

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



Артамонова Нина Брониславовна

**ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ БИО
ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2020

Работа выполнена на кафедрах механики композитов и теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: **Шешенин Сергей Владимирович**,
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Власов Александр Николаевич**,
доктор технических наук,
Институт прикладной механики РАН,
ВРИО директора ИПРИМ РАН

Пшеничнов Сергей Геннадиевич,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
НИИ механики МГУ имени
М.В. Ломоносова,
ведущий научный сотрудник

Шардаков Игорь Николаевич,
доктор физико-математических наук,
профессор, Институт механики сплошных
сред УрО РАН – филиал ПФИЦ УрО РАН,
заведующий лабораторией

Защита состоится 4 декабря 2020 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.14 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, НИИ механики МГУ, к. 216.

E-mail: msu.01.14@mech.math.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27). Со сведениями о регистрации участия в защите в удаленном интерактивном режиме и с диссертацией в электронном виде можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: <http://istina.msu.ru/dissertations/328768928/>.

Автореферат разослан 3 ноября 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.14,
кандидат физико–математических наук



П.В. Чистяков

Общая характеристика работы

Цели работы

1. Постановка полностью нелинейной (физически и геометрически) связанной задачи совместного деформирования пористого флюидонасыщенного материала под нагрузкой при медленном оттоке жидкости, создание алгоритма ее решения, реализация с помощью разработанного программного кода, практическое исследование устойчивости решения, опробование решения на модельных и практических примерах.
2. Разработка методов вычисления эффективных свойств пористого водонасыщенного материала, входящих в качестве параметров в модель Био, на основе асимптотического метода осреднения и опробование этих методов на примере реальных структур грунтов.

Актуальность темы

Уплотнение водонасыщенных дисперсных грунтов под нагрузкой, как правило, нелинейное и сопровождается большими деформациями. Решение нелинейной связанной задачи, описывающей деформирование грунта при оттоке или притоке жидкости, весьма актуально в различных областях хозяйственной деятельности человека. Геомеханическая реакция скелета грунта на изменение давления жидкости играет критическую роль, например, при деформировании дорожного полотна или при неравномерной осадке инженерных сооружений. Поэтому разработка нелинейной связанной модели консолидации, учитывающей упругое или упругопластическое поведение материала, сопровождающееся изменением пористости и проницаемости, является весьма актуальной. Создание собственного программного кода является актуальным и целесообразным потому, что способствует повышению уровня научного моделирования и программирования в нашей стране. Представляется актуальным исследовать устойчивость решения седловой задачи консолидации теоретически в линейном и нелинейном вариантах.

В настоящее время наблюдается стремление более точно моделировать процессы фильтрации и консолидации. Это означает, прежде всего, два момента: использование более точных механических моделей, проверенных доступными экспериментами, и более точное вычисление эффективных свойств материалов, входящих в модели в качестве параметров, применяя современные численные

методы и революционно возросшие мощности компьютеров. В последнее время для получения моделей реальной структуры пористых материалов широко используется метод компьютерной томографии. Результаты расчетов эффективных свойств на трехмерных моделях, построенных по рентгеновским изображениям, оцифрованным в специальных программах (VG MAX 3.3), показывают совпадение с экспериментальными данными. Учет реальных нелинейных свойств упругих материалов и грунтов позволяет осуществлять более реалистичное моделирование процесса консолидации, что является актуальной задачей.

Научная новизна работа

В диссертационной работе сформулирована, математически исследована, обоснована на основе моделей и экспериментальных возможностей механики сплошных сред и численно реализована достаточно общая формулировка задачи совместного деформирования пористой твердой среды с протекающей через поры жидкостью в рамках физической и геометрической нелинейности. Постановка задачи выведена в скоростях перемещений твердой фазы и изменения давления воды в дифференциальном и вариационном виде. В силу комбинации отмеченных черт разработанной модели консолидации такое исследование представляется новым. Научная новизна заключается также в создании собственного программного кода.

Новизна также состоит в применении подхода ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) для переформулировки уравнений фильтрации и изменения пористости в лагранжевых координатах твердого каркаса с использованием относительной скорости движения жидкости.

Исследование влияния геометрической нелинейности совместно с учетом изменения пористости и проницаемости материала на результаты решения нелинейной задачи консолидации также является новым.

В работе асимптотический анализ уравнения равновесия применяется для пористой среды, насыщенной жидкостью. В этом состоит новая особенность применения метода осреднения, в результате чего получаются локальные задачи не только для определения эффективных упругих модулей, но и для определения параметра Био и тензора расширения пористой водонасыщенной среды при замерзании.

В работе вводится новое обобщенное определение представительной области, меньшей по размеру, чем представительная область, соответствующая классическому определению. Согласно этому определению, при расчетах на таких представительных областях точки соответствия какого-либо эффективного свойства (модуля Юнга или коэффициента передачи порового давления) и параметра структуры (пористости) должны ложиться на одну кривую.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение. В работе показана применимость метода Узавы в качестве основной части метода решения нелинейных задач консолидации.

Разработанная модель консолидации может применяться для расчетов образования колеи и неровностей грунтовых дорог. Она также может применяться для изучения процесса деформирования биологических материалов при использовании модели упругости.

Тензор передачи порового давления и тензор расширения водонасыщенной среды при замерзании трудно определять экспериментально, а для анизотропных экспериментальная методика их определения еще не разработана. Следовательно, вычислительная методика может стать оценочным способом определения этих параметров, если известна структура порового пространства и упругие свойства компонентов матрицы.

Методология и методы исследования

Для формулировки механической модели использовался феноменологический подход, т.е. все уравнения модели связанной консолидации были выведены из общих законов сохранения механики сплошной среды, применяя пространственное осреднение по представительной области. Для жидкости это теория смеси, а для твердой фазы – осреднение пористой среды. Для переформулировки уравнений фильтрации и изменения пористости в лагранжевых координатах твердой фазы с использованием относительной скорости течения жидкости применялся подход ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian). При линеаризации вариационных уравнений равновесия использовалась техника дифференцирования по Гато.

Также использовались дополнительные соотношения, экспериментальные законы и закономерности, известные из литературы. Для моделирования определяющих соотношений для упругопластического деформирования грунта при кратковременных нагрузках выбрана модель Григоряна, обобщенная на большие деформации. Для аппроксимации гиперупругого материала использовались упругие потенциалы Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана–Кирхгофа.

Для пространственной дискретизации использовался метод конечных элементов (МКЭ): квадратичные серендиповы элементы для аппроксимации собственно уравнения фильтрации и элементы трилинейного типа для аппроксимации уравнений равновесия. Производная по времени аппроксимировалась конечной разностью.

Для решения системы уравнений равновесия и фильтрации использовалось обобщение неявной схемы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы. Для реализации итерационного процесса на каждом шаге по времени применялся метод простой итерации с применением предобусловливателя для ускорения сходимости.

Для создания компьютерной программы в качестве основы использовался код, разработанный научным руководителем соискателя и проверенный в совместной работе с компанией Мишлен (Франция), который предназначен для решения геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела. Дополнительно к этому коду разработан код для численной реализации уравнений фильтрации и изменения пористости, а также подпрограммы для реализации функций формы серендиповых квадратичных конечных элементов и для построения конечно-элементных сеток.

Для теоретического определения эффективных модулей использовался математически строгий подход механики композитов, называемый методом асимптотического осреднения или методом двух масштабов.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Полученная для исследования процесса деформирования пористого флюидонасыщенного материала под нагрузкой квазистатическая постановка нелинейной связанной задачи консолидации при больших деформациях в скоростях перемещений твердой фазы и изменения порового давления

охватывает в качестве определяющих соотношений теорию упругости, теорию течения или деформационную теорию пластичности.

2. Применение методики ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) позволяет эффективно переформулировать все уравнения нелинейной консолидации в единой системе координат, связанной с лагранжевыми координатами твердого каркаса с использованием относительной скорости движения жидкости относительно твердой фазы скелета.
3. Учет геометрической нелинейности приводит к заметному снижению расчетных значений порового давления, а учет изменения пористости и проницаемости материала – к существенному увеличению величин порового давления на начальном этапе процесса консолидации.
4. Методика вычисления параметров, ассоциированных с моделью Био, разработанная на основе асимптотического осреднения и опробованная на реальных грунтах, показала эффективность при определении тензора передачи порового давления (параметра Био) и тензора расширения пористой среды при замерзании воды в порах.
5. Развитое на основе опытов и вычислительных экспериментов обобщение понятия представительной области, согласно которому представительными считаются области, для которых точки зависимости какого-либо осредненного свойства (например, модуля Юнга или параметра Био) от параметра структуры (например, пористости) ложатся на одну и ту же кривую, позволяет вычислять эффективные свойства на достаточно малых областях, имеющих разную пористость.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность результатов диссертационной работы обоснована использованием строгих математических методов из областей математического и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и математической физики, а также классических методов механики сплошных сред, применимость которых к данному типу задач хорошо исследована и подтверждена. Достоверность подтверждается также совпадением некоторых результатов расчетов с результатами экспериментальных исследований.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Всероссийских и Международных конференциях, на научно-исследовательских семинарах, подвергались рецензированию при публикации журналов.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф., члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2020 г.);
- научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. В.И. Горбачева (2020 г.);
- научно-исследовательский семинар имени А.А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского (2020 г.);
- межкафедральный научно-исследовательский семинар по механике деформируемых сред под руководством д.ф.-м.н., проф. С.В. Шешенина, д.ф.-м.н., проф. А.В. Звягина и д.ф.-м.н., проф. А.Б. Киселева (2015–2019 г.);
- Международная научная конференция «Ломоносовские чтения» (2014, 2019, 2020 г.);
- XX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону, Россия, 18–21 июня 2020;
- Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, ИПРИМ РАН, Москва, Россия (2017, 2019 г.);
- Международная научно-практическая конференция "Стратегия развития геологического исследования недр: настоящее и будущее (к 100-летию МГРИ–РГГРУ)" Российский государственный геологоразведочный университет, Москва, 4–6 апреля 2018 г.;
- Международная научно-практическая конференция "Инженерно-геологические задачи современности и методы их решения", ИГИИС, Москва, Россия, 13–14 апреля 2017 г.;

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвящённый 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, Россия, 20–21 января 2016 г.
- По теме диссертации был выигран грант РФФИ №20-01-00431_a на 2020-2022 гг., в котором соискатель выступал в качестве ответственного исполнителя.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 13 печатных работах, из них 6 статей опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI.

Личный вклад

Дифференциальная постановка задачи получена самостоятельно автором диссертации [2,7,9]. Также самостоятельно осуществлена переформулировка уравнений фильтрации и изменения пористости в движущейся системе координат, связанной с лагранжевыми координатами твердого каркаса, по методу ALE [2,7,9]. Самостоятельно получена вариационная постановка задачи и проведена линеаризация вариационного уравнения равновесия с использованием техники дифференцирования по Гато [2,7,9].

На основе программы научного руководителя, реализующей решение задачи нелинейного деформирования твердого тела без водонасыщения, самостоятельно написан код, связанный с реализацией уравнения фильтрации и изменения пористости, а также подпрограммы для создания функций формы серендиповых квадратичных конечных элементов и для построения конечно-элементных сеток [1,7].

Исследование влияния геометрической нелинейности и учета изменения пористости и проницаемости проведены автором диссертационной работы самостоятельно [1,7].

Методы вычисления тензора передачи порового давления (параметра Био) и тензора расширения пористой водонасыщенной среды при замерзании воды в порах разработаны автором самостоятельно [3–6,8,10–13]. Построение и расчеты 2D моделей, а также эксперименты на образцах грунтов выполнялись совместно со студентами Е.А. Орловым, П.В. Новиковым и О.Ю. Бессоновой под руководством автора диссертационной работы [3,8]. Расчеты 3D моделей были сделаны студентом Е.А. Орловым под нашим руководством [8]. Часть

экспериментальных данных была предоставлена доцентом Ю.В. Фроловой [3,8,10,13].

Обобщение понятия представительной области на область меньшего размера, для которой точки соответствия значения какого-либо свойства грунта и параметра структуры лежат на одной кривой, сделаны автором диссертационной работы самостоятельно [3,4,8,13].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и трех приложений. В работе содержится 48 рисунков, 5 таблиц. Список литературы содержит 122 наименования. Общий объем работы 157 стр.

Краткое содержание диссертации

Во введении формулируются цели работы, обосновывается актуальность и новизна исследований, излагается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приводится краткий обзор научной литературы по теме исследования.

В главе 1 изложен вывод уравнений полностью нелинейной (и геометрически, и физически) связанной модели консолидации.

В разделе 1.1 приведены основные осредненные величины, которые далее используются в постановке задачи консолидации на макроуровне, и показано, каким образом вводится осреднение по представительной области. Рассматриваются два уровня, условно называемые макроуровнем и микроуровнем. Величины на микроуровне зависят от двух аргументов – медленных координат X и быстрых координат ζ . Такое разделение сделано в соответствии с известным методом осреднения. Далее в работе будут участвовать только осредненные величины.

В конце раздела говорится о том, что дифференциальная постановка модели консолидации будет включать три уравнения в частных производных – уравнение равновесия, уравнение фильтрации и уравнение изменения пористости относительно трех неизвестных функций: перемещения каркаса грунта, давления жидкости и пористости. Уравнения фильтрации и изменения пористости выводятся на основе объединения закона фильтрации Дарси, уравнения состояния жидкости и уравнений неразрывности.

В разделе 1.2 приводится уравнение равновесия водонасыщенной пористой среды в текущей конфигурации в терминах эффективных напряжений $\underline{\underline{\sigma}}^{eff}$:

$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{eff}(\underline{\underline{u}}) - \alpha \underline{\underline{\nabla}} p + \rho \underline{\underline{f}} = 0, \quad \underline{\underline{\sigma}}^{eff} = \underline{\underline{\sigma}} + \alpha p \underline{\underline{I}} = (1 - n) \underline{\underline{\sigma}}_s - (n - \alpha) p \underline{\underline{I}},$$

ρ – средняя плотность пористого материала, α – параметр Био, n – пористость, p – поровое давление, $\underline{\underline{u}}$ – вектор перемещений твердой фазы грунта, $\underline{\underline{\sigma}}$ – средние полные напряжения Коши, $\underline{\underline{\sigma}}_s$ – осредненные напряжения в твердой фазе материала, $\underline{\underline{f}}$ – массовая сила.

В разделе 1.3 обосновывается применимость в модели консолидации линейного относительно градиента порового давления $\underline{\underline{\nabla}} p$ закона фильтрации Дарси и подробно анализируются параметры, входящие в закон фильтрации. Вводится предположение, что поры полностью заполнены водой, жидкость ньютоновская и однородная.

На основе анализа литературных источников делается вывод, что динамический коэффициент вязкости μ и удельный вес γ_f фильтрующейся жидкости допустимо полагать постоянными для конкретных значений температуры и минерализации, а для коэффициентов фильтрации $\underline{\underline{k}}^\Phi$ (или коэффициентов проницаемости $\underline{\underline{k}}$) следует учитывать зависимость от изменяющейся пористости n . Таким образом, закон фильтрации Дарси становится нелинейным за счет зависимости коэффициентов фильтрации и пористости от перемещений $\underline{\underline{u}}$ твердой фазы пористого материала:

$$n(\underline{\underline{u}}) \left(\underline{\underline{v}} - \frac{d\underline{\underline{u}}}{dt} \right) = - \frac{\underline{\underline{k}}^\Phi(n(\underline{\underline{u}}))}{\gamma_f} \cdot \underline{\underline{\nabla}} p, \quad \underline{\underline{k}}^\Phi = \underline{\underline{k}} \frac{\gamma_f}{\mu},$$

$\underline{\underline{v}}$ – средняя скорость движения жидкости.

В разделе 1.4 делается предположение, что процесс деформирования жидкости является изотермическим, а изменение плотности жидкости ρ_f при изменении порового давления p подчиняется закону баротропии: $d\rho_f/\rho_f = \beta_f dp$. Согласно анализу литературных данных, коэффициент сжимаемости жидкости β_f можно считать константой, соответствующей конкретным значениям температуры и минерализации.

В разделе 1.5 осредняются уравнения сохранения масс для жидкой и твердой фаз грунта при отсутствии источников, стоков и массообмена на микроуровне. При этом используется теория смеси, согласно которой в каждой

точке \vec{x} области V находятся одновременно два континуума – твердая фаза и жидкая фаза, которые как бы размазываются по всей области V . В результате осреднения выводятся уравнения неразрывности для жидкой и твердой фаз, как они приведены в монографии Р.И. Нигматулина (1987).

В разделе 1.6 из уравнений, описанных в предыдущих разделах, формулируется дифференциальная система уравнений консолидации в пространственной формулировке. Вводится предположение, что материал каркаса несжимаем. В этой системе уравнение равновесия удобно решать, используя лагранжев подход, а уравнение фильтрации и уравнение изменения пористости записаны в эйлеровом пространстве. Чтобы решать систему уравнений в единой системе координат, целесообразно переформулировать последние два уравнения в лагранжевой системе координат ($\vec{\xi}$).

В разделе 1.7 для переформулировки уравнений используются идеи метода ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian). Уравнение движения жидкости записывается в произвольной движущейся системе отсчета (на произвольно движущейся сетке). В качестве этой произвольно движущейся системы отсчета выбирается лагранжева сетка для осредненного твердого каркаса. Тогда относительная скорость движения жидкости \vec{c} относительно твердого каркаса с учетом закона Дарси имеет вид:

$$\vec{c} = \vec{v} - \frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{k^\phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p.$$

Используя основную формулу метода ALE:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{c},$$

переписываем полные производные по времени от давления жидкости p и пористости n и в результате преобразований получаем дифференциальную формулировку нелинейной задачи консолидации в лагранжевых координатах $\vec{\xi}$ твердой фазы:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}^{eff}(\vec{u}) - \alpha \vec{\nabla}p + \rho \vec{f} = 0 \\ n \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k^\phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p \right) = \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} + n\beta_f \dot{p} - \beta_f \vec{\nabla}p \cdot \frac{k^\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p \\ \dot{n} - \vec{\nabla}n \cdot \frac{k^\phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p = (1-n)(\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}}) \end{cases} \quad (1)$$

$$\dot{\vec{u}} = \frac{\partial \vec{u}(\vec{\xi}, t)}{\partial t}, \quad \dot{p} = \frac{\partial p(\vec{\xi}, t)}{\partial t}, \quad \dot{n} = \frac{\partial n(\vec{\xi}, t)}{\partial t}, \quad \tilde{k}^\phi = \tilde{k}^\phi(n).$$

Типичные граничные условия в краевой задаче (1) имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{u} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0; \quad \vec{\xi} \in \Sigma_1 \\ \sigma^{eff} \cdot \vec{n} = \vec{S}; \quad p = 0; \quad \vec{\xi} \in \Sigma_2 \end{cases}$$

В разделе 1.8 для дальнейшего решения системы (1) методом конечных элементов формулируется вариационная постановка задачи, соответствующая дифференциальной (1):

$$\begin{cases} \int_V \sigma^{eff}(\vec{u}) : \vec{\nabla} \vec{w} dV - \int_V \alpha p \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV - \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{w} dV - \int_{\Sigma_2} \vec{S}(\vec{u}) \cdot \vec{w} d\Sigma = 0 \\ \int_V \vec{\nabla} q \cdot \frac{\tilde{k}^\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV + \int_V q \vec{\nabla} n \cdot \frac{\tilde{k}^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV - \int_V q \beta_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{\tilde{k}^\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV + \\ + \int_V q \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} dV + \int_V q n \beta_f \dot{p} dV = 0 \\ \int_V h \dot{n} dV - \int_V h \vec{\nabla} n \cdot \frac{\tilde{k}^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV = \int_V h(1-n) \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} dV \end{cases} \quad (2)$$

Здесь \vec{u} , p и n – это решения, а \vec{w} , q и h – соответствующие пробные функции, \vec{S} – поверхностная сила из граничных условий. Следует отметить, что второе и третье уравнения уже написаны в скоростях, а первое уравнение надо сформулировать в скоростях перемещений твердой фазы (линеаризовать).

В разделе 1.9 для удобства вывода уравнение равновесия сначала преобразовывалось к начальной области с использованием второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа \tilde{S}^{eff} и тензора деформаций Грина-Лагранжа \tilde{E} , затем линеаризовалось и опять преобразовывалось к текущей конфигурации. Для линеаризации использовалась техника дифференцирования по Гато. Линеаризованное вариационное уравнение равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\tilde{d}(\vec{w}) : \tilde{C}^d : \tilde{d}(d\vec{u}) \right) dV + \int_V \tilde{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : \left[(\vec{\nabla} \vec{w})^T \cdot \vec{\nabla} d\vec{u} \right] dV - \int_V \alpha dp \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV - \\ & - \int_V \alpha p (\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) (\vec{\nabla} \cdot d\vec{u}) dV + \int_V \alpha p (\vec{\nabla} \vec{w})^T : \vec{\nabla} d\vec{u} dV = \int_V \rho d\vec{f} \cdot \vec{w} dV + \int_{\Sigma_2} d\vec{S} \cdot \vec{w} d\Sigma \\ & \tilde{d}(\vec{w}) = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \vec{w})^T + \vec{\nabla} \vec{w} \right] \end{aligned}$$

Линеаризованная постановка была получена в достаточно общем случае, когда определяющее соотношение для скелета грунта имеет вид:

$$dS^{eff} = \underset{\sim}{C}^E(\underset{\sim}{E}): d\underset{\sim}{E},$$

$\underset{\sim}{C}^E$ – касательный модуль, $C_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} C_{pqrs}^E$, $\underset{\sim}{F}$ – деформационный градиент, $J = J_s$ – якобиан преобразования текущей области, занимаемой твердой фазой, размазанной по всей области V , в ее начальную область $\overset{0}{V}$.

Для гиперупругого материала $\underset{\sim}{C}^E = \partial^2 W / \partial \underset{\sim}{E}^2$, где W – упругий потенциал,

В главе 2 описывается алгоритм решения связанной задачи консолидации и приводятся примеры численных решений.

В разделе 2.1 осуществляется дискретизация уравнений модели консолидации по пространственным координатам с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Для аппроксимации $d\vec{u}$ использовались 20-узловые серендиповы квадратичные элементы (Q2), для аппроксимации p – 8-узловые КЭ трилинейного типа (Q1).

В разделе 2.2 приведено описание метода Узавы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени.

В разделе 2.3 изложен анализ устойчивости решения линейной связанной задачи консолидации, которая даже в линейном случае является седловой. Устойчивость решения седловой задачи определяется выполнением LBB-условия (Ладыженской–Бабушки–Брецци). На основе математических исследований и опыта решения седловых задач, приведенных в литературе, делается вывод о том, что аппроксимация седловой задачи квадратичными конечными элементами Q2 для перемещений скелета грунта и трилинейными КЭ Q1 для давления воды обеспечивает устойчивость решения задачи, а применение элементов Q1-Q1 приводит, вообще говоря, к неустойчивой системе уравнений.

Теоретические выводы подтверждаются результатами численных расчетов линейной упругой задачи консолидации на примере модельной задачи со штампом (при постоянных значениях пористости n и коэффициента фильтрации k_ϕ). При использовании конечных элементов (КЭ) Q2-Q1 решение устойчиво, а для Q1-Q1 появляются осцилляции давления воды. Измельчение пространственной сетки улучшает устойчивость решения для элементов Q1-Q1.

В разделе 2.4 осуществляется дискретизация по времени нелинейной задачи консолидации. Сделано допущение, что при небольших градиентах давления и

небольших градиентах пористости квадратичными членами в уравнениях фильтрации и изменения пористости можно пренебречь. Для решения системы уравнений равновесия и фильтрации предлагается обобщение неявной схемы, описанной в работе Ф.Б. Киселева и С.В. Шешенина (1996) с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \left(\underset{\sim}{C}^d(\hat{\mathbf{u}}^{m-1}) : \operatorname{grad} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s} \right) - \alpha \operatorname{grad} \widehat{\Delta p}^{m,s-1} = \\ = \alpha (\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}) (\operatorname{div} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m-1}) - \operatorname{div} \left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\hat{\mathbf{u}}^{m-1}) \cdot \operatorname{grad} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m-1} \right) + \\ + \alpha (\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}) \cdot (\operatorname{grad} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m-1}) - \rho d \mathbf{f} \\ - \operatorname{div} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s} + \tau n^{m-1} \operatorname{div} \left(\frac{k_\phi(\hat{\mathbf{u}}^{m-1})}{n^{m-1} \gamma_f} \operatorname{grad} \hat{p}^{m,s} \right) - \\ - n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m,s-1} = -n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m-1} \end{array} \right.$$

$$\widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s} = \hat{\mathbf{u}}^{m,s} - \hat{\mathbf{u}}^{m-1}, \quad \widehat{\Delta p}^{m,s-1} = \hat{p}^{m,s-1} - \hat{p}^{m-1}.$$

Здесь τ – величина шага по времени, m – номер шага по времени, s – номер итерации.

На каждом шаге по времени после решения этой системы интегрируется уравнение пористости с помощью предлагаемых неявной и явной схем:

$$\frac{\hat{n}^m - \hat{n}^{m-1}}{\tau} = (1 - \hat{n}^m) \operatorname{div} \frac{\widehat{\Delta \mathbf{u}}^m}{\tau}, \quad \frac{\hat{n}^m - \hat{n}^{m-1}}{\tau} = (1 - \hat{n}^{m-1}) \operatorname{div} \frac{\widehat{\Delta \mathbf{u}}^m}{\tau}.$$

Раздел 2.5 посвящен моделированию задачи консолидации для пористого гиперупругого материала. В начале раздела приводятся определяющие соотношения для упругих потенциалов Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана–Кирхгофа. Далее приводятся некоторые численные примеры расчета. Все расчеты проводились на примере модельной задачи со штампом при аппроксимации конечными элементами Q2-Q1.

Исследовалось влияние учета геометрической нелинейности на решение задачи консолидации (при постоянных n и k_ϕ). В определяющих соотношениях для гиперупругого материала использовался потенциал Сен-Венана–Кирхгофа. Был сделан вывод о том, что на первых шагах по времени при деформации 10% расчетные значения давления воды в линейной задаче значительно выше, чем в геометрически нелинейной, разница может достигать 30% (рис. 1).

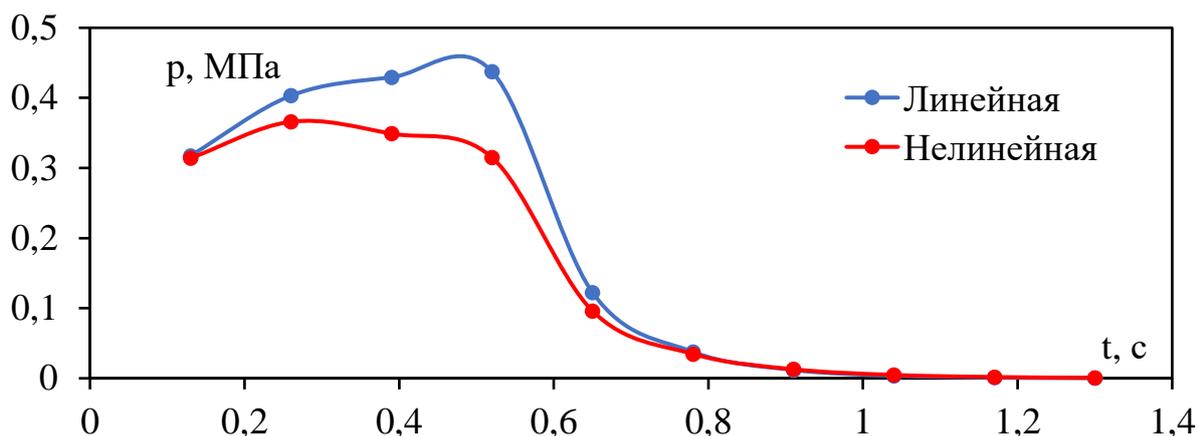


Рис. 1. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,4 м (общая деформация 10%).

Далее проводилось сравнение решения задачи консолидации при аппроксимации гиперупругого материала различными потенциалами: Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана–Кирхгофа (рис. 2).

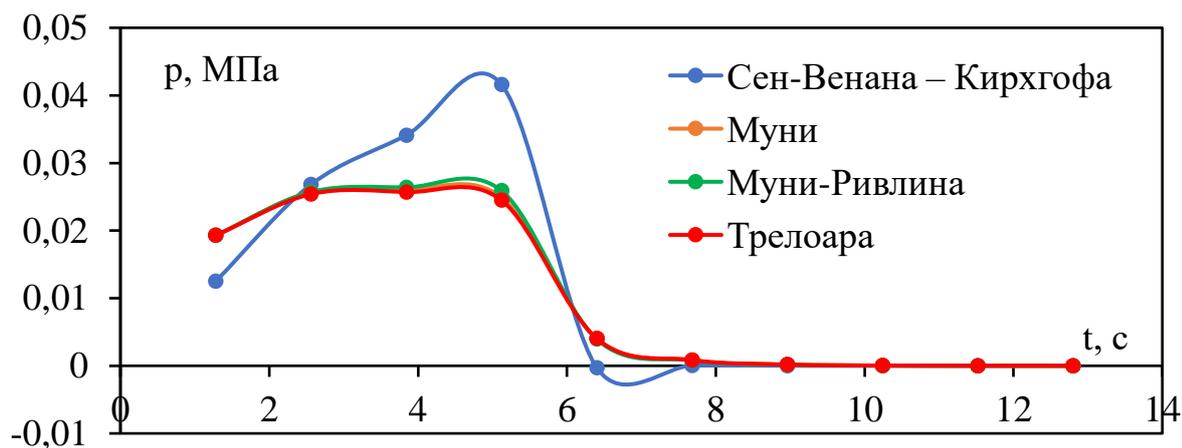


Рис. 2. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,1 м (общая деформация 20%).

Результаты расчетов показали, что потенциалы Муни, Муни-Ривлина и Трелоара дают близкие результаты (рис. 2), а квадратичный потенциал Сен-Венана-Кирхгофа показывает сильное отличие. Было также обнаружено, что использование потенциала Сен-Венана–Кирхгофа приводит к некоторой неустойчивости решения. По-видимому, этот потенциал не подходит для аппроксимации материала при деформации 20%.

Далее в этом разделе описываются результаты решения модельной задачи со штампом при учете изменения пористости n и коэффициента фильтрации k_f и проводится сравнение с результатами расчетов при постоянных n и k_f (рис. 3).

Зависимость k_{ϕ} от $n(\vec{u})$ задавалась по формуле Козени. Изменение модуля упругости E при изменении $n(\vec{u})$ задавалось линейной зависимостью, полученной из численных экспериментов по методу осреднения. Уравнения изменения пористости решались при использовании явной и неявной схем, результаты расчетов по которым полностью совпали (рис. 3). По результатам расчетов сделан вывод, что учет изменения пористости и коэффициента фильтрации материала приводит к существенному увеличению величин порового давления на начальном этапе процесса консолидации.

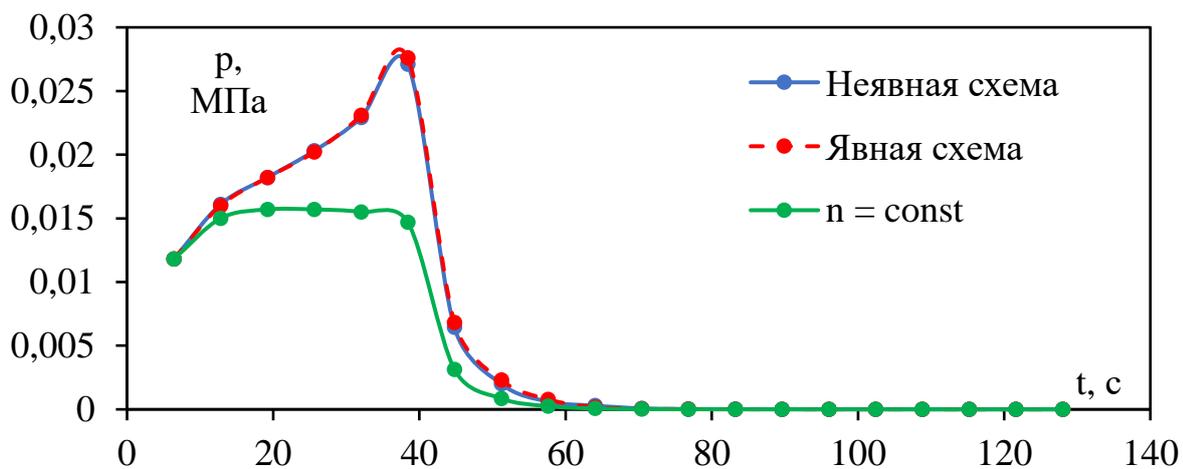


Рис. 3. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,1 м (общая деформация 15%).

В конце раздела приводится небольшой обзор литературы об использовании соотношений упругости для моделирования процесса деформирования биологического материала, насыщенного кровью и плазмой. Затем решается модельная задача о деформировании материала мозга при повреждении черепа в результате удара тупым предметом по голове. Область мозга моделируется частью сферы. Свойства биологического материала взяты из статьи А.Р.С. Selvadurai и А.Р. Suvorov (2016). Зависимость между коэффициентом фильтрации и пористостью задавалась по формуле Козени. На части поверхности модели задается перемещение, имитирующее деформацию черепа. На остальной части поверхности модели мозга задаются нулевые перемещения. Поврежденная часть поверхности модели мозга – проницаемая, вся остальная поверхность модели – непроницаема. Рис. 4 показывает распределение давления жидкости в вертикальном сечении через 20 секунд после совершения удара.

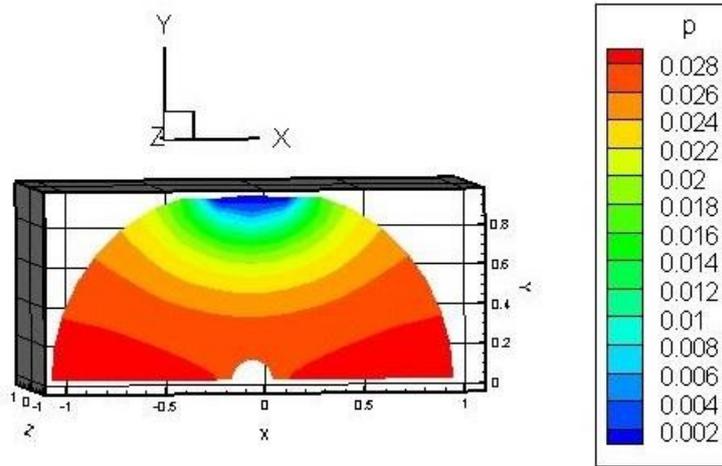


Рис. 4. Распределение изменения давления жидкости в вертикальной плоскости ($Z = 0$) на 4-м шаге по времени (20,7 сек) (единицы измерения $P \cdot 1,28^{-1}$ МПа) (деформация 7%).

В разделе 2.6 описывается решение задачи об упругопластическом деформировании пористого водонасыщенного грунта. Для моделирования определяющих соотношений упругопластического деформирования водонасыщенного грунта под нагрузкой предлагается использовать модель Григоряна (1960), обобщенную на большие деформации.

Для формулировки соотношений теории пластичности используется тензор Кирхгофа $\tilde{\tau} = J\tilde{\sigma}$, как в книге J.C. Simo, T.J.R. Hughes (1998). Этот тензор имеет те же компоненты, что и второй тензор Пиолы-Кирхгофа \tilde{S} , но в текущем локальном базисе, а не в начальном: $\tilde{\tau} = J\sigma^{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$, $\tilde{S} = J\sigma^{ij}\vec{E}_i\vec{E}_j$. Производные Труделла $\tilde{\sigma}^{TR}$ тензора Коши и Ли $\tilde{\tau}^{Li}$ тензора Кирхгофа связаны соотношением:

$$J\tilde{\sigma}^{TR} = \tilde{\tau}^{Li}.$$

Функция нагружения имеет вид:

$$f = \frac{1}{2}\tilde{\tau}:\tilde{\tau} - \frac{1}{2}F^2, \quad F(\tilde{\tau}, \chi) = A + M\tilde{\tau} + \chi.$$

Здесь $\tilde{\tau} = \tilde{\tau} - \tilde{\tau}^0\delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений, $\tilde{\tau}^0 = \frac{1}{3}\tau_{ij}\delta_{ij}$. В критерии Кулона-Мора параметры M и A из выражаются формулами:

$$M = \frac{2\sqrt{6} \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}, \quad A = \frac{2\sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi},$$

где φ – угол внутреннего трения грунта, c – сцепление.

В работе С.С. Григоряна (1960) для сдвиговых свойств выбрана модель идеальной пластичности, но в численных расчетах удобно использовать малое изотропное упрочнение χ для устойчивости вычислений. Диаграмма для шаровых частей соответствует конкретной скорости нагружения.

В настоящий момент расчеты проведены для достаточно малых деформаций 4-10%, поэтому были выбраны определяющие соотношения деформационного типа (3) в рамках предположения, что для деформаций порядка 4-10% деформационная теория сохраняет приемлемую точность.

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ij} = 2\mu \left[(1 - \omega) \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] - \frac{\partial \omega}{\partial E_u} \frac{\bar{E}_{ij} \bar{E}_{kl}}{E_u} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \bar{E}_{ij} \delta_{kl} + K_t(\theta) \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \dot{E}_{kl}, \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{C}^E(\tilde{E}) = (1 - \omega) \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] - \frac{\partial \omega}{\partial E_u} \frac{\bar{E}_{ij} \bar{E}_{kl}}{E_u} - \\ - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \bar{E}_{ij} \delta_{kl} + K_t(\theta) \delta_{ij} \delta_{kl}, \end{aligned}$$

$$\omega(E_u, \theta) = \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_s(\theta)}{E_u} \right), \quad \varepsilon_s(\theta) = \frac{\tau_s + b \overset{\circ}{\tau}(\theta)}{2\mu}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \left(\frac{\mu_t}{\mu} - 1 \right) \frac{b}{2\mu} K_t(\theta),$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} (\tilde{F}^T \cdot \tilde{F} - I), \quad \tilde{F} = \frac{F}{J^{1/3}}, \quad J = \det F, \quad E_u = \sqrt{\bar{E}_{ij} \bar{E}_{ij}},$$

$$\dot{\tilde{S}} = \tilde{C}^E(\tilde{E}) : \dot{\tilde{E}}, \quad \tilde{\tau}^{Li}(d\tilde{u}) = \tilde{C}(\tilde{E}) : \tilde{d}(d\tilde{u}), \quad C_{ijkl} = F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} C_{pqrs}^E,$$

$\theta = I_3(\tilde{C}) - 1$, \tilde{C} – мера деформаций Коши-Грина, $\tilde{C}^E(\tilde{E})$ и $\tilde{C}(\tilde{E})$ – касательные модули упругости соответственно в начальной и текущей конфигурациях, ω – функция Ильюшина, \bar{E}_{ij} – компоненты девиатора накопленной деформации Грина-Лагранжа, E_u – интенсивность накопленной деформации, $K_t(\theta)$ – касательный модуль на диаграмме $\overset{\circ}{\tau}(\theta)$, $b = \operatorname{tg} \varphi$ – тангенс угла внутреннего трения, τ_s – предел текучести при $\theta = 0$, F – деформационный градиент, $\tilde{d}(d\tilde{u})$ – тензор скоростей (дифференциалов) деформации, μ – упругий модуль сдвига, μ_t – касательный модуль сдвига, соответствующий малому упрочнению и выбираемый как вычислительный параметр для улучшения сходимости.

Далее приведены результаты решения задачи со штампом для песчаного грунта (рис. 5). На верхней границе задавалось перемещение штампа равными ступенями (общая деформация от 4 до 10%).

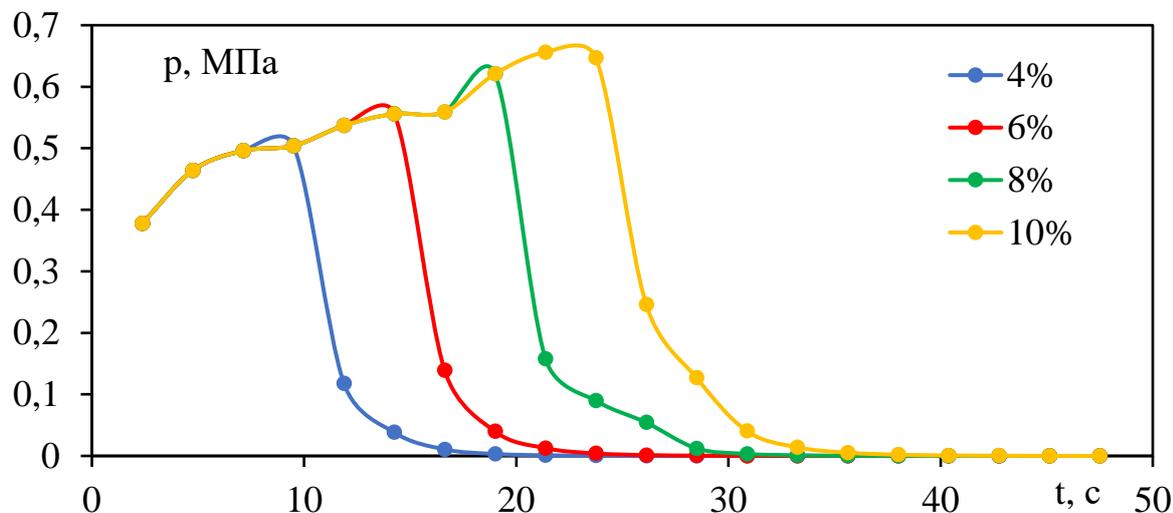


Рис. 5. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,4 м.

Глава 3 посвящена вычислению эффективных свойств грунтов, входящих в качестве параметров в модель Био. В этой главе также определяются зависимости эффективных свойств от изменяющейся пористости, которые учитываются в модели консолидации.

В разделе 3.1 описываются процедуры и примеры вычисления эффективных упругих модулей и параметра Био (тензора передачи порового давления). Особенностью использования асимптотического метода осреднения в работе является то, что он применяется для пористой среды, насыщенной жидкостью. Поэтому при подстановке асимптотического ряда в уравнение равновесия для водонасыщенной среды и последующего осреднения возникают две локальные задачи в представительной области — одна для определения эффективных упругих модулей, а другая — для определения тензорного параметра Био. Разработанная методика применялась для разных типов скальных грунтов. Были исследованы зависимости эффективных свойств от пористости (рис. 6), формы пор, минерального состава.

На рис. 6 и 7 приведены результаты расчетов эффективных свойств на двумерных образцах карбонатных пород. На рис. 6 видно, что расчетные значения модуля Юнга доломитов в представительной области ложатся на одну

и ту же кривую зависимости от пористости, куда попадают и экспериментальные значения и значения, известные из литературы.

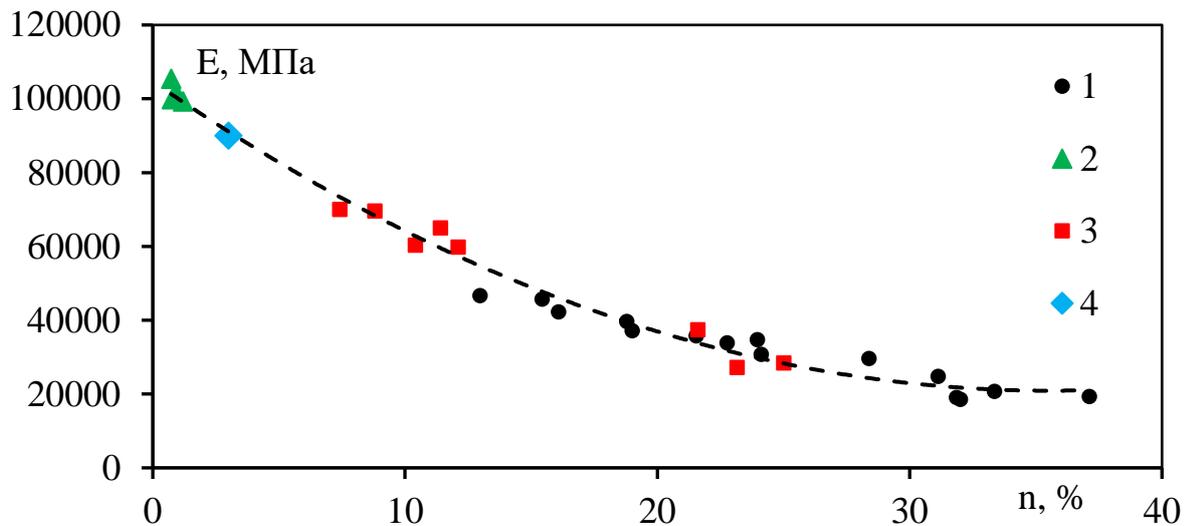


Рис. 6. Зависимость эффективного модуля Юнга доломитов от пористости по результатам: 1) экспериментов, 3) расчетов по методу осреднения, 2) и 4) литературных данных.

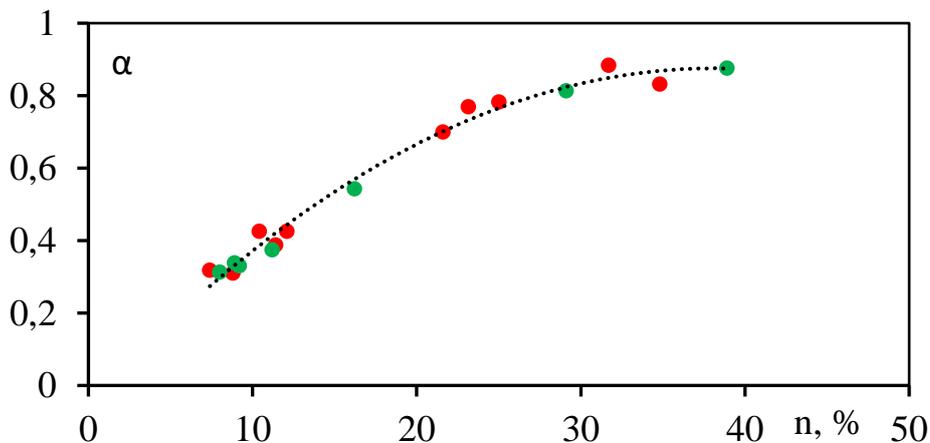


Рис. 7. Зависимость эффективного параметра Био от пористости: 1) для доломитов и 2) известняков по результатам расчетов по методу осреднения.

На рис. 7 показано, что точки зависимости коэффициента Био от пористости для карбонатных пород тоже ложатся на одну кривую. Эти результаты позволили ввести обобщенное понятие представительной области, согласно которому представительными считаются области, для которых точки зависимости какого-либо осредненного свойства от параметра структуры (например, пористости) принадлежат одной и той же кривой зависимости. Обобщенное понятие представительной области позволяет использовать для расчета области

меньшие, чем те, которые соответствуют классическому определению представительной области.

В конце раздела приведены результаты расчетов на 3D образцах известняка, построенных по изображениям, полученным на рентгеновском томографе. Как оказалось, трехмерные расчеты модуля Юнга известняка точнее двумерных, они лучше соответствуют экспериментальным данным.

В разделе 3.2 описывается методика вычисления тензора расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании по методу осреднения. Обобщение закона термоупругости на случай фазового перехода жидкости в лед включает слагаемое, описывающее деформирование пористого водонасыщенного материала в результате замерзания воды в порах. При подстановке асимптотического разложения перемещений в уравнение равновесия водонасыщенной среды получаются три локальные задачи. В результате решения третьей локальной задачи находится тензор расширения пористой водонасыщенной среды при замерзании.

При решении этой задачи учитывается факт, что образование льда всегда начинается вдали от границы поры и при замерзании воды в поре между льдом и границей скелета остается тонкий слой воды. В этом слое действует гидростатическое давление p , которое препятствует расширению льда и способствует сжатию материала скелета. Решение задачи целесообразно начать с определения этого давления. Очевидно, что, зная p , можно решить локальную задачу, т.е. найти перемещения в скелете и во льду, которые находятся под действием соответственно внутреннего и внешнего давления p .

Для среды с открытыми порами коэффициент относительного расширения пористой среды находится в виде формулы. Для среды с закрытыми порами требуется решить так называемые локальные задачи в представительной области, а параметр относительного расширения пористой среды является, вообще говоря, тензором второго ранга.

В конце раздела приводятся примеры расчетов тензора расширения γ_{ij} водонасыщенной среды при замерзании на 2D модельных образцах и на образце вулканического туфа. Расчеты показали, что величина этого параметра γ_{ij} сильно зависит от формы пор: для крестообразной поры $\gamma_{\alpha\alpha}$ в 1,5 раза больше, чем для круглой при одной и той же пористости. Результаты расчетов эффективного тензора расширения вулканического туфа при замерзании воды в порах подтвердили необходимость при исследовании напряженно-

деформированного состояния массива пород определять истинные значения коэффициентов расширения пород при замерзании, а не принимать их равными коэффициенту расширения воды при переходе в лед.

Основные выводы и результаты диссертации

1. Сформулирована вариационная линеаризованная постановка полностью нелинейной (физически и геометрически) связанной задачи консолидации в скоростях перемещений и изменения давления воды, где все переменные зависят от лагранжевых координат твердой фазы скелета. В этой постановке в качестве определяющих соотношений могут использоваться соотношения упругости, деформационная теория пластичности или теория течения.
2. Реализовано численное решение связанной нелинейной задачи консолидации с использованием обобщения неявной схемы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы.
3. На тестовых примерах проведен анализ устойчивости решения линейной задачи консолидации при аппроксимации элементами Q1-Q1 и Q2-Q1. Результаты расчета модельной задачи со штампом подтвердили известный в литературе вывод, что аппроксимация седловой задачи квадратичными конечными элементами Q2 для перемещений скелета грунта и трилинейными КЭ Q1 для давления воды обеспечивает устойчивость решения задачи, а применение элементов Q1-Q1 приводит, вообще говоря, к неустойчивой системе уравнений.
4. Показано, что при использовании конечных элементов Q1-Q1 устойчивость решения линейной седловой задачи можно улучшить, увеличивая соотношение шага по времени к квадрату шага сетки $\left(\frac{\tau}{h^2}\right)$, т.е. увеличивая шаг по времени или измельчая конечно-элементную сетку.
5. Исследовано влияние геометрической нелинейности на результаты решения связанной задачи консолидации и показано, что на первых шагах по времени расчетные значения давления воды в линейной задаче значительно выше, чем в геометрически нелинейной, и эта разница увеличивается при увеличении заданного перемещения штампа.
6. Проведено сравнение решения задачи консолидации при аппроксимации гиперупругого материала потенциалами Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана–Кирхгофа и на примере расчета задачи со штампом показано, что

потенциалы Муни, Муни-Ривлина и Трелоара дают близкие результаты, а квадратичный потенциал Сен-Венана–Кирхгофа, по-видимому, не подходит для аппроксимации материала при деформации 20%.

7. На примере расчетов модельной задачи со штампом показано, что учет влияния изменения пористости и проницаемости материала в процессе его деформирования приводит к существенному увеличению величин порового давления на начальном этапе процесса консолидации.
8. Разработанная нелинейная модель консолидации, учитывающая изменение пористости и проницаемости, применена для моделирования гиперупругого деформирования биологического материала, насыщенного кровью или плазмой.
9. Решена модельная задача об упругопластическом деформировании пористого водонасыщенного песчаного грунта при действии штампа. Для моделирования определяющих соотношений упругопластического деформирования грунта при кратковременных нагрузках была использована модель Григоряна (1960), обобщенная на большие деформации.
10. На основе асимптотического метода осреднения и решения локальных задач в представительной области разработаны процедуры определения тензора передачи порового давления (параметра Био) и тензора расширения водонасыщенного пористого грунта при замерзании воды в порах. Методы опробованы на реальных грунтах.
11. Изучено влияние пористости, формы пор и минерального состава на модуль Юнга, параметр Био и тензор расширения пористой водонасыщенной среды при замерзании, получены зависимости первых двух параметров от пористости.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus, RSCI:

1. *Шешенин С.В., Артамонова Н.Б.* Моделирование нелинейной связанной задачи консолидации // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2020. Т.26. №3. С.341–361.
Impact factor RINC: 0.558. DOI: 10.33113/mkmm.ras.2020.26.03.341_361.04

2. *Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.* Связанная задача консолидации в нелинейной постановке. Теория и метод решения // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2020. Т.26. №1. С.122–138.
Impact factor RINC: 0.558. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2020.26.01.122_138.08
3. *Artamonova N.B., Sheshenin S.V., Frolova Yu V., Bessonova O.Yu, Novikov P.V.* Calculating components of the effective tensors of elastic moduli and Biot's parameter of porous geocomposites // *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol.55. No.6. P.715–726.
Impact factor JCR (WoS): 1.029. DOI: 10.1007/s11029-020-09846-w
4. *Артамонова Н.Б., Мукатова А.Ж., Шешенин С.В.* Асимптотический анализ уравнения равновесия флюидонасыщенной пористой среды методом осреднения // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2017. №2. С.115–129.
Impact factor JCR (WoS): 0.489. DOI: 10.3103/S002565441702011X
5. *Шешенин С.В., Лазарев Б.П., Артамонова Н.Б.* Применение асимптотического метода осреднения для определения коэффициента расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*. 2016. №6. С.32–36.
Impact factor SJR: 0.106. DOI: 10.3103/S0027133016060017
6. *Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Мукатова А.Ж.* Применение метода осреднения для определения коэффициента передачи порового давления // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*. 2015. №2. С.42–45.
Impact factor SJR: 0.159. DOI: 10.3103/S002713301502003X

Другие научные труды:

7. *Шешенин С.В., Артамонова Н.Б.* Физически и геометрически нелинейная связанная задача консолидации // *Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.)*. Т.2. Ростов-на-Дону – Таганрог: Изд-во Южного федерального университета, 2020. С.266–270.
8. *Артамонова Н.Б., Шешенин С.В., Фролова Ю.В., Новиков П.В., Орлов Е.А., Кузнецов Р.А.* Применение асимптотического метода осреднения для оценки эффективных свойств грунтов // *Материалы X-ой научно-практической конференции «Ломоносовские чтения» (Душанбе, 25-26 сентября 2020 г.)*. Т.1. Душанбе: Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, 2020. С.102–107.

9. *Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.* Математическая формулировка и метод решения связанной задачи консолидации в нелинейной постановке // Сборник трудов 9-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию Института прикладной механики РАН. Москва, Россия. 19-21 ноября 2019 г. М.: ИПРИМ РАН, 2019. С.21–24.
10. *Артамонова Н.Б., Фролова Ю.В., Шешенин С.В.* Вычислительная методика определения тензора передачи порового давления // Сборник материалов научно-практической конференции «Инженерно-геологические задачи современности и методы их решения». Москва, Россия. 13-14 апреля 2017 г. М.: Геомаркетинг М, 2017. С.240–247.
11. *Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.* Вычисление эффективных свойств грунтов // Сборник трудов 7-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, Россия. 21-23 ноября 2017 г. М.: ИПРИМ РАН, 2017. С.272–274.
12. *Шешенин С.В., Лазарев Б.П., Артамонова Н.Б.* Асимптотический анализ расширения флюидо-насыщенной пористой среды при фазовом переходе // Сборник материалов «Упругость и неупругость» Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, Россия. 20-21 января 2016 г. М.: Изд-во МГУ, 2016. С.267–270.
13. *Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Фролова Ю.В., Ладыгин В.М.* Определение упругих свойств и тензора передачи порового давления горных пород методом осреднения // Вестник МГУ. Сер. 4. Геология. 2015. №4. С.90–97.
Impact factor SJR: 0.247. DOI: 10.3103/S0145875215040109