перенести на моментные величины и вычислить инварианты. Для уравнения с нулевым силовым полем (оно является единственным, с точностью до преобразований эквивалентности, имеющим максимальную – восьмимерную – группу симметрий) инвариантов, связывающих конечное число моментных величин, нет, зато дифференциальный инвариант первого порядка дал хорошо известную систему из уравнения неразрывности и уравнения Хопфа. Тем самым фактически в одномерном варианте был получен положительный ответ на главный вопрос исследования. Более того, обнаружено, что всякое решение полученной системы для плотности и скорости продолжается до решения полной моментной системы, и найдено соответствующее этим моментам решение исходного уравнения Больцмана-Лиувилля. Таким образом, вопрос о принципиальной возможности реализовать схему перехода с использованием групповых средств получил исчерпывающий ответ.

Дальнейшая работа К.С. Платоновой связана уже с распространением полученного результата. Для одномерного случая найдены также дифференциальные инварианты второго порядка, они получились достаточно сложными, и выяснение того, что это значит с физической точки зрения, требует дополнительных рассмотрений. Для групп симметрий меньшей размерности инварианты имеются уже в конечной форме. Здесь тоже имеется ряд вопросов, разрешение которых выходит за рамки данной работы, но имеет достаточно понятные перспективы.

Существенным моментом является то, что сформированная в рамках исследования одномерного уравнения постановка задачи позволила продвинуться в понимании проблемы для трехмерного уравнения. Здесь главный результат состоит, во-первых, в том, что группа эквивалентности является группой диффеоморфизмов пространства переменных (t,x), а группа симметрий является ее подгруппой, и поэтому действие и той, и другой в любом случае переносится на моментные величины. Второй существенный момент – что классифицирующие уравнения для внешней силы и для интеграла столкновений распадаются, и поэтому появляется возможность сначала осуществить классификацию по силовому полю, а потом уже по функции рассеяния.

Правда, при этом обнаружен феномен, который возвращает нас к исходной постановке задачи. Феномен состоит в том, что уравнение Больцмана, в том виде, как оно написано, не выдерживает однородных растяжений пространственно-временных координат. Этот эффект, как это ни странно, был упущен предыдущими исследователями, которые занимались групповым анализом уравнения Больцмана (правда, в гораздо более частном, чем в диссертации, случае). С физической точки зрения это могло бы означать невыполнение принципа размерности, однако в «физическом» исполнении принцип размерности выполняется, поскольку перед интегралом столкновений стоит размерный коэффициент – квадрат «радиуса действия» частицы (кстати, именно он дал основание для использования метода возмущений). Этот коэффициент характеризует конкретный механизм столкновений, и его использование на самом деле противоречит исходным принципам группового анализа – допускать произвольный механизм столкновений, фиксируя результат его работы виде произвольной функции рассеяния частиц при столкновениях. По-видимому, для преодоления возникшего парадокса придется трансформировать исходную модель (уравнение Больцмана), и осуществлять анализ уже этой модели.

Наконец, автором произведен групповой анализ еще одного типа кинетических уравнений – уравнения Власова, где такого парадокса не возникло, и получена групповая классификация (правда, неполная, только по «большим» группам симметрий, включающим в себя группу Галилея) возможных взаимодействий между частицами.

Таким образом, в результате исследования не только получен ответ на исходный вопрос, но и сделан существенный задел в плане распространения полученных результатов на более широкий класс задач. То, что при этом возникли новые вопросы и проблемы, которые требуют дальнейшей работы – естественный для научно-исследовательской деятельности бесконечный процесс, в котором в качестве диссертационной работы выделена часть, обладающая достаточной целостностью и новизной, чтобы демонстрировать квалификацию кандидата наук.

Резюмируя сказанное, могу сказать, что диссертантом проделана очень большая по объему работа, получены новые и нетривиальные результаты, открывающие достаточно большой простор для дальнейших исследований. Поставленная задача решена полностью и даже, можно сказать, с избытком. Из личных качеств автора как математика отметил бы трудолюбие, тщательность и последовательность в проведении анализа и обосновании полученных результатов, терпение и настойчивость в стремлении к цели, даже когда получаемые результаты позволяют сомневаться в ее достижимости.

Считаю, что представленная работа соответствует всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, защищаемым в Московском государственном университете, а ее автор может быть рекомендован к присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., доцент,
профессор кафедры образовательных технологий
факультета педагогического образования
МГУ имени М.В.Ломоносова А.В. Боровских
30.06.2020.

Место работы: Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Адрес места работы: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д. 1
Тел.: *+7-495-939-28-73*
E-mail: bor.bor@math.msu.su

Подпись проф. А.В. Боровских заверяю.
Декан ФПО