МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Будзинский Станислав Сергеевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР В НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ДИФРАКЦИЕЙ

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Диссертационная работа выполнена на кафедре математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Разгулин Александр Витальевич**, доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Еленин Георгий Георгиевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
	Костин Андрей Борисович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики института общей профессиональной подготовки Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»
	Фурсов Андрей Серафимович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Защита состоится «9» декабря 2020 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, строение 52, факультет ВМК, ауд. 685.

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27). Со сведениями о регистрации участия в защите в удаленном интерактивном режиме и с диссертацией в электронном виде также можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/326796247/.

Автореферат разослан « »   2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук   Ильин А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Нелинейные оптические системы с контурами обратной связи (КОС) примененяются для решения различных задач обработки информации: подавления искажений в системах адаптивной оптики, устойчивой и защищенной высокоскоростной передачи данных, аналоговой реализации нейронных сетей (в том числе оптоэлектронных систем резервуарных вычислений). Для настройки и эффективного применения подобных систем важен этап математического моделирования, позволяющий определить зависимость свойств нелинейной оптической системы от ее параметров. Особую роль при этом играет моделирование регулярных и хаотических динамических режимов: в адаптивной оптике их важно уметь подавлять, а в задачах передачи данных и системах резервуарных вычислений — генерировать.

Одной из важных задач современной прикладной математики является определение механизмов, стоящих за явлениями самоорганизации в различных системах окружающего мира. Особый интерес при этом представляют теоретически предложенные новые механизмы и режимы структурообразования, которые только предстоит встретить на практике. Типичным математическим объектом, с которым при этом предстоит работать, является система квазилинейных уравнений в частных производных. В зависимости от геометрии области, выбора граничных условий, вида нелинейности, симметрий системы, наличия нелокальных взаимодействий и ряда других факторов, исследуются возможные бифуркации и соответствующие им решения, то есть режимы самоорганизации. С этой точки зрения нелинейные оптические системы с контурми обратной связи удобны для исследования, поскольку они обладают большим числом относительно просто варьируемых параметров: изменяя апертуру оптической системы, конфигурацию КОС и физические параметры системы, можно добиться появления различных стационарных и динамических структур.

Пример оптической системы с обратной связью представлен на Рисунке 1. Она состоит из 1) жидкокристаллического пространственно-временного модулятора света (ЖК-ПВМС, в общем случае — тонкого слоя нелинейной керровской среды); 2) зеркала; 3) фотопроводящей пластинки, связанной с ЖК-ПВМС; 4) устройства пространственного преобразования световой вол-

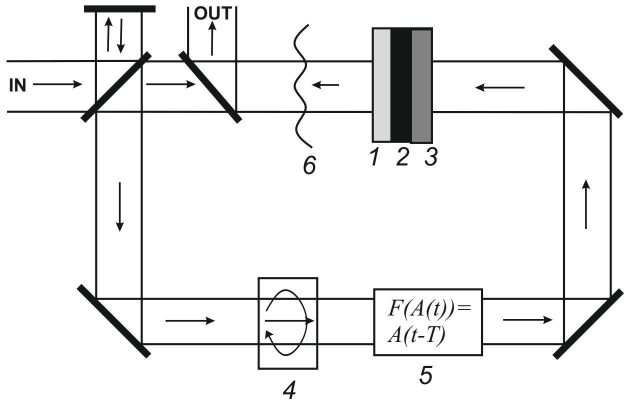


Рис. 1 — Пример схемы нелинейной оптической системы.

ны в контуре обратной связи; 5) устройства, реализующего запаздывание в КОС. Элемент 6) обозначает искаженный прохождением сквозь слой ЖК-ПВМС волновой фронт. На вход системе подается плоская электромагнитная волна, которая проходит через тонкий слой полупрозрачной нелинейной среды керровского типа и попадает в КОС. При взаимодействии с нелинейной средой у плоской электромагнитной волны изменяется фаза на величину, называемую фазовой модуляцией. Фазовая модуляция пропорциональна толщине слоя нелинейной среды и возмущению его коэффициента преломления в данной точке в данный момент времени. После прохождения через КОС промодулированная волна изменяет поляризацию слоя нелинейной среды (либо непосредственно взаимодействуя с ним, либо посредством фотопроводящей пластинки). Динамика такой оптической системы описывается уравнением относительно фазовой модуляции, которое выводится из законов, связывающих коэффициент преломления среды и её поляризацию, вызванную внешним электрическим полем.

Конкретный вид математической модели нелинейной оптической системы определяется ее апертурой, устройством КОС и набором учитываемых физических явлений. Это может быть интерференция опорной и отраженной световых волн [1—3], дифракция в КОС [4], запаздывание в КОС [5; 6] (обусловленное конечной скоростью распространения света или внесенное специальным устройством), поворот или отражение в КОС [1; 6; 7], Фурье-фильтрация [8]. В диссертационной работе исследуется модель с дифракцией и запаздыванием, описываемая системой квазилинейного уравнения диффузии и уравнения типа Шредингера, но без поворота или отражения. Модели, учитывающие одновременно дифракцию и запаздывание, уже рассматривались ранее (см. [9]), однако ввиду сложности задачи в литературе не проводились всесторонее исследование их математических свойств и моделирование структурообразования. Важно отметить, что в случае с временной нелокальностью отсутствие пространственной нелокальности усложняет анализ модели, поскольку система обладает более богатой группой симметрий.

Один из подходов к исследованию динамики квазилинейных уравнений в частных производных, который был успешно применен к различным моделям математической физики (трехмерным уравнениям Навье–Стокса [10], моделям океана [11] и другим), опирается на геометрию области: на ее малую толщину в одном из направлений. Метод основывается на спектральной сходимости дифференциальных операторов при истончении области и позволяет получить предельное уравнение в области меньшей размерности, чьи динамические свойства непосредственно связаны с динамикой исходной модели. В литературе отмечено, что данный подход может быть применен и в случае краевых условий на наклонную производную [12], однако работ, изучающих данное направление, не наблюдается. В диссертационной работе изучается модель в тонком кольце с условиями на наклонную производную, которые используются для моделирования спиральных волн.

Целью данной работы является аналитическое и численное исследование новых волновых и спиральных структур в иерархии математических моделей нелинейной оптической системы с дифракцией и контуром обратной связи с запаздыванием.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Для одномерной модели на окружности аналитически исследовать существование и устойчивость возникающих в результате $O(2)$-эквивариантной бифуркации Андронова–Хопфа вращающихся и стоячих волн. Найти гарантирующие их орбитальную асимптотическую устойчивость параметры модели. Разработать численный метод для решения квазилинейного функционально-дифференциального уравнения диффузии с запаздыванием на окружности и провести вычислительные эксперименты по возбуждению бифуркационных волн.

2. Аналитически исследовать связь между двумерной моделью в тонком кольце с краевыми условиями Неймана и одномерной моделью на окружности. Разработать численный метод для решения квазилинейного функционально-дифференциального уравнения диффузии с запаздыванием в тонком кольце с краевыми условиями Неймана и провести вычислительные эксперименты по возбуждению бифуркационных волн.
3. Аналитически исследовать связь между двумерной моделью в тонком кольце с краевыми условиями на наклонную производную и одномерной моделью на окружности. Для этого изучить свойства оператора Лапласа в кольце с краевыми условиями на наклонную производную: установить свойства порождаемой им полугруппы операторов и изучить его спектральную сходимость при стремлении толщины кольца к нулю. Разработать численный метод для решения квазилинейного функционально-дифференциального уравнения диффузии с запаздыванием в тонком кольце с краевыми условиями на наклонную производную и провести вычислительные эксперименты по возбуждению бифуркационных спиральных волн.

Научная новизна:

1. Впервые предложена конечномерная модель для описания вращающихся и стоячих волн в квазилинейных функционально-дифференциальных уравнениях диффузии с запаздыванием на окружности, основанная на конструктивном вычислении нормальной формы $O(2)$-эквивариантной бифуркации Андронова–Хопфа.
2. Впервые метод понижения размерности области применен для моделирования вращающихся и стоячих волн в квазилинейном уравнении диффузии с запаздыванием в тонкой области.
3. Впервые исследована спектральная сходимость оператора Лапласа в тонкой области с краевыми условиями на наклонную производную при стремлении толщины области к нулю.
4. Впервые метод понижения размерности области применен для изучения уравнения в тонкой области с краевыми условиями на наклонную производную.

5. Обнаружен новый режим самоорганизации вида пульсирующих спиральных волн.

Теоретическая и практическая значимость. Разработан метод понижения размерности области для моделирования вращающихся, стоячих и спиральных волн в квазилинейных функционально-дифференциальных уравнениях диффузии с запаздыванием в тонком кольце. Обнаружен новый режим самоорганизации вида пульсирующих спиральных волн.

Методология и методы исследования. В работе используются математические методы теории дифференциальных уравнений, теории бифуркаций и нормальных форм, методы вычислительной математики и численного моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Численно-аналитический метод для моделирования одномерных вращающихся и стоячих волн в квазилинейных функционально-дифференциальных уравнениях диффузии с запаздыванием на окружности на основе конструктивного вычисления нормальной формы $O(2)$-эквивариантной бифуркации Андронова–Хопфа.
2. Численно-аналитический подход к моделированию двумерных вращающихся и стоячих волн в тонком кольце на основе понижения размерности области.
3. Свойства оператора Лапласа в кольце с краевыми условиями на наклонную производную: свойства порождаемой им полугруппы операторов и его спектральная сходимость к оператору второй производной на окружности при стремлении толщины кольца к нулю.
4. Численно-аналитический подход к моделированию двумерных спиральных волн в тонком кольце на основе понижения размерности области и применения комбинации трех механизмов: запаздывания, краевых условий на наклонную производную, малой толщины области.

Степень достоверности и апробация работы. Достоверность полученных результатов подкреплена согласованностью выводов аналитического исследования и численного моделирования. Основные результаты работы докладывались на следующих научно-исследовательских школах, конференциях и семинарах.

1. Летняя школа «GSIS Homogenization and numerical analysis international summer school» (Сендай, Япония, 31 июля - 9 августа 2015).
2. Летняя школа «Римско-Московская школа по матричным методам и прикладной линейной алгебре» (Москва, Россия, 20 августа - 3 сентября 2016, Рим, Италия, 4-18 сентября 2016).
3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2016» (Москва, Россия, 11-15 апреля 2016).
4. Международная конференция «Динамические системы: обратные задачи, устойчивость и процессы управления», посвящённая восьмидесятилетию академика Ю.С. Осипова (Москва, Россия, 22-23 сентября 2016).
5. Международная конференция The 8-th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (Москва, Россия, 14-19 августа 2017).
6. Научная конференция «Ломоносовские чтения 2018», секция «Вычислительная математика и кибернетика» (Москва, Россия, 16-27 апреля 2018).
7. Международная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX», посвященная 90-летию В.А.Ильина (Москва, Россия, 2-6 мая 2018).
8. Международная конференция 7th International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences (Москва, Россия, 27-31 августа 2018).
9. Научная конференция «Тихоновские чтения 2018» (Москва, Россия, 29 октября - 1 ноября 2018).
10. Международная конференция 11th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (Сегед, Венгрия, 17-21 июня 2019)
11. Международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А.Самарского в связи со 100-летием со дня его рождения (Москва, Россия, 18-20 июня 2019).

12. Научная конференция «Тихоновские чтения 2019» (Москва, Россия, 28 октября - 1 ноября 2019).
13. Научно-исследовательский семинар кафедры математической физики факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.
14. Межвузовский научно-исследовательский семинар по математике «Анализ и его приложения» под руководством Г.Г. Брайчева, И.В. Тихонова и В.Б. Шерстюкова на базе Московского Педагогического Государственного Университета.
15. Научный семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством А.Л. Скубачевского на кафедре прикладной математики факультета физико-математических и естественных наук Российского Университета Дружбы Народов.

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством д.ф.-м.н., доц. А.В. Разгулина. В работах, написанных в соавторстве, вклад автора диссертации в полученные результаты в части аналитического исследования, математического моделирования, численных методов и разработки комплекса программ является определяющим.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 134 страницы с 20 рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит 182 наименования.

Содержание работы

В **первой главе** исследуется самоорганизация волн в одномерной модели на окружности с запаздыванием. Искомая фазовая модуляция зависит от двух переменных $u(\theta, t)$ и удовлетворяет краевой задаче:

$$
\begin{aligned}
&u_t + u = Du_{\theta\theta} + K|\mathcal{B}_{z_0}\exp(\mathrm{i}u(t-T))|^2, \quad \theta \in (0, 2\pi),\\
&u|_{\theta=0} = u|_{\theta=2\pi}, \quad u_\theta|_{\theta=0} = u_\theta|_{\theta=2\pi}.
\end{aligned}
$$

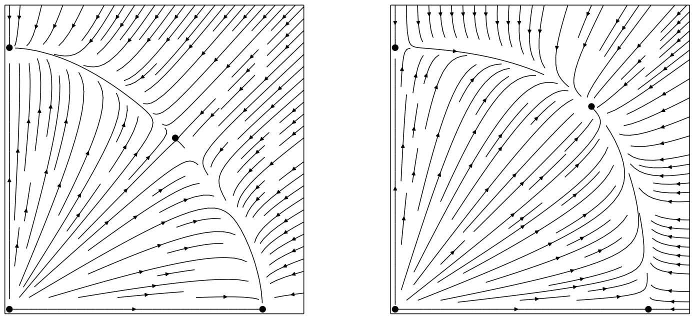
Для краткости через $u(t-T)$ записана функция $\theta \mapsto u(\theta, t-T)$. В задаче отсутствует начальное условие, поскольку целью стоит исследовать периодические решения, и значит переменная времени может принимать любые значения $t \in \mathbb{R}$. Здесь $\mathcal{B}_{z_0}$ — линейный оператор, сопоставляющий входной функции $A_0(\theta)$ решение начально-краевой задачи для линейного уравнения Шредингера при $z = z_0 > 0$:

$$
\begin{aligned}
&A_z + \mathrm{i}A_{\theta\theta} = 0, \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad z > 0,\\
&A|_{\theta=0} = A|_{\theta=2\pi}, \quad A_\theta|_{\theta=0} = A_\theta|_{\theta=2\pi},\\
&A|_{z=0} = A_0(\theta).
\end{aligned}
$$

Для доказательства существования вращающихся волн осуществляется переход в движущуюся систему координат и используется редукция Ляпунова–Шмидта. Для исследования устойчивости бифуркационных решений строится нормальная форма $O(2)$-эквивариантной бифуркации Андрнонова–Хопфа для ФДУ диффузии с запаздыванием

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\rho_1 = \rho_1(K_1\mu + K_2^{(1)}\rho_1^2 + K_2^{(2)}\rho_3^2) + O(\rho_1\mu^2 + |(\rho_1, \rho_3, \mu)|^4),\\
&\frac{d}{dt}\omega_1 = \nu_* + O(|(\rho_1, \rho_3, \mu)|),\\
&\frac{d}{dt}\rho_3 = \rho_3(K_1\mu + K_2^{(1)}\rho_3^2 + K_2^{(2)}\rho_1^2) + O(\rho_3\mu^2 + |(\rho_1, \rho_3, \mu)|^4),\\
&\frac{d}{dt}\omega_3 = \nu_* + O(|(\rho_1, \rho_3, \mu)|),
\end{aligned}
$$

и *явно* вычисляются коэффициенты K_1, $K_2^{(1)}$ и $K_2^{(2)}$ нормальной формы. Анализ коэффициентов позволяет получить критерии устойчивости стоячих и вращающихся в обе стороны волн в терминах физических параметров модели (см. рисунок 2). На основе полученных критериев устойчивости и общих свойств характеристических квазимногочленов формулируется алгоритм выбора параметров, гарантирующих существование и устойчивость стоячих/вращающихся волн. В конце главы приводится численный метод для решения начально-краевой задачи для квазилинейного ФДУ диффузии с запаздыванием на окружности, и представлены результаты численных экспериментов, согласующиеся с результатами аналитического исследования существования и устойчивость бифуркационных волн.



а) Устойчивые вращающиеся волны. б) Устойчивая стоячая волна.

Рис. 2 — Фазовые портреты в плоскости (ρ_1, ρ_3).

Вторая глава посвящена моделированию вращающихся и стоячих воле в двумерной модели в тонком кольце с краевыми условиями Неймана с запаздыванием:

$$
\begin{aligned}
&u_t + u = D\Delta u + K|\mathcal{B}_{z_0} \exp(\mathrm{i}u(t-T))|^2, \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad \rho \in (r, R),\\
&u|_{\theta=0} = u|_{\theta=2\pi}, \quad u_\theta|_{\theta=0} = u_\theta|_{\theta=2\pi},\\
&u_\rho|_{\rho=r} = u_\rho|_{\rho=R} = 0.
\end{aligned}
$$

Для нее проводится построение нормальной формы $O(2)$-эквивариантной бифуркации Андрнонова–Хопфа и показывается, что лишь *один из трех* коэффициентов можно вычислять явно в замкнутом виде. В этой ситуации для исследования устойчивости волн в тонком кольце приводятся сведения о спектральной сходимости оператора Лапласа в тонком кольце с краевыми условиями Неймана при стремлении толщины кольца $\varepsilon = R/r - 1$ к нулю,

$$
\begin{aligned}
\gamma_{n,0} &= \frac{n}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{7}{24}\varepsilon^2 + \dots\right),\\
\gamma_{n,s} &= \frac{1}{r}\left(\frac{s\pi}{\varepsilon} + \frac{4n^2+3}{2^3(\varepsilon+1)}\frac{\varepsilon}{s\pi} + \dots\right), \quad s \in \mathbb{N},
\end{aligned}
$$

и предлагается использовать подход к моделированию стоячих и вращающихся волн в тонком кольце, основанный на понижении размерности и изучении свойств предельной задачи на окружности. Затем приводится численный метод для решения начально-краевой задачи для квазилинейного ФДУ диффузии с запаздыванием в тонком кольце с краевыми условиями Неймана. Результаты численного моделирования показывают, что предлагаемый подход действительно позволяет конструктивно предсказывать и наблюдать двумерные стоячие и вращающиеся волны, обладающие свойствами устойчивости.

В **третьей главе** проводится моделирование спиральных волн в двумерной модели в тонком кольце с краевыми условиями на наклонную производную и запаздыванием:

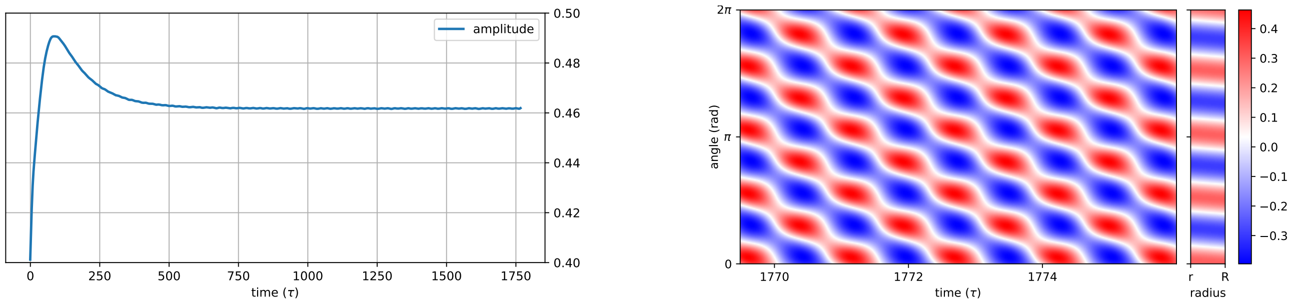
$$\begin{aligned}
&u_t + u = D\Delta u + K|\mathcal{B}_{z_0}\exp(\mathrm{i}u(t-T))|^2, \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad \rho \in (r, R),\\
&u|_{\theta=0} = u|_{\theta=2\pi}, \quad u_\theta|_{\theta=0} = u_\theta|_{\theta=2\pi},\\
&ru_\rho|_{\rho=r} = \tan(\alpha)u_\theta|_{\rho=r}, \quad Ru_\rho|_{\rho=R} = \tan(\alpha)u_\theta|_{\rho=R},
\end{aligned}$$

где $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Формулируется подход к моделированию спиральных волн в тонком кольце, основанный на понижении размерности и изучении свойств предельной задачи на окружности, обладающей более богатой группой симметрий. Для получения предельной задачи проводится аналитическое исследование свойств оператора Лапласа в кольце с краевыми условиями на наклонную производную: доказывается теорема о свойствах порождаемой им полугруппы операторов и устанавливается его спектральная сходимость

$$\gamma_{n,0} = \frac{n}{r}\sqrt{\tan^2(\alpha)+1}\left[1 - \frac{\varepsilon}{2} - \left(\frac{5\tan^2(\alpha)-7}{\tan^2(\alpha)+1} + 4\mathrm{i}n\tan(\alpha)\right)\frac{\varepsilon^2}{24} + \ldots\right]$$

при стремлении толщины кольца к нулю. Численно-аналитическими методами изучаются свойства начально-краевой задачи для линейного уравнения Шредингера в тонком кольце с условиями на наклонную производную. Для проведения численных экспериментов разрабатывается численный метод для решения начально-краевой задачи для квазилинейного ФДУ диффузии с запаздыванием в тонком кольце с краевыми условиями на наклонную производную. Результаты численного моделирования показывают, что предлагаемый подход позволяет конструктивно предсказывать и наблюдать двумерные вращающиеся спиральные волны и ранее не описанный в литературе режим пульсирующих спиральных волн, обладающих свойствами устойчивости (см. рисунок 3).

В **приложении** описывается реализация разработанного в диссертации программного комплекса и схема взаимодействия входящих в него модулей.



а) Амплитуда.

б) Профиль волн.

Рис. 3 — Режим пульсирующих спиральных волн.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Для одномерной модели на окружности были аналитически исследованы существование и устойчивость возникающих в результате $O(2)$-эквивариантной бифуркации Андронова–Хопфа вращающихся и стоячих волн. Найдены гарантирующие их орбитальную асимптотическую устойчивость параметры модели. Разработан численный метод для решения квазилинейного функционально-дифференциального уравнения диффузии с запаздыванием на окружности и проведены вычислительные эксперименты по возбуждению бифуркационных волн.
2. Аналитически исследована связь между двумерной моделью в тонком кольце с краевыми условиями Неймана и одномерной моделью на окружности. Разработан численный метод для решения квазилинейного функционально-дифференциального уравнения диффузии с запаздыванием в тонком кольце с краевыми условиями Неймана и проведены вычислительные эксперименты по возбуждению бифуркационных волн.
3. Аналитически исследована связь между двумерной моделью в тонком кольце с краевыми условиями на наклонную производную и одномерной моделью на окружности. Для этого были изучены свойства оператора Лапласа в кольце с краевыми условиями на наклонную производную: установлены свойства порождаемой им полугруппы операторов и изучена его спектральная сходимость при стремлении толщины кольца к нулю. Разработан численный метод для решения квазилинейного функционально-дифференциального

уравнения диффузии с запаздыванием в тонком кольце с краевыми условиями на наклонную производную и проведены вычислительные эксперименты по возбуждению бифуркационных спиральных волн. В ходе экспериментов был обнаружен режим пульсирующих спиральных волн, который ранее не был описан в литературе.

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. *Budzinskiy S.S., Razgulin A.V.* Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under $O(2)$ Hopf bifurcation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2017. — Vol. 49. — Pp. 17–29. [WoS, Q1, impact factor 4.115]
2. *Budzinskiy S., Razgulin A.* Normal form of $O(2)$ Hopf bifurcation in a model of a nonlinear optical system with diffraction and delay // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2017. — No. 50. — Pp. 1–12. [WoS, Q2, impact factor 1.827]
3. *Budzinskiy S.S., Larichev A.V., Razgulin A.V.* Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2018. — Vol. 44. — Pp. 559–572. [WoS, Q1, impact factor 2.072]
4. *Будзинский С.С.* О нулях перекрестных произведений функций Бесселя из краевых задач с наклонной производной // Вестник Московского Университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2020. — № 2. — С. 3–10. [RSCI, impact factor 0.326]

Иные публикации

1. *Budzinskiy S.* Rotating and standing waves in a retarded functional differential equation of nonlinear optics // Международная конфе-

ренция «Динамические системы: обратные задачи, устойчивость и процессы управления», посвящённая восьмидесятилетию академика Ю.С.Осипова. — Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, 2016. — С. 11–13.

2. *Romanenko T.E., Budzinskiy S.S.* Hopf bifurcation of rotating waves in delayed parabolic functional-differential equations of nonlinear optics in the presence of symmetry groups // Abstracts of the 8-th International Conference on Differential and Functional Diferential Equations. — Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 2017. — Pp. 148–149.
3. *Разгулин А.В., Будзинский С.С.* Об одном методе понижения размерности для описания двумерных волн в тонком кольце // Ломоносовские Чтения 2018. Секция Вычислительной Математики и Кибернетики. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2018. — С. 102–102.
4. *Романенко Т.Е., Будзинский С.С.* Спиральные волны в запаздывающем уравнении диффузии в тонком кольце с граничными условиями на наклонную производную // Ломоносовские Чтения 2019. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2019. — С. 63–63.
5. *Разгулин А.В., Романенко Т.Е., Будзинский С.С.* Параболические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованием пространственных аргументов и запаздыванием // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Международная конференция памяти академика А.А. Самарского. К 100-летию со дня рождения. Тезисы докладов. — МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, 2019. — С. 54–55.
6. *Budzinskiy S.* Spirals in a delayed reaction-diffusion equation:from a thin annulus to a circle and back again // 11th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations. — Bolyai Institute, Szeged, 2019. — Pp. 24–25.
7. *Budzinskiy S., Razgulin A.* Pulsating and rotating spirals in a delayed feedback diffractive nonlinear optical system // arXiv:1909.02796 [math-ph, physics:nlin]. — 2019.

Список литературы

1. *Белан Е. П.* О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. — 2004. — т. 40, № 5. — с. 645—654. — DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000043527.22864.ac.

2. *Кащенко С. А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1991. — т. 31, № 3. — с. 467—473.

3. *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1993. — т. 33, № 1. — с. 69—80.

4. *Akimova I. G., Razgulin A. V.* Rotational waves in an optical system with diffraction and rotation of spatial arguments // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 1999. — 2. — с. 16—23.

5. *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G.* Nonlinear dynamics of neuromorphic optical system with spatio-temporal interactions // Optical Memory and Neural Networks / ed. by A. L. Mikaelian. — International Society for Optics and Photonics, 1991. — P. 292–298. — DOI: 10.1117/12.50436.

6. *Разгулин А. В., Романенко Т. Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — т. 53, № 11. — с. 1804—1821. — DOI: 10.7868/S0044466913110136.

7. *Разгулин А. В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2003. — т. 2. — с. 13—20.

8. *Разгулин А. В., Сазонова С. В.* О задаче матричной Фурье-фильтрации для одного класса моделей нелинейных оптических систем с обратной связью // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — т. 57, № 9. — с. 1403—1420.

9. *Chesnokov S. S., Rybak A. A., Stadnichuk V. I.* Time-delayed nonlinear optical systems: temporal instability and cooperative chaotic dynamics // Proc. SPIE 4751. ICONO 2001: Nonlinear Optical Phenomena and Nonlinear Dynamics of Optical Systems / под ред. K. N. Drabovich [и др.]. — 2002. — с. 493—498. — DOI: 10.1117/12.475952.

10. *Iftimie D., Raugel G.* Some results on the Navier–Stokes equations in thin 3D domains // Journal of Differential Equations. — 2001. — Vol. 169, no. 2. — P. 281–331. — DOI: 10.1006/jdeq.2000.3900.

11. *Ziane M., Temam R., Hu C.* The primitive equations on the large scale ocean under the small depth hypothesis // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2002. — Vol. 9, no. 1. — P. 97–131. — DOI: 10.3934/dcds.2003.9.97.

12. *Raugel G.* Dynamics of partial differential equations on thin domains // Dynamical Systems / ed. by R. Johnson. — Springer Berlin Heidelberg, 1995. — P. 208–315. — (Lecture Notes in Mathematics ; 1609). — ISBN 978-3-540-60047-3. — DOI: 10.1007/BFb0095241.