УДК 539.3:534.1;539.4:624.07

Эффективные определяющие соотношения неупругих композитов

В.И. Горбачев [1]

Рассматривается первая специальная краевая задача механики деформируемого твердого тела для вычисления эффективных определяющих соотношений неупругого неоднородного тела. Задача сведена к серии вспомогательных краевых задач для функций, зависящих от формы тела и вида определяющих соотношений. В случае неоднородного по толщине слоя проблема вычисления эффективных соотношений сведена к операторному уравнению, для решения которого предложен итерационный метод последовательных приближений. Получена приближенная аналитическая формула, позволяющая достаточно просто находить эффективные определяющие соотношения слоистого композита по известным неупругим определяющим соотношениям его компонентов. Приближенная формула отражает характер структурной анизотропии слоистого композита и в упругом случае дает точные значения эффективных модулей упругости.

Ключевые слова: механика деформируемого твердого тела, композит, неупругость, эффективные определяющие соотношения.

The first special boundary-value problem in mechanics of deformable solid on obtaining the effective constitutive relations for inelastic inhomoge-neous solid, is considered. The problem is reduced to a set of the subsidiary boundary-value problems for functions depending on both solid configura-tion and kind of constitutive relations. In case of inhomogeneous by thick-ness layer the problem on obtaining the effective relations has been reduced to one operator equation; an iterative method of successive approximations is suggested for its investigation. An approximate analytical formula for quite simple finding the effective constitutive relations of layered composite on the basis of known inelastic constitutive relations for its components, is given. This approximate formula shows a type of structural anisotropy in a layered composite and what is more, it leads to the exact values of the effective elastic modulus in case of elasticity.

Key words: mechanics of a deformation solid body, composite, nonelasticity, effective relations.

[1] *Горбачев Владимир Иванович* — доктор физ.-мат. наук,проф. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vigorby@mech.math.msu.ru.

1. Постановка задачи. Пусть неоднородное тело, занимающее объем V, ограничено поверхностью Σ. Тело находится в равновесии под действием заданных на его поверхности распределенных нагрузок и перемещений. Отнесем тело к декартовым координатам. В случае малых деформаций напряженно-деформированное состояние тела описывается следующими уравнениями [1]:

$$\sigma_{ij,j} = 0\,, \qquad \sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon})\,, \qquad \varepsilon_{kl} = \Delta_{klmn} u_{m,n} \qquad (x \in V). \tag{1}$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij}, u_i — компоненты напряжений, деформаций и перемещений. $\check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon})$ обозначают определяющие соотношения. Галочка сверху — оператор по времени. Определяющие операторы в общем случае нелинейно зависят от компонентов тензора деформаций. Материальные константы и функции, входящие в определяющие соотношения, зависят от координат.

Пусть на всей границе тела заданы перемещения специального вида

$$u_i|_\Sigma = u_i^0 = \gamma_{ij} y_j\,, \qquad y \in \Sigma\,, \qquad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = const. \tag{2}$$

Задача (1), (2) называется первой специальной краевой задачей (СКЗ), из решения которой находятся эффективные определяющие соотношения неоднородного тела [2].

Легко показать, что в случае первой СКЗ

$$< \varepsilon_{ij} > \equiv \frac{1}{V} \int\limits_V \varepsilon_{ij} dV = \gamma_{ij}.$$

Решим далее первую СКЗ, найдем перемещения $u_i(x, \underset{\sim}{\gamma})$, деформации $\varepsilon_{ij}(x, \underset{\sim}{\gamma})$ и напряжения $\sigma_{ij}(x, \underset{\sim}{\gamma})$, усредним напряжения по объему:

$$< \sigma_{ij} > = \frac{1}{V} \int\limits_V \check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}(x, \underset{\sim}{\gamma})) dV = \check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = \check{h}_{ij}(< \underset{\sim}{\varepsilon} >) \tag{3}$$

Оператор, обозначенный символом $\underset{\sim}{\check{h}}$, называется эффективным оператором, а соотношения (3), позволяющие выразить средние по объему напряжения через средние по объему деформации, называются эффективными определяющими соотношениями типа $< \sigma > \sim < \varepsilon >$.

Сложность решения СКЗ существенно зависит от типа определяющих соотношений. Относительно просто решается СКЗ для линейно-упругого неоднородного тела, когда

$$\check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}. \tag{4}$$

Определяющие соотношения для линейного вязкоупругого неоднородного материала имеют вид

$$\check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = \int\limits_0^t \Gamma_{ijkl}(x, t, \tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(t) - \int\limits_0^t \tilde{\Gamma}_{ijkl}(x, t, \tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau,$$

где $\Gamma_{ijkl}(x, t, \tau)$ — сингулярные, а $\tilde{\Gamma}_{ijkl}(x, t, \tau)$ — регулярные ядра релаксации.

Для нестареющих материалов определяющие соотношения записываются в виде интегралов Стилтьеса [3]

$$\check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = \int\limits_0^t R_{ijkl}(x, t - \tau) d\varepsilon_{kl}(\tau) = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl} + \int\limits_0^t \frac{\partial R_{ijkl}(x, t - \tau)}{\partial t} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau\,,$$

где $C_{ijkl}(x) = R_{ijkl}(x, 0)$. В случае теории малых упруго-пластических деформаций

$$\check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} - C_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}).$$

Здесь $C_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon})$ — компоненты тензора второго ранга, нелинейно зависящие от компонент тензора деформаций. В частности, для пластически несжимаемого изотропного материала

$$C_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = 2G(x)\omega(x, \varepsilon_u)D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\,,$$

где $G(x)$ — упругий модуль сдвига, $\varepsilon_u = \sqrt{2D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}/3}$, $\omega(x, \varepsilon_u) = 1 - \sigma_u(x, \varepsilon_u)/(3G\varepsilon_u)$ — функция пластичности Ильюшина [4], $D_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2 - \delta_{ij}\delta_{kl}/3$.

В дальнейшем ограничимся определяющими соотношениями, которые могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} - \check{C}_{ij}(x, \underset{\sim}{\varepsilon}) \tag{5}$$

2. Случай линейно-упругого неоднородного тела. Решение задачи (1), (2) при определяющем операторе (4) представим следующим образом:

$$u_i(x, \underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + N_{ikl}(x)\gamma_{kl}\,, \tag{6}$$

где $N_{ikl}(x)$ — искомые непрерывные функции, симметричные по двум последним индексам. По перемещениям находим деформации, а потом напряжения:

$$\varepsilon_{ij} = (\Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn}N_{mkl,n})\gamma_{kl}\,, \qquad \sigma_{ij} = (C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})\gamma_{kl}.$$

Усредняя напряжения по объему тела и учитывая, что $\gamma_{kl} =< \varepsilon_{kl} >$, получаем выражения для эффективных модулей упругости через N_{ikl}-функции:

$$h_{ijkl} = \big\langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}\big\rangle. \tag{7}$$

Из уравнения равновесия (1), граничных условий (2) и из произвольности γ_{ij} следуют уравнения и граничные условия для N_{ikl}-функций

$$(C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j} = 0; \qquad N_{mkl}|_{\Sigma} = 0. \tag{8}$$

Довольно просто можно показать, что эффективные модули упругости, получаемые по формуле (7) из решения краевой задачи (8) удовлетворяют всем условиям симметрии и положительной определенности:

$$h_{ijkl} = h_{jikl} = h_{jilk} = h_{klij}\,; \qquad h_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl} > m\varkappa_{ij}\varkappa_{ij}\,,\ m > 0\,, \forall\varkappa_{ij} = \varkappa_{ji} \neq 0$$

Доказательство вполне аналогично приведенному в работе [5] для случая композита с регулярной структурой.

3. Общий случай нелинейных операторных определяющих соотношений. Рассмотрим далее случай общих определяющих соотношений вида (5). Решение первой СКЗ по аналогии с упругим решением будем искать в форме

$$u_i(x, \underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}_i(x, \underset{\sim}{\gamma})\,,$$

где $\check{N}_i(x, \underset{\sim}{\gamma})$ — непрерывные по координате операторы, принимающие нулевые значения на границе тела: $\check{N}_i|_{\Sigma} = 0$.

Далее найдем деформации:

$$\varepsilon_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}).$$

По формуле (5) определим напряжения:

$$\sigma_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijmn}(x)\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma}). \tag{9}$$

Усредняя напряжения по объему тела, находим эффективные определяющие соотношения неупругого неоднородного тела:

$$\check{F}_{ij}^{eff}(\underset{\sim}{\gamma}) = \Big\langle C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijmn}(x)\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big\rangle \tag{10}$$

Подстановка выражений (9) в уравнения равновесия приводит к краевой задаче для операторов $\check{N}_i(x,\underset{\sim}{\gamma})$:

$$\begin{cases} \Big[C_{ijkl}(x)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x,\underset{\sim}{\varepsilon}(x,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijmn}(x)\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\Big]_{,j} = 0\,, \\ \varepsilon_{ij}(x,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijmn}\check{N}_{m,n}(x,\underset{\sim}{\gamma})\,, \\ \check{N}_i|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

4. Неоднородная по толщине бесконечная в плане плита. Пусть L — толщина плиты, а $0 \leqslant x_3 \leqslant L$, $-\infty < x_I < +\infty$. В этом случае определяющие соотношения будут зависеть от координаты x_3:

$$\check{F}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}) = C_{ijkl}(x_3)\varepsilon_{kl} - \check{C}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}). \tag{12}$$

В случае неограниченной плиты операторы $\check{N}_i$, также зависящие только от координаты x_3, находятся из решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, вытекающих из трехмерных задач (11):

$$\begin{cases} \Big[C_{i3kl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{C}_{i3}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})) + C_{i3m3}(x_3)\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\Big]' = 0\,, \\ \varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijm3}\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\,, \\ \check{N}_i|_{x_3=0} = \check{N}_i|_{x_3=L} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Интегрируя первое из уравнений системы (13) и удовлетворяя граничным условиям, найдем

$$\begin{gathered} \check{N}'_i(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = C^{-1}_{i3n3}(x_3)\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\Big[C_{q3kl}\gamma_{kl} - \check{C}_{q3}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma})\Big]\Big\rangle - \\ -C^{-1}_{p3q3}(x_3)\Big[C_{q3kl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{C}_{q3}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(x_3,\underset{\sim}{\gamma})\Big]. \end{gathered} \tag{14}$$

Последнее выражение представляет собой операторное уравнение, поскольку оператор $\check{C}_{i3}$ зависит от тензора деформаций $\underset{\sim}{\varepsilon}$, компоненты которого в свою очередь определяются через операторы $\check{N}'_m$:

$$\varepsilon_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij} + \Delta_{ijm3}\check{N}'_m(x_3,\underset{\sim}{\gamma}).$$

Если сюда вместо $\check{N}'_m$ подставить выражения (14), то получим операторное уравнение для компонент тензора деформаций, которые собственно нам и нужны для вычисления эффективных определяющих соотношений:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij} = \Big\{\Delta_{ijkl} + \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big[\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\Big\rangle - C_{q3kl}\Big]\Big\}\gamma_{kl}- \\ -\Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big[\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\check{C}_{q3}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma})\Big\rangle - \check{C}_{n3}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma}))\Big].\end{gathered} \tag{15}$$

Выражения для напряжений в неоднородном по толщине неупругом слое получим, подставив деформации (15) в формулу (5)

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \Big[C_{ijkl}(x_3) + C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\Big\rangle- \\ -C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)C_{n3kl}(x_3)\Big]\gamma_{kl}- \\ -\Big[\check{C}_{ij}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma})) + C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\check{C}_{q3}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma}))\Big\rangle- \\ -C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\check{C}_{n3}(x_3,\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma}))\Big]\end{gathered}$$

Подстановка выражений (14) в формулу (10), равно как и усреднение напряжений (14), дает выражение для эффективных определяющих соотношений неоднородного слоя, по форме записи схожее с исходными выражениями (12):

$$\check{F}^{eff}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = h_{ijkl}\gamma_{kl} - \check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}), \tag{16}$$

где h_{ijkl} — компоненты эффективного тензора упругости, а $\check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma})$ — неупругие составляющие эффективных определяющих соотношений неоднородного слоя:

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl}\rangle + \langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\rangle\langle C^{-1}_{n3p3}\rangle^{-1}\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\rangle - \langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}C_{n3kl}\rangle\,, \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) = \Big\langle\check{C}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma}))\Big\rangle + \Big\langle C_{ijm3}C^{-1}_{i3n3}\Big\rangle\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\check{C}_{q3}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma}))\Big\rangle- \\ -\Big\langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\check{C}_{n3}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma}))\Big\rangle.\end{gathered}$$

Выражения (17) для эффективных модулей упругости были получены в разные годы различными способами И.М. Лифшицем и Д.Н. Розенцвейгом [6] в 1946 г., Л.П. Хорошуном [7] в 1966 г., Б.Е. Победрей и В.И. Горбачевым [8] в 1975 г.

5. Приближенный метод решения операторного уравнения. Основная трудность в предлагаемом способе нахождения эффективных определяющих соотношений заключается в решении операторного уравнения (15). Запишем его следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = B_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big[\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\check{C}_{q3}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma})\Big\rangle - \check{C}_{n3}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\underset{\sim}{\gamma}))\Big]\,, \tag{18}$$

где

$$B_{ijkl}(x_3) = \Delta_{ijkl} + \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big[\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\Big\rangle - C_{q3kl}\Big].$$

Заметим, что среднее значение операторного добавка в правой части уравнения (18) равно нулю. Это обстоятельство позволяет воспользоваться для его решения методом последовательных приближений. Положим

$$\varepsilon^{\{n\}}_{ij} = B_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \Delta_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}(x_3)\Big[\Big\langle C^{-1}_{n3p3}\Big\rangle^{-1}\Big\langle C^{-1}_{p3q3}\check{C}_{q3}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{n-1\}})\Big\rangle - \check{C}_{n3}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{n-1\}})\Big].$$

Для начала рекурсии возьмем $\varepsilon_{ij}^{\{0\}} = \gamma_{ij}$. Эффективные операторы $\check{h}_{ij}$ в n-м приближении принимают вид

$$\check{h}_{ij}^{\{n\}}(\underset{\sim}{\gamma}) = \Big\langle \check{C}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{n\}}) \Big\rangle + \Big\langle C_{ijm3} C_{i3n3}^{-1} \Big\rangle \Big\langle C_{n3p3}^{-1} \Big\rangle^{-1} \Big\langle C_{p3q3}^{-1} \check{C}_{q3}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{n\}}) \Big\rangle -$$
$$- \Big\langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \check{C}_{n3}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{\{n\}}) \Big\rangle \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Рассмотрим нулевое приближение для операторов $\check{h}_{ij}$

$$\check{h}_{ij}^{\{0\}}(\underset{\sim}{\gamma}) = \Big\langle \check{C}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) \Big\rangle + \Big\langle C_{ijm3} C_{i3n3}^{-1} \Big\rangle \Big\langle C_{n3p3}^{-1} \Big\rangle^{-1} \Big\langle C_{p3q3}^{-1} \check{C}_{q3}(\underset{\sim}{\gamma}) \Big\rangle -$$
$$- \Big\langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \check{C}_{n3}(\underset{\sim}{\gamma}) \Big\rangle.$$

Формула (16) для эффективных определяющих соотношений в нулевом приближении принимает вид

$$\begin{gathered} \check{F}_{ij}^{eff}(\underset{\sim}{\gamma}) = h_{ijkl}\gamma_{kl} - \check{h}_{ij}(\underset{\sim}{\gamma}) \approx \\ \approx \big\langle \check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}) \big\rangle + \big\langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \big\rangle \big\langle C_{n3p3}^{-1} \big\rangle^{-1} \big\langle C_{p3q3}^{-1} \check{F}_{q3}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}) \big\rangle - \big\langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \check{F}_{n3}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}) \big\rangle. \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что, согласно (12), имеем

$$C_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl} - \check{C}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}) = \check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}).$$

Положив в формуле (19) $\check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\gamma}) = C_{ijkl}(x_3)\gamma_{kl}$, получим точные эффективные модули упругости неоднородного по толщине слоя (17).

6. Точные и приближенные функции релаксации неоднородного по толщине вязкоупругого слоя. Рассмотрим нестареющий материал, для которого

$$\sigma_{ij} = \check{F}_{ij}(x_3, \underset{\sim}{\varepsilon}) = \int_0^t R_{ijkl}(x_3, t - \tau) d\varepsilon_{kl}(\tau) = \check{R}_{ijkl}(x_3, t)\varepsilon_{kl}(t)\,,$$

где $\check{R}_{ijkl}(x_3, t)$ — операторы по времени, с которыми можно обращаться как с функциями от x_3 [9]. Решение первой СКЗ в случае неоднородного вязкоупругого слоя ищем в виде, аналогичном (6)

$$u_i(x, \underset{\sim}{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + \check{N}_{ikl}(x_3, t)\gamma_{kl}\,,$$

Операторы $\check{N}_{ikl}(x_3, t)$ находятся точно так же, как и в упругом случае. В результате получается точная формула для эффективных операторов линейного вязкоупругого слоистого композита такая же, как и (17), только в ней следует заменить C_{ijkl} на $\check{R}_{ijkl}$, т.е.

$$\check{R}_{ijkl}^{eff} = \big\langle \check{R}_{ijkl} \big\rangle + \big\langle \check{R}_{ijm3} \check{R}_{m3n3}^{-1} \big\rangle \big\langle \check{R}_{n3p3}^{-1} \big\rangle^{-1} \big\langle \check{R}_{p3q3}^{-1} \check{R}_{q3kl} \big\rangle - \big\langle \check{R}_{ijm3} \check{R}_{m3n3}^{-1} \check{R}_{n3kl} \big\rangle. \tag{20}$$

Расшифровка операторов, входящих в правую часть формулы (20), в общем случае является довольно сложной проблемой. Для простых композитов и для случая двухфазного композита с изотропными фазами это выполнено в книге [10].

Приближенное выражение для эффективных операторов следует из общей формулы (19)

$$\check{R}_{ijkl}^{eff} \approx \langle \check{R}_{ijkl} \rangle + \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \rangle \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} \check{R}_{q3kl} \rangle - \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \check{R}_{n3kl} \rangle.$$

Эта приближенная формула отражает тип анизотропии композита. Из нее же сразу получается выражение для эффективных функций релаксации. Для этого следует просто убрать галочки над операторами. В результате следует

$$R_{ijkl}^{eff}(t) \approx \langle R_{ijkl}(t) \rangle + \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} \rangle \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} R_{q3kl}(t) \rangle - \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} R_{n3kl}(t) \rangle$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-00020а)

Список литературы

1. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995.

2. *Hashin Z., Rosen B.W.* The elastic moduli of fiber-reinforced materials// J. Appl. Mech. 1964. **31**, № 2. 223–232.

3. *Кристенсен Р.* Введнение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.

4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948.

5. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осредненние процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.

6. *Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н.* К теории упругих свойств поликристаллов// Журнал эксперим. и теор. физ., 1946. **16**, № 2. 967–980.

7. *Хорошун Л.П.* Зависимости между напряжениями и деформациями в слоистых средах// Прикладная механика, 1966. **2**, № 2. 14–19.

8. *Победря Б.Е., Горбачев В.И.* О статических задачах упругих композитов// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 1975. № 5. 101–111,

9. *Ильюшин А.А.,Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970.

10. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Поступила в редакцию 14.12.2012