**ИНЕРЦИАЛЬНОЕ СЧИСЛЕНИЕ В ПРИПОЛЯРНЫХ РАЙОНАХ: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАЗИКООРДИНАТ И КВАЗИУГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ**

**А.А. Голован**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.*

 *Москва, Ленинские горы, д.1. Россия.*

 *Тел.: +7 (495) 939-5933,* *E-mail:* *aagolovan@yandex.ru*

***Ключевые слова:*** инерциальное счисление, полярные районы, квазикоординаты, квазиуглы ориентации

***Аннотация***

*Инерциальное счисление в полярных районах имеет особенность, связанную с невозможностью определения значений долготы и угла истинного курса в точке полюса. Описывается методический прием, устраняющий отмеченную особенность. Он основан на введении квазигринвичской системы координат и использовании соответствующих квазигеографических координат, квазиуглов ориентации вместо традиционных. Прием добавляет необременительные вычисления в штатный алгоритм бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС) без изменения его базовых вычислительных функций.*

***Введение***

Инерциальное счисление в полярных районах имеет особенность, связанную с невозможностью определения значений долготы и угла истинного курса в точке полюса. Описывается методический прием, устраняющий отмеченную особенность. Он основан на введении квазигринвичской системы координат и использовании соответствующих квазигеографических координат, квазиуглов ориентации вместо традиционных. При этом квазипараметры не имеют особенностей вычисления в полярных районах. Прием добавляет необременительные вычисления в штатный алгоритм БИНС без изменения его базовых вычислительных функций.

Представляемый материал основан на работах автора и его коллег [1]-[5], которые были связаны с проведением аэрогравиметрических съемок в районах Арктики и Антарктики, где проблема плохой обусловленности указанных навигационных параметров четко проявилась. Полезной для автора оказалась также публикация [6].

В инерциальной навигации есть следующие особенности перехода от традиционных географических координат λ (долгота), φ (широта), параметров ориентации корпуса объекта: углов истинного курса ψ, тангажа υ, крена γ к их квазианалогам:

* традиционные параметры основаны на понятии географической вертикали, направлением на север;
* квазипараметры связаны с понятием геоцентрической вертикали и направлением на квазисевер;
* уравнения автономного инерциального (шулеровского) счисления должны быть записаны в осях опорного географического трехгранника с законом относительно либо абсолютно свободной ориентации в азимуте, когда азимутальная (вертикальная) компонента относительной или абсолютной угловой скорости упомянутого географического трехгранника равна нулю [7], [8];
* алгебраическое перевычисление традиционных и квазипараметров должно быть основано на элементах матриц взаимной ориентации (или кватернионов) соответствующих трехгранников.

Последовательность изложения материала такова:

* описываются используемые системы координат и матрицы ориентации;
* приводятся необходимые геометрические и апроксимационные соотношения;
* описываются модели для вычисления квазипараметров;
* кратко описываются модели уравнений инерциального счисления, возникающие при использовании законов относительно или абсолютно свободной ориентации в азимуте опорного географического трехгранника.

***Используемые системы координат***

1. *Гринвичская (земная) система координат .* Точка *O* – центр навигационного эллипсоида; ось .- ось вращения Земли; оси лежат в плоскости экватора; ось лежит в плоскости гринвичского (нулевого меридиана.
2. *Квазигринвичская система координат .* За квазисеверный полюс принимается точка *Nq* с географическими координатами *λ = 180o, φ = 0o*, квазиюжный полюс *Sq* будет иметь координаты *λ = 0o, φ = 0o*. Плоскость квазиэкватора совпадает с плоскостью меридиана, содержащего точки с координатами *(λ = 90o, φ = 0o), (λ = 270o, φ = 0o).* Нулевым квазимеридианом полагается меридиан, проходящий через ось вращения Земли и точки северного и южного квазиполюсов, он совпадает с обычным нулевым меридианом. Взаимосвязь систем координат , такова:

= (1)

.

на угол *(-90o)* против часовой стрелки, - соответствующая матрица взаимной ориентации, , (i=1,2,3) –декартовы координаты некой точки.



Рис. 1. (см. [6]) *О* – центр навигационного эллипсоида, *N, S* – северный, южный полюса, *Nq, Sq*- квазисеверный, квазиюжный полюса, жирные линии – экватор и нулевой меридиан.

1. *Географические системы координат*  Точки *M* – начало соответствующих систем координат. Оси направлены вдоль географической вертикали в точке *M –* вдоль нормали к поверхности навигационного эллипсоида, проходящей через точку *M.* Географическая (северная) широтаφ *-* угол между(или)и экваториальной плоскостью *,* отсчитываемый от этой плоскости к Северу. Восточная долгота *λ -* угол между проекцией ортана экваториальную плоскость и осью *,* отсчитываемый от этой оси к Востоку. Акцент «0» в обозначении трехгранника отражает частный случай ориентации его горизонтальных осей в азимуте, когда ось лежит в плоскости текущего меридиана и направлена на Север, ось . Такая ориентация трехгранника называется ориентацией в географической координатной сетке.

Ориентацию произвольного географического трехгранника относительно будем определять азимутальным углом χ*:* Переход от трехгранникакосуществляется поворотом против часовой стрелки на угол χ вокруг оси .

Одновременно с трехгранниками , рассматриваются системы координат , (с началом в точке *O*), оси которых параллельны соответствующим осям трехгранников , . Имеем

 (2)

Поведение во времени азимутального угла χ определяется принятым законом азимутальной ориентации опорного географического трехгранника В случае относительно свободной ориентации третья компонента вектора относительной угловой скорости этого трехгранника равна нулю и

 (4)

В случае абсолютно свободной ориентации третья компонента вектора абсолютной угловой скорости этого трехгранника равна нулю и

 (5)

В (4), (5) – восточная составляющая вектора относительной линейной скорости точки *M*, - долготный радиус кривизны (соответствующая формула будет представлена ниже), *u* – угловая скорость вращения Земли.

1. *Квазигеоцентрическая система координат .* Ось квазигеоцентрической системы координат направлены по геоцентрической вертикали или по радиус-вектору Квазигеоцентрические координаты (квазидолгота), (квазиширота) вводятся по аналогии с обычными геоцентрическими координатами , , но отсчитываются от осей квазигринвичской системы координат . Оси , лежат в плоскости, перпендикулярной радиус-вектору , ось направлена на квазивосток, ось направлена на квазисевер. Матрица взаимной ориентации трехганников , такова

 (6)

1. *Связанная система координат .* Углы истинного курса ψ, гироскопического курса , крена γ, тангажа υ. Имея ввиду, что все дальнейшие построения связаны моделями инерциальной навигации, то точка совпадает с приведенным центром БИНС или совпадает с началом ее приборной системы координат. Ось направлена в сторону правого крыла (борта), ось направлена по продольной оси к носу объекта, ось расположена в плоскости симметрии и направлена вверх:

 (7)

Углом истинного курса называется угол между осью (направлением на Север) и проекцией продольной оси объекта на горизонтальную плоскость отсчитываемый по часовой стрелке. Углом гироскопического курса называется угол между осью и проекцией продольной оси объекта на горизонтальную плоскость отсчитываемый по часовой стрелке. Тангаж - угол между продольной осью и горизонтальной плоскостью . Крен - угол поворота в плоскости симметрии объекта. Матрица взаимной ориентации систем , имеет вид:

 (8)

Матрица ориентации имеет аналогичный вид (8), где вместо угла истинного курса надо использовать угол гироскопического курса

*Замечание.* Третьи столбцы матриц ориентации одинаковы и являются функциями углов крена и тангажа . Поэтому, если эти матрицы являются параметрами алгоритма инерциального счисления, то не возникает никаких особенностей вычисления этих углов в зависимости от района навигации.

***Взаимосвязь географических координат и квазипараметров***

Повторим особенности задачи перехода от традиционных географических координат λ, φ, угловых параметров ориентации ψ, , γ, υ к их квазианалогам в инерциальной навигации:

* традиционные параметры основаны на понятии географической вертикали, а квазипараметры используют понятие геоцентрической вертикали;
* бортовой алгоритм БИНС в приполярных районах должен использовать закон либо относительной, либо абсолютной ориентации в азимуте опорного географического трехгранника (см. (4), (5)), и, как следствие, вычисление элементов матриц , ;
* соответственно, непосредственное счисление географических координат на основе соответствующих кинематических уравнений не используется;
* пересчеты обычных и квазипараметров должны быть основаны на значениях элементов указанных матриц , , относящихся к выходной навигационной информации БИНС.

Исходные соотношения

 (9)

Здесь приведены известные формулы связи гринвичских координат, с географическими координатами *h* (высота), – элементы третьих столбцов матриц *a* – большая полуось навигационного эллипсоида Земли, - квадрат первого экцентриситета.

С другой стороны имеем

(10)

где – геоцентрические (сферические) координаты точки *M* (очевидно, что ), – модуль радиус-вектора.

Тогда

 (11)

Здесь аргументами стандартной математической функции языка С служат параметры пропорциональные значениям синуса и косинуса определяемого угла.

Другая форма

и

= (12)

Далее следует воспользоваться следующей приближенной формулой [1], связывающей с высокой точностью значения геоцентрической и географической широт

Тогда разлагая вряд соотношения (12) по малому параметру ( и используя элементы матриц , получим

 (13)

 (14)

Формулы (13), (14) предлагается использовать для вычисления значений квазигеографических координат. Эти формулы не имеют особенностей в зависимости от района навигации, постольку оперируют с элементами матриц ориентации не имеющих особенностей вычисления.

*Вычисление угла квазикурса* . В условиях, когда опорный географический трехгранник реализует закон относительной, либо абсолютной ориентации в азимуте, угол истинного курса ψ определяется при помощи значений углов гироскопического курса и азимутального угла или угла «платформы» :

 (15)

Углы , в свою очередь вычисляются при помощи обратных тригонометрических функций

от элементов матрицы ориентации и матрицы (см. (3)). Напомним, что угол характеризует взаимную ориентацию вектора направления на Север, спроектированного на горизонтальную плоскость , и оси .

По аналогии введем квазиугол платформы, который будет теперь отсчитываться от проекции на плоскость направления на квазисевер до оси . Соответственно имеем

 (16)

где - матрица ориентации географического трехгранника относительно квазигринвичской системы координат , , *(i, j = 1,2,3)* - элементы матрицы .

Тогда угол квазикурса будет определятся так

 (17)

Здесь выделим, что при вычислении угла квазикурса в (17) используется значение угла гироскопического курса – выходного параметра алгоритмов стандартного счисления БИНС, а квазиугол «платформы» однозначно определяется значениями элементов матрицы , также являющимися выходными параметрами алгоритмов стандартного счисления БИНС. Таким образом, особенностей вычисления значения угла квазикурса не возникает.

Напомним также, что значения углов тангажа υ и крена γ не зависят от использования квазикоординат, они вычисляются по стандартным формулам инерциального счисления.

*Квазипутевой угол (квазискоростной курс)* . В навигации используются углы , , характеризующие ориентацию вектора относительной скорости объекта относительно плоскости горизонта и направления на Север. Угол наклона траектории - угол между вектором и горизонтальной плоскостью , отсчитываемый в положительном направлении (против часовой стрелки) от плоскости . Имеем

 (18)

где - вертикальная составляющая скорости объекта, – горизонтальные компоненты вектора скорости .

При вычислении угла наклона траектории, очевидно, не возникает особенностей в полярных районах.

Путевой угол - угол между осью (направлением на Север) и проекцией вектора на горизонтальную плоскость , отсчитываемый также как и угол истинного курса по часовой стрелке. Другое название угла скоростного курса – скоростной курс. Имеем

 (19)

Другой, эквивалентный вариант вычисления угла

 (20)

где - компоненты горизонтальной относительной линейной скорости объекта в осях.

Очевидно, что тогда выражение для квазискоростного курса , как угла между осью (направлением на квазисевер) и проекцией вектора на горизонтальную плоскость , отсчитываемый также как и угол истинного курса по часовой стрелке, примет вид:

 (21)

Здесь выделим, что при вычислении угла квазискоростного курса в (17) используются значения относительных скоростей – выходных данных стандартного счисления БИНС, а также ранее вычисленного (см. (17)) квазиугла . Таким образом, особенностей вычисления значения угла квазипутевого угла также не возникает.

***Уравнения автономного инерциального счисления: варианты относительно либо абсолютно свободной ориентации в азимуте.***

*Модель динамических уравнений движения точки в осях* Будем следовать [7]. Имеем

 (22)

Здесь – перепроектированные из приборных осей БИНС при помощи матрицы показания акселерометров, – абсолютное значение нормальной удельной силы тяжести вычисляемое, например, по формуле Гельмерта, – квадрат частоты Шулера, – горизонтальные компоненты вектора относительной угловой скорости трехгранника

В случае закона относительно свободной ориентации трехгранника в азимуте а случае закона абсолютно свободной ориентации

***Кинематическое уравнения для матрицы*** Имеем

*=* (23)

и в обычной ситуации

 (24)

***Кинематическое уравнения для матрицы*** . Это уравнение можно записать в разных формах, с использованием кватернионов, использованием различных методов численного интегрирования. Приведем одну из них

 (25)

Здесь - измерения датчиков угловой скорости БИНС.

Легко заметить, что уравнения (22)-(25) не имеют особенностей в зависимости от района навигации, за исключением вычисления географических координат и азимутального угла по формулам (24). Особенности вычисления последних возникают в высоких широтах, когда и следует переходить к квазикоординатам.

***Выводы.***

Для избежания особенностей инерциального счисления БИНС в приполярных районах следует:

* использовать закон абсолютно- либо -свободной ориентации в азимуте опорного географического трехгранника при моделировании кинематических и динамических модельных уравнений БИНС;
* использовать матрицу (либо соответствующий кватернион) для моделирования ориентации этого трехгранника;
* вычислять квазикоординаты (квазидолгота), (квазиширота) по формулам (13), (14);
* вычислять угол квазикурса по формуле (17);
* вычислять квазипутевой угол по формуле (21).

Все эти дополнительные перевычисления представляются не обременительными для бортового вычислителя БИНС.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00179.

***Список литературы***

*[1]* [*Golovan A.A.*](https://istina.msu.ru/workers/214833/)[*Inertial navigation in the Earth polar regions with using spatial quasi-coordinates*](https://istina.msu.ru/publications/article/257635991/)*. в* [*Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)*](https://istina.msu.ru/journals/842454/)*, 2019, V 10, #4, p. 707-714*

*[2]* [*Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли. Под общ. ред. В.Г.Пешехонова*](https://istina.msu.ru/collections/55644270/)*, СПБ.: ГНЦ РФ АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2017, с. 201-209, с. 389*

*[3] Richter T.G., Greebaum J.S., Young D.A., Blankenship D.D., Hewison W.Q., Tuckett H. University of Texas Airborne Gravimetry in Antarctica, 2008 to 2013 // Proceeding of IAG International Sympoisium on Terrestrial Gravimetry: Static and Mobile Measurements. Saint-Petersburg, Russia, 2013*

*[4] Koneshov, V.N., Klevtsov, V.V. & Solovev, V.N. Upgrading the GT-2A aerogravimetric complex for airborne gravity measurements in the Arctic Izv., Phys. Solid Earth (2016) 52: 452.* [*https://doi.org/10.1134/S106935131603006X*](https://doi.org/10.1134/S106935131603006X)

*[5]* [*Golovan A.A.*](https://istina.msu.ru/workers/214833/)*, [Iakushyk L.Yu](https://istina.msu.ru/workers/19814376/%22%20%5Co%20%22Iakushyk%20L.Yu%20%28%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B9%D1%82%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%20%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%83%20%D1%81%D0%BE%D1%82%D1%80%D1%83%D0%B4%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29), [Smoller Yu L.](https://istina.msu.ru/workers/586797/%22%20%5Co%20%22%D0%A1%D0%BC%D0%BE%D0%BB%D0%BB%D0%B5%D1%80%20%D0%AE.%D0%9B.%20%28%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B9%D1%82%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%20%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%83%20%D1%81%D0%BE%D1%82%D1%80%D1%83%D0%B4%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29), [Yurist S.Sh](https://istina.msu.ru/workers/586798/%22%20%5Co%20%22%D0%AE%D1%80%D0%B8%D1%81%D1%82%20%D0%A1.%D0%A8.%20%28%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%B9%D1%82%D0%B8%20%D0%BD%D0%B0%20%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%83%20%D1%81%D0%BE%D1%82%D1%80%D1%83%D0%B4%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29),*[*Wayne Hewison*](https://istina.msu.ru/workers/19814378/)*.* [*Using quasicoordinates in software of multi-antenna GPS receivers and airborne gravimeter GT-2A for surveys in polar areas*](https://istina.msu.ru/publications/article/19814398/)*.* [*Proceedigs of the 4th Symposium on Terrestrial Gravimetry: Static and Mobile Measurements (TG-SMM 2016)*](https://istina.msu.ru/collections/19814397/)*, Saint-Petersburg, Russia, 2016*

*[5] Smoller, Y.L., Yurist, S.S., Golovan, A.A. et al. Using a multiantenna GPS receiver in the airborne gravimeter GT-2a for surveys in polar areas. Gyroscopy Navig. (2015) 6: 299.* [*https://doi.org/10.1134/S2075108715040100*](https://doi.org/10.1134/S2075108715040100)

[6]. Юманов В.С. Алгоритм преобразования квазигеографических координат из одной системы геодезических координат в другую. Материалы ХV конференции молодых ученых под общей редакцией В. Г. Пешехонова. Издательство: ["Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор"](https://www.elibrary.ru/publisher_books.asp?publishid=824) (Санкт-Петербург). 2013

*[7]. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы инерциальных навигационных систем. М.: Издательство Московского университета, 2020. -160 с.*

*[8] Savage P.G. Strapdown Analytics. Second Edition, Strapdown Associates, Inc., Maple Plane, Minnesota, 2007.*