

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи



Артамонова Нина Брониславовна

**ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ БИО
ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

Шешенин Сергей Владимирович

Москва – 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Постановка геометрически и физически нелинейной задачи консолидации в скоростях	17
1.1. Основные понятия водонасыщенной пористой среды.....	17
1.2. Уравнение равновесия водонасыщенной пористой среды.....	20
1.3. Линейный закон фильтрации Дарси.....	21
1.4. Уравнение состояния жидкости.....	30
1.5. Уравнения неразрывности жидкой и твердой фаз.....	32
1.6. Уравнения фильтрации жидкости и изменения пористости в пространственной формулировке.....	34
1.7. Дифференциальная постановка геометрически нелинейной связанной задачи консолидации (с использованием подхода ALE)	37
1.8. Вариационная постановка связанной задачи консолидации в текущей конфигурации.....	42
1.9. Линеаризация вариационной постановки связанной задачи консолидации	45
Глава 2. Алгоритм и примеры решения нелинейной связанной задачи консолидации	51
2.1. Дискретизация уравнений модели консолидации по пространственным координатам.....	51
2.2. Метод Узавы с внутренними итерациями.....	56
2.3. Анализ устойчивости линейной связанной задачи консолидации LBB-условие.....	63
2.4. Дискретизация по времени нелинейной задачи консолидации.....	72
2.5. Моделирование задачи консолидации для пористого гиперупругого материала.....	73

2.6. Решение задачи об упругопластическом деформировании пористого водонасыщенного грунта.....	96
Глава 3. Вычисление эффективных свойств грунтов.....	105
3.1. Теоретические аспекты и примеры определения эффективных упругих модулей и параметра Био.....	106
3.2. Теоретические аспекты и примеры определения тензора расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании.....	124
Заключение.....	132
Литература.....	134
Приложения.....	146

Введение

Линейная теория совместного упругого деформирования грунта и фильтрации жидкости согласно закону Дарси впервые была сформулирована М. Biot [61]. Однако деформирование водонасыщенных дисперсных грунтов под нагрузкой, как правило, нелинейное и сопровождается большими пластическими деформациями. Возникла потребность в разработке строгой и эффективной нелинейной связанной модели совместного деформирования жидкой и твердой фаз грунта, учитывающей упругопластическое поведение материала, сопровождающееся изменением пористости и проницаемости. К настоящему времени различными исследователями разработаны обобщения классических уравнений консолидации в бесконечно малых на конечные деформации, например в работах [65, 66, 89].

Задачи совместного деформирования грунта и движения жидкости могут решаться в несвязанной постановке (упругий режим фильтрации) и в связанной постановке. При решении задач об откачке нефти из глубоких скважин упругий режим фильтрации бывает вполне достаточен. Задачи о деформировании водонасыщенного грунта под нагрузкой, как правило, решаются в связанной постановке. Метод конечных элементов – наиболее широко используемый метод для решения задач консолидации [65, 66, 89, 92, 105, 106, 111].

Большинство разработанных моделей консолидации базируются на моделях фильтрации, линейной теории упругости или упругопластичности для малых деформаций [60–62, 111]. Нелинейные реакции геотехнических элементов конструкций, как правило, возникают в результате пластических умеренно больших деформаций скелета грунта. Влияние конечных деформаций обычно проявляется в глинистых грунтах под нагрузкой, где деформации развиваются во времени с гидродинамическим запаздыванием и зависят от скорости оттока жидкости из грунта. Обобщения классических

уравнений консолидации на большие деформации в основном базируются на использовании определяющих соотношений в скоростях [68, 69]. Используется также мультипликативное разложение градиента деформации [65, 66, 89, 108].

В последнее время взаимодействие между течением жидкости и скелетом грунта моделируется с использованием различных связанных схем. В связанном методе уравнение фильтрации и уравнение равновесия среды решаются одновременно на каждом шаге по времени [72, 86]. В итерационно связанном методе осуществляются последовательные схемы решения. Сначала решается или задача фильтрации, или механическая задача, а потом решается другая задача, используя результат решения первой [72, 86, 87, 105, 106, 120]. Итерационно связанные последовательные методы могут использовать независимые решатели механики сплошных сред и средства моделирования пластового потока, развитые в нефтяной промышленности [89].

При решении связанных динамических задач консолидации различные исследователи часто используют метод ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) для исправления сильно искаженной лагранжевой сетки [10, 73, 78, 95], что приводит к перестроению сетки и, соответственно, к некоторой потере точности решения. Следует отметить, что в нашей работе метод ALE используется только для объединения эйлерова и лагранжева подходов и не связан с перестроением лагранжевой сетки.

Далее обзор литературы распределен по главам.

Актуальность темы

Решение нелинейной связанной задачи, описывающей деформирование грунта при оттоке или притоке жидкости, весьма актуально в различных областях хозяйственной деятельности человека. Геомеханическая реакция скелета грунта на изменение давления жидкости играет критическую роль, например, при деформировании дорожного полотна или при неравномерной

осадке инженерных сооружений. Поэтому разработка нелинейной связанной модели консолидации, учитывающей упругое или упругопластическое поведение материала, сопровождающееся изменением пористости и проницаемости, является весьма актуальной. Создание собственного программного кода является актуальным и целесообразным потому, что способствует повышению уровня научного моделирования и программирования в нашей стране. Представляется актуальным исследовать устойчивость решения седловой задачи консолидации теоретически в линейном и нелинейном вариантах.

В настоящее время наблюдается стремление более точно моделировать процессы фильтрации и консолидации. Это означает, прежде всего, два момента: использование более точных механических моделей, проверенных доступными экспериментами, и более точное вычисление эффективных свойств материалов, входящих в модели в качестве параметров, применяя современные численные методы и революционно возросшие мощности компьютеров. В последнее время для получения моделей реальной структуры пористых материалов широко используется метод компьютерной томографии. Результаты расчетов эффективных свойств на трехмерных моделях, построенных по рентгеновским изображениям, оцифрованным в специальных программах (VG MAX 3.3), показывают совпадение с экспериментальными данными. Учет реальных нелинейных свойств упругих материалов и грунтов позволяет осуществлять более реалистичное моделирование процесса консолидации, что является актуальной задачей.

Цели работы

1. Постановка полностью нелинейной (физически и геометрически) связанной задачи совместного деформирования пористого флюидонасыщенного материала под нагрузкой при медленном оттоке жидкости, создание алгоритма ее решения, реализация с помощью разработанного программного кода, практическое исследование

устойчивости решения, опробование решения на модельных и практических примерах.

2. Разработка методов вычисления эффективных свойств пористого водонасыщенного материала, входящих в качестве параметров в модель Био, на основе асимптотического метода осреднения и опробование этих методов на примере реальных структур грунтов.

Научная новизна работа

В диссертационной работе сформулирована, математически исследована, обоснована на основе моделей и экспериментальных возможностей механики сплошных сред и численно реализована достаточно общая формулировка задачи совместного деформирования пористой твердой среды с протекающей через поры жидкостью в рамках физической и геометрической нелинейности. Постановка задачи выведена в скоростях перемещений твердой фазы и изменения давления воды в дифференциальном и вариационном виде. В силу комбинации отмеченных черт разработанной модели консолидации такое исследование представляется новым. Научная новизна заключается также в создании собственного программного кода.

Новизна также состоит в применении подхода ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) для переформулировки уравнений фильтрации и изменения пористости в лагранжевых координатах твердого каркаса с использованием относительной скорости движения жидкости.

Исследование влияния геометрической нелинейности совместно с учетом изменения пористости и проницаемости материала на результаты решения нелинейной задачи консолидации также является новым.

В работе асимптотический анализ уравнения равновесия применяется для пористой среды, насыщенной жидкостью. В этом состоит новая особенность применения метода осреднения, в результате чего получаются локальные задачи не только для определения эффективных упругих модулей,

но и для определения параметра Био и тензора расширения пористой водонасыщенной среды при замерзании.

В работе вводится новое обобщенное определение представительной области, меньшей по размеру, чем представительная область, соответствующая классическому определению. Согласно этому определению, при расчетах на таких представительных областях точки соответствия какого-либо эффективного свойства (модуля Юнга или коэффициента передачи порового давления) и параметра структуры (пористости) должны ложиться на одну кривую.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение. В работе показана применимость метода Узавы в качестве основной части метода решения нелинейных задач консолидации.

Разработанная модель консолидации может применяться для расчетов образования колеи и неровностей грунтовых дорог. Она также может применяться для изучения процесса деформирования биологических материалов при использовании модели упругости.

Тензор передачи порового давления и тензор расширения водонасыщенной среды при замерзании трудно определять экспериментально, а для анизотропных экспериментальная методика их определения еще не разработана. Следовательно, вычислительная методика может стать оценочным способом определения этих параметров, если известна структура порового пространства и упругие свойства компонентов матрицы.

Методология и методы исследования

Для формулировки механической модели использовался феноменологический подход, т.е. все уравнения модели связанной консолидации были выведены из общих законов сохранения механики сплошной среды, применяя пространственное осреднение по

представительной области. Для жидкости это теория смеси, а для твердой фазы – осреднение пористой среды. Для переформулировки уравнений фильтрации и изменения пористости в лагранжевых координатах твердой фазы с использованием относительной скорости течения жидкости применялся подход ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian). При линеаризации вариационных уравнений равновесия использовалась техника дифференцирования по Гато.

Также использовались дополнительные соотношения, экспериментальные законы и закономерности, известные из литературы. Для моделирования определяющих соотношений для упругопластического деформирования грунта при кратковременных нагрузках выбрана модель Григоряна, обобщенная на большие деформации. Для аппроксимации гиперупругого материала использовались упругие потенциалы Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана–Кирхгофа.

Для пространственной дискретизации использовался метод конечных элементов (МКЭ): квадратичные серендиповы элементы для аппроксимации собственно уравнения фильтрации и элементы трилинейного типа для аппроксимации уравнений равновесия. Производная по времени аппроксимировалась конечной разностью.

Для решения системы уравнений равновесия и фильтрации использовалось обобщение неявной схемы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы. Для реализации итерационного процесса на каждом шаге по времени применялся метод простой итерации с применением предобусловливателя для ускорения сходимости.

Для создания компьютерной программы в качестве основы использовался код, разработанный научным руководителем соискателя и проверенный в совместной работе с компанией Мишлен (Франция), который предназначен для решения геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела. Дополнительно к этому коду разработан код для численной реализации уравнений фильтрации и изменения пористости, а

также подпрограммы для реализации функций формы серендиповых квадратичных конечных элементов и для построения конечно-элементных сеток.

Для теоретического определения эффективных модулей использовался математически строгий подход механики композитов, называемый методом асимптотического осреднения или методом двух масштабов.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Полученная для исследования процесса деформирования пористого флюидонасыщенного материала под нагрузкой квазистатическая постановка нелинейной связанной задачи консолидации при больших деформациях в скоростях перемещений твердой фазы и изменения порового давления охватывает в качестве определяющих соотношений теорию упругости, теорию течения или деформационную теорию пластичности.
2. Применение методики ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) позволяет эффективно переформулировать все уравнения нелинейной консолидации в единой системе координат, связанной с лагранжевыми координатами твердого каркаса с использованием относительной скорости движения жидкости относительно твердой фазы скелета.
3. Учет геометрической нелинейности приводит к заметному снижению расчетных значений порового давления, а учет изменения пористости и проницаемости материала – к существенному увеличению величин порового давления на начальном этапе процесса консолидации.
4. Методика вычисления параметров, ассоциированных с моделью Био, разработанная на основе асимптотического осреднения и опробованная на реальных грунтах, показала эффективность при определении тензора передачи порового давления (параметра Био) и тензора расширения пористой среды при замерзании воды в порах.

5. Развитое на основе опытов и вычислительных экспериментов обобщение понятия представительной области, согласно которому представительными считаются области, для которых точки зависимости какого-либо осредненного свойства (например, модуля Юнга или параметра Био) от параметра структуры (например, пористости) ложатся на одну и ту же кривую, позволяет вычислять эффективные свойства на достаточно малых областях, имеющих разную пористость.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность результатов диссертационной работы обоснована использованием строгих математических методов из областей математического и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и математической физики, а также классических методов механики сплошных сред, применимость которых к данному типу задач хорошо исследована и подтверждена. Достоверность подтверждается также совпадением некоторых результатов расчетов с результатами экспериментальных исследований.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Всероссийских и Международных конференциях, на научно-исследовательских семинарах, подвергались рецензированию при публикации журналов.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф., члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2020 г.);

- научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. В.И. Горбачева (2020 г.);
- научно-исследовательский семинар имени А.А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского (2020 г.);
- межкафедральный научно-исследовательский семинар по механике деформируемых сред под руководством д.ф.-м.н., проф. С.В. Шешенина, д.ф.-м.н., проф. А.В. Звягина и д.ф.-м.н., проф. А.Б. Киселева (2015–2019 г.);
- Международная научная конференция «Ломоносовские чтения» (2014, 2019, 2020 г.);
- XX Международная конференция «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов-на-Дону, Россия, 18–21 июня 2020;
- Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, ИПРИМ РАН, Москва, Россия (2017, 2019 г.);
- Международная научно-практическая конференция "Стратегия развития геологического исследования недр: настоящее и будущее (к 100-летию МГРИ–РГГРУ)" Российский государственный геологоразведочный университет, Москва, 4–6 апреля 2018 г.;
- Международная научно-практическая конференция "Инженерно-геологические задачи современности и методы их решения", ИГИИС, Москва, Россия, 13–14 апреля 2017 г.;
- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвящённый 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, Россия, 20–21 января 2016 г.
- По теме диссертации был выигран грант РФФИ №20-01-00431_а на 2020-2022 гг., в котором соискатель выступал в качестве ответственного исполнителя.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 13 печатных работах [1–6, 46–49, 52, 53, 57], из них 6 статей опубликованы в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI [1, 5, 46, 47, 53, 57].

Личный вклад автора

Дифференциальная постановка задачи получена самостоятельно автором диссертации [4, 5, 48]. Также самостоятельно осуществлена переформулировка уравнений фильтрации и изменения пористости в движущейся системе координат, связанной с лагранжевыми координатами твердого каркаса, по методу ALE [4, 5, 48]. Самостоятельно получена вариационная постановка задачи и проведена линеаризация вариационного уравнения равновесия с использованием техники дифференцирования по Гато [4, 5, 48].

На основе программы научного руководителя, реализующей решение задачи нелинейного деформирования твердого тела без водонасыщения, самостоятельно написан код, связанный с реализацией уравнения фильтрации и изменения пористости, а также подпрограммы для создания функций формы серендиповых квадратичных конечных элементов и для построения конечно-элементных сеток [46, 48].

Исследование влияния геометрической нелинейности и учета изменения пористости и проницаемости проведены автором диссертационной работы самостоятельно [46, 48].

Методы вычисления тензора передачи порового давления (параметра Био) и тензора расширения пористой водонасыщенной среды при замерзании воды в порах разработаны автором самостоятельно [1–3, 6, 47, 49, 52, 53, 57]. Построение и расчеты 2D моделей, а также эксперименты на образцах грунтов выполнялись совместно со студентами Е.А. Орловым, П.В. Новиковым и О.Ю. Бессоновой под руководством автора диссертационной работы [6, 57]. Расчеты 3D моделей были сделаны студентом Е.А. Орловым под нашим руководством

[6]. Часть экспериментальных данных была предоставлена доцентом Ю.В. Фроловой [2, 6, 49, 57].

Обобщение понятия представительной области на область меньшего размера, для которой точки соответствия значения какого-либо свойства грунта и параметра структуры лежат на одной кривой, сделаны автором диссертационной работы самостоятельно [1, 6, 49, 57].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и трех приложений. В работе содержится 48 рисунков, 5 таблиц. Список литературы содержит 122 наименования. Общий объем работы 157 стр.

Обзор диссертационной работы по главам

В **первой главе** изложен вывод уравнений полностью нелинейной (и геометрически, и физически) связанной модели консолидации. Дифференциальные уравнения нелинейной модели консолидации записаны из общих законов сохранения механики сплошной среды (уравнения равновесия, закона сохранения масс твердой и жидкой фаз грунта и закона фильтрации Дарси) с применением пространственного осреднения по представительной области. Новизна состоит в применении подхода ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) для переформулировки уравнений фильтрации и изменения пористости в лагранжевых координатах твердого каркаса с использованием относительной скорости движения жидкости. Для решения задачи методом конечных элементов была получена вариационная постановка задачи консолидации. При линеаризации вариационных уравнений равновесия использовалась техника дифференцирования по Гато.

Во **второй главе** описывается алгоритм решения связанной задачи консолидации и приводятся результаты численного моделирования. Для пространственной дискретизации используется метод конечных элементов:

элементы трилинейного типа для аппроксимации собственно уравнения фильтрации и квадратичные элементы для аппроксимации уравнений равновесия. Система уравнений равновесия и фильтрации решается в предположении постоянной пористости, которая пересчитывается на каждом шаге по времени. Для решения системы используется обобщение неявной схемы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы. Проведен анализ устойчивости решения линейной задачи при аппроксимации элементами Q1-Q1 и Q2-Q1. Приводятся численные примеры расчета нелинейной связанной задачи консолидации для гиперупругого материала при аппроксимации потенциалами Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана–Кирхгофа. Исследовано влияние учета геометрической нелинейности на результаты решения задачи консолидации. Решена задача с изменяющимися пористостью и коэффициентом фильтрации. Сделан вывод о том, что учет геометрической нелинейности приводит к заметному снижению расчетных значений порового давления, а учет изменения пористости и проницаемости материала – к существенному увеличению величин порового давления на начальном этапе процесса консолидации. На примере решения модельной задачи продемонстрирована возможность применения нелинейной модели консолидации для изучения процесса деформирования пористых биологических материалов, насыщенных кровью и плазмой, при использовании модели упругости. Решена модельная задача об упругопластическом деформировании пористого водонасыщенного грунта. Для моделирования определяющих соотношений упругопластического деформирования водонасыщенного грунта под нагрузкой использовалась модель Григоряна, обобщенная на большие деформации. Расчеты проводились в собственном программном коде.

Третья глава посвящена вычислению эффективных свойств грунтов, входящих в качестве параметров в модель Био. На основе метода осреднения были разработаны процедуры определения тензора передачи порового давления (параметра Био) и тензора расширения пористой водонасыщенной

среды при замерзании. Вводится новое обобщенное определение представительной области, меньшей по размеру, чем представительная область, соответствующая классическому определению. Согласно этому определению, при расчетах на таких представительных областях точки соответствия какого-либо эффективного свойства (модуля Юнга или коэффициента передачи порового давления) и параметра структуры (пористости) должны ложиться на одну кривую. В соответствии с новым определением представительной области, в третьей главе определяются зависимости эффективных свойств от изменяющейся пористости, которые затем используются в модели консолидации. Приведено сравнение результатов расчетов эффективных упругих модулей по методу осреднения на основе трехмерных и двухмерных моделей реальной структуры чистых известняков и экспериментальных исследований.

Частично выполнение работы было поддержано РФФИ (грант №20-01-00431_a).

Глава 1. Постановка геометрически и физически нелинейной задачи консолидации в скоростях

В главе 1 использованы результаты работ [4, 5, 46, 48].

1.1. Основные понятия водонасыщенной пористой среды

В фильтрационном потоке одна часть пространства занята жидкостью, а другая – твердой фазой грунта. Предполагается, что жидкость заполняет весь объем пустот в грунте. Поры и трещины, по которым движется флюид, имеют сложную разветвленную структуру, материал скелета грунта часто неоднороден по составу. Таким образом, скелет грунта представляет собой частое чередование различных структурных неоднородностей (зерен минералов, цемента, связывающего зерна, и пустот). Из-за такой сложной структуры грунта фильтрационные процессы в грунтовом массиве описываются дифференциальными уравнениями с быстроосциллирующими коэффициентами.

Для исследования решений таких уравнений используется методика осреднения [9], а целью исследования является получение осредненных дифференциальных уравнений с эффективными коэффициентами, решения которых близки решениям исходных уравнений.

При использовании методики осреднения считается, что пористая водонасыщенная среда имеет два геометрических масштаба – макроуровень и микроуровень. Макроуровень представляет собой, например, слой грунта, в котором происходит фильтрация. Микроуровень определяется структурными элементами грунта – порами, трещинами, зернами породы, линейные размеры которых много меньше размеров всей области фильтрации.

На микроуровне вводится понятие представительной области грунта V_{RVE} (RVE – *representative volume element*) – минимальной области,

представляющей грунтовой материал. Область V_{RVE} должна содержать достаточное количество элементов структуры и в среднем характеризоваться теми же свойствами (с разумной точностью), что и вся макро область грунта или ее часть. (Символом V_{RVE} будем обозначать как саму представительную область, так и ее объем.)

В представительной области вводятся быстрые координаты ζ_i , которые связаны с медленными координатами x_i , действующими во всей области грунта, с помощью формулы:

$$\zeta_i = \frac{x_i}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1, \quad (1.1.1)$$

где ε – малый геометрический параметр, l – характерный линейный размер представительной области, L – характерный линейный глобальный размер слоя пористой среды.

С помощью представительной области V_{RVE} определяются средние величины, например, средние плотности грунта $\langle \rho \rangle$, средние плотности жидкой $\langle \rho_f \rangle$ и твердой $\langle \rho_s \rangle$ фаз грунта:

$$\rho_f(\vec{x}) = \langle \rho_f \rangle = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \rho_f(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta}, \quad \rho_s(\vec{x}) = \langle \rho_s \rangle = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} \rho_s(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta}, \quad (1.1.2)$$

$$V_{RVE} = V_s + V_f, \quad \langle \rho \rangle = (1 - n)\langle \rho_s \rangle + n\langle \rho_f \rangle,$$

средние перемещения $\langle \vec{u} \rangle_s$ в твердой фазе грунта:

$$\langle \vec{u} \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} \vec{u}(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta}. \quad (1.1.3)$$

Здесь V_s и V_f – части объема представительной области, занятые твердой фазой и жидкостью соответственно, n – пористость, которая определяется как доля объема представительной области, приходящаяся на поры:

$$n = \frac{V_f}{V_{RVE}}. \quad (1.1.4)$$

В случае геометрически и физически нелинейной среды пористость зависит от перемещений в грунте: $n = n(\vec{u}(\vec{x}, t))$.

Средние полные напряжения $\langle \sigma \rangle$ определяются осреднением микронапряжений в твердой $\langle \sigma \rangle_s$ и жидкой $\langle \sigma \rangle_f$ фазах грунта:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \sigma(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta} = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_s} \sigma(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta} + \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_f} \sigma(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta} = \\ &= \frac{1-n}{V_s} \int_{V_s} \sigma(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta} + \frac{n}{V_f} \int_{V_f} \sigma(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta} = (1-n) \langle \sigma \rangle_s + n \langle \sigma \rangle_f, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

$$\langle \sigma \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} \sigma(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta}, \quad \langle \sigma \rangle_f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \sigma(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta} = -p(\vec{x}) I, \quad (1.1.6)$$

$p(\vec{x})$ – среднее давление жидкости.

Задача фильтрации решается на макроуровне. Именно такой подход также используется инженерами для решения реальных задач на практике. Результатом осреднения является пространство, заполненное одновременно жидкостью и твердой фазой, частицы которых движутся со своими скоростями.

Вектор скорости фильтрации определяется следующим образом [7]. Выберем произвольную точку M пористой среды, через которую фильтруется жидкость, и проведем через нее элементарную площадку Σ_M с нормалью \vec{n} . Через выделенную площадку в единицу времени протекает масса жидкости ΔQ_M . Проекция вектора \vec{w} на нормаль \vec{n} к выделенной площадке равна:

$$w_n = \lim_{\Sigma_M \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_M}{\rho_f \Sigma_M}.$$

Здесь $\rho_f = \rho_f(\vec{x})$ – средняя плотность жидкости. Скорость фильтрации \vec{w} и средняя скорость движения жидкости \vec{v} связаны соотношением [44]:

$$\vec{w} = n \vec{v}. \quad (1.1.7)$$

Фильтрационный поток рассматривается как непрерывное поле скоростей фильтрации. Принятие такой модели позволяет использовать аппарат дифференциальных уравнений для изучения процесса фильтрации на макроуровне.

В нашей работе связанная система уравнений модели консолидации включает три уравнения в частных производных – уравнение равновесия, уравнение фильтрации и уравнение изменения пористости относительно трех неизвестных функций: перемещения каркаса грунта, давления жидкости и пористости. Нужно заметить, что известны постановки, в которых неизвестными являются и давление, и скорость жидкости.

Уравнения фильтрации и изменения пористости выводятся на основе объединения уравнения, характеризующего режим фильтрации, уравнения состояния жидкости и уравнений неразрывности. Уравнение, характеризующее режим фильтрации, – это динамическое уравнение, которое учитывает влияние сил, действующих на фильтрующуюся жидкость. Для большинства задач геомеханики это линейный закон фильтрации Дарси [71].

1.2. Уравнение равновесия водонасыщенной пористой среды

Уравнение равновесия водонасыщенной пористой среды имеет вид:

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \underline{\sigma} \rangle + \rho \vec{f} = 0, \quad \vec{x} \in V, \quad (1.2.1)$$

Здесь $\langle \underline{\sigma} \rangle$ – среднее полное напряжение (см. (1.1.5)), $\rho = \langle \rho \rangle$ – средняя плотность грунта (см. (1.1.2)).

В текущей конфигурации среднее полное напряжение $\langle \underline{\sigma} \rangle$ в водонасыщенной пористой среде (макро однородной и изотропной) выражается в виде разности эффективных напряжений $\underline{\sigma}^{eff}$ и порового давления p , умноженного на коэффициент передачи порового давления α на скелет породы [61]:

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{\sigma}^{eff} - \alpha p I. \quad (1.2.2)$$

Эффективные напряжения $\underline{\sigma}^{eff}$ – это часть осредненных напряжений в твердой фазе грунта $\langle \underline{\sigma} \rangle_s$, вызванных не зависимым от жидкости механизмом

передачи внутренних сил (например, по контактам между зернами скелета грунта) [32].

Скалярный безразмерный коэффициент α принимает значения от 0 до 1 в зависимости от пористости и упругих свойств твердой составляющей грунта. Коэффициент α показывает, какая часть порового давления является активной при формировании макроскопических деформаций. Для анизотропных сред α является тензором передачи порового давления [84]. (Подробнее про тензор α и способы его определения будет написано в главе 3.)

Как следует из формул (1.1.5), (1.1.6) и (1.2.2), тензор эффективных напряжений $\tilde{\sigma}^{eff}$ связан с тензором осредненных напряжений в твердой фазе грунта $\langle \sigma \rangle_s$ и с давлением жидкости $p = p(\vec{x})$ посредством следующего соотношения:

$$\tilde{\sigma}^{eff} = (1 - n) \langle \sigma \rangle_s - (n - \alpha) p I. \quad (1.2.3)$$

Используя формулы (1.2.1) и (1.2.2), запишем в текущей конфигурации уравнение равновесия в терминах эффективных напряжений:

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma}^{eff}(\vec{u}) - \alpha \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} = 0, \quad \vec{x} \in V, \quad (1.2.4)$$

где \vec{f} – постоянная по времени массовая сила. Предполагается, что сила \vec{f} одинакова для каркаса и жидкости.

1.3. Линейный закон фильтрации Дарси

Пропускная способность пород зависит от пористости породы, структуры порового пространства и свойств фильтрующейся жидкости. Обычно учитывается открытая пористость, а замкнутые изолированные поры игнорируются и считаются частью материала скелета грунта. Пористость большинства пород находится в пределах 0,1–0,4 [20]. При одной и той же пористости пропускная способность различных сред может оказаться совершенно разной.

Жидкость будем считать ньютоновской. В законе вязкости Ньютона реологические свойства жидкости характеризуются только одной величиной – динамическим коэффициентом вязкости. Будем также предполагать жидкость однородной.

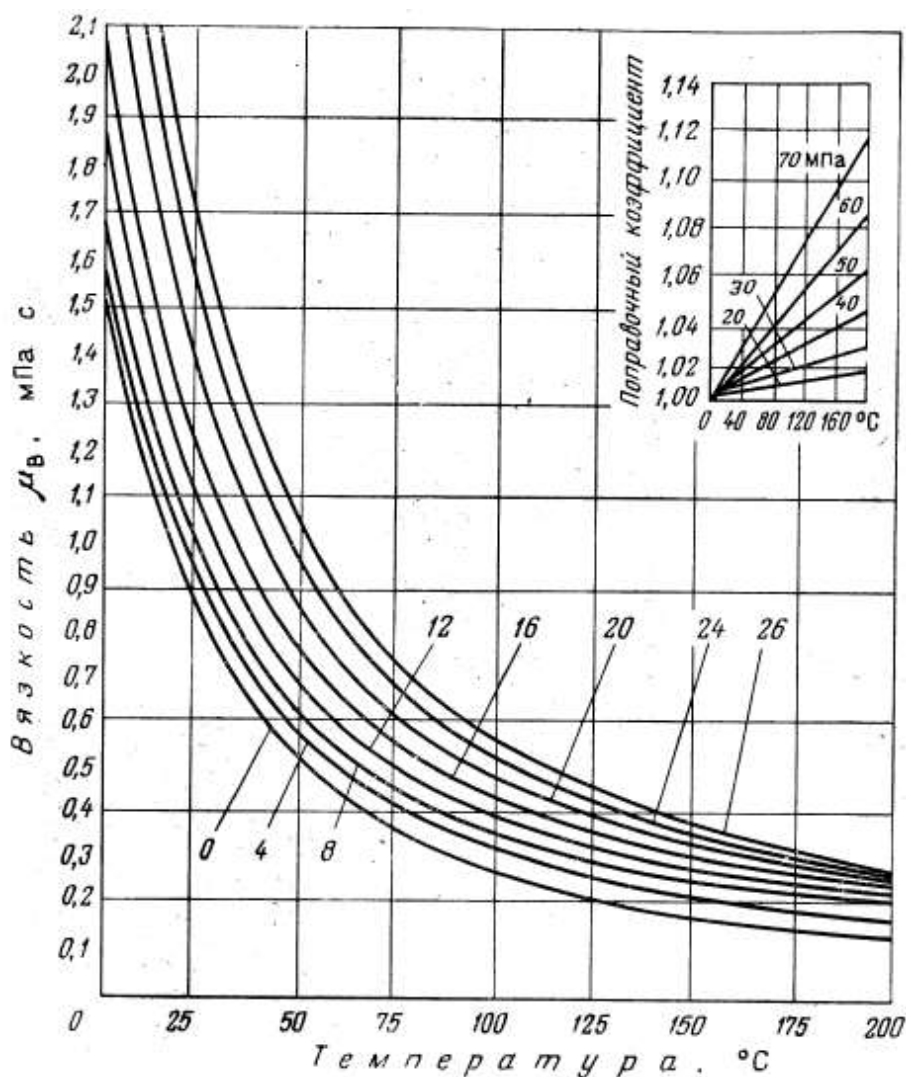


Рис. 1.3.1. Зависимость динамической вязкости минерализованной воды $\mu^в$ от температуры при различных концентрациях NaCl с поправочным коэффициентом на давление. Шифр кривых – концентрация NaCl в г/100 г [38].

Динамическая вязкость подземных вод зависит в большей степени от температуры, а также от минерализации и от химического состава воды. Содержание газов в воде и пластовое давление оказывают значительно

меньшее влияние на вязкость. На рис. 1.3.1 показана зависимость вязкости воды от минерализации и температуры с учетом поправочного коэффициента на давление [38]. Как видно на графиках (рис. 1.3.1), поправочный коэффициент в интервале давлений от 20 до 70 МПа при температуре до 80°C отличается от единицы не более чем на 6%. Следовательно, вязкость жидкости слабо зависит от давления, т.е. ее можно считать постоянной величиной при постоянной температуре и минерализации.

В таблице 1.3.1 показаны результаты экспериментальных определений динамической вязкости чистой воды при различных температурах и давлениях [54]. Из таблицы также видно, что изменения вязкости воды даже при изменении пластового давления от 0,1 до 200 МПа при одной и той же температуре составляют не более 10%. В нашей модели это изменение можно не учитывать.

Таблица 1.3.1

Зависимость динамического коэффициента вязкости чистой воды μ^B от температуры и давления [54]

Давление, МПа	Динамическая вязкость чистой воды, $\mu \cdot 10^{-3}$ Па · с			
	0°C	10°C	30°C	75°C
0,1	1,79	1,40	0,871	0,396
50	1,68	1,35	0,895	0,411
100	1,65	1,33	0,921	0,428
150	1,67	1,33	0,500	0,443
200	1,71	1,35	0,986	0,461

Пропускная способность грунтов характеризуется коэффициентом проницаемости. В неоднородной и анизотропной пористой среде проницаемость следует рассматривать как тензорную величину, зависящую от координат.

Тогда линейный закон фильтрации Дарси (для медленных течений жидкости) без учета силы тяжести выглядит следующим образом:

$$\vec{w} = -\frac{k}{\mu} \cdot \vec{\nabla} p = -\frac{k^\Phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p, \quad k^\Phi = k \frac{\gamma_f}{\mu}, \quad (1.3.1)$$

где p – давление жидкости (МПа), k^Φ – тензор коэффициентов фильтрации (м/с), k – тензор коэффициентов проницаемости пористой среды (м²), μ – динамический коэффициент вязкости фильтрующейся жидкости (кг/(м · с)), γ_f – удельный вес жидкости (Н/м³), \vec{w} – вектор скорости фильтрации (м/с).

Коэффициент проницаемости имеет размерность площади и является свойством среды, не зависящим от свойств жидкости. Например, коэффициент проницаемости хорошо проницаемого песчаника равен примерно 10^{-12} м² [20].

Коэффициент фильтрации имеет размерность скорости, зависит от пористости, геометрии порового пространства и от свойств фильтрующейся жидкости (плотности и вязкости) и определяется как скорость фильтрации при единичном градиенте напора. Например, пески (Mz-Kz) Московского региона характеризуются следующими значениями коэффициентов фильтрации: гравийные и крупнозернистые – 33-44 м/сут, среднезернистые – 20-22 м/сут, мелкозернистые – 13-15 м/сут, тонкозернистые и пылеватые – 7 м/сут [45]. Для глин (J₂) Московского артезианского бассейна коэффициенты фильтрации варьируют от $5 \cdot 10^{-6}$ до $5 \cdot 10^{-2}$ м/сут. Для глинистых пород наибольшее влияние на проницаемость оказывает трещиноватость, поэтому проницаемость глинистых пород по полевым исследованиям оказывается на два-три порядка выше, чем по лабораторным определениям [45].

Как показывают экспериментальные исследования [18], коэффициент проницаемости горных пород существенно уменьшается при увеличении разности величин среднего полного напряжения σ на образец и среднего порового давления $p = \langle p \rangle$ внутри образца (рис. 1.3.2). Увеличение $(\sigma - p)$

приводит к уменьшению пористости, что, в свою очередь, вызывает уменьшение проницаемости грунта.

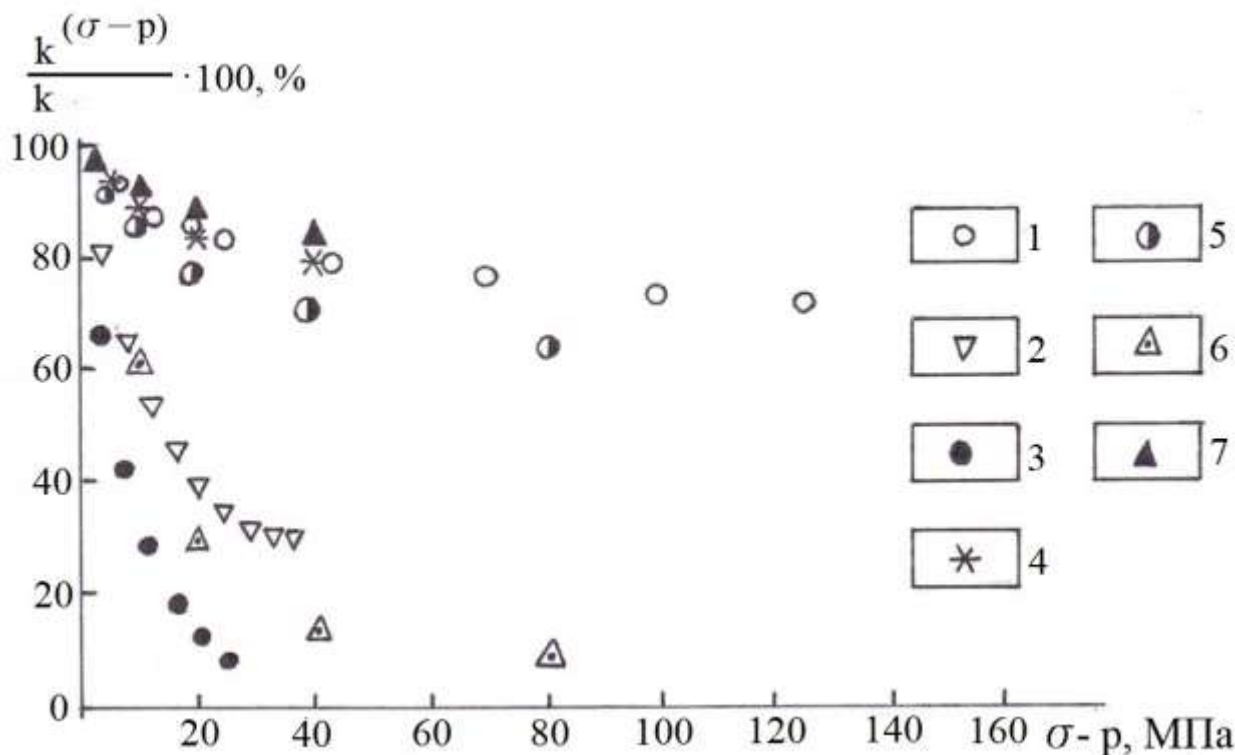


Рис. 1.3.2. Экспериментальная зависимость относительного упругого изменения коэффициента проницаемости ($k^{(\sigma-p)}/k$) от разности напряжений ($\sigma - p$) для различных образцов пород при $p = const$ и $t = const$ (по В.М. Добрынину (1970)).

1 – кварцевый песчаник торпидо, хорошо сцементированный и отсортированный, с содержанием глинистого цемента около 5%; 2 и 3 – сильноглинистые, плохо отсортированные песчаники; 4, 5 и 6 – крепкие песчаники с глинистым и глинисто-карбонатным цементом; 7 – известняк.

На рис. 1.3.2 показана зависимость относительного изменения коэффициента проницаемости ($k^{(\sigma-p)}/k$) от разности давлений ($\sigma - p$) для различных образцов песчано-глинистых пород и известняка по данным экспериментов (k – коэффициент проницаемости при $\sigma - p = 0$) [18]. Как видно на рис. 1.3.2, проницаемость однородных грунтов с межзерновым типом

пористости весьма значительно уменьшается с возрастанием $(\sigma - p)$ даже при упругом деформировании породы.

Самые большие изменения коэффициента проницаемости (70-95%) при всестороннем изотермическом сжатии наблюдаются у сильноглинистых образцов 2, 3 и 6 (рис. 1.3.2), что закономерно. Как известно, проницаемость уменьшается с увеличением $(\sigma - p)$ тем больше, чем выше сжимаемость породы. А сжимаемость грунта возрастает с увеличением содержания глинистых частиц. Для известняков характерны сравнительно небольшие изменения проницаемости (до 15%) с повышением $(\sigma - p)$ (образец 7, рис. 1.3.2).

При изменении разности $(\sigma - p)$ меняется пористость породы и, как следствие, меняется ее проницаемость. Следовательно, при решении задач, связанных с фильтрацией жидкости в грунтах, вообще говоря, следует учитывать зависимость тензора коэффициентов проницаемости (или тензора коэффициентов фильтрации) от пористости: $\tilde{k} = \tilde{k}(n)$, или $\tilde{k}^\Phi = \tilde{k}^\Phi(n)$.

В работе [18] выведены теоретические зависимости изменения проницаемости однородных гранулярных связных пород от разности $(\sigma - p)$ при всестороннем изотермическом сжатии (при упругом деформировании), учитывающие структуру породы, ее начальную пористость и начальную проницаемость. Эти зависимости хорошо описывают экспериментальные данные и могут использоваться в расчетах.

Из (1.3.1) и (1.1.7) с учетом движения твердой фазы получим закон Дарси для относительной скорости движения жидкости (для медленных течений):

$$n \left(\vec{v} - \frac{d\vec{u}}{dt} \right) = - \frac{\tilde{k}^\Phi(n)}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p, \quad (1.3.2)$$

или

$$\vec{v} = - \frac{\tilde{k}^\Phi(n)}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p + \frac{d\vec{u}}{dt}. \quad (1.3.3)$$

Линейный закон Дарси имеет достаточно широкую область применения. Однако при некоторых условиях он нарушается, причем существуют как верхняя, так и нижняя границы его применимости.

Нижняя граница применимости линейного закона фильтрации Дарси определяется проявлением неньютоновских реологических свойств жидкости и больших поверхностных сил взаимодействия твердой матрицы грунта и флюида при малых скоростях фильтрации [8]. Движение неньютоновской вязкопластичной жидкости описывается законом фильтрации с предельным (начальным) градиентом, согласно которому фильтрационное течение возникает лишь при градиентах давления, превышающих некое критическое значение, называемое начальным (предельным) градиентом. При меньших значениях градиента движение флюида отсутствует. Величина предельного градиента зависит от начального напряжения сдвига жидкости и эффективного диаметра капилляра [8].

Верхняя граница применимости линейного закона фильтрации связана с проявлением инерционных сил при больших скоростях фильтрации в высокопроницаемых породах. Для фильтрационного течения, подчиняющегося закону Дарси, характерно преобладание вязких сил над инерционными. Закон Дарси выполняется, когда скорость течения подземных вод достаточно мала [80].

Верхняя граница применимости линейного закона Дарси определяется числом Рейнольдса R_e [8, 80]:

$$R_e = \frac{\rho_f w d}{\mu}.$$

Здесь d – характерный линейный размер пористой среды (средний диаметр поры или средний размер зерна грунта).

Для того чтобы выполнялся линейный закон фильтрации Дарси, число Рейнольдса должно быть меньше некоторой критической величины $R_e^{кр}$. По экспериментальным исследованиям J. Bear [59], эта критическая величина $R_e^{кр}$ находится в промежутке от 1 до 10.

Согласно результатам опытов Дж. Фэнчлера, Дж. Льюиса и К. Бернса, нарушение линейного закона фильтрации Дарси происходит при значениях числа Рейнольдса R_e более 1 для цементированных песков (песчаников) и более 4 для нецементированных песков [54].

Различные исследователи, преобразуя формулу для числа Рейнольдса, вывели свои формулы для определения верхней границы применимости закона Дарси. Н.Н. Павловский [34] предложил формулу, учитывающую пористость грунта n и эффективный размер частиц $d^{\text{эф}}$ породы:

$$\tilde{R}_{e(p)} = \frac{\rho_f w d^{\text{эф}}}{(0,75n + 0,23)\mu},$$

В опытах Н.Н. Павловского критическое значение числа $\tilde{R}_{e(p)}$ для различных пород находится в пределах: $7,5 < \tilde{R}_{e(p)}^{\text{кр}} < 9$ [54]. Небольшой диапазон значений $\tilde{R}_{e(p)}^{\text{кр}}$ объясняется тем, что было исследовано небольшое разнообразие типов пород.

В.Н. Щелкачев [54] вывел формулу, в которую входит коэффициент проницаемости пласта k , а не эффективный диаметр частиц грунта:

$$\tilde{R}_{e(sch)} = \frac{10}{n^{2,3}} \cdot \frac{\rho_f w \sqrt{k}}{\mu}.$$

Для различных групп образцов пористых пород опытным путем были получены интервалы критических значений безразмерного параметра $\tilde{R}_{e(sch)}^{\text{кр}}$, при которых нарушается линейный закон Дарси. Так, для однородного крупнозернистого песка $\tilde{R}_{e(sch)}^{\text{кр}}$ входит в диапазон $3 < \tilde{R}_{e(sch)}^{\text{кр}} < 10$, для неоднородного мелкозернистого песка с преобладанием фракций диаметром менее 0,1 мм $\tilde{R}_{e(sch)}^{\text{кр}}$ находится в пределах $0,23 < \tilde{R}_{e(sch)}^{\text{кр}} < 0,34$, а для цементированного песчаника $0,05 < \tilde{R}_{e(sch)}^{\text{кр}} < 1,4$ [8].

Для быстрых течений ($Re > R_e^{\text{кр}}$) закон фильтрации становится нелинейным относительно градиента давления жидкости. Например, в [27] приведено уравнение Форхгеймера для одномерной фильтрации жидкости:

$$\frac{\Delta p}{L} = a \left(\frac{q}{nA} \right) + b \left(\frac{q}{nA} \right)^2 = aw + bw^2, \quad w = v - \frac{du}{dt}, \quad (1.3.4)$$

q – объемный расход жидкости, A – поперечное сечения образца, w – относительная скорость движения жидкости, L – длина образца, a и b – постоянные, зависящие от свойств жидкости и пористой среды. Уравнение вида (1.3.4) хорошо описывает экспериментальные данные, полученные для достаточно больших скоростей течения при наличии инерциальных эффектов [27]. Его можно преобразовать следующим образом. Выразим из (1.3.4) скорость w :

$$w = -\frac{a}{2b} + \frac{a}{2b} \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2} \left(\frac{\Delta p}{L} \right)}.$$

После разложения выражения с корнем в ряд Тейлора до второй степени получаем одномерный закон фильтрации, нелинейный относительно градиента давления ($\Delta p/L$):

$$w = \frac{1}{a} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) - \frac{b}{a^3} \left(\frac{\Delta p}{L} \right)^2.$$

В работах [40, 88] для описания трехмерной фильтрации жидкости с большими скоростями течения ($Re > Re_e^{кр}$) предлагается уравнение вида:

$$gradp = -\frac{\mu n}{k} \vec{w} - \beta \rho_f n^2 \frac{|\vec{w}|}{\sqrt{k}} \vec{w} = -f(|\vec{w}|) \vec{w},$$

β – безразмерный параметр, зависящий от формы пор, k – коэффициент проницаемости. Его обращение вполне естественно сформулировать в виде:

$$\vec{w} = -g(|gradp|) gradp.$$

Однако для задач консолидации справедлив закон Дарси в виде (1.3.3), так как отток жидкости происходит медленно [12, 13, 15, 100–102]. Закон Дарси (1.3.3) является нелинейным из-за изменения пористости и проницаемости в процессе деформирования грунта.

1.4. Уравнение состояния жидкости

Будем предполагать, что процесс деформирования жидкости является изотермическим, а деформация жидкости при изменении порового давления p подчиняется закону баротропии. Уравнение состояния жидкости примем в виде:

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \beta_f dp, \quad (1.4.1)$$

где β_f – объемный коэффициент сжимаемости жидкости.

Сжимаемость воды зависит от температуры, пластового давления, минерализации, химического состава жидкости, газосодержания. Например, коэффициент сжимаемости чистой воды $\beta_f = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$ при 0°С и $\beta_f = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$ при 20°С [114].

Наличие растворенного газа увеличивает сжимаемость флюида. Поправка коэффициента сжимаемости пластовой жидкости на газосодержание учитывается в формуле В.Н. Мамуны [38]:

$$\beta_f = \beta_f^{\text{дег}} (1 + 0,05 \cdot S_r),$$

$\beta_f^{\text{дег}}$ – коэффициент сжимаемости дегазированной пластовой воды, S_r – газосодержание пластовой воды ($\text{м}^3/\text{м}^3$).

Зависимости сжимаемости дегазированной воды от минерализации, температуры и давления приведены на графиках Д. Лонга и Д. Кьеричи (рис. 1.4.1) [38]. Как видно на рис. 1.4.1, с увеличением минерализации от 0 до 300 г/л коэффициент сжимаемости жидкости уменьшается почти в 2 раза (при фиксированных давлении и температуре).

При изменении пластового давления от 0,2 до 50 МПа (при фиксированных температуре и минерализации) β_f меняется не более чем на 3% (рис. 1.4.1). Следовательно, сжимаемость жидкости можно считать постоянной величиной для конкретных значений температуры и минерализации.

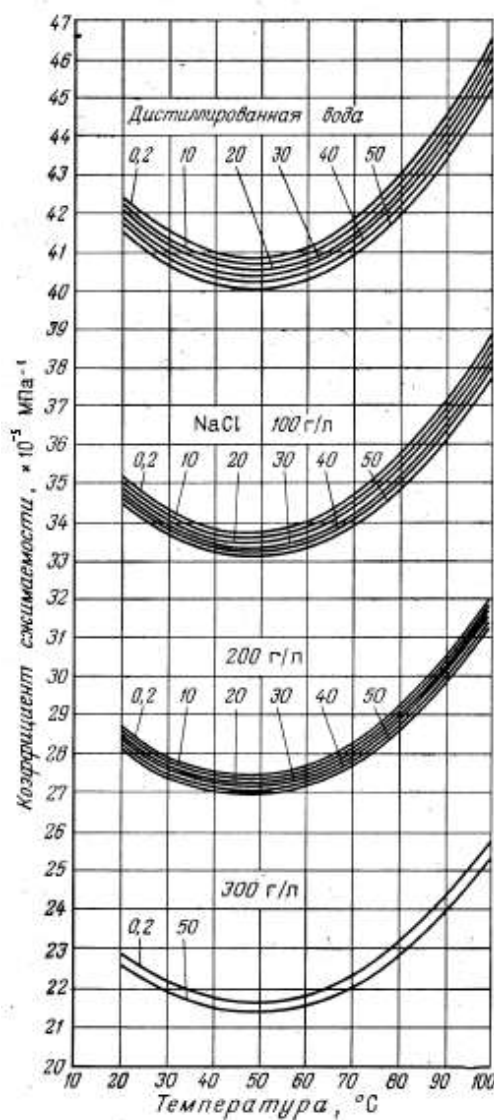


Рис. 1.4.1. Зависимость коэффициента сжимаемости β_f воды от давления и температуры при различных концентрациях NaCl (по Д. Лонгу и Д. Кьеричи). Шифр кривых – давление в МПа [38].

Сжимаемость жидкостей существенно (в 10-30 раз) превышает сжимаемость материала зерен грунта. Коэффициент сжимаемости подземных вод обычно находится в пределах $(3 \div 5) \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$. Если исследуемые грунты залегают близко к поверхности земли и не подвергаются высоким давлениям, то поровая жидкость может полагаться несжимаемой. Однако при решении задач, для которых характерны большие давления, коэффициент сжимаемости жидкости следует учитывать в расчетах.

1.5. Уравнения неразрывности жидкой и твердой фаз

Запишем уравнения сохранения массы для жидкой и твердой фаз грунта при отсутствии источников, стоков и массообмена на микроуровне.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{V_f} \rho_f(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{V_s} \rho_s(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta} = 0 \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Интегралы взяты по любой области, превосходящей представительную область. Тогда из (1.1.2) следует:

$$\int_{V_f} \rho_f(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_{\zeta} = \int_V \rho_f(\vec{x}) n(\vec{x}) dV_x. \quad (1.5.2)$$

Здесь, как и ранее, V_f – часть области V (рассматриваемой на микроуровне ($V = V_{\zeta}$)), занятая жидкостью. (Точнее было бы обозначить ее V_f^{ζ} , но для простоты обозначим V_f .) Здесь $\rho_f(\vec{\zeta}, \vec{x})$ – это плотность жидкости в любой точке поры или трещины (неосредненная), зависящая и от быстрых $\vec{\zeta}$, и от медленных \vec{x} координат. Плотность $\rho_f(\vec{\zeta}, \vec{x})$ определена на микроуровне.

На макроуровне вся область V называется жидким объемом ($V = V_x$). Средняя плотность жидкости $\rho_f(\vec{x}) = \rho_f = \langle \rho_f \rangle$, определенная по формуле (1.1.2), уже зависит только от медленных координат \vec{x} и формально определена во всей области V . Жидкость как бы размазывается по всей области V (т. е. V_f^x). Пористость n зависит от \vec{x} и определяется по формуле (1.1.4).

Для того чтобы продифференцировать интеграл из первого уравнения (1.5.1) (с учетом (1.5.2)), будем использовать преобразование Пиолы:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_f(\vec{x}) n(\vec{x}) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho_f n J_f dV^0 = \int_V \frac{d}{dt} (J_f n \rho_f) dV^0 =$$

$$= \int_V J_f^{-1} \left(n \rho_f \frac{dJ_f}{dt} + J_f \frac{d(n\rho_f)}{dt} \right) dV = \int_V \left(n \rho_f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{d(n\rho_f)}{dt} \right) dV. \quad (1.5.3)$$

Сделав аналогичные преобразования для второго уравнения (1.5.1), получим соотношение для твердой фазы грунта:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_s} \rho_s(\vec{\zeta}, \vec{x}) dV_s &= \frac{d}{dt} \int_V \rho_s(\vec{x})(1-n) dV = \frac{d}{dt} \int_V^0 \rho_s(1-n) J_s dV^0 = \\ &= \int_V^0 \frac{d}{dt} (J_s(1-n)\rho_s) dV^0 = \int_V \left((1-n)\rho_s \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d((1-n)\rho_s)}{dt} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

В первом интеграле (1.5.4) $\rho_s(\vec{\zeta}, \vec{x})$ – плотность материала скелета грунта в любой точке породы, занятой твердой фазой, а во второй интеграл и во все последующие интегралы входит осредненная по формуле (1.1.2) плотность твердой фазы ($\rho_s(\vec{x}) = \rho_s = \langle \rho_s \rangle$), которая формально определена во всей области V . Твердая составляющая грунта как бы размазывается по всей области V (т. е. V_s^x).

Таким образом, здесь используется теория смеси, согласно которой в каждой точке \vec{x} области V находятся одновременно два континуума – твердая фаза и жидкая фаза. Область V может быть любой областью (например, всей областью фильтрации). (Заметим, что значок V обозначает как саму область, так и ее объем.) Рассматриваемым далее случаем является $V = V_f^x = V_s^x$. Таким образом, в (1.5.3) V означает область, по которой размазана жидкость с осредненной плотностью $\rho_f(\vec{x})n$. Аналогично в (1.5.4) под V подразумевается область, по которой размазан осредненный материал скелета грунта с плотностью $\rho_s(\vec{x})(1-n)$.

В (1.5.3) и (1.5.4) J_f или J_s – якобианы отображения Пиолы текущей области V (точнее V_f^x или V_s^x) в начальную V^0 для жидкой и твердой фаз соответственно.

В выводах мы учитываем, что для жидкой и твердой фаз верны соотношения:

$$\frac{dJ_f}{dt} = J_f \vec{\nabla} \cdot \vec{v}; \quad \frac{dJ_s}{dt} = J_s \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt},$$

где \vec{v} – макроскопическая скорость движения жидкости (см. формулу (1.1.7)), $\vec{u}(\vec{x}) = \langle \vec{u} \rangle_s$ – среднее перемещение, определенное по формуле (1.1.3).

Получаем систему уравнений баланса масс для жидкой и твердой фаз в текущей конфигурации:

$$\begin{cases} \int_V \left(n \rho_f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{d(n \rho_f)}{dt} \right) dV = 0 \\ \int_V \left((1-n) \rho_s \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d((1-n) \rho_s)}{dt} \right) dV = 0 \end{cases}$$

Эти уравнения в дифференциальной форме, записанные в актуальной конфигурации с точки зрения пространственного описания, имеют вид [31]:

$$\begin{cases} \frac{d(n \rho_f)}{dt} + n \rho_f \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{d((1-n) \rho_s)}{dt} + (1-n) \rho_s \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \end{cases} \quad (1.5.5)$$

1.6. Уравнения фильтрации жидкости и изменения пористости в пространственной формулировке

Выведем уравнения фильтрации жидкости и изменения пористости в насыщенной деформируемой пористой среде, применяя Эйлерав подход.

Преобразуем второе уравнение системы (1.5.5) в уравнение изменения пористости:

$$\frac{dn}{dt} = (1-n) \left(\frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \right). \quad (1.6.1)$$

Подставим в первое уравнение системы (1.5.5) уравнение изменения пористости (1.6.1), закон Дарси (1.3.3) и уравнение состояния жидкости (1.4.1) и в результате последующих преобразований получим:

$$n\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k^\Phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = (1 - n) \frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + n\beta_f \frac{dp}{dt}. \quad (1.6.2)$$

Если рассматривать материал скелета грунта сжимаемым, то нужно еще написать уравнение для изменения плотности ρ_s твердой фазы грунта. Будем считать, что материал скелета грунта ведет себя упруго [62]. Упругое деформирование твердой фазы грунта описывается соотношением:

$$d\langle\sigma\rangle_s = K_s d\langle\theta\rangle_s = \frac{1}{\beta_s} d\langle\theta\rangle_s, \quad (1.6.3)$$

$$\langle\sigma\rangle_s = \frac{1}{3} \langle\sigma_{ii}\rangle_s; \quad \langle\theta\rangle_s = \langle\varepsilon_{ii}\rangle_s; \quad d\langle\theta\rangle_s = -\frac{dV_s}{V_s},$$

где K_s – модуль изотермического объемного сжатия-расширения материала скелета грунта, β_s – коэффициент сжимаемости твердой фазы грунта.

Для примера приведем коэффициенты сжимаемости различных минералов, которые могут составлять материал скелета породы: кварца $2,7 \cdot 10^{-5}$ МПа⁻¹, ортоклаза $2,1 \cdot 10^{-5}$ МПа⁻¹, слюды $2,3 \cdot 10^{-5}$ МПа⁻¹, олигоклаза $1,7 \cdot 10^{-5}$ МПа⁻¹, кальцита $1,4 \cdot 10^{-5}$ МПа⁻¹ [39]. Сжимаемость минеральных зерен (в отличие от сжимаемости жидкостей) весьма слабо зависит от температуры и давления [55]. В результате обработки результатов опытов различных исследователей В.Н. Щелкачев пришел к выводу, что величина коэффициента сжимаемости кварца равна $(2,6 - 2,7) \cdot 10^{-5}$ МПа⁻¹ при изменении давления от 10 до 50 МПа при температурах от 20° до 75°С. Таким образом, коэффициент сжимаемости материала скелета грунта β_s можно принять константой.

Преобразуем уравнение (1.6.3) к виду, который нужен для дальнейшего вывода уравнения фильтрации и уравнения изменения пористости. Масса твердой фазы (m_s) области, состоящей из одних и тех же частиц, постоянная, следовательно:

$$\frac{d\rho_s}{dt} = \frac{d(m_s/V_s)}{dt} = m_s \frac{d(1/V_s)}{dt} = -\frac{m_s}{(V_s)^2} \frac{dV_s}{dt} = -\frac{\rho_s}{V_s} \frac{dV_s}{dt},$$

значит,

$$\frac{d\rho_s}{\rho_s} = \beta_s d \langle \tilde{\sigma} \rangle_s.$$

Однако удобнее использовать соотношение, описывающее линейную зависимость изменения объема твердой фазы грунта от изменения давления жидкости (согласно предположению М. Вiot [62]):

$$\frac{d\rho_s}{\rho_s} = \chi_s dp. \quad (1.6.4)$$

Для несвязного грунта (например, песка) коэффициент пропорциональности χ_s равен коэффициенту сжимаемости β_s твердой фазы грунта. А для связных пористых грунтов (глинистых грунтов, известняков, песчаников и т.п.) χ_s находится из решения специальной краевой задачи в представительной области (локальной задачи в терминах метода осреднения). Решение такой задачи приведено в главе 3.

Подставим уравнение (1.6.4) в (1.6.1) и (1.6.2) и получим систему, состоящую из уравнения фильтрации и уравнения изменения пористости в пространственной формулировке:

$$\begin{cases} n \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + (n \beta_f + (1-n) \chi_s) \frac{dp}{dt} \\ \frac{dn}{dt} = (1-n) \left(\chi_s \frac{dp}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Во многих случаях объемная сжимаемость зерен каркаса мала и ею можно пренебречь:

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_s}{dt} = 0. \quad (1.6.6)$$

Такое допущение можно принять, если твердая фаза не подвергается большому давлению. Но это не исключает объемные деформации осредненного каркаса за счет уменьшения порового пространства в результате перемещения частиц твердой фазы грунта или переупаковки зерен в

дисперсных несвязных породах. В этом случае подставим (1.6.6) в (1.6.2) и (1.6.1) и с учетом уравнения равновесия (1.2.4) получим связанную систему уравнений модели консолидации в дифференциальной постановке в текущей конфигурации при допущении о несжимаемости материала скелета грунта:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma}^{eff}(\vec{u}) - \alpha \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} = 0 \\ n \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + n \beta_f \frac{dp}{dt} \\ \frac{dn}{dt} = (1 - n) \vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \end{cases} \quad (1.6.7)$$

$$\tilde{k}^\phi = \tilde{k}^\phi(n), \quad n = n(\vec{u}(\vec{x}, t)), \quad \gamma_f = const, \quad \beta_f = const.$$

Следует отметить, что в системе (1.6.7) уравнение равновесия удобно решать, используя лагранжев подход, а уравнение фильтрации и уравнение изменения пористости записаны в эйлеровом пространстве. Чтобы систему уравнений решать в одной системе координат, далее переформулируем последние два уравнения системы (1.6.7) в движущейся системе координат, которая будет связана с лагранжевными координатами твердого каркаса по типу метода ALE [77].

1.7. Дифференциальная постановка геометрически нелинейной связанной задачи консолидации (с использованием подхода ALE)

Выведем уравнения фильтрации жидкости и изменения пористости в насыщенной деформируемой пористой среде, применяя идею метода ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) [77]. Мы будем использовать ALE формулировку, чтобы ввести лагранжевы координаты для твердого континуума.

ALE описание движения, разработанное еще в 1960-ые–70-ые годы [74–76, 85], – это обобщенное описание, сочетающее в себе преимущества классических описаний движения: Лагранжева и Эйлерова [77]. В методе ALE вводятся три области: пространственная текущая V и пространственная

начальная $\overset{0}{V}$ области в декартовой системе координат и, вообще говоря, произвольно движущаяся область V_ξ , соответствующая криволинейной системе координат $\vec{\xi}$ (рис. 1.7.1).

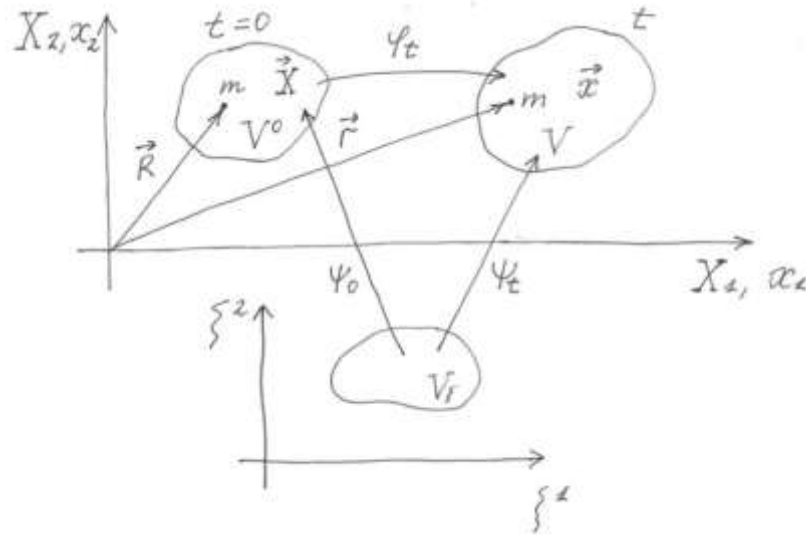


Рис. 1.7.1. Взаимно-однозначные преобразования материальной области $\overset{0}{V}$, пространственной области V и области V_ξ при ALE описании движения.

Рассмотрим взаимно-однозначные отображения областей $\overset{0}{V}$, V и V_ξ при ALE описании движения:

ψ_0 – это взаимно-однозначное отображение области V_ξ в начальную область $\overset{0}{V}$:

$$\vec{X} = \psi_0(\vec{\xi}, t) \text{ или } \vec{X} = \vec{X}(\vec{\xi}, t).$$

ψ_t – отображение области V_ξ в пространственную область V . Отображение ψ_t понимается как движение точек $\vec{\xi}$ в пространственной области V и представляется так:

$$\vec{x} = \psi_t(\vec{\xi}, t) \text{ или } \vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t). \quad (1.7.1)$$

φ_t – движение точек \vec{X} в пространственной области V , которое выражается законом движения:

$$\vec{x} = \varphi_t(\vec{X}, t) \text{ или } \vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t). \quad (1.7.2)$$

Заметим, что и частицы \vec{X} , и точки $\vec{\xi}$ движутся относительно пространственной системы \vec{x} . Скорость \vec{v} частицы \vec{X} и скорость \vec{v} точки $\vec{\xi}$ определяются путем дифференцирования по времени уравнений движения частицы \vec{X} (1.7.2) и точки $\vec{\xi}$ (1.7.1) соответственно:

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \frac{d\vec{x}}{dt},$$

\vec{v} – материальная скорость жидкой частицы («вмороженной» в систему координат \vec{X}), скорость движения точки \vec{X} в пространственной области V . (Запись $|_{\vec{x}}$ означает «при фиксированной \vec{X} ».)

$$\vec{v}(\vec{\xi}, t) = \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)}{\partial t}, \quad (1.7.3)$$

\vec{v} – скорость точки, «вмороженной» в систему координат $\vec{\xi}$, скорость движения точек $\vec{\xi}$ в пространственной области V .

Движение материальной частицы φ_t может быть представлено в виде композиции отображений ψ_t и ψ_0^{-1} :

$$\varphi_t = \psi_t \circ \psi_0^{-1},$$

$$\varphi_t(\vec{X}, t) = \psi_t(\psi_0^{-1}(\vec{X}, t), t) \quad \text{или} \quad \vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{\xi}(\vec{X}, t), t), \quad (1.7.4)$$

где ψ_0^{-1} – движение материальной частицы \vec{X} в области V_ξ :

$$\vec{\xi} = \psi_0^{-1}(\vec{X}, t) \quad \text{или} \quad \vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{X}, t).$$

При этом скорость $\vec{w}(\vec{X}, t)$:

$$\vec{w}(\vec{X}, t) = \left. \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right|_{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{\xi}(\vec{X}, t)}{\partial t} \quad (1.7.5)$$

может быть интерпретирована как скорость движения материальной частицы \vec{X} в области V_ξ , так как она измеряет изменение во времени координаты $\vec{\xi}$ для фиксированной материальной частицы \vec{X} .

Отношение между скоростями \vec{v} , \vec{v} и \vec{w} может быть получено путем дифференцирования по времени композиции отображений (1.7.4):

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{\xi}(\vec{X}, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = \vec{v} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \cdot \vec{w}.$$

В результате получается первая основная формула метода ALE [77]:

$$\vec{v} = \vec{v} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \cdot \vec{w}.$$

Отсюда можно определить скорость \vec{c} движения материальной частицы \vec{X} относительно системы координат $\vec{\xi}$ (конвективную скорость):

$$\vec{c} = \vec{v} - \vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \cdot \vec{w}. \quad (1.7.6)$$

Следует заметить, что конвективная скорость \vec{c} из выражения (1.7.6) и скорость \vec{w} из выражения (1.7.5) – это совсем разные скорости: \vec{w} – это скорость частицы \vec{X} , как она видна из области V_{ξ} , а \vec{c} – это скорость частицы \vec{X} относительно точки $\vec{\xi}$, как это видно из пространственной области V (заметим, что обе скорости \vec{v} и \vec{v} – это изменения во времени координаты \vec{x}). Фактически, как следует из уравнения (1.7.6), $\vec{c} = \vec{w}$ тогда и только тогда, если $\partial \vec{x} / \partial \vec{\xi} = \underline{I}$ (где \underline{I} – единичный тензор), т.е. когда движение $\vec{\xi}$ чисто поступательное, без вращений и деформаций [77].

В методе ALE выводится материальная производная скалярной величины f по времени (например, пористости n или давления жидкости p):

$$\frac{\partial f(\vec{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\vec{\xi}(\vec{X}, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{\xi}} \cdot \vec{w} = \frac{df}{dt}. \quad (1.7.7)$$

Выразим материальную производную (1.7.7) через конвективную скорость \vec{c} (1.7.6):

$$\frac{\partial f(\vec{\xi}, t)}{\partial \vec{\xi}} \cdot \vec{w} = \frac{\partial f(\vec{x}(\vec{\xi}, t), t)}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\xi}} \cdot \vec{w} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{c}.$$

В результате получается вторая основная формула метода ALE [77]:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{c} = \frac{\partial f(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \text{grad} f \cdot \vec{c}. \quad (1.7.8)$$

Представляемый в диссертации подход состоит в том, что лагранжевы координаты твердой фазы (каркаса) выбраны как координаты $\vec{\xi}$ ALE метода. Тогда \vec{c} – это скорость движения жидкости относительно каркаса. С учетом закона Дарси (1.3.2) и формулы (1.7.6) получаем:

$$\vec{c} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{v} - \frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{k^\Phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p. \quad (1.7.9)$$

Запишем уравнение фильтрации (второе уравнение в системе (1.6.7)) в координатах $\vec{\xi}$, используя формулы (1.7.8) и (1.7.9). Будем считать материал зерен грунта несжимаемым.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{c} = \frac{\partial p(\vec{\xi}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla}p \cdot \left(\frac{k^\Phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p \right) \quad (1.7.10)$$

В координатах $\vec{\xi}$ (лагранжевых для твердой фазы) $d\vec{u}/dt = \partial\vec{u}/\partial t$.

$$n\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k^\Phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p \right) = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + n\beta_f \frac{\partial p(\vec{\xi}, t)}{\partial t} - n\beta_f \vec{\nabla}p \cdot \frac{k^\Phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p \quad (1.7.11)$$

Для случая геометрически и физически нелинейной среды пористость зависит от времени и координат: $n = n(\vec{x}, t)$. Перепишем уравнение изменения пористости (третье уравнение системы (1.6.7)) в лагранжевых координатах твердой фазы.

$$\frac{dn}{dt} = (1 - n) \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{c} = \frac{\partial n(\vec{\xi}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla}n \cdot \left(\frac{k^\Phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p \right) \quad (1.7.12)$$

$$\frac{\partial n(\vec{\xi}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla}n \cdot \frac{k^\Phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla}p = (1 - n) \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \right) \quad (1.7.13)$$

Уравнения равновесия (1.2.4), фильтрации (1.7.11) и изменения пористости (1.7.13) составляют связанную систему дифференциальных уравнений в геометрически нелинейной постановке (с использованием

подхода ALE), описывающую совместное деформирование скелета грунта и фильтрацию жидкости через поровое пространство:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma}^{eff}(\vec{u}) - \alpha \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} = 0, \\ n \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} + n \beta_f \dot{p} - \beta_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{k^\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \\ \dot{n} - \vec{\nabla} n \cdot \frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p = (1 - n)(\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}}) \end{cases} \quad (1.7.14)$$

где $\dot{\vec{u}} = \frac{\partial \vec{u}(\vec{\xi}, t)}{\partial t}$, $\dot{p} = \frac{\partial p(\vec{\xi}, t)}{\partial t}$, $\dot{n} = \frac{\partial n(\vec{\xi}, t)}{\partial t}$, $k^\phi = k^\phi(n)$.

Зададим типичные граничные условия в краевой задаче:

$$\begin{cases} \vec{u} = 0; & \vec{\xi} \in \Sigma_u = \Sigma_1 \\ \tilde{\sigma}^{eff} \cdot \vec{n} = \vec{S}; & \vec{\xi} \in \Sigma_\sigma = \Sigma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0; & \vec{\xi} \in \Sigma_w = \Sigma_1 \\ p = 0; & \vec{\xi} \in \Sigma_p = \Sigma_2 \end{cases} \quad (1.7.15)$$

$$\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma; \quad \Sigma_w \cup \Sigma_p = \Sigma; \quad \Sigma_u = \Sigma_w = \Sigma_1; \quad \Sigma_\sigma = \Sigma_p = \Sigma_2$$

Согласно (1.7.15), часть границы ($\vec{\xi} \in \Sigma_1$) неподвижна и непроницаема.

На остальной части границы ($\vec{\xi} \in \Sigma_2$) действует поверхностная нагрузка, а давление жидкости равно нулю. Такие граничные условия обычно действуют на дневной поверхности, которая подвергается внешнему силовому воздействию и через которую свободно фильтруется жидкость.

Для решения краевой задачи (1.7.14), (1.7.15) численными методами следует сначала получить вариационную постановку.

1.8. Вариационная постановка связанной задачи консолидации в текущей конфигурации

Сначала сформулируем *вариационное уравнение равновесия*, соответствующее дифференциальному (1.7.14). Введем пространство

функций (подпространство Соболева, удовлетворяющее заданным граничным условиям 1-го рода) (1.7.15): $H_u = \{\vec{w} \mid \vec{w} \in W_2^1, \vec{w}|_{\Sigma_1} = 0\}$.

Умножим первое уравнение (1.7.14) скалярно на пробную функцию $\vec{w} \in H_u$ и полученное выражение проинтегрируем по объему области V :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\sigma}^{eff} \cdot \vec{w} dV - \int_V \alpha \vec{\nabla} p \cdot \vec{w} dV + \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{w} dV = 0. \quad (1.8.1)$$

Преобразуем первый член уравнения (1.8.1), используя теорему Грина, определение пространства H_u и граничные условия (1.7.15):

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\sigma}^{eff} \cdot \vec{w} dV &= \int_{\Sigma_1} \underset{\sim}{\sigma}^{eff} \cdot \underbrace{\vec{w}}_{=0 \text{ на } \Sigma_1} \cdot \vec{n} dV + \int_{\Sigma_2} \underbrace{\sigma^{eff} \cdot \vec{n}}_{\vec{S} \text{ на } \Sigma_2} \cdot \vec{w} dV - \\ &- \int_V \underset{\sim}{\sigma}^{eff} : \vec{\nabla} \vec{w} dV = \int_{\Sigma_2} \vec{S}(\vec{u}) \cdot \vec{w} dV - \int_V \underset{\sim}{\sigma}^{eff} : \vec{\nabla} \vec{w} dV. \end{aligned}$$

Преобразуем второй член уравнения (1.8.1), используя теорему Гаусса-Остроградского, определение пространства H_u и граничные условия (1.7.15):

$$\begin{aligned} \int_V \alpha \vec{\nabla} p \cdot \vec{w} dV &= \int_{\Sigma_1} \alpha p \underbrace{\vec{w}}_{=0 \text{ на } \Sigma_1} \cdot \vec{n} dV + \int_{\Sigma_2} \alpha \underbrace{p}_{=0 \text{ на } \Sigma_2} \vec{w} \cdot \vec{n} dV - \int_V \alpha p \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV = \\ &= - \int_V \alpha p \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV. \end{aligned}$$

В результате получаем вариационное уравнение равновесия в текущей конфигурации:

$$\int_V \underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : \vec{\nabla} \vec{w} dV - \int_V \alpha p \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV - \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{w} dV - \int_{\Sigma_2} \vec{S}(\vec{u}) \cdot \vec{w} d\Sigma = 0. \quad (1.8.2)$$

Запишем *вариационное уравнение фильтрации*. Введем пространство функций (подпространство Соболева W_2^1 , удовлетворяющее заданным граничным условиям 1-го рода (1.7.15)): $H_p = \{q \mid q \in W_2^1, q|_{\Sigma_2} = 0\}$.

Умножим второе уравнение (1.7.14) скалярно на пробную функцию $q \in H_p$ и полученное выражение проинтегрируем по объему области V .

$$\int_V q n \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) dV = \int_V q \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} dV + \int_V q n \beta_f \dot{p} dV - \int_V q \beta_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{k^\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, используя теорему Грина, определение пространства H_p и граничные условия (1.7.15):

$$\begin{aligned} \int_V q n \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) dV &= \int_{\Sigma_1} q n \frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} p \cdot \vec{n}}_{=0 \text{ на } \Sigma_1} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \underbrace{q}_{=0 \text{ на } \Sigma_2} n \frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Sigma - \\ &- \int_V \vec{\nabla}(q n) \cdot \frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV = - \int_V \vec{\nabla} q \cdot \frac{k^\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV - \int_V q \vec{\nabla} n \cdot \frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV \end{aligned}$$

Получили вариационное уравнение фильтрации жидкости в текущей конфигурации:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} q \cdot \frac{k^\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV + \int_V q \vec{\nabla} n \cdot \frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV - \int_V q \beta_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{k^\phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV + \\ + \int_V q \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} dV + \int_V q n \beta_f \dot{p} dV = 0 \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

Теперь запишем **вариационное уравнение изменения пористости**. Введем пространство функций (подпространство Соболева W_2^1): $H_n = \{h \mid h \in W_2^1\}$. Затем умножим третье уравнение (1.7.14) скалярно на пробную функцию $h \in H_n$ и полученное выражение проинтегрируем по объему области V :

$$\int_V h \dot{n} dV - \int_V h \vec{\nabla} n \cdot \frac{k^\phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV = \int_V h (1 - n) \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} dV. \quad (1.8.4)$$

В результате мы получили **вариационную постановку связанной задачи консолидации в текущей конфигурации**:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_V \tilde{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : \vec{\nabla} \vec{w} dV - \int_V \alpha p \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV - \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{w} dV - \int_{\Sigma_2} \vec{S}(\vec{u}) \cdot \vec{w} d\Sigma = 0 \\
\int_V \vec{\nabla} q \cdot \frac{k^\Phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV + \int_V q \vec{\nabla} n \cdot \frac{k^\Phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV - \int_V q \beta_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{k^\Phi}{\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV + \\
+ \int_V q \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} dV + \int_V q n \beta_f \dot{p} dV = 0 \\
\int_V h \dot{n} dV - \int_V h \vec{\nabla} n \cdot \frac{k^\Phi}{n \gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p dV = \int_V h(1-n) \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} dV
\end{array} \right. \quad (1.8.5)$$

\vec{S} – поверхностная сила из граничных условий (1.7.15).

1.9. Линеаризация вариационной постановки связанной задачи консолидации

Одним из способов решения геометрически нелинейных краевых задач является метод линеаризации по времени t (в квазистатических задачах – по параметру нагружения). Идея линеаризации состоит в дифференцировании вариационного уравнения по параметру t , в результате чего получается линейная задача относительно дифференциалов вектора перемещений $d\vec{u}$, давления жидкости dp и изменения пористости dn . При численном решении дифференциал $d\vec{u}$ заменяется на $\Delta\vec{u}$, а дифференциал dp на Δp .

В системе (1.8.5) уравнения фильтрации и изменения пористости уже линейны относительно $d\vec{u}$, dp и dn . Для дальнейшего решения задачи (1.8.5) необходимо линеаризовать уравнение равновесия, т.е. продифференцировать его по параметру t , в результате чего получится линейное уравнение относительно $d\vec{u}$ и dp . Для удобства вариационное уравнение равновесия (1.8.2) сначала было преобразовано к начальной области $\overset{\circ}{V}$ с использованием эффективного тензора Кирхгофа \tilde{S}^{eff} и тензора деформаций Грина-Лагранжа E , а затем линеаризовано с помощью дифференциала Гато.

Вариационное уравнение равновесия в начальной конфигурации

Преобразуем уравнение (1.8.2) к начальной области с использованием тензора Кирхгофа \tilde{S} (второго тензора Пиолы-Кирхгофа). При преобразовании первых двух слагаемых будем использовать симметричность тензора напряжений Коши и следующие формулы для мер напряжений и деформаций:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{F} \cdot (J^{-1} \tilde{S}) \cdot \tilde{F}^T; \quad \tilde{C} = \tilde{F}^T \cdot \tilde{F}; \quad J = \det \tilde{F}; \quad \tilde{E} = \frac{1}{2} (\tilde{C} - I). \quad (1.9.1)$$

Здесь \tilde{F} – деформационный градиент, \tilde{C} – мера деформаций Коши-Грина, \tilde{E} – тензор деформаций Грина-Лагранжа, $J = J_S$ – якобиан преобразования текущей области, занимаемой твердой фазой, размазанной по всей области V , в ее начальную область $\overset{\circ}{V}$. Из уравнений (1.2.2) и (1.9.1) следует выражение для осредненного тензора напряжений Кирхгофа:

$$\langle \tilde{S} \rangle = \tilde{S}^{eff} - \alpha p J \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{F}^{-T} = \tilde{S}^{eff} - \alpha p J \tilde{C}^{-1}. \quad (1.9.2)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \tilde{\sigma}^{eff} : \vec{\nabla} \vec{w} dV - \int_V \alpha p \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV = \int_V \langle \tilde{\sigma} \rangle : \left[\frac{1}{2} ((\vec{\nabla} \vec{w})^T + \vec{\nabla} \vec{w}) \right] dV = \\ & = \int_V J^{-1} (\tilde{F} \cdot \langle \tilde{S} \rangle \cdot \tilde{F}^T) : \left[\frac{1}{2} ((\vec{\nabla} \vec{w})^T + \vec{\nabla} \vec{w}) \right] dV = \\ & = \int_{\overset{\circ}{V}} \langle \tilde{S} \rangle : \frac{1}{2} (\tilde{F}^T \cdot (\vec{\nabla} \vec{w})^T \cdot \tilde{F} + \tilde{F}^T \cdot \vec{\nabla} \vec{w} \cdot \tilde{F}) d\overset{\circ}{V} = \\ & = \int_{\overset{\circ}{V}} \langle \tilde{S} \rangle : \frac{1}{2} \left(\left(\overset{\circ}{\vec{\nabla} \vec{w}} \right)^T \cdot \tilde{F} + \tilde{F}^T \cdot \overset{\circ}{\vec{\nabla} \vec{w}} \right) d\overset{\circ}{V} = \int_{\overset{\circ}{V}} \langle \tilde{S} \rangle : DE(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} = \\ & = \int_{\overset{\circ}{V}} \tilde{S}^{eff}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \tilde{C}^{-1}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} \end{aligned}$$

Мы учитывали, что $J d\overset{\circ}{V} = dV$ и

$$DE(\vec{u})[\vec{w}] = \left. \frac{dE(\vec{u} + \zeta \vec{w})}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{1}{2} \left[\left(\overset{\circ}{\vec{\nabla} \vec{w}} \right)^T \cdot \tilde{F}(\vec{u}) + \tilde{F}^T(\vec{u}) \cdot \overset{\circ}{\vec{\nabla} \vec{w}} \right].$$

Теперь преобразуем работу внешних сил к начальной области. При этом будем использовать уравнение сохранения массы, которое выражается соотношением $\overset{\circ}{\rho}d\overset{\circ}{V} = \rho dV$, и формулы:

$$\vec{S} = \frac{\vec{S}^0}{J_\Sigma}; \quad J_\Sigma = \frac{d\Sigma}{d\overset{\circ}{\Sigma}}; \quad \vec{S}d\Sigma = \vec{S}^0d\overset{\circ}{\Sigma}.$$

$$\int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{w} dV + \int_{\Sigma_2} \vec{S}(\vec{u}) \cdot \vec{w} d\Sigma = \int_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} \vec{f} \cdot \vec{w} d\overset{\circ}{V} + \int_{\overset{\circ}{\Sigma}_2} \vec{S}^0 \cdot \vec{w} d\overset{\circ}{\Sigma}$$

В результате мы получили вариационное уравнение равновесия в начальной конфигурации:

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \tilde{S}^{eff}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \tilde{C}^{-1}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} - A^e[\vec{w}] = 0, \forall \vec{w},$$

(1.9.3)

где в случае «мертвой» нагрузки:

$$A^e[\vec{w}] = \int_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} \vec{f}(\vec{X}, t) \cdot \vec{w} d\overset{\circ}{V} + \int_{\overset{\circ}{\Sigma}_2} \vec{S}^0(\vec{X}, t) \cdot \vec{w} d\overset{\circ}{\Sigma}.$$

***Линеаризованное вариационное уравнение равновесия
в начальной конфигурации***

Рассмотрим линеаризацию вариационного уравнения (1.9.3) в случае «мертвой» нагрузки, при дифференцировании будем пользоваться дифференциалом Гато. Дифференциал функционала L в смысле Гато вычисляется по формуле:

$$DL(\vec{u})[\vec{w}] = \left. \frac{DL(\vec{u} + \zeta \vec{w})}{d\zeta} \right|_{\zeta=0}.$$

$$\frac{d}{d\zeta} \int_{\overset{\circ}{V}} \tilde{S}^{eff}(\vec{u} + \zeta d\vec{u}) : DE(\vec{u} + \zeta d\vec{u})[\vec{w}] \Big|_{\zeta=0} d\overset{\circ}{V} -$$

$$- \frac{d}{d\zeta} \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J(\vec{u} + \zeta d\vec{u}) \tilde{C}^{-1}(\vec{u} + \zeta d\vec{u}) : DE(\vec{u} + \zeta d\vec{u})[\vec{w}] \Big|_{\zeta=0} d\overset{\circ}{V} = dA^e[\vec{w}]$$

Дифференцируем как сложную функцию:

$$\begin{aligned}
& \int_{\overset{\circ}{V}} D\tilde{S}^{eff}(\tilde{u})[d\tilde{u}] : D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] d\overset{\circ}{V} + \int_{\overset{\circ}{V}} \tilde{S}^{eff}(\tilde{u}) : D^2\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}, d\tilde{u}] d\overset{\circ}{V} - \\
& - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha dp J\tilde{C}^{-1}(\tilde{u}) : D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p DJ(\tilde{u})[d\tilde{u}] \tilde{C}^{-1}(\tilde{u}) : D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] d\overset{\circ}{V} + \\
& - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J D\tilde{C}^{-1}(\tilde{u})[d\tilde{u}] : D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J\tilde{C}^{-1}(\tilde{u}) : D^2\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}, d\tilde{u}] d\overset{\circ}{V} = \\
& = dA^e[\tilde{w}]
\end{aligned}$$

$$D\tilde{S}^{eff}(\tilde{u})[d\tilde{u}] = \frac{\partial \tilde{S}^{eff}}{\partial \tilde{E}} : D\tilde{E}(\tilde{u})[d\tilde{u}] = \tilde{C}^E : D\tilde{E}(\tilde{u})[d\tilde{u}]$$

$$\tilde{C}^E = \frac{\partial \tilde{S}^{eff}}{\partial \tilde{E}}; \quad \tilde{C}^E - \text{касательный модуль}$$

Для простоты промежуточные выкладки были проведены в декартовой системе координат, а затем были записаны в инвариантном виде (см. Приложение 1).

Получаем линеаризованное вариационное уравнение равновесия в начальной конфигурации (его подробный вывод приведен в Приложении 1):

$$\begin{aligned}
& \int_{\overset{\circ}{V}} \left(\overset{\circ}{\nabla} \tilde{w} : \tilde{C}^{TAN}(\tilde{F}(\tilde{u})) : \overset{\circ}{\nabla} d\tilde{u} \right) d\overset{\circ}{V} + \int_{\overset{\circ}{V}} \tilde{S}^{eff}(\tilde{u}) : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \tilde{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\tilde{u} \right] d\overset{\circ}{V} - \\
& - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha dp J\tilde{C}^{-1}(\tilde{u}) : D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] d\overset{\circ}{V} - \\
& - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \left(\tilde{C}^{-1}(\tilde{u}) : D\tilde{E}(\tilde{u})[d\tilde{u}] \right) \left(\tilde{C}^{-1}(\tilde{u}) : D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] \right) d\overset{\circ}{V} - \\
& - \int_{\overset{\circ}{V}} 2\alpha p J D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] : \left(\frac{\partial \tilde{C}^{-1}(\tilde{u})}{\partial \tilde{C}(\tilde{u})} \right) : D\tilde{E}(\tilde{u})[d\tilde{u}] d\overset{\circ}{V} - \\
& - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J\tilde{C}^{-1}(\tilde{u}) : D^2\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}, d\tilde{u}] d\overset{\circ}{V} = dA^e[\tilde{w}] \tag{1.9.4}
\end{aligned}$$

$$dA^e[\vec{w}] = \int_V \overset{\circ}{\rho} d\vec{f}(\vec{X}, t) \cdot \vec{w} dV + \int_{\Sigma_2} d\vec{S}^0(\vec{X}, t) \cdot \vec{w} d\Sigma$$

Тензор $\underset{\sim}{C}^{TAN}$ выражается через касательный модуль $\underset{\sim}{C}^E$ по следующей формуле:

$$\underset{\sim}{C}^{TAN} = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{C}^E : \underset{\sim}{\frac{\partial E}{\partial F}}$$

В преобразованиях учитывалась симметричность касательного модуля $\underset{\sim}{C}^E$.

Линеаризованное вариационное уравнение равновесия в текущей конфигурации

Далее уравнение (1.9.4) преобразовывается к текущей области. В результате преобразований, подробно изложенных в приложении 2, получаем линеаризованное уравнение равновесия в текущей конфигурации:

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\underset{\sim}{d}(\vec{w}) : \underset{\sim}{C}^d : \underset{\sim}{d}(d\vec{u}) \right) dV + \int_V \underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : \left[(\vec{\nabla} \vec{w})^T \cdot \vec{\nabla} d\vec{u} \right] dV - \\ & - \int_V \alpha dp \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV - \int_V \alpha p (\vec{\nabla} \cdot \vec{w})(\vec{\nabla} \cdot d\vec{u}) dV + \int_V \alpha p (\vec{\nabla} \vec{w})^T : \vec{\nabla} d\vec{u} dV - \\ & - \int_V \rho d\vec{f} \cdot \vec{w} dV - \int_{\Sigma_2} d\vec{S} \cdot \vec{w} d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (1.9.5)$$

Здесь компоненты тензора $\underset{\sim}{C}^d$ в декартовом базисе выражаются через компоненты тензора касательного модуля $\underset{\sim}{C}^E$ следующим образом:

$$C_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} C_{pqrs}^E; \quad F_{ip} = \frac{\partial x_i}{\partial X_p}; \quad J dV = dV$$

$\underset{\sim}{C}^d$ – симметричный тензор.

$$\underset{\sim}{d}(\vec{w}) = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \vec{w})^T + \vec{\nabla} \vec{w} \right]$$

Линеаризованное вариационное уравнение равновесия (1.9.5), вариационные уравнения фильтрации жидкости (1.8.3) и изменения пористости (1.8.4) составляют систему связанных линеаризованных

вариационных уравнений модели консолидации в геометрически нелинейной постановке в текущей конфигурации:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_V \left(\tilde{d}(\tilde{w}) : \tilde{C}^d : \tilde{d}(d\tilde{u}) \right) dV + \int_V \tilde{\sigma}^{eff}(\tilde{u}) : [(\tilde{\nabla}\tilde{w})^T \cdot \tilde{\nabla}d\tilde{u}] dV - \\
 & - \int_V \alpha dp \tilde{\nabla} \cdot \tilde{w} dV - \int_V \alpha p (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{w})(\tilde{\nabla} \cdot d\tilde{u}) dV + \\
 & + \int_V \alpha p (\tilde{\nabla}\tilde{w})^T : \tilde{\nabla}d\tilde{u} dV - \int_V \rho d\vec{f} \cdot \tilde{w} dV - \int_{\Sigma_2} d\vec{S} \cdot \tilde{w} d\Sigma = 0 \\
 & \int_V q\beta_f \tilde{\nabla}p \cdot \frac{k^\phi}{\gamma_f} \cdot \tilde{\nabla}p dV - \int_V \tilde{\nabla}q \cdot \frac{k^\phi}{\gamma_f} \cdot \tilde{\nabla}p dV - \int_V q\tilde{\nabla}n \cdot \frac{k^\phi}{n\gamma_f} \cdot \tilde{\nabla}p dV = \\
 & = \int_V q\tilde{\nabla} \cdot \dot{\tilde{u}} dV + \int_V qn\beta^f \dot{p} dV \\
 & \int_V h \dot{n} dV - \int_V h\tilde{\nabla}n \cdot \frac{k^\phi}{n\gamma_f} \cdot \tilde{\nabla}p dV = \int_V h(1-n)\tilde{\nabla} \cdot \dot{\tilde{u}} dV
 \end{aligned} \right. \quad (1.9.6)$$

Отметим, что линеаризованная постановка была получена в достаточно общем случае, когда определяющее соотношение для скелета грунта имеет вид:

$$d\tilde{S}^{eff} = \tilde{C}^E : d\tilde{E} \quad (\dot{\tilde{S}}^{eff} = \tilde{C}^E : \dot{\tilde{E}}). \quad (1.9.7)$$

В определяющих соотношениях (1.9.7) могут использоваться:

- 1) гиперупругий материал: $\tilde{C}^E = \partial^2 W / \partial \tilde{E}^2$, где W – упругий потенциал;
- 2) гипоупругий материал: $\tilde{C}^E = \tilde{C}^E(\tilde{E})$. К этому случаю относится теория пластического течения или деформационная теория пластичности при отсутствии смены нагрузки и разгрузки.

Глава 2. Алгоритм и примеры решения нелинейной связанной задачи консолидации

В главе 2 использованы результаты работ [4, 5, 46, 48].

2.1. Дискретизация уравнений модели консолидации по пространственным координатам

Рассмотрим дифференциальную постановку задачи консолидации с использованием подхода ALE (1.7.14, 1.7.15). При небольших градиентах давления и небольших градиентах пористости квадратичными членами в уравнениях (1.7.10) и (1.7.12) можно пренебречь:

$$\vec{\nabla} p \cdot \left(\frac{\tilde{k}^\phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = 0, \quad \vec{\nabla} n \cdot \left(\frac{\tilde{k}^\phi}{n\gamma_f} \cdot \vec{\nabla} p \right) = 0. \quad (2.1.1)$$

Среду будем предполагать изотропной (коэффициент фильтрации k_ϕ – скалярный параметр). Тогда, с учетом сделанных предположений (2.1.1), линейризованная система дифференциальных уравнений модели консолидации примет вид:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left(\tilde{C}^d(\vec{u}) : \vec{\nabla} d\vec{u} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\tilde{\sigma}^{eff}(\vec{u}) \cdot \vec{\nabla} d\vec{u} \right) - \alpha \vec{\nabla} dp - \\ - \alpha (\vec{\nabla} p) (\vec{\nabla} \cdot d\vec{u}) + \alpha (\vec{\nabla} p) \cdot (\vec{\nabla} d\vec{u}) + \rho d\vec{f} = 0 \\ n(\vec{u}) \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k_\phi(\vec{u})}{n(\vec{u})\gamma_f} \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} + n\beta_f \dot{p} \\ \dot{n} = (1 - n) \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{u}} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

где $\dot{\vec{u}} = \partial \vec{u}(\vec{\xi}, t) / \partial t$, $\dot{p} = \partial p(\vec{\xi}, t) / \partial t$, $\dot{n} = \partial n(\vec{\xi}, t) / \partial t$. (Преобразование линейризованного вариационного уравнения равновесия в дифференциальную форму приведено в Приложении 3.)

Системе (2.1.2) с граничными условиями (1.7.15) соответствует линейризованная вариационная постановка задачи консолидации:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_V C_{ijkl}^d du_{k,l} w_{i,j} dV + \int_V \sigma_{kj}^{eff} du_{i,k} w_{i,j} dV - \int_V \alpha dp w_{i,i} dV - \int_V \alpha p du_{j,j} w_{i,i} dV + \\ & + \int_V \alpha p du_{j,i} w_{i,j} dV - \int_V \rho df_i w_i dV - \int_{\Sigma_2} dS_i w_i d\Sigma = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.1.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_V \frac{k_\phi}{\gamma_f} p_{,i} q_{,i} dV + \int_V q \frac{k_\phi}{n\gamma_f} n_{,i} p_{,i} dV + \int_V q \dot{u}_{i,i} dV + \int_V q n \beta_f \dot{p} dV = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.1.4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_V h \dot{n} dV = \int_V h(1-n) \dot{u}_{i,i} dV \end{aligned} \right. \quad (2.1.5)$$

Сначала решается система уравнений равновесия (2.1.3) и фильтрации (2.1.4) методом Узавы [11] в предположении постоянной пористости. А после решения этой задачи пористость вычисляется из уравнения (2.1.5).

Дискретизация линеаризованных вариационных уравнений (2.1.3), (2.1.4) по пространственным координатам осуществляется с помощью метода конечных элементов (МКЭ), а производная по времени аппроксимируется конечной разностью.

При дискретизации вариационных уравнений (2.1.3), (2.1.4) по координатам использовались серендиповы квадратичные элементы (Q2) для аппроксимации приращения перемещений $d\vec{u}$ в грунте и элементы трилинейного типа (Q1) для аппроксимации давления воды p (рис. 2.1.1). (Конечный элемент Q2-Q1 для $d\vec{u}$ имеет 20 узловых точек, а для p – 8 узловых точек.)

Такой выбор конечных элементов был обусловлен тем, что, как показывает практика [66], для седловой задачи LBB-условие устойчивости выполняется именно для элементов Q2-Q1 и не выполняется для элементов Q1-Q1. Результаты исследования устойчивости седловой задачи консолидации для разных типов конечных элементов (Q2-Q1 и Q1-Q1) приведены ниже в параграфе 2.3.

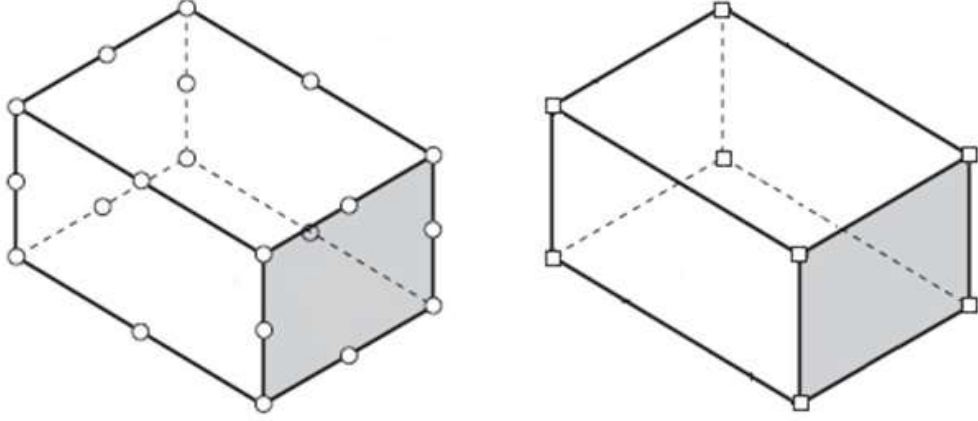


Рис. 2.1.1. Конечный элемент Q2-Q1.

Рассмотрим N -мерные подпространства $H_u^N \in H_u$ и $H_p^N \in H_p$. Функции $d\bar{u}^N(\vec{\xi}, t) \in H_u^N$ и $p^N(\vec{\xi}, t) \in H_p^N$ будут приближенными решениями уравнений (2.1.3), (2.1.4), если при каждом $t > 0$ и при всех $\vec{w}^N(\vec{\xi}, t) \in H_u^N$ и $h^N(\vec{\xi}, t) \in H_p^N$ они будут удовлетворять уравнениям (2.1.6).

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_V C_{ijkl}^d(\bar{u}^N) du_{k,l}^N w_{i,j}^N dV + \int_V \sigma_{kj}^{eff}(\bar{u}^N) du_{i,k}^N w_{i,j}^N dV - \int_V \alpha dp^N w_{i,i}^N dV - \\ & - \int_V \alpha p^N du_{j,j}^N w_{i,i}^N dV + \int_V \alpha p^N du_{j,i}^N w_{i,j}^N dV - \\ & - \int_V \rho df_i w_i^N dV - \int_{\Sigma_2} dS_i w_i^N d\Sigma = 0 \\ & \int_V \frac{k_\phi(\bar{u}^N)}{\gamma_f} p_{,i}^N q_{,i}^N dV + \int_V \frac{k_\phi(\bar{u}^N)}{n(\bar{u}^N)\gamma_f} n_{,i} p_{,i}^N q^N dV + \int_V \dot{u}_{i,i}^N q^N dV + \\ & + \int_V n\beta_f \dot{p}^N q^N dV = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.1.6)$$

Разобьем область V на конечные элементы V_e . Тогда $V = \sqcup V_e$. Запишем уравнения (2.1.6) для суммы элементов V_e :

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_e \left(\int_{V_e} C_{ijkl}^d(\vec{u}^N) du_{k,l}^N w_{i,j}^N dV \right) + \sum_e \left(\int_{V_e} \sigma_{kj}^{eff}(\vec{u}^N) du_{i,k}^N w_{i,j}^N dV \right) - \\
& - \sum_e \left(\int_{V_e} \alpha dp^N w_{i,i}^N dV \right) - \sum_e \left(\int_{V_e} \alpha p^N du_{j,j}^N w_{i,i}^N dV \right) + \\
& + \sum_e \left(\int_{V_e} \alpha p^N du_{j,i}^N w_{i,j}^N dV \right) - \sum_e \left(\int_{V_e} \rho df_i w_i^N dV \right) - \\
& - \sum_e \left(\int_{\Sigma_{2e}} dS_i w_i^N d\Sigma \right) = 0 \\
& \sum_e \left(\int_{V_e} \frac{k_\phi(\vec{u}^N)}{\gamma_f} p_{,i}^N q_{,i}^N dV \right) + \sum_e \left(\int_{V_e} \frac{k_\phi(\vec{u}^N)}{n(\vec{u}^N)\gamma_f} n_{,i} p_{,i}^N q^N dV \right) + \\
& + \sum_e \left(\int_{V_e} \dot{u}_{i,i}^N q^N dV \right) + \sum_e \left(\int_{V_e} n\beta_f \dot{p}^N q^N dV \right) = 0
\end{aligned} \right. \quad (2.1.7)$$

Расположение и количество узловых точек для перемещений и давления воды в макроэлементах различное. Пусть $\widehat{du}^r = (\widehat{du}_1^r, \widehat{du}_2^r, \widehat{du}_3^r)$ – вектор узловых приращений перемещений в произвольном конечном элементе Q2 ($r = 1, \dots, 20$), а \hat{p}^q – узловые давления воды в элементе Q1 ($q = 1, \dots, 8$). Выразим $du^N(\vec{\xi}, t)$, $p^N(\vec{\xi}, t)$, $w^N(\vec{\xi}, t)$, $q^N(\vec{\xi}, t)$ через узловые приращения перемещений и узловые давления соответственно:

$$du_i^N = \sum_{r=1}^{20} N_r^u \widehat{du}_i^r \equiv N_r^u \widehat{du}_i^r, \quad p^N = \sum_{s=1}^8 N_s^p \hat{p}^s \equiv N_s^p \hat{p}^s, \quad (2.1.8)$$

$$w_i^N = \sum_{r=1}^{20} N_r^u \widehat{w}_i^r \equiv N_r^u \widehat{w}_i^r, \quad q^N = \sum_{s=1}^8 N_s^p \hat{q}^s \equiv N_s^p \hat{q}^s, \quad i = 1, 2, 3,$$

N_r^u и N_s^p – функции формы элементов Q2 и Q1 соответственно.

Найдем их производные по пространственным координатам:

$$\begin{aligned} du_{i,j}^N &= N_{r,j}^u \widehat{du}_i^r, & p_j^N &= N_{s,j}^p \widehat{p}^s, & w_{i,j}^N &= N_{r,j}^u \widehat{w}_i^r, \\ q_{,j}^N &= N_{s,j}^p \widehat{q}^s, & i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Подставим выражения (2.1.8) и (2.1.9) в систему уравнений (2.1.7) и сделаем преобразования.

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_e \left(\int_{V_e} C_{ijkl}^d N_{m,l}^u \widehat{du}_k^m N_{n,j}^u \widehat{w}_i^n dV \right) + \sum_e \left(\int_{V_e} \sigma_{kj}^{eff} N_{m,k}^u \widehat{du}_i^m N_{n,j}^u \widehat{w}_i^n dV \right) - \\ & - \sum_e \left(\int_{V_e} \alpha N_q^p \widehat{dp}^q N_{n,i}^u \widehat{w}_i^n dV \right) - \sum_e \left(\int_{V_e} \alpha N_q^p \widehat{p}^q N_{m,j}^u \widehat{du}_j^m N_{n,i}^u \widehat{w}_i^n dV \right) + \\ & + \sum_e \left(\int_{V_e} \alpha N_q^p \widehat{p}^q N_{m,i}^u \widehat{du}_j^m N_{n,j}^u \widehat{w}_i^n dV \right) - \sum_e \left(\int_{V_e} \rho df_i^u N_n \widehat{w}_i^n dV \right) - \\ & - \sum_e \left(\int_{\Sigma_{2e}} dS_i N_n \widehat{w}_i^n d\Sigma \right) = 0 \\ & \sum_e \left(\int_{V_e} \frac{k_\phi}{\gamma_f} N_{q,i}^p \widehat{p}^q N_{r,i}^p \widehat{q}^r dV \right) + \sum_e \left(\int_{V_e} \frac{k_\phi}{n\gamma_f} n_{,i} N_{q,i}^p \widehat{p}^q N_r^p \widehat{q}^r dV \right) + \\ & + \sum_e \left(\int_{V_e} N_{m,i}^u \widehat{u}_i^m N_r^p \widehat{q}^r dV \right) + \sum_e \left(\int_{V_e} n\beta_f N_q^p \widehat{p}^q N_r^p \widehat{q}^r dV \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_e \left(\left(\int_{V_e} C_{ijkl}^d N_{m,l}^u N_{n,j}^u dV \right) \widehat{du}_k^m \widehat{w}_i^n \right) + \\
& + \sum_e \left(\left(\int_{V_e} \sigma_{ij}^{eff} \delta_{ik} N_{m,l}^u N_{n,j}^u dV \right) \widehat{du}_k^m \widehat{w}_i^n \right) - \\
& - \sum_e \left(\left(\int_{V_e} \alpha N_q^p N_{n,i}^u dV \right) \widehat{dp}^q \widehat{w}_i^n \right) - \sum_e \left(\left(\int_{V_e} \alpha N_q^p N_{m,k}^u N_{n,i}^u dV \right) \widehat{du}_k^m \widehat{p}^q \widehat{w}_i^n \right) + \\
& + \sum_e \left(\left(\int_{V_e} \alpha N_q^p N_{m,i}^u N_{n,k}^u dV \right) \widehat{du}_k^m \widehat{p}^q \widehat{w}_i^n \right) - \sum_e \left(\left(\int_{V_e} \rho df_i^u N_n dV \right) \widehat{w}_i^n \right) - \\
& - \sum_e \left(\left(\int_{\Sigma_{2e}} dS_i N_n d\Sigma \right) \widehat{w}_i^n \right) = 0 \\
& \sum_e \left(\left(\int_{V_e} \frac{k_\phi}{\gamma_f} N_{q,i}^p N_{r,i}^p dV \right) \widehat{p}^q \widehat{q}^r \right) + \sum_e \left(\left(\int_{V_e} \frac{k_\phi}{n\gamma_f} n_{,i}^p N_{q,i}^p N_r^p dV \right) \widehat{p}^q \widehat{q}^r \right) + \\
& + \sum_e \left(\left(\int_{V_e} N_{m,k}^u N_r^p dV \right) \widehat{u}_k^m \widehat{q}^r \right) + \sum_e \left(\left(\int_{V_e} n\beta_f N_q^p N_r^p dV \right) \widehat{p}^q \widehat{q}^r \right) = 0
\end{aligned} \right.$$

2.2. Метод Узавы с внутренними итерациями

При численном моделировании задач о деформировании водонасыщенного грунта требуется решать большие системы алгебраических уравнений. Следовательно, использование итерационного метода Узавы для решения седловой системы вполне оправдано.

Метод Узавы

Опишем применение идеи метода Узавы [11] для решения линейного упругого варианта задачи консолидации, предложенного в [26]. Для удобства

читателя описание дискретизации по времени запишем, используя символы дифференциальных операторов.

$$\begin{cases} -\vec{\nabla} \cdot (\tilde{C} : \vec{\nabla} d\vec{u}) + \vec{\nabla} dp = \rho \vec{f} \\ -\vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{k_\phi}{\gamma_f} \Delta p = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

где $\Delta = \text{div grad}$ – оператор Лапласа, $\vec{F} = \rho \vec{f}$ – объемная сила. Дискретизированная система линейных уравнений задачи консолидации (2.2.1) имеет вид:

$$\begin{cases} -\text{div} (\tilde{C} : \text{grad } \widehat{\Delta u}^m) + \text{grad } \widehat{\Delta p}^m = F \\ -\text{div} \widehat{\Delta u}^m + \tau \frac{k_\phi}{\gamma_f} \text{div grad } \hat{p}^m = 0 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

где τ – величина шага по времени; m – номер шага по времени; $\widehat{\Delta u}^m$, $\widehat{\Delta p}^m$ и \hat{p}^m – узловые значения приращения перемещений, приращения давления воды и давления воды соответственно на временном шаге m . Запишем систему (2.2.2) в операторном виде:

$$\begin{cases} A \widehat{\Delta u}^m + B^T \widehat{\Delta p}^m = F \\ B \widehat{\Delta u}^m - \tau C \hat{p}^m = 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Здесь $A > 0$, B^T , B , $C > 0$ – конечно-элементные аналоги дифференциальных операторов из (2.2.2). Из первого уравнения (2.2.3) выразим $\widehat{\Delta u}^m$:

$$\widehat{\Delta u}^m = -A^{-1} B^T \widehat{\Delta p}^m + A^{-1} F, \quad (2.2.4)$$

Учтем, что $\hat{p}^m = \hat{p}^{m-1} + \widehat{\Delta p}^m$, и подставим (2.2.4) во второе уравнение системы (2.2.3). Получим:

$$S \widehat{\Delta p}^m = B A^{-1} F - \tau C \hat{p}^{m-1}, \quad (2.2.5)$$

где $S = B A^{-1} B^T + \tau C$ – матрица Шура. В уравнении (2.2.5) левая часть относится к временному шагу m , а правая часть – к предыдущему шагу $(m - 1)$. Матрицы A и C – симметричные и положительно определенные, поэтому матрица S – тоже симметричная и положительно определенная. Следовательно, уравнение (2.2.5) можно решать с помощью итерационных методов. Будем, например, использовать метод простой итерации.

Метод простой итерации

Самый простой итерационный процесс на шаге m для уравнения (2.2.5) записывается следующим образом:

$$\mathbb{B} \frac{\widehat{\Delta p}^{m,s+1} - \widehat{\Delta p}^{m,s}}{\beta} + (BA^{-1}B^T + \tau C)\widehat{\Delta p}^{m,s} = BA^{-1}F - \tau C\hat{p}^{m-1}, \quad (2.2.6)$$

s – номер итерации, β – итерационный параметр. Предобусловливатель \mathbb{B} используется для ускорения сходимости итерационного процесса. Оператор предобусловливания позволяет получать решение со скоростью сходимости, не зависящей от количества неизвестных в алгебраической системе уравнений [21]. В предобусловленном итерационном процессе исходная СЛАУ (2.2.5) заменяется на СЛАУ в энергетическом пространстве H_D :

$$\mathbb{B}^{-1}S\widehat{\Delta p}^m = \mathbb{B}^{-1}(BA^{-1}F - \tau C\hat{p}^{m-1}).$$

Выбор предобусловливателя главным образом определяется следующим условием:

$$\text{cond}(\tilde{S}) \ll \text{cond}(S), \quad \text{где } \tilde{S} = \mathbb{B}^{-1}S, \quad \text{cond}(S) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \quad \text{cond}(\tilde{S}) = \frac{\tilde{\lambda}_{\max}}{\tilde{\lambda}_{\min}},$$

$\lambda_{\min}, \lambda_{\max}, \tilde{\lambda}_{\min}, \tilde{\lambda}_{\max}$ – минимальные и максимальные собственные значения матриц S и \tilde{S} соответственно, $\text{cond}(S)$ – число обусловленности матрицы S (чем больше $\text{cond}(S)$, тем хуже обусловлена матрица S). Структура предобусловливателя должна быть идентична структуре матрицы S .

Для итерационного процесса (2.2.6) был выбран предобусловливатель вида $\mathbb{B} = C$. Тогда из (2.2.6) получаем:

$$C(\widehat{\Delta p}^{m,s+1} - \widehat{\Delta p}^{m,s}) + \beta\tau C\widehat{\Delta p}^{m,s} = \beta BA^{-1}(F - B^T\widehat{\Delta p}^{m,s}) - \beta\tau C\hat{p}^{m-1}. \quad (2.2.7)$$

Заметим, что

$$\widehat{\Delta p}^{m,s} = \hat{p}^{m,s} - \hat{p}^{m-1}, \quad \widehat{\Delta p}^{m,s+1} - \widehat{\Delta p}^{m,s} = \hat{p}^{m,s+1} - \hat{p}^{m,s}, \quad (2.2.8)$$

Из (2.2.4) следует:

$$\widehat{\Delta u}^{m,s+1} = A^{-1}(F - B^T\widehat{\Delta p}^{m,s}). \quad (2.2.9)$$

Подставив (2.2.8), (2.2.9) в (2.2.7), получим уравнение:

$$\hat{p}^{m,s+1} = \beta C^{-1}B\widehat{\Delta u}^{m,s+1} + (1 - \beta\tau)\hat{p}^{m,s}. \quad (2.2.10)$$

По известному значению $\hat{p}^{m,s}$ вычисляется следующее приближение для приращения перемещения $\widehat{\Delta u}^{m,s+1}$ по формуле (2.2.9). Затем $\widehat{\Delta u}^{m,s+1}$ подставляется в формулу (2.2.10) и вычисляется новое приближение для давления воды $\hat{p}^{m,s+1}$. И потом все итерационно повторяется.

На каждом шаге по времени итерационный процесс завершается и происходит переход к новому шагу, когда нормализованная итерационная невязка r_s становится меньше некоторого заданного допустимого значения $r_s^{\text{доп}}$ (например, $r_s^{\text{доп}} = 10^{-4}$). Нормализованная невязка r_s рассчитывается на каждой s -й итерации следующим образом:

$$r_s = \frac{s_{iter}^s}{s_{init}}$$

где

$$s_{iter}^s = \left(\sum_{i=1}^{N_p} (\hat{p}^{m,s}(i) - \hat{p}^{m,s-1}(i))^2 \right)^{1/2} / N_p,$$

$$s_{init} = \begin{cases} 1, & s_{iter}^2 = 0 \\ s_{iter}^2, & s_{iter}^2 \neq 0 \end{cases}$$

r_s – нормализованная итерационная невязка, рассчитанная на s -й итерации; i – номер узла и N_p – общее количество узлов в сетке для аппроксимации давления воды; $\hat{p}^{m,s}(i)$ и $\hat{p}^{m,s-1}(i)$ – значения давления воды в i -м узле, рассчитанные на s -й и $(s - 1)$ -й итерациях соответственно.

Следует заметить, что при вычислении $\widehat{\Delta u}^{m,s+1}$ (2.2.9) и $\hat{p}^{m,s+1}$ (2.2.10) обратные конечно-элементные матрицы A^{-1} и C^{-1} не рассчитываются, а решаются соответствующие линейные системы. Для вычисления $\widehat{\Delta u}^{m,s+1}$ и $\hat{p}^{m,s+1}$ использовался прямой метод из библиотеки MKL.

Анализ сходимости итерационного процесса

Исследуем сходимость итерационного процесса метода простой итерации (см. (2.2.6), (2.2.8)):

$$\mathbb{B} \frac{\hat{p}^{m,s+1} - \hat{p}^{m,s}}{\beta} + S \widehat{\Delta p}^{m,s} = BA^{-1}F - \tau C \hat{p}^{m-1}. \quad (2.2.11)$$

Введем функцию:

$$\hat{q}^{m,s} = \hat{p}^{m,s} - \hat{p}^m,$$

\hat{p}^m – точное решение на m -м шаге по времени. Тогда

$$\begin{aligned}\hat{p}^{m,s} &= \hat{q}^{m,s} + \hat{p}^m, \quad \hat{p}^{m,s+1} = \hat{q}^{m,s+1} + \hat{p}^m, \\ \widehat{\Delta p}^{m,s} &= \hat{q}^{m,s} + \widehat{\Delta p}^m, \quad \widehat{\Delta p}^m = \hat{p}^m - \hat{p}^{m-1}.\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в (2.2.11):

$$\begin{aligned}\mathbb{B} \frac{(\hat{q}^{m,s+1} + \hat{p}^m) - (\hat{q}^{m,s} + \hat{p}^m)}{\beta} + S(\hat{q}^{m,s} + \widehat{\Delta p}^m) &= BA^{-1}F - \tau C \hat{p}^{m-1}, \\ \mathbb{B} \frac{\hat{q}^{m,s+1} - \hat{q}^{m,s}}{\beta} + S\hat{q}^{m,s} + S\widehat{\Delta p}^m - (BA^{-1}F - \tau C \hat{p}^{m-1}) &= 0.\end{aligned}$$

Учитывая (2.2.5), получаем:

$$\begin{aligned}\mathbb{B} \frac{\hat{q}^{m,s+1} - \hat{q}^{m,s}}{\beta} + S\hat{q}^{m,s} &= 0, \\ \hat{q}^{m,s+1} &= (E - \beta \mathbb{B}^{-1}S)\hat{q}^{m,s}.\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

Следовательно, чтобы итерации сходились (т.е. существовал предел последовательности приближений $\hat{q}^{m,s}$), оператор $(E - \beta \mathbb{B}^{-1}S)$ должен обеспечивать сжатие, т.е. должно соблюдаться условие:

$$\|E - \beta \mathbb{B}^{-1}S\| = \rho < 1.$$

Матрица $\mathbb{B} > 0$ и $\mathbb{B} = \mathbb{B}^T$ (так как $\mathbb{B} = C$), а матрица $\mathbb{B}^{-1}S \neq (\mathbb{B}^{-1}S)^T$, так как \mathbb{B}^{-1} и S не перестановочны. Рассмотрим равенство (2.2.12) и введем энергетическую норму:

$$\|\hat{q}^{m,s+1}\|_D \leq \|E - \beta \mathbb{B}^{-1}S\|_D \cdot \|\hat{q}^{m,s}\|_D.\tag{2.2.13}$$

Эта норма – энергия оператора D ($D = D^T > 0$), она определяется таким скалярным произведением:

$$(p, q)_D = (Dp, q) = \left(DD^{-\frac{1}{2}}x, D^{-\frac{1}{2}}y \right) = (x, y).$$

Перейдем к x :

$$D^{-\frac{1}{2}}\hat{x}^{m,s+1} = (E - \beta \mathbb{B}^{-1}S)D^{-\frac{1}{2}}\hat{x}^{m,s}.$$

Тогда итерационный процесс записывается так:

$$\hat{x}^{m,s+1} = (E - \beta Q)\hat{x}^{m,s}, \quad Q = \beta D^{\frac{1}{2}}\mathbb{B}^{-1}SD^{-\frac{1}{2}}.$$

Легко понять, что $Q = Q^T \Leftrightarrow D\mathbb{B}^{-1}S = (D\mathbb{B}^{-1}S)^T$. Чтобы обеспечить симметричность матрицы $D\mathbb{B}^{-1}S$, на практике выбирают:

$$D = \mathbb{B} \text{ или } D = S.$$

Таким образом, введение энергетической нормы исправляет несимметричность матрицы в неравенстве (2.2.13):

$$\|\hat{x}^{m,s+1}\| \leq \|E - \beta Q\| \cdot \|\hat{x}^{m,s}\|, \quad Q = Q^T > 0. \quad (2.2.14)$$

Неравенства относительно последовательности $\hat{x}^{m,s}$ (2.2.14) (в конечно-элементном аналоге пространства L_2) и последовательности $\hat{q}^{m,s}$ (2.2.13) (в энергетическом пространстве) эквивалентны. Итерационный параметр β нужно выбрать таким образом, чтобы итерационный процесс сходился, причем как можно быстрее, т.е. нужно найти такое β , при котором $\|E - \beta Q\|$ достигает минимума [11]:

$$\min_{\beta} \|E - \beta Q\| = \min_{\beta} \max_{\lambda_k} |1 - \beta \lambda_k| \leq \min_{\beta} \max_{\lambda \in [\gamma_1, \gamma_2]} |1 - \beta \lambda|,$$

λ_k – собственные значения оператора Q , $\gamma_1 = \min_k \lambda_k > 0$, $\gamma_2 = \max_k \lambda_k$.

Решение этой задачи: $\beta = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$. Но γ_1 и γ_2 – неизвестны (задача на нахождение собственных чисел λ_k матрицы Q сложная). Однако известно, что $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = O(1)$, т.е. $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ не зависит от шага сетки. Это означает, что итерации будут сходиться независимо от того, на какой сетке решается задача.

Один из способов нахождения итерационного параметра β – это подбор β в ходе вычислительных экспериментов, чтобы итерационный процесс быстро сходился. Кроме того, градиентные методы и методы сопряженных направлений позволяют вычислять β по мере проведения итераций в самом вычислительном процессе, и заранее не нужно знать ни γ_1 и γ_2 , ни β , а нужно только знать, что матрица Q удовлетворяет условиям $Q = Q^T > 0$, которые обеспечивают существование γ_1 и γ_2 .

Недостатками метода простой итерации также является медленная сходимость. Правда, нужно заметить, что в данном случае даже метод простой итерации требует небольшого числа итераций за счет предобусловливателя,

эквивалентного по спектру оператору Шура S . Последний факт также означает, что число итераций не зависит от размера линейной системы. Понятно, что наиболее эффективными методами для решения (2.2.5) являются методы сопряженных направлений, в которых $\beta^{m,s}$ рассчитывается в ходе итераций в самом вычислительном процессе.

Метод сопряженных градиентов

Применим метод сопряженных градиентов для решения уравнения Шура (2.2.5) [21]:

$$\frac{\widehat{\Delta p}^{m,s+1} - \widehat{\Delta p}^{m,s}}{\beta^{m,s+1}} + S\widehat{\Delta p}^{m,s} = BA^{-1}F - \tau C\hat{p}^{m-1}, \quad (2.2.15)$$

m – номер шага по времени, s – номер итерации, β^{s+1} – итерационный параметр, который пересчитывается на каждой итерации. С учетом (2.2.8) запишем итерационный процесс (2.2.15) в виде:

$$\frac{\hat{p}^{m,s+1} - \hat{p}^{m,s}}{\beta^{m,s+1}} + S\hat{p}^{m,s} = f^{m-1}, \quad (2.2.16)$$

где $f^{m-1} = S\hat{p}^{m-1} + BA^{-1}F - \tau C\hat{p}^{m-1}$ – слагаемые с предыдущего шага по времени ($m-1$).

Двухслойная схема метода сопряженных градиентов для уравнения (2.2.16) имеет вид:

$$\begin{aligned} r^{0,0} &= -f^0; \quad q^{0,0} = r^{0,0}; \quad \alpha^{m,s} = \frac{(r^{m,s}, r^{m,s})}{(Sq^{m,s}, q^{m,s})} \\ p^{m,s+1} &= p^{m,s} - \alpha^{m,s} q^{m,s}; \quad r^{m,s+1} = Sp^{m,s+1} - f^{m-1} \\ \beta^{m,s+1} &= \frac{(r^{m,s+1}, r^{m,s+1})}{(r^{m,s}, r^{m,s})}; \quad q^{m,s+1} = r^{m,s+1} + \beta^{m,s+1} q^{m,s} \end{aligned}$$

При переходе на следующий временной шаг начальные приращения давления воды и перемещений берутся с последней итерации предыдущего шага. Идея метода сопряженных градиентов состоит в глобальной минимизации функционала ошибки при переходе от $\hat{p}^{0,0}$ к $\hat{p}^{m,s}$.

2.3. Анализ устойчивости линейной связанной задачи консолидации.

LBV-условие

Запишем задачу консолидации (2.2.3) в блочно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -\tau C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.1)$$

f – вектор правой части (массовые силы и известные величины с предыдущего шага по времени). Решение системы (2.3.1) эквивалентно нахождению седловой точки некоторого функционала, поэтому система (2.3.1) называется седловой. При численном решении дискретизированной седловой системы уравнений (2.3.1) возникают проблемы, связанные с устойчивостью.

Проблема корректности седловой задачи в литературе наиболее изучена для задачи Стокса о несжимаемой вязкой жидкости, которая в блочно-матричной форме записывается так:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3.2)$$

Линейная алгебраическая система (2.3.2) с блочной матрицей, имеющая нулевой диагональный блок, имеет единственное решение, если будут выполняться следующие условия для \hat{u} и для \hat{p} :

$$(B\hat{u} = 0 \not\Rightarrow \hat{u} = 0) \Leftrightarrow (Ker B \neq 0), \quad (2.3.3)$$

$$(B^T\hat{p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = const) \Leftrightarrow (Ker B^T = \{\hat{p} = const\}), \quad (2.3.4)$$

B – конечно-элементный аналог дивергенции, B^T – конечно-элементный аналог градиента.

Условия (2.3.3) и (2.3.4) могут соблюдаться, если матрица B не будет вытянута вниз (следовательно, B^T не будет вытянута вправо), тогда не получится большая квадратная нулевая матрица (рис. 2.3.1 (а)). В противном случае (рис. 2.3.1 (б)) будет слишком много условий на u , и из условия $B\hat{u} = 0$ может следовать, что $\hat{u} = 0$, т.е. может произойти «locking». А если матрица B^T вытянута по горизонтали (рис. 2.3.1 (б)), то тогда B^T умножается на длинный вектор \hat{p} , а уравнений мало. Следовательно, могут возникнуть

«ложные» давления, осцилляции \hat{p} ($\hat{p} \neq const$, но $B^T \hat{p} = 0$). Это не происходит при правильной исходной дифференциальной задаче, но может произойти при конечно-элементной аппроксимации. Размеры матриц B и B^T зависят от того, какие конечные элементы используются.

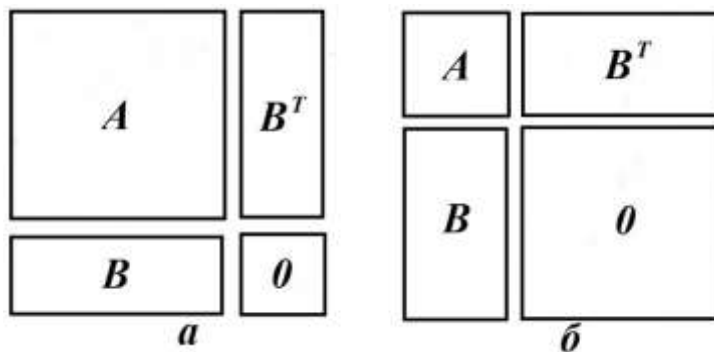


Рис. 2.3.1. Условия устойчивости (а) и неустойчивости (б) седловой задачи Стокса о несжимаемой жидкости.

Как видно, система уравнений задачи консолидации (2.3.1) отличается от системы уравнений задачи Стокса (2.3.2) оператором A и тем, что в (2.3.1) есть добавка $(-\tau C)$, которая на самом деле улучшает задачу. Существует метод решения задачи Стокса, в котором добавляют малую регуляризационную добавку $(-\varepsilon C^*)$, где ε – малый параметр, C^* – разностный аналог оператора Лапласа, взятый с противоположным знаком. Параметр ε для стабилизации задачи Стокса подбирается в ходе численных экспериментов так, чтобы, во-первых, решения были похожи на решения исходной задачи и, во-вторых, не возникало колебаний давления. В задаче консолидации малый параметр ε равен шагу по времени τ , который влияет на точность аппроксимации задачи, поэтому его нельзя задавать слишком большим. В некоторых случаях (например, при использовании простых конечных элементов Q1-Q1) задачу консолидации можно стабилизировать с помощью выбора параметра τ [21, 22, 50]. И здесь может оказаться, что для эффективной регуляризации задачи параметр τ должен быть слишком большим, что может привести к низкой точности решения.

Запишем достаточные условия существования и единственности решения седловой задачи (2.3.1) в строгой математической форме:

1) Положительная определенность матриц A и C :

$$(A\hat{u}, \hat{u}) > 0, \forall \hat{u} \neq 0; \quad (C\hat{p}, \hat{p}) > 0, \forall \hat{p} \neq 0. \quad (2.3.5)$$

2) LBB-условие (Ладыженской–Бабушки–Бреци, $\inf \sup$ условие) для матрицы B :

$$\forall \hat{p} \in H_p^N / \text{Ker} B^T \quad \exists \hat{u} \in H_u^N: \quad (B^T \hat{p}, \hat{u}) \geq \beta \sqrt{(A\hat{u}, \hat{u})} \sqrt{(\hat{p}, \hat{p})}, \quad \beta > 0,$$

$\hat{u} \neq 0$

или (эквивалентная запись этого условия):

$$\inf_{\hat{p} \in H_p^N / \text{Ker} B^T} \sup_{\hat{u} \in H_u^N} \frac{(B^T \hat{p}, \hat{u})}{\|\hat{p}\| \|\hat{u}\|} \geq \varepsilon > 0. \quad (2.3.6)$$

Свойства положительной определенности операторов A и C (2.3.5) выполняются в бесконечномерных пространствах H_u и H_p соответственно и, как следствие, в конечномерных пространствах H_u^N и H_p^N . Подобное следствие неверно для LBB условия (2.3.6) (условие для \sup может не выполняться в меньшем конечномерном пространстве). Следовательно, LBB условие нужно проверять для каждой конечно-элементной реализации седловой задачи.

Следствием из условия (2.3.6) являются необходимые условия:

$$\dim(\text{Ker} B^T) < 1; \quad \dim(\text{Ker} B) > 1. \quad (2.3.7)$$

Для численного моделирования седловой задачи консолидации (2.3.1) должны использоваться такие конечные элементы, чтобы условия (2.3.7) выполнялись. Как видно из (2.3.7), конечные элементы для аппроксимации перемещений скелета и давления воды должны быть разными. Обычно условия (2.3.7) проверяют на макроэлементах, состоящих из нескольких одинаковых конечных элементов. Если условия (2.3.7) выполняются на макроэлементе, то они будут выполняться для любой сетки, составленной из таких устойчивых макроэлементов. Как показывают такие проверки и опыт моделирования седловых задач [21, 22, 66], аппроксимация седловой задачи квадратичными конечными элементами Q2 для перемещений скелета грунта и трилинейными КЭ Q1 для давления воды обеспечивает устойчивость задачи,

а применение элементов Q1-Q1 приводит, вообще говоря, к неустойчивой системе уравнений. Также известно (см., например, [21]), что величина минимального шага по времени τ_{min} , при котором решение седловой задачи при аппроксимации конечными элементами Q1-Q1 становится устойчивым, пропорциональна квадрату шага сетки h^2 , т.е. для устойчивости достаточно выполнение условия $\frac{\tau}{h^2} > const$. Продемонстрируем численные примеры решения задачи консолидации, подтверждающие этот факт.

Линейная упругая задача консолидации о действии штампа

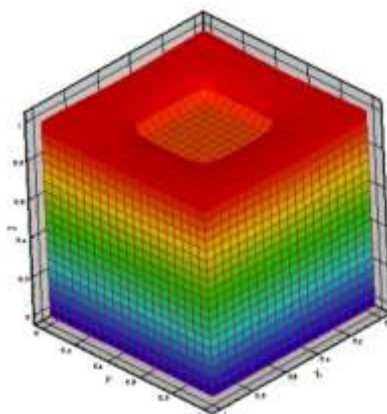


Рис. 2.3.2. Задача со штампом.

Будем решать задачу о действии штампа. Расчетная область имеет форму куба со стороной 1 м. Боковые и нижняя границы области закреплены и непроницаемы. На верхней границе на первом шаге по времени задается перемещение штампа 0,1 м (деформация 10%). Остальная часть верхней границы свободна от напряжений. Вся верхняя граница проницаема, через штамп также может просачиваться жидкость. Штамп – квадратной формы со стороной 0,4 м, действует ровно посередине верхней грани, как на рис. 2.3.2.

Вся область сложена однородным материалом. Свойства грунта, задаваемые в расчетах: $E = 40$ МПа, $\nu = 0,4$, $\gamma_f = 10^4$ кг/(м² · с²), $k_\phi = 5,5 \cdot 10^{-4}$ м/с. В задаче предполагается, что $n = const$, $k_\phi = const$. Общее время действия штампа – 1,3 с, количество шагов по времени – 10.

Для исследования устойчивости решения задачи расчеты проводились при аппроксимации конечными элементами Q2-Q1 и Q1-Q1 (рис. 2.3.3) на различных сетках: 11x11x11, 21x21x21, 31x31x31 и 41x41x41 (указано количество узлов по трем направлениям сеток для давления воды).

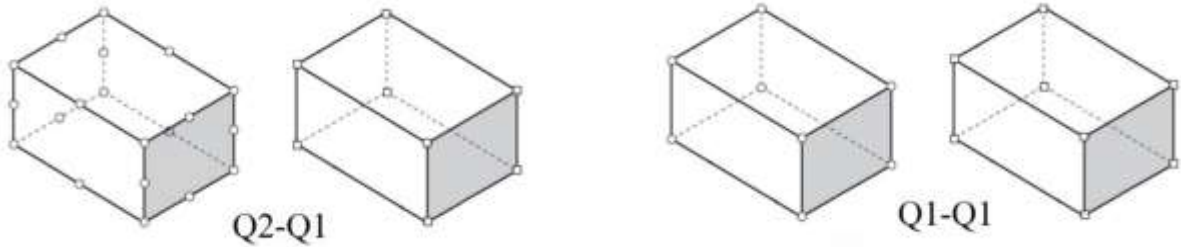
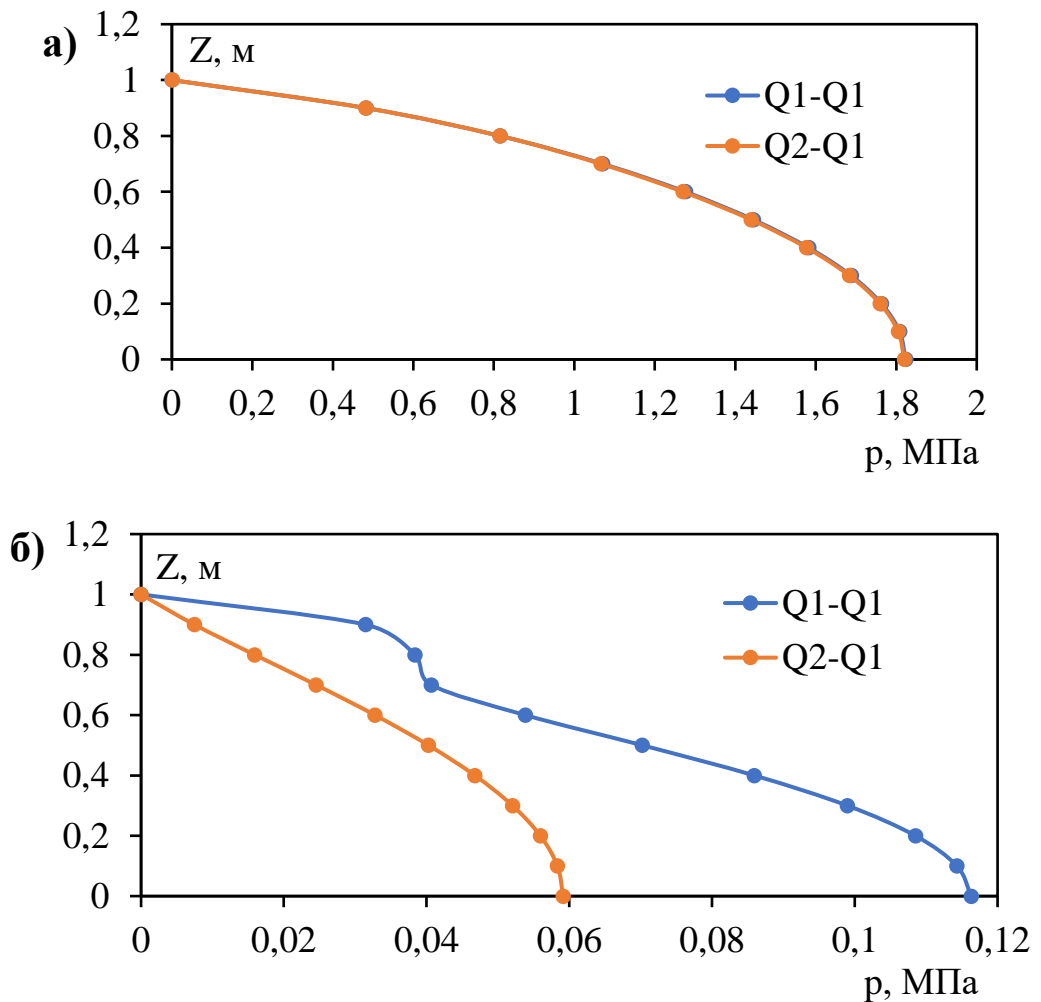


Рис. 2.3.3. Конечные элементы, используемые для моделирования задачи со штампом.



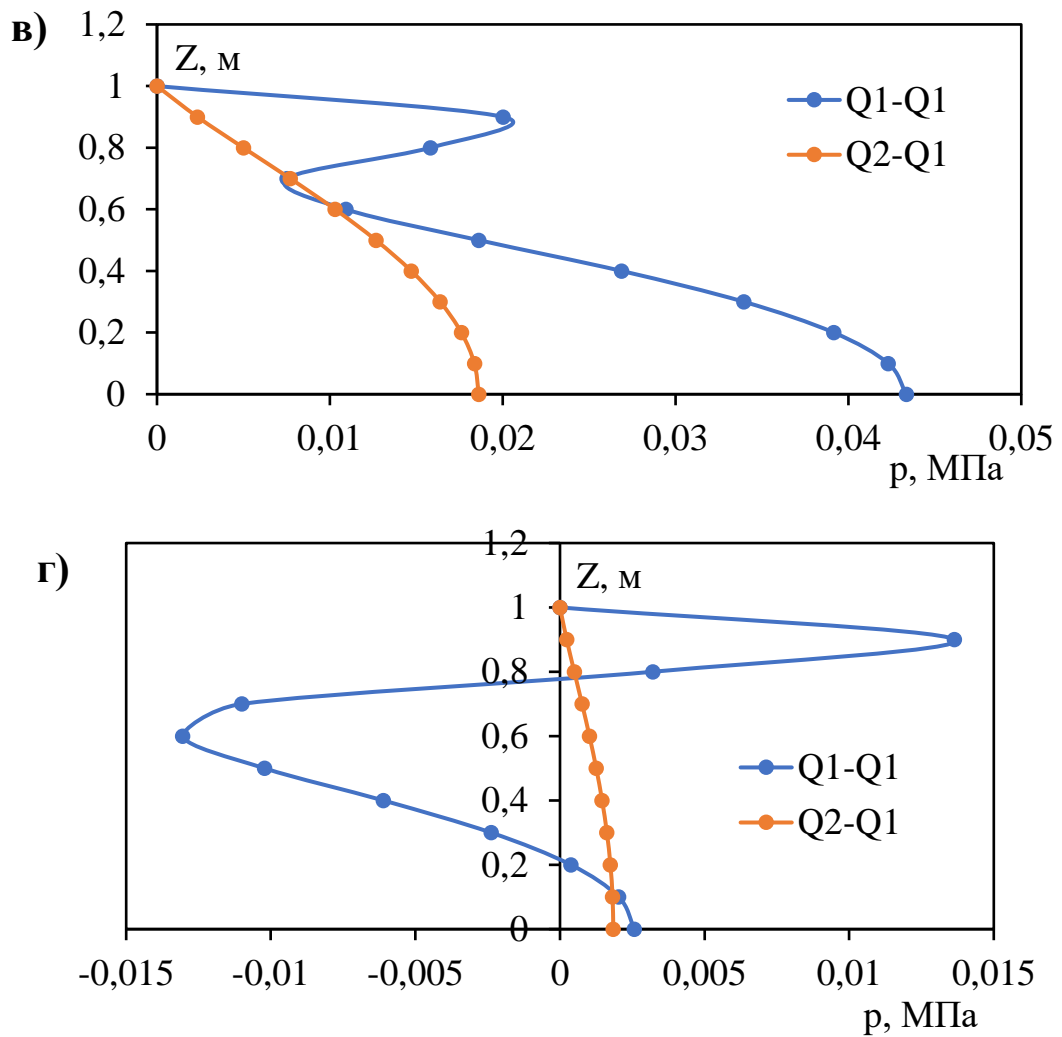


Рис. 2.3.4. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа: а) на 1-м, б) на 4-м, в) на 5-м и г) на 7-м шагах по времени.

На рис. 2.3.4 показаны результаты расчетов задачи со штампом при аппроксимации приращения перемещений и изменения давления воды конечными элементами Q2-Q1 и Q1-Q1 (для сетки $11 \times 11 \times 11$). Как видно, при использовании элементов Q2-Q1 решение задачи устойчиво, давление воды в грунте под серединой штампа в зависимости от времени и от вертикальной координаты изменяется закономерно. А в случае аппроксимации уравнений элементами Q1-Q1 решение неустойчиво, уже на 4-м шаге по времени возникают «ложные» давления (рис. 2.3.4б), а на 5-м (рис. 2.3.4в) и особенно на 7-м (рис. 2.3.4г) шагах по времени осцилляции давления воды очень сильные.

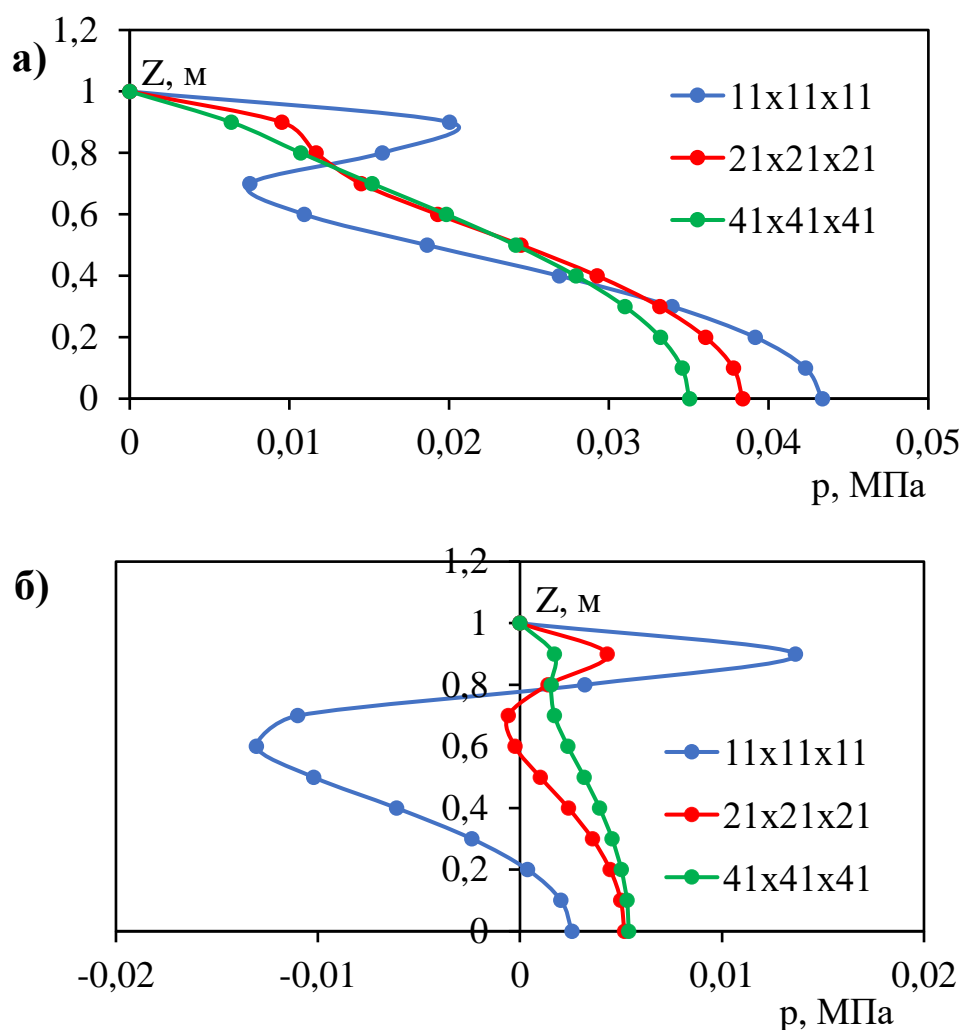


Рис. 2.3.5. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа: а) на 5-м и б) на 7-м шагах (аппроксимация Q1-Q1).

На рис. 2.3.5 показано сравнение результатов расчетов давления воды на линии под серединой штампа для разных сеток при аппроксимации седловой задачи конечными элементами Q1-Q1. Как видно, использование более мелких сеток приводит к более устойчивому решению задачи. Например, на 5-м шаге по времени (рис. 2.3.5а) при расчетах на сетке $41 \times 41 \times 41$ не наблюдается осцилляций давления воды, на сетке $21 \times 21 \times 21$ возникает небольшой изгиб графика, а на сетке $11 \times 11 \times 11$ – осцилляции ярко выражены. На 7-м шаге по времени (рис. 2.3.5б) при расчетах на сетке $41 \times 41 \times 41$ только начинается образование изгиба графика, а на сетках $21 \times 21 \times 21$ и особенно $11 \times 11 \times 11$ наблюдаются сильные осцилляции.

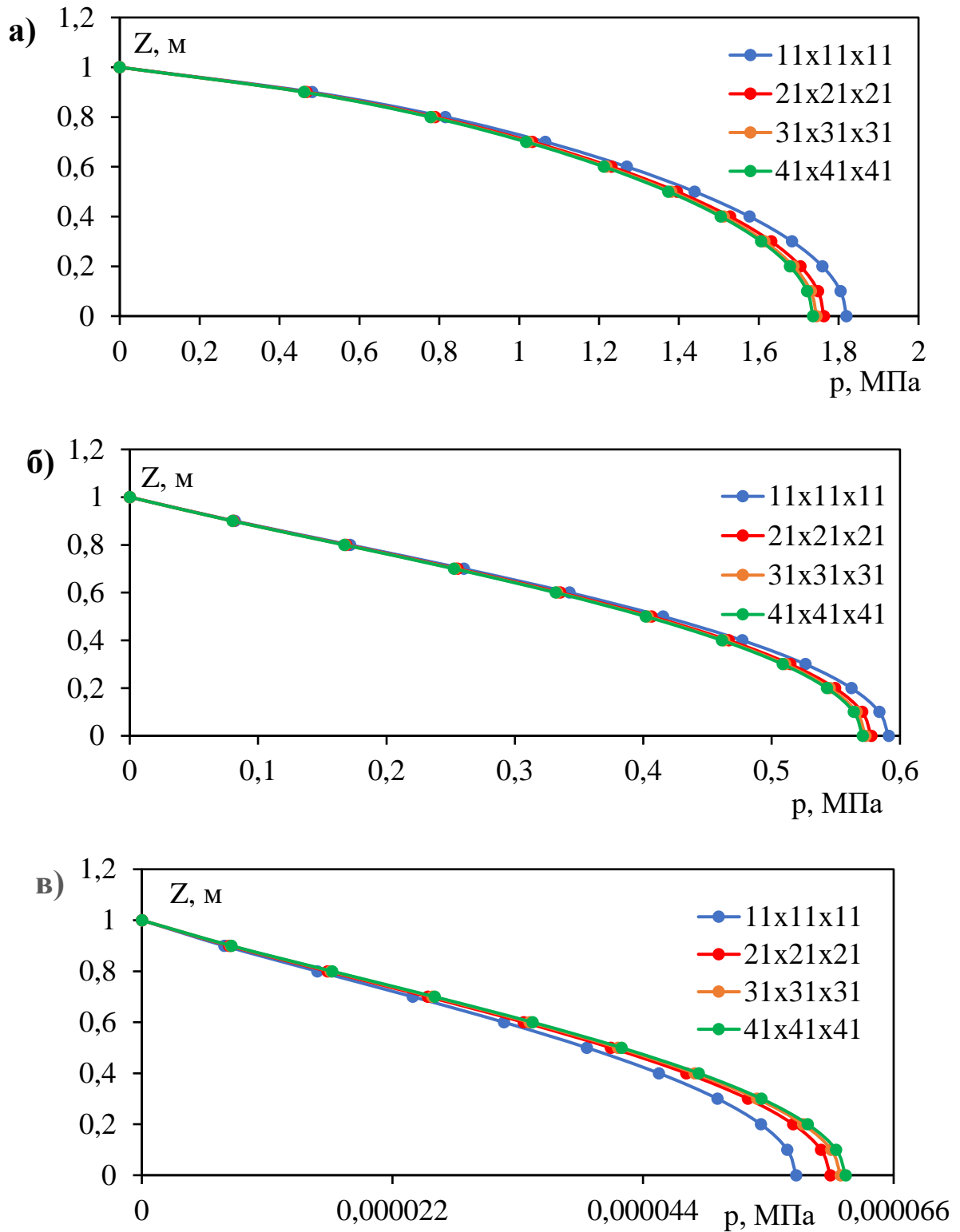


Рис. 2.3.6. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа: а) на 1-м, б) 2-м и в) 10-м шагах по времени (аппроксимация Q2-Q1).

При аппроксимации седловой задачи консолидации конечными элементами Q2-Q1 решение устойчиво на всех шагах по времени для всех сеток. На рис. 2.3.6 показано сравнение решения задачи для разных сеток на 1-м, 2-м и 10-м шагах по времени. Видно, что с измельчением сетки решение сходится. На 4-м, 5-м и 6-м шагах по времени решения на разных сетках практически совпадают.

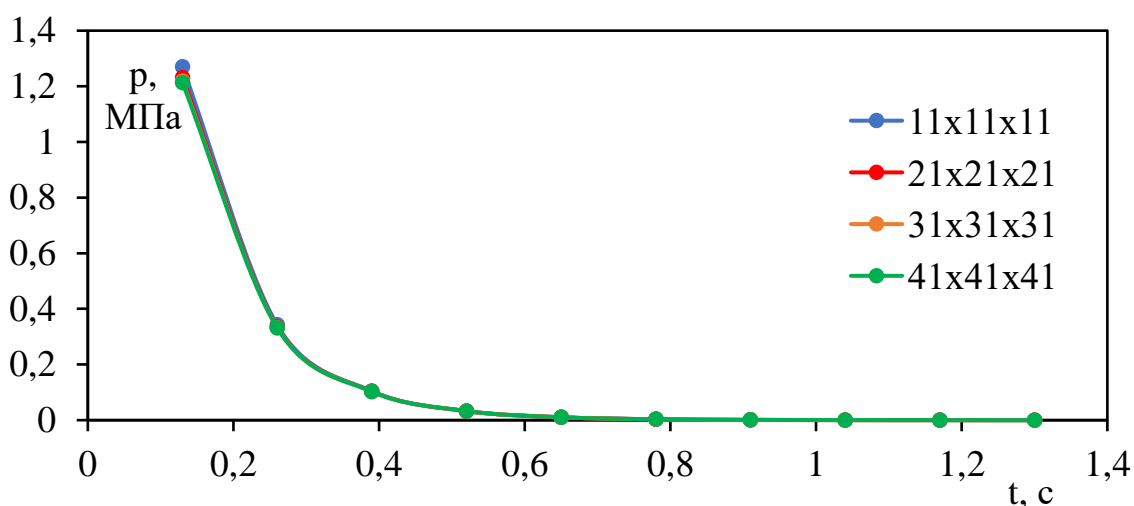


Рис. 2.3.7. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,4 м (аппроксимация Q2-Q1).

Как видно на рис. 2.3.7, при использовании конечных элементов Q2-Q1 решение задачи в точке, расположенной под серединой штампа на глубине 0,4 м, в разные моменты времени совпадает для всех сеток, осцилляций давления воды не возникает.

Следовательно, как показали численные эксперименты, при аппроксимации линейной седловой задачи консолидации конечными элементами Q2-Q1 LBB-условие выполняется, решение задачи устойчиво. А при аппроксимации конечными элементами Q1-Q1 решение неустойчиво, возникают осцилляции давления воды. В этом случае может помочь стабилизация задачи с помощью регулирования соотношения τ/h^2 , определяющего устойчивость решения: нужно уменьшать шаг сетки h или увеличивать шаг по времени τ .

2.4. Дискретизация по времени нелинейной задачи консолидации

Для решения системы (2.1.2) будем использовать обобщение неявной схемы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы, предложенной в работе [26] (см. также [51]). Предлагаются следующие схемы интегрирования нелинейной задачи консолидации. Схема типа явного метода Эйлера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \left(\underset{\sim}{C}^d(\hat{\mathbf{u}}^{m-1}) : \operatorname{grad} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s} \right) - \alpha \operatorname{grad} \widehat{\Delta p}^{m,s-1} = \\ = \alpha (\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}) (\operatorname{div} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m-1}) - \operatorname{div} \left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\hat{\mathbf{u}}^{m-1}) \cdot \operatorname{grad} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m-1} \right) + \\ + \alpha (\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}) \cdot (\operatorname{grad} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m-1}) - \rho d \mathbf{f} \\ - \operatorname{div} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s} + \tau n^{m-1} \operatorname{div} \left(\frac{k_\phi(\hat{\mathbf{u}}^{m-1})}{n^{m-1} \gamma_f} \operatorname{grad} \hat{p}^{m,s} \right) - \\ - n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m,s-1} = -n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m-1} \end{array} \right. \quad (2.4.1)$$

Здесь τ – величина шага по времени, m – номер шага по времени, s – номер итерации. Приращения перемещений и давления воды выражаются формулами:

$$\widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s} = \hat{\mathbf{u}}^{m,s} - \hat{\mathbf{u}}^{m-1}, \quad \widehat{\Delta p}^{m,s-1} = \hat{p}^{m,s-1} - \hat{p}^{m-1}.$$

На каждом шаге по времени после решения системы (2.4.1) интегрируется уравнение пористости:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (1 - n) \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.4.2)$$

$\dot{\mathbf{u}}$ – скорость перемещения твердой фазы скелета. Для решения уравнения (2.4.2) предлагаются следующие разностные схемы.

1) Неявная схема:

$$\frac{\hat{n}^m - \hat{n}^{m-1}}{\tau} = (1 - \hat{n}^m) \operatorname{div} \frac{\widehat{\Delta \mathbf{u}}^m}{\tau}, \quad (2.4.3)$$

2) Явная схема:

$$\frac{\hat{n}^m - \hat{n}^{m-1}}{\tau} = (1 - \hat{n}^{m-1}) \operatorname{div} \frac{\widehat{\Delta \mathbf{u}}^m}{\tau}, \quad (2.4.4)$$

где $\widehat{\Delta \mathbf{u}}^m$ и $\widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m-1}$ – решение задачи (2.4.1) на последней итерации m -го и $(m-1)$ -го шагов по времени, \hat{n}^m – значение пористости на шаге m в гауссовых точках лагранжевой сетки твердого каркаса.

Предлагается также неявная по приращениям перемещений схема для уравнения равновесия типа неявного метода Эйлера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \left(\underset{\sim}{C}^d(\widehat{\mathbf{u}}^{m,s1-1}) : \operatorname{grad} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s1} \right) + \\ + \operatorname{div} \left(\underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\widehat{\mathbf{u}}^{m,s1-1}) \cdot \operatorname{grad} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s1-1} \right) - \\ - \alpha \operatorname{grad} \widehat{\Delta p}^{m,s-1} - \alpha (\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}) (\operatorname{div} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s-1}) + \\ + \alpha (\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}) \cdot (\operatorname{grad} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s-1}) = -\rho d \mathbf{f} \\ - \operatorname{div} \widehat{\Delta \mathbf{u}}^{m,s} + \tau n^{m-1} \operatorname{div} \left(\frac{k_\phi(\widehat{\mathbf{u}}^{m-1})}{n^{m-1} \gamma_f} \operatorname{grad} \hat{p}^{m,s} \right) - \\ - n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m,s-1} = -n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m-1} \end{array} \right. \quad (2.4.5)$$

Для достаточно малого шага по времени обычно требуется не больше трех внутренних итераций по индексу $s1$. Итерационный процесс (2.4.5) является внутренним по отношению к процессу (2.4.1) по индексу s .

2.5. Моделирование задачи консолидации для пористого гиперупругого материала

Использование гиперупругой модели позволяет описать механическое поведение насыщенного жидкостью упругого материала.

Примеры гиперупругих материалов

Одно из применений гиперупругой модели – это губчатые резиновые материалы с большим количеством сообщающихся пор. В быту используют туалетные губки, коврики, малярные валики. Губчатая резина с крупными сообщающимися порами легко деформируется под нагрузкой, причем скорость деформирования зависит от того, насколько быстро отжимается из пор вода. При снятии нагрузки материал быстро восстанавливает прежнюю форму.

Другой пример флюидонасыщенного пористого упругого материала – это мягкие биологические ткани, содержащие кровь и плазму [104, 115]. Деформирование тканей мозга с большими деформациями может возникнуть, например, в результате удара головы тупым предметом, вызвавшего образование экстрадуральной гематомы головного мозга (рис. 2.5.1).

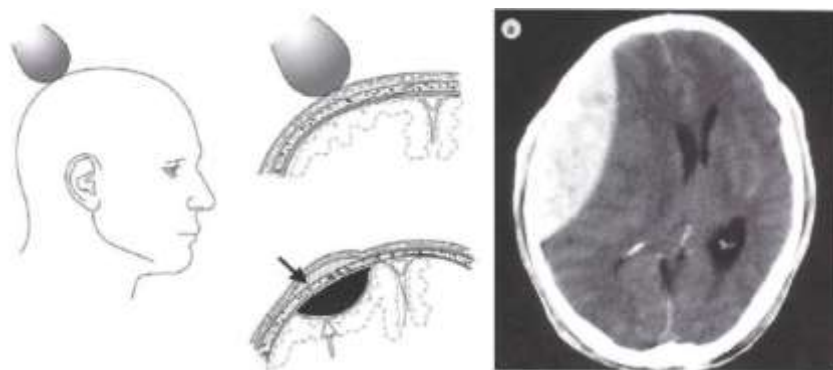


Рис. 2.5.1. Пример деформирования биологической ткани. Образование экстрадуральной гематомы головного мозга в результате удара головы тупым предметом [103].

Модель упругости может также корректно описывать деформирование под нагрузкой (в ограниченном диапазоне давлений) водонасыщенных органических геологических пород (например, органогенных известняков) [104].

Следует отметить [104], что при деформировании биологических тканей и органических грунтов (в отличие от резиноподобных материалов) в образовании больших деформаций определяющую роль играет жидкость. В некоторых случаях после удаления жидкости геологический или биологический материал перестает быть гиперупругим. Для описания механического поведения таких материалов в первом приближении можно использовать гиперупругую модель деформирования, где скелет может испытывать большие деформации как гиперупругий материал, а независимое скалярное давление описывает реакцию поровой жидкости. Течение жидкости в пористом скелете подчиняется закону Дарси, который формулируется в

терминах относительной скорости движения поровой жидкости и пористого скелета [104].

Определяющие соотношения для моделирования гиперупругого материала

Определяющие соотношения для деформирования гиперупругого материала записываются в стандартной форме:

$$\underset{\sim}{S} = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{E}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{C}}, \quad \underset{\sim}{E} = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{I}),$$

где W – упругий потенциал, $\underset{\sim}{S}$ – второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа, $\underset{\sim}{E}$ – тензор деформаций Грина-Лагранжа, $\underset{\sim}{C}$ – мера деформаций Коши-Грина.

Скалярная функция W зависит от инвариантов тензора деформаций. В случае изотропного материала у тензора деформаций $\underset{\sim}{C}$ существует три независимых инварианта, поэтому упругий потенциал W имеет вид:

$$W = W \left(I_1(\underset{\sim}{C}), I_2(\underset{\sim}{C}), I_3(\underset{\sim}{C}) \right),$$

где $I_1(\underset{\sim}{C}) = \text{tr} \underset{\sim}{C}$, $I_2(\underset{\sim}{C}) = \frac{1}{2} [I_1^2 - I_1(\underset{\sim}{C}^2)]$, $I_3(\underset{\sim}{C}) = \det \underset{\sim}{C}$.

Следовательно, можно записать:

$$\underset{\sim}{S} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underset{\sim}{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underset{\sim}{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \underset{\sim}{C}} \right]. \quad (2.5.1)$$

Конкретизация соотношения (2.5.1) определяет вид конкретного упругого потенциала.

Для тестовых расчетов использовались следующие потенциалы.

1) Потенциал Сен-Венана – Кирхгофа (W_{sv}):

$$W_{sv}(\underset{\sim}{E}) = \frac{1}{2} \lambda \left(I_1(\underset{\sim}{E}) \right)^2 + \mu \underset{\sim}{E} : \underset{\sim}{E},$$

λ – первый модуль Ляме, μ – модуль сдвига, $I_1(\underset{\sim}{E}) = \text{tr} \underset{\sim}{E}$. Этот потенциал является прямым обобщением квадратичного потенциала линейной теории упругости и для резиноподобных материалов годится только для малых

деформаций (<5-10%), сопровождающихся большими поворотами. Он приводит к определяющему соотношению вида:

$$\underline{S} = \lambda I_1(\underline{E}) \underline{I} + 2\mu \underline{E}.$$

Относительно меры деформаций Коши-Грина \underline{C} потенциал Сен-Венана – Кирхгофа записывается следующим образом:

$$W_{sv}(\underline{C}) = \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu) (I_1(\underline{C}) - 3)^2 + \mu (I_1(\underline{C}) - 3) - \frac{\mu}{2} (I_2(\underline{C}) - 3),$$

что приводит к определяющему соотношению:

$$\underline{S} = \frac{\lambda}{2} (I_1(\underline{C}) - 3) \underline{I} + 2\mu \underline{E}.$$

2) Сдвиговой потенциал Муни (W_M):

$$W_M(\underline{E}) = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3),$$

где \bar{I}_1 и \bar{I}_2 – инварианты девиатора деформационного градиента \underline{F} :

$$\bar{I}_1 = I_1(\underline{\bar{C}}), \quad \bar{I}_2 = I_2(\underline{\bar{C}}), \quad \underline{\bar{C}} = \underline{\bar{F}}^T \cdot \underline{\bar{F}}, \quad \underline{\bar{F}} = \frac{\underline{F}}{J^{1/3}}, \quad J = \det \underline{F}.$$

Для этого потенциала модуль сдвига в недеформированном состоянии ($\underline{C} = \underline{I}$) равен: $\mu = 2(C_{10} + C_{01})$.

3) Сдвиговой потенциал Муни-Ривлина (W_{MR}) (обобщение потенциала Муни):

$$W_{MR}(\underline{E}) = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3).$$

Параметры C_{10} , C_{01} , C_{30} , входящие в упругие потенциалы, определяются в опытах на одноосное растяжение.

4) Сдвиговой потенциал Трелоара (W_{TR}):

$$W_{TR} = \frac{\mu}{2} (I_1(\underline{C}) - 3).$$

Потенциалы Муни, Муни-Ривлина и Трелоара применяются при больших деформациях (>10%).

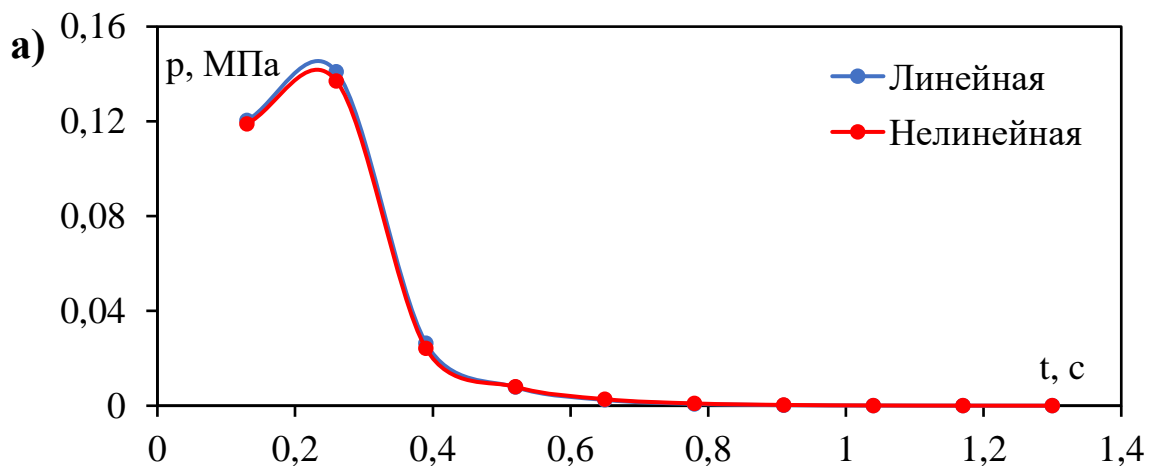
Рассмотрим некоторые численные примеры расчета нелинейной связанной задачи консолидации для гиперупругого материала. Расчеты

проводились при аппроксимации конечными элементами Q2-Q1, для которых выполняется LBB-условие существования и единственности решения седловой задачи.

Сравнение результатов расчета геометрически линейной и нелинейной задач

Следующие примеры показывают влияние учета геометрической нелинейности при деформировании гиперупругого материала.

Будем решать задачу со штампом, описанную в параграфе 2.3. Примем допущение, что $n = const$, $k_\phi = const$. Свойства грунта, задаваемые в расчетах: $E = 40$ МПа, $\nu = 0,4$, $\gamma_f = 10^4$ кг/(м² · с²), $k_\phi = 5,5 \cdot 10^{-4}$ м/с. Общее время действия штампа – 1,3 с, количество шагов по времени – 10. Расчеты выполнялись на сетке 11x11x11. В определяющих соотношениях для гиперупругого материала использовался потенциал Сен-Венана – Кирхгофа W_{sv} . На верхней границе задавались три варианта перемещения штампа – по 2,5 см на первых двух, четырех и шести шагах по времени (общее перемещение штампа 5, 10 и 15 см, общая деформация 5, 10 и 15% соответственно).



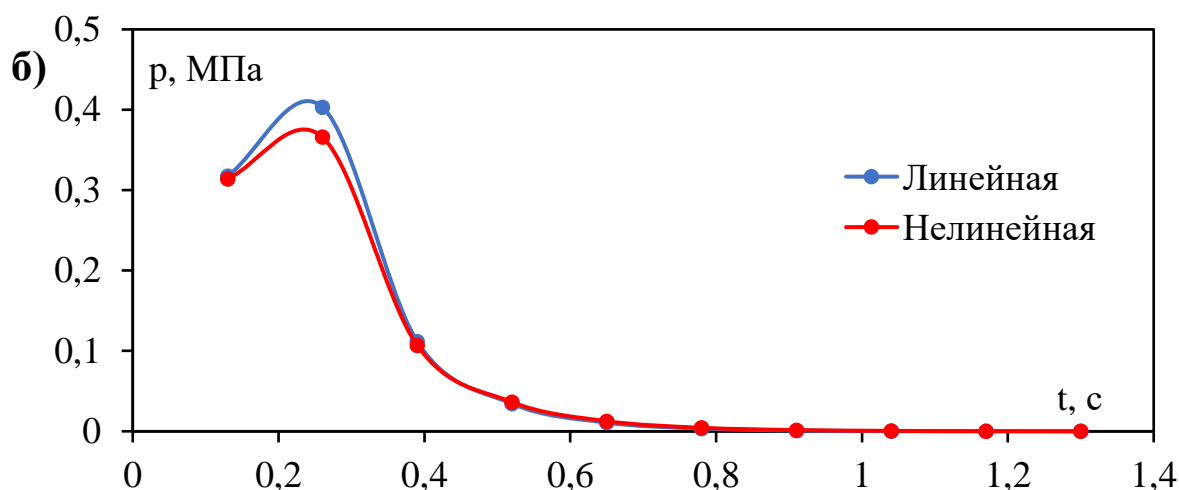
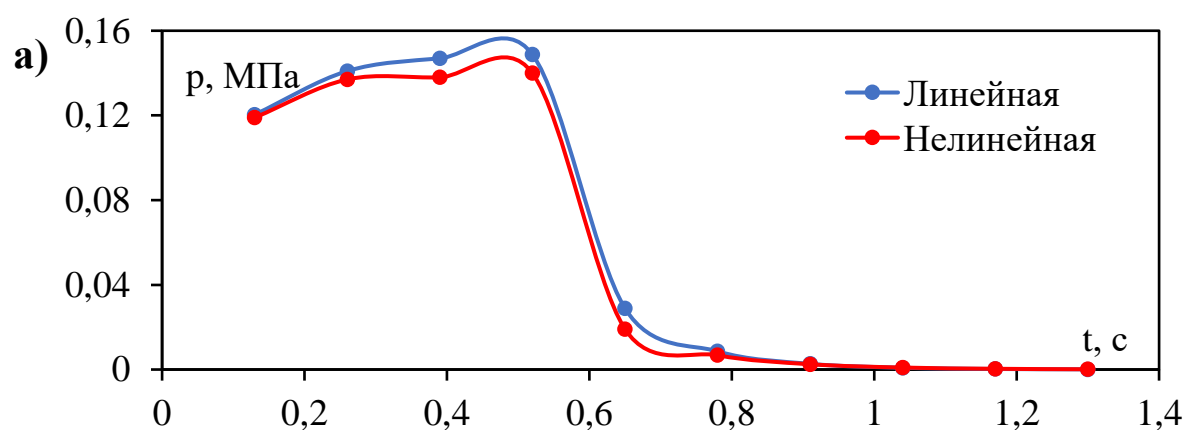


Рис. 2.5.2. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине а) 0,1 м и б) 0,4 м (общая деформация 5%).

На рис. 2.5.2 показаны результаты расчетов геометрически линейной и нелинейной задач для общей деформации 5%. Как видно, при такой небольшой деформации результаты различаются несильно: максимальная разница значений давления воды для геометрически линейного и нелинейного случаев под штампом на глубине 0,1 м составляет около 2%, а на глубине 0,4 м около 9% на втором шаге по времени (в линейной задаче давление воды выше, чем в нелинейной).



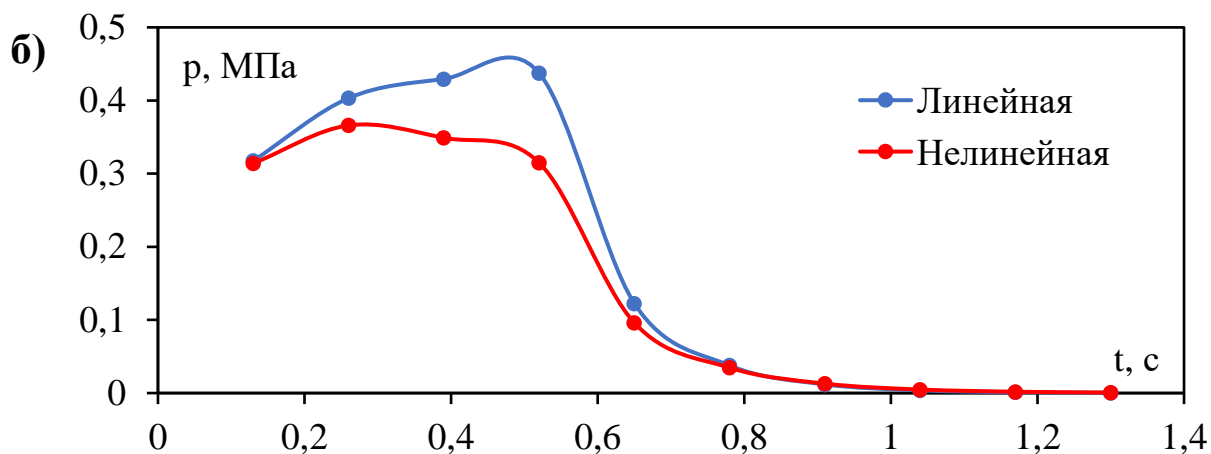
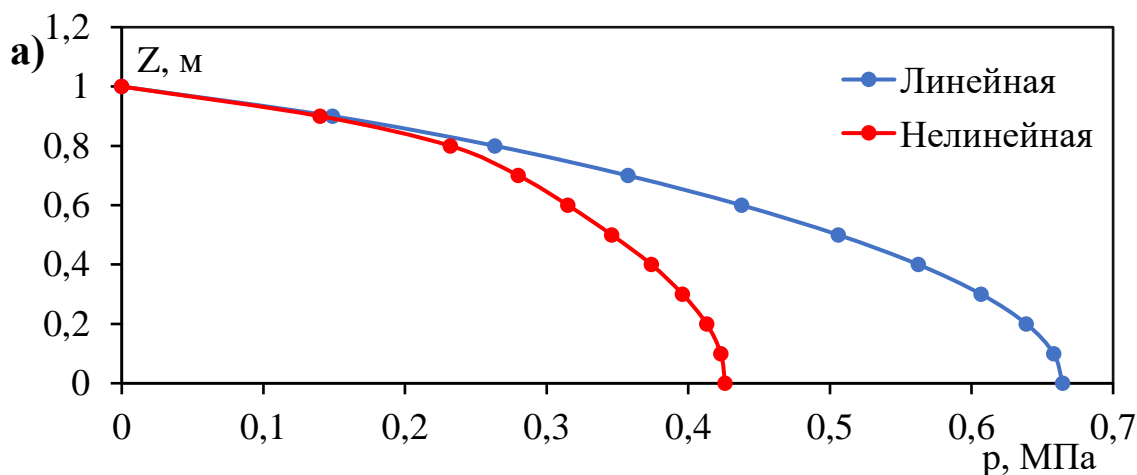


Рис. 2.5.3. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине а) 0,1 м и б) 0,4 м (общая деформация 10%).

На рис. 2.5.3 показано сравнение результатов расчетов для общей деформации 10%. Как видно, в точке под серединой штампа на глубине 0,1 м (рис. 2.5.3а) на 3-м – 4-м шагах по времени значения давления воды в линейной задаче выше, чем в геометрически нелинейной примерно на 5%, а на глубине 0,4 м (рис. 2.5.3б) – на 10-30%. На рис. 2.5.4 показано изменение давления воды во времени на линии под серединой штампа. Можно заметить, что на первых шагах по времени давление воды выше в линейной задаче (рис. 2.5.4а), а с 7-го шага по времени, наоборот, в нелинейной задаче (рис. 2.5.4б, 2.5.4в).



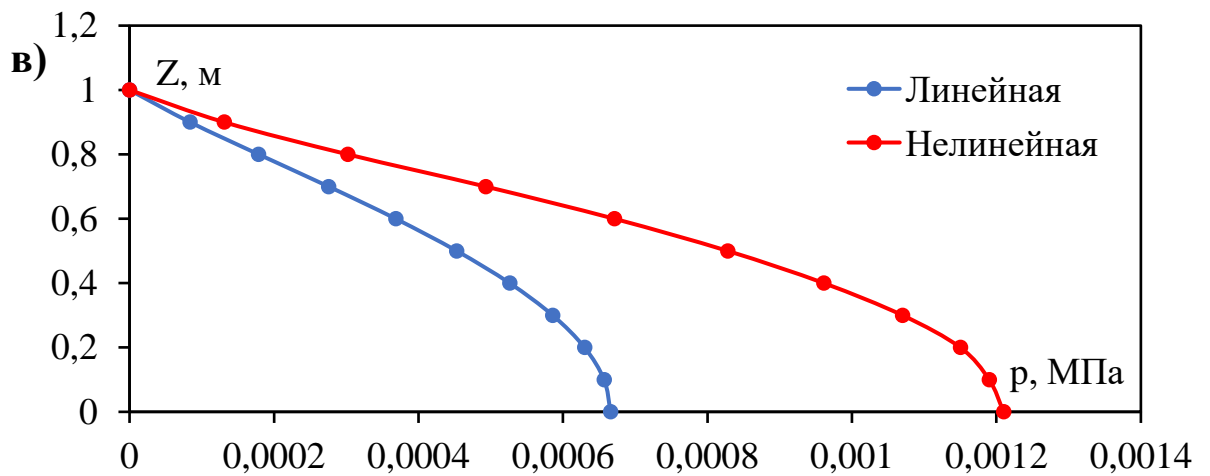
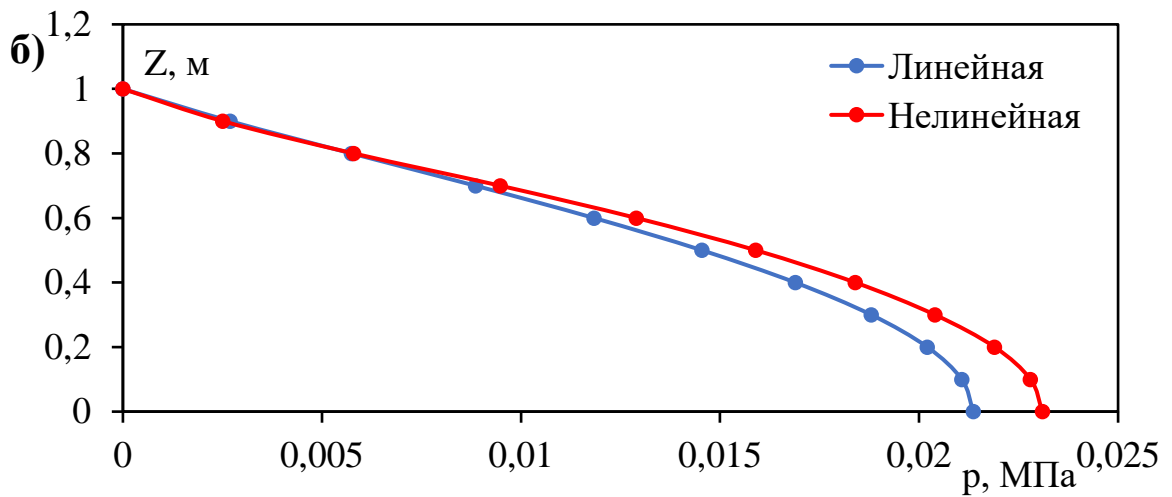


Рис. 2.5.4. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа а) на 4-м, б) 7-м и в) 10-м шагах по времени (общая деформация 10%).

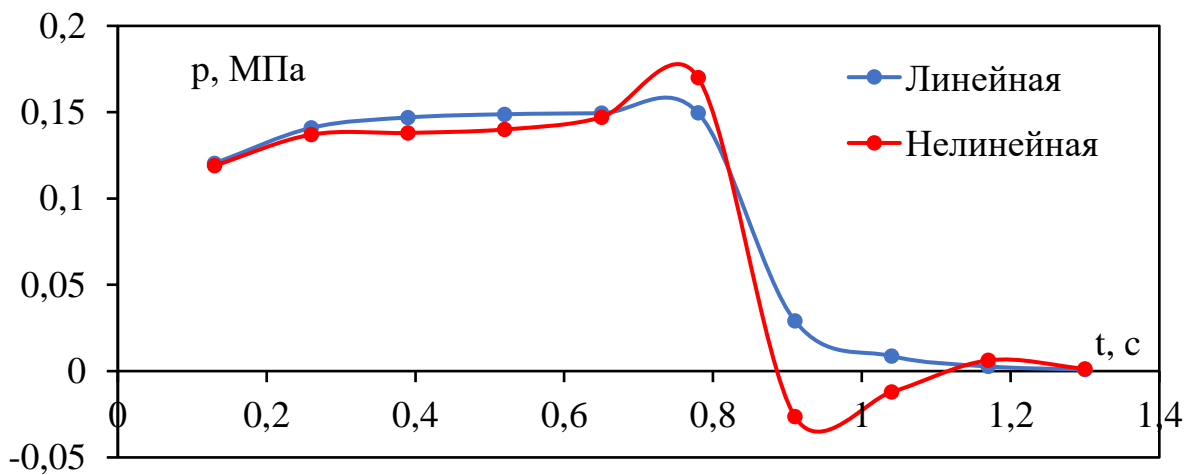


Рис. 2.5.5. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,1 м (общая деформация 15%).

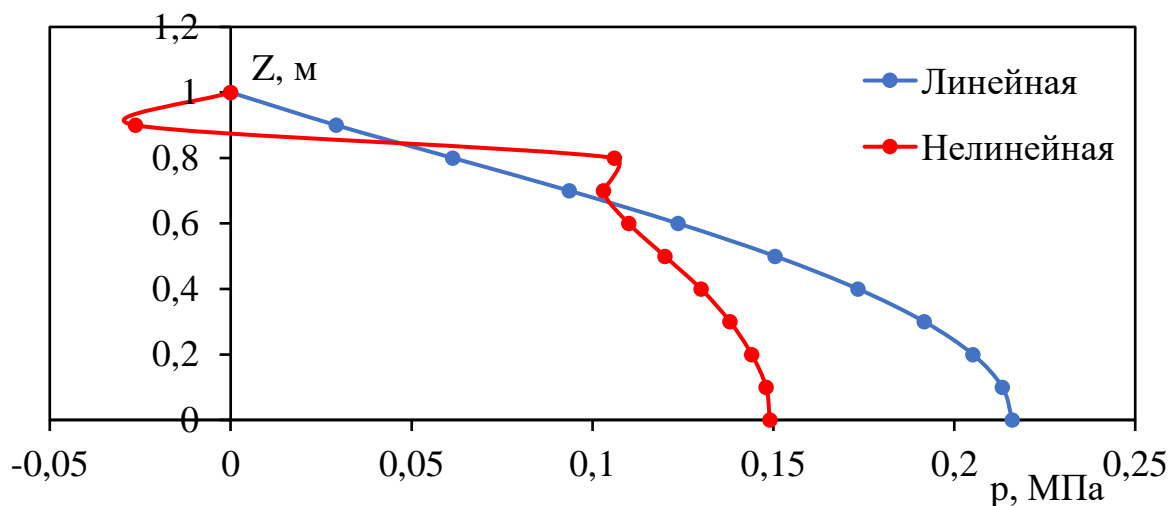


Рис. 2.5.6. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа на 7-м шаге по времени (общая деформация 15%).

При общей деформации 15% решение нелинейной задачи становится неустойчивым, возникают осцилляции давления воды (рис. 2.5.5, 2.5.6). Это закономерно, так как используемый в определяющих соотношениях потенциал Сен-Венана – Кирхгофа не подходит для описания поведения материала при деформациях больше 10%.

Моделирование нелинейной задачи консолидации при использовании различных упругих потенциалов

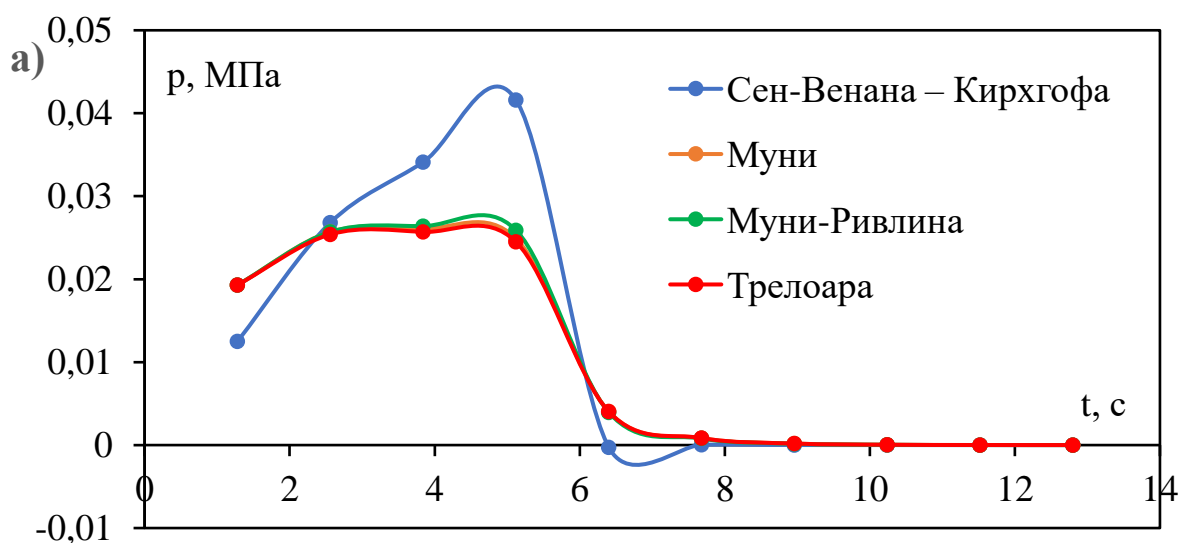
На примере задачи со штампом (см. параграф 2.3) исследуем решение задачи консолидации при аппроксимации гиперупругого материала различными потенциалами: Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана – Кирхгофа.

Штамп (квадратной формы со стороной 0,4 м) действует на верхнюю грань области в форме куба со стороной 1 м. Перемещение штампа задавалось равными ступенями на первых четырех шагах по времени, общая деформация 20%. Общее время 12,8 с, количество шагов по времени 10, величина шага по времени 1,28 с. Материал области – пористая резина. В расчетах задавались следующие свойства материала:

- 1) для потенциала Муни: $C_{01} = 0,15$ МПа, $C_{10} = 0,6$ МПа, $K = 30$ МПа;
- 2) для потенциала Муни-Ривлина: $C_{01} = 0,15$ МПа, $C_{10} = 0,6$ МПа, $C_{30} = 0,0375$ МПа, $K = 30$ МПа;
- 3) для потенциала Трелоара: $\mu = 1,5$ МПа, $K = 30$ МПа;
- 4) для потенциала Сен-Венана – Кирхгофа: $\lambda = 29$ МПа, $\mu = 1,5$ МПа.

Здесь K – модуль объемного сжатия, $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$ – первый модуль Ляме, μ – модуль сдвига. Заданные упругие свойства для всех четырех потенциалов соответствуют следующим начальным упругим параметрам материала резины: $E = 4,426$ МПа, $\nu = 0,475$. Также задавались удельный вес жидкости, заполняющей поры: $\gamma_f = 10^4$ кг/(м² · с²) и коэффициент фильтрации $k_\phi = 4,94 \cdot 10^{-4}$ м/с. Расчеты выполнялись для постоянных пористости и коэффициента фильтрации.

Сравнение численных результатов для разных потенциалов показано на рис. 2.5.7 и 2.5.8. На рис. 2.5.7 изображено изменение давления воды во времени в точке под серединой штампа на глубине 0,1 и 0,4 м. А на рис. 2.5.8 показано изменение давления воды на вертикальной линии под серединой штампа на 4-м, 5-м и 7-м шагах по времени.



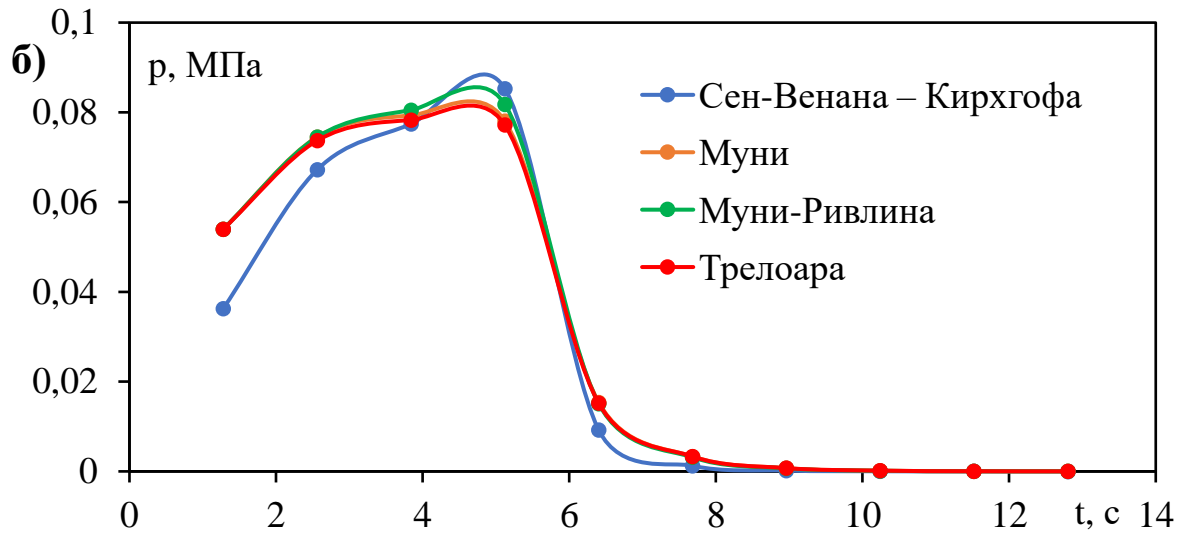
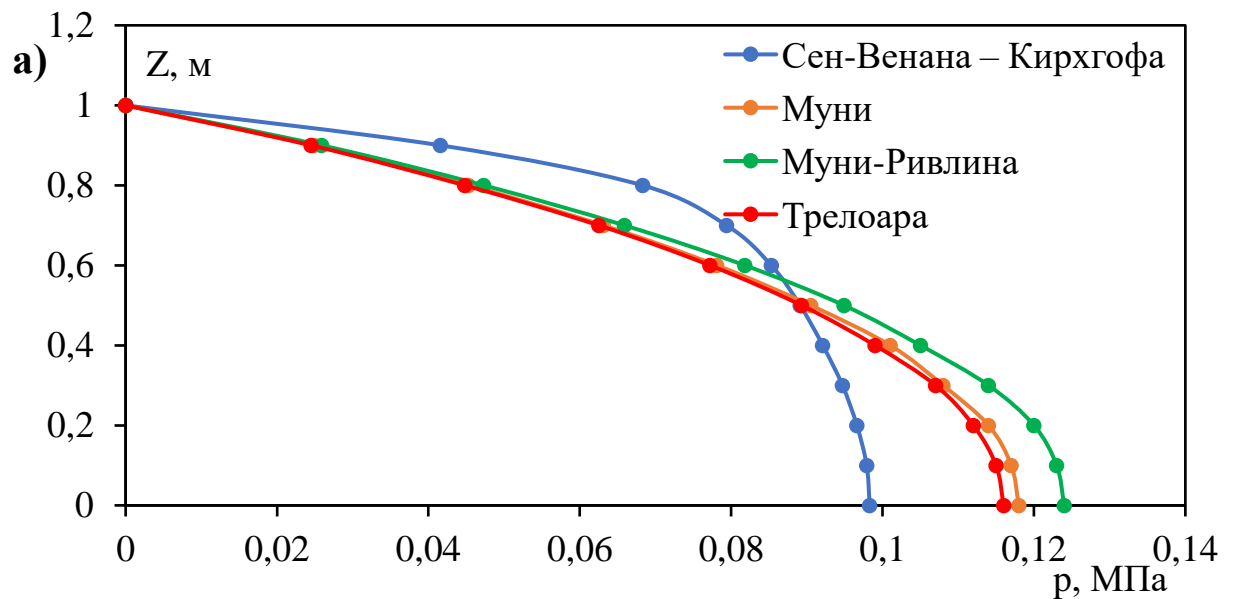


Рис. 2.5.7. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине а) 0,1 м и б) 0,4 м (общая деформация 20%).

Как видно на рис. 2.5.7 и 2.5.8, значения давления воды при использовании потенциалов Муни и Трелоара практически совпадают и близки значениям давления воды для потенциала Муни-Ривлина, но все они сильно отличаются от давлений, рассчитанных для стандартного потенциала Сен-Венана – Кирхгофа.



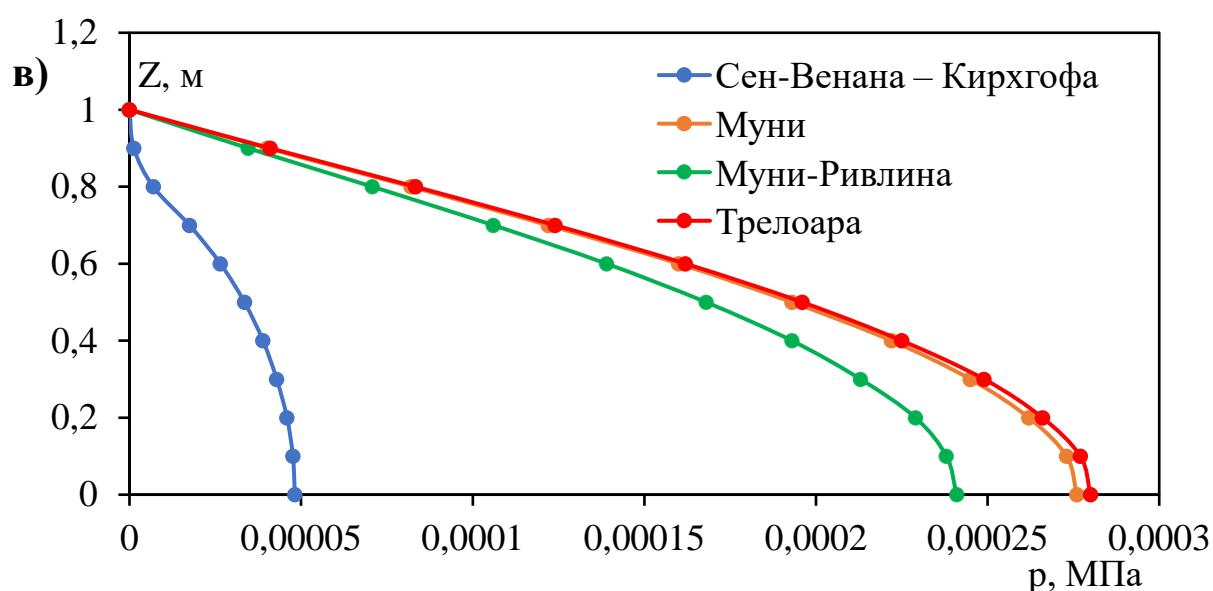
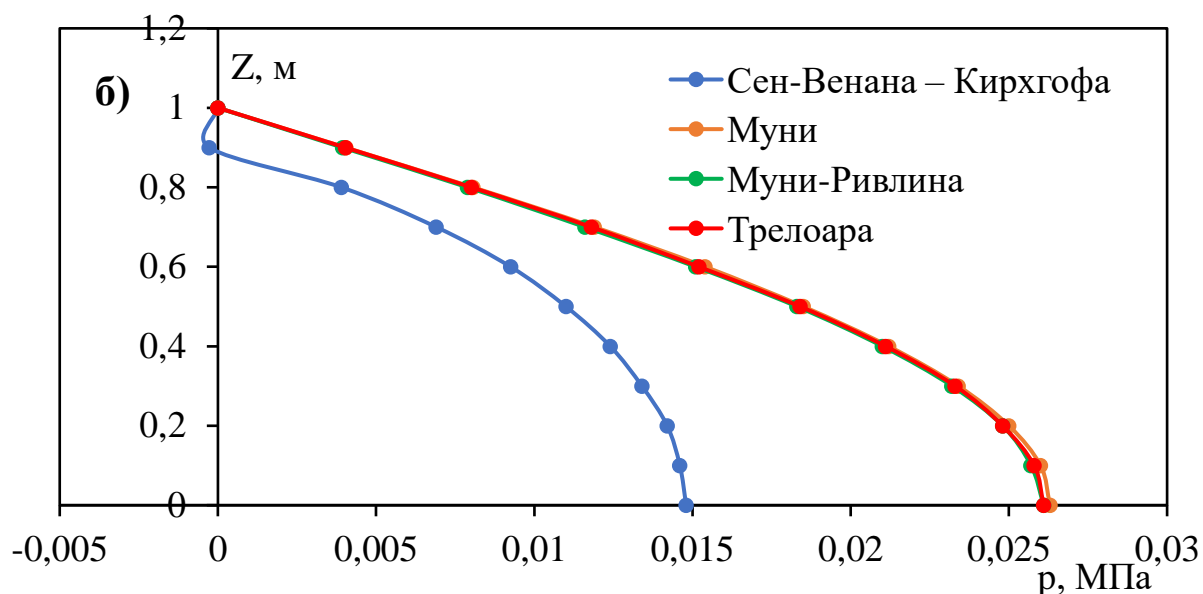


Рис. 2.5.8. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа на 4-м, 5-м и 7-м шаге по времени (общая деформация 20%).

Было также обнаружено (рис. 2.5.7а, 2.5.8б), что использование потенциала Сен-Венана – Кирхгофа приводит к некоторой неустойчивости решения. Это закономерно, так как потенциал Сен-Венана – Кирхгофа корректно описывает поведение материала только для небольших деформаций (до 5-10%). А потенциалы Муни, Муни-Ривлина и Трелоара могут применяться для описания деформирования гиперупругого материала при больших деформациях ($>10\%$). Как показывают экспериментальные

исследования аналогичных материалов резины, при деформации 20% лучшую точность аппроксимации показывают потенциалы Муни и Трелоара, а потенциал Муни-Ривлина менее точен при 20%, его целесообразно использовать при очень больших деформациях (>40%). Как видно (рис. 2.5.7 и 2.5.8), результаты расчетов соответствуют экспериментальным наблюдениям.

***Моделирование нелинейной задачи консолидации
при учете изменения пористости и коэффициента фильтрации***

При решении нелинейной задачи консолидации грунта важно учитывать изменения пористости, коэффициента фильтрации и модуля упругости.

Решалась модельная задача о действии штампа. Область имела форму куба с ребром 1 м, штамп – квадратный со стороной 0,4 м. Были выполнены расчеты в двух вариантах. В первом случае задавалось перемещение штампа по 2,5 см на первых четырех шагах по времени (общая деформация 10%), а во втором случае – на первых шести шагах по времени (общая деформация 15%). Определяющие соотношения для пористого материала задавались с помощью потенциала Муни (наиболее подходящего при деформациях 10-15%). Общее время – 128 с, число шагов по времени – 20, величина шага по времени – 6,4 с.

На каждом шаге по времени решалось уравнение для пористости (2.4.2) с использованием неявной (2.4.3) и явной (2.4.4) разностных схем. В литературе можно найти зависимости коэффициента фильтрации от пористости, полученные из экспериментов, для различных материалов (см., например, [16]). В этой модельной задаче зависимость коэффициента фильтрации k_{ϕ} от изменяющейся пористости $n(\vec{u})$ будем задавать по формуле Козени [16]:

$$k_{\phi}(n) = \frac{d \cdot n(\vec{u})}{1 - n(\vec{u})},$$

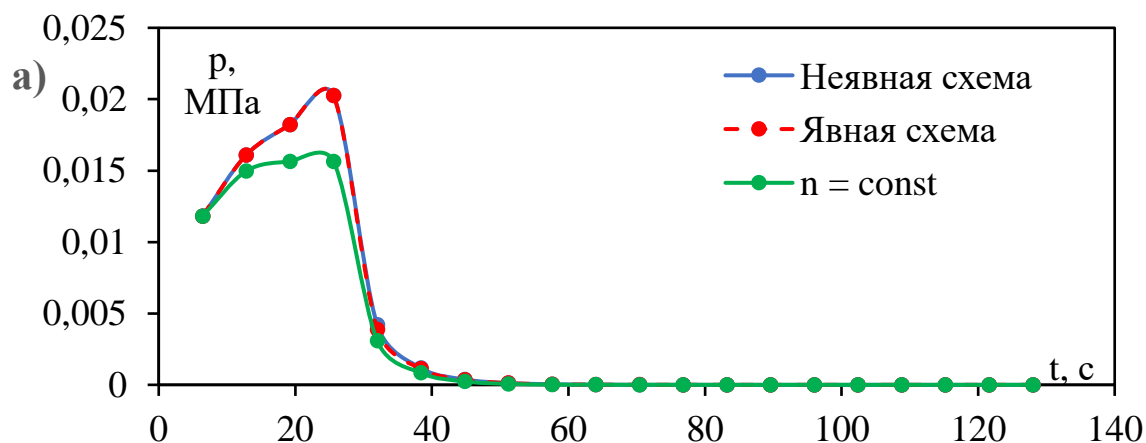
где d – коэффициент, зависящий от размера частиц материала скелета, n – значение пористости на конкретном шаге по времени в долях единиц. В расчетах задавались следующие параметры: $d = 2,8 \cdot 10^{-3}$ м/с, $k_{\phi}^0 = 4,94 \cdot$

10^{-4} м/с (начальный коэффициент фильтрации до деформирования), $n_0 = 15\%$ (начальная пористость), $\gamma_f = 10^4$ кг/(м² · с²), свойства гиперупругого пористого материала: $C_{01} = 0,15$ МПа, $C_{10} = 0,6$ МПа, $K = 30$ МПа ($E = 4,426$ МПа, $\nu = 0,475$). Изменение модуля упругости E при изменении пористости n задавалось по формуле, полученной из численных экспериментов по методу осреднения (методика расчета приведена в главе 3):

$$E(n) = 5,9671 - 10,274n.$$

Сравнение решений задачи консолидации для постоянных и непостоянных n и k_ϕ показано на рисунках ниже (для изменяющихся n и k_ϕ – при использовании неявной и явной разностных схем для вычисления пористости на каждом шаге по времени).

На рис. 2.5.9 показано сравнение изменения давления воды в зависимости от времени t (рис. 2.5.9а) и координаты Z (рис. 2.5.9б) для постоянных и переменных n и k_ϕ , а на рис 2.5.10 приведено сравнение изменения давления воды от t и Z для разных КЭ сеток при изменяющейся пористости, рассчитанной при использовании неявной схемы (2.4.3), для общей деформации 10%.



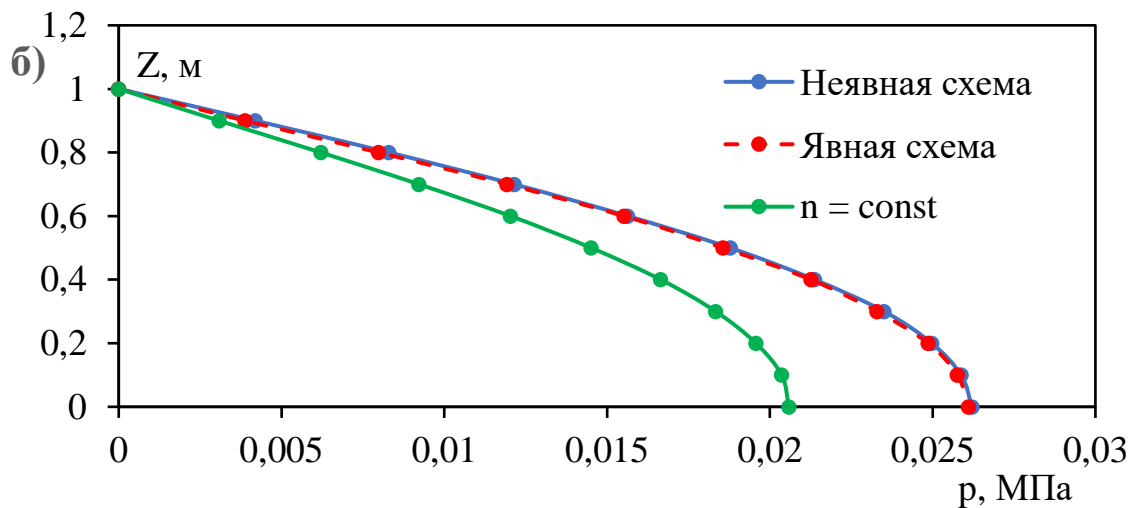
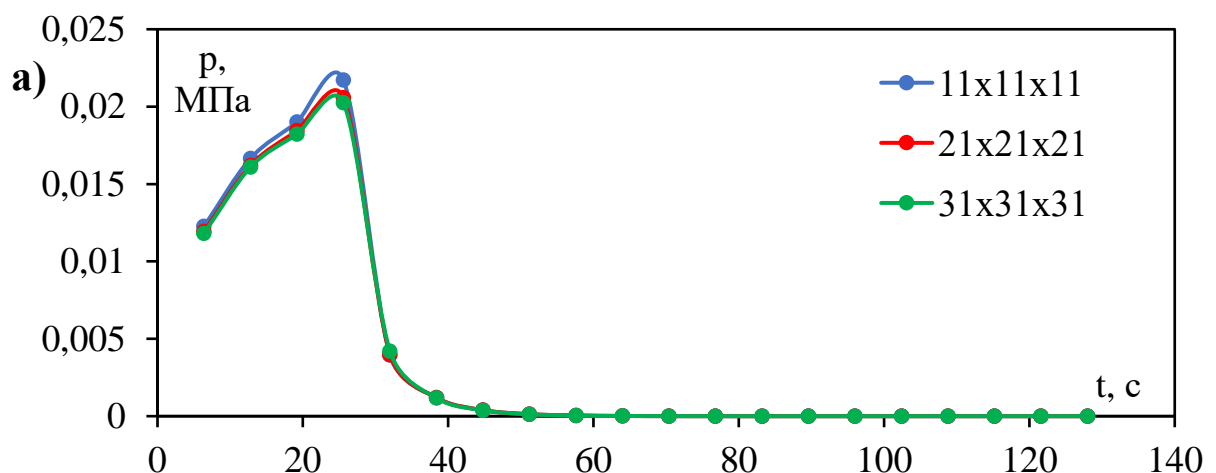


Рис. 2.5.9. Зависимость давления воды а) от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,1 м и б) от координаты Z под серединой штампа на 5-м шаге по времени (общая деформация 10%, КЭ сетка 31x31x31).

Как видно (рис. 2.5.9), результаты расчетов с использованием явной и неявной схем для вычисления пористости совпадают, значения давления воды при учете изменения пористости и коэффициента фильтрации закономерно выше, чем при предположении о постоянных n и k_f . На рис. 2.5.10 можно заметить, что результаты расчета на разных сетках близки, а на сетках 21x21x21 и 31x31x31 почти совпадают, т.е. при измельчении сетки решение сходится.



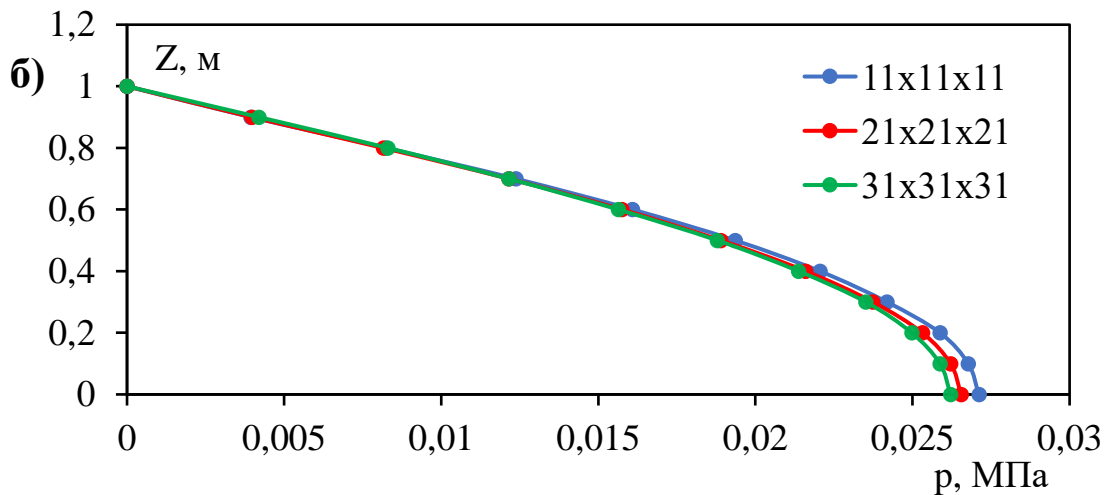
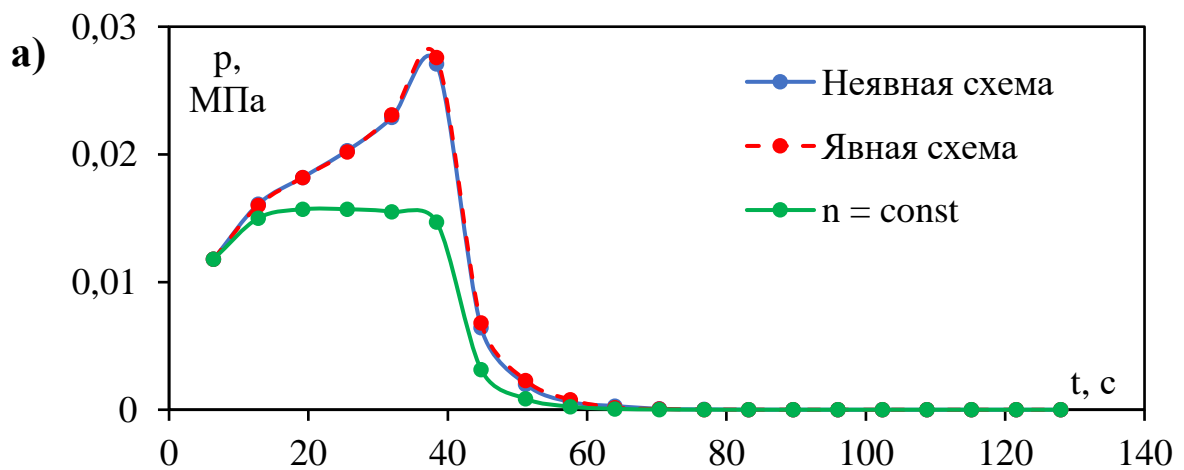


Рис. 2.5.10. Зависимость давления воды а) от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,1 м и б) от координаты Z под серединой штампа на 5-м шаге по времени для разных сеток (общая деформация 10%, неявная схема).

Проанализируем результаты расчета для общей деформации 15%, заданной равными ступенями на первых шести шагах по времени. Расчеты выполнялись на мелкой сетке 31x31x31. На рис. 2.5.11 представлены результаты вычисления давления воды в точках под штампом на глубине 0,1 м (рис. 2.5.11а) и 0,4 м (рис. 2.5.11б). Как видно, при учете изменения пористости и коэффициента фильтрации с ростом деформации при опускании штампа поровое давление растет (вода зажимается в порах, отток затруднен), а при постоянных n и k_{ϕ} – поровое давление в конкретных точках остается постоянным (график идет горизонтально).



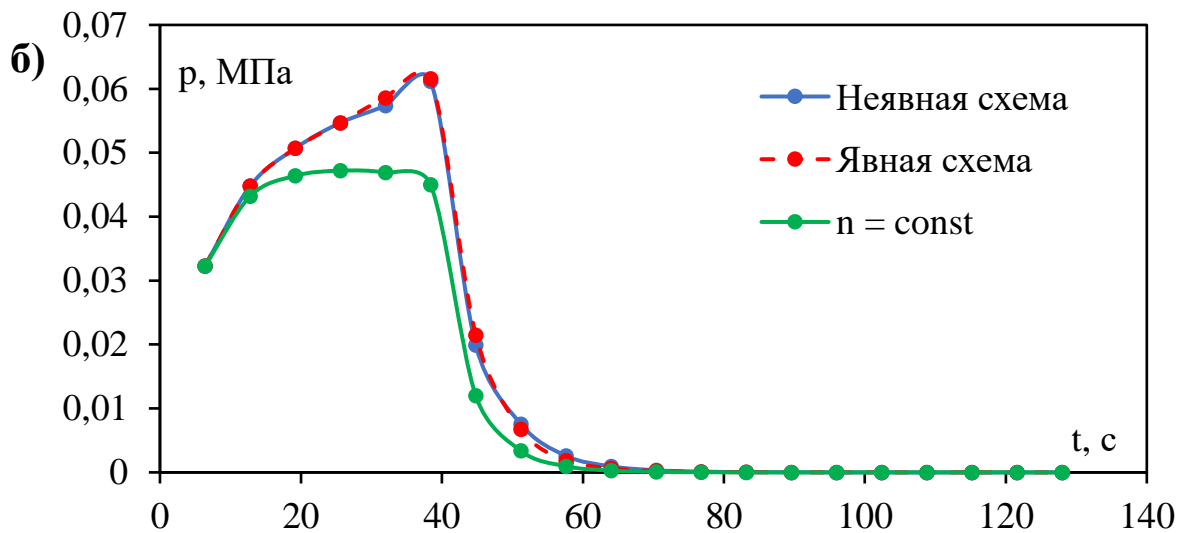


Рис. 2.5.11. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине а) 0,1 м и б) 0,4 м (общая деформация 15%).

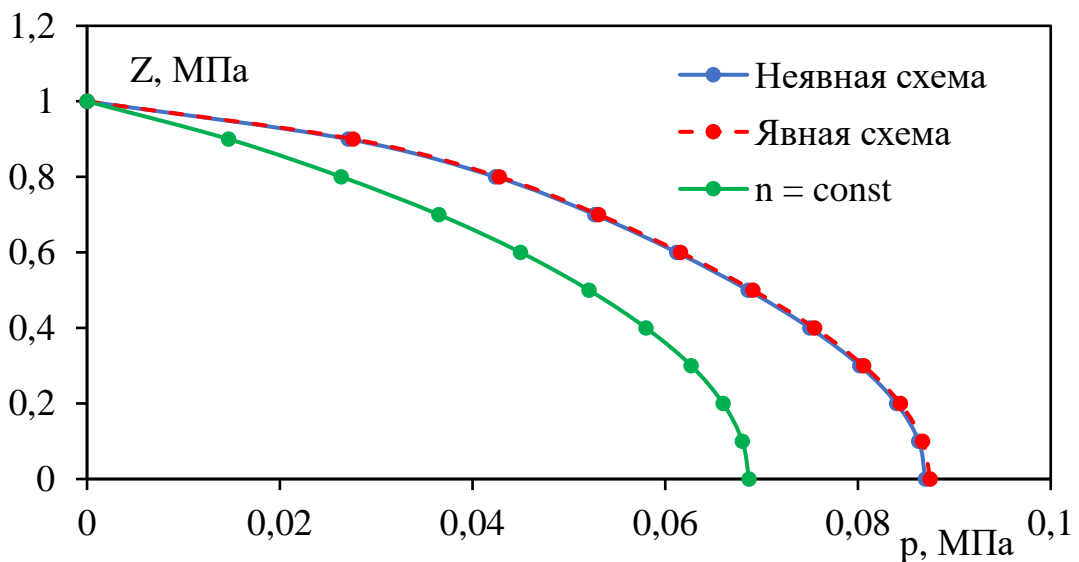


Рис. 2.5.12. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа на 6-м шаге по времени (общая деформация 15%).

На рис. 2.5.12 также можно заметить, что на вертикальной линии под штампом поровое давление во всех точках выше при учете изменения пористости и проницаемости.

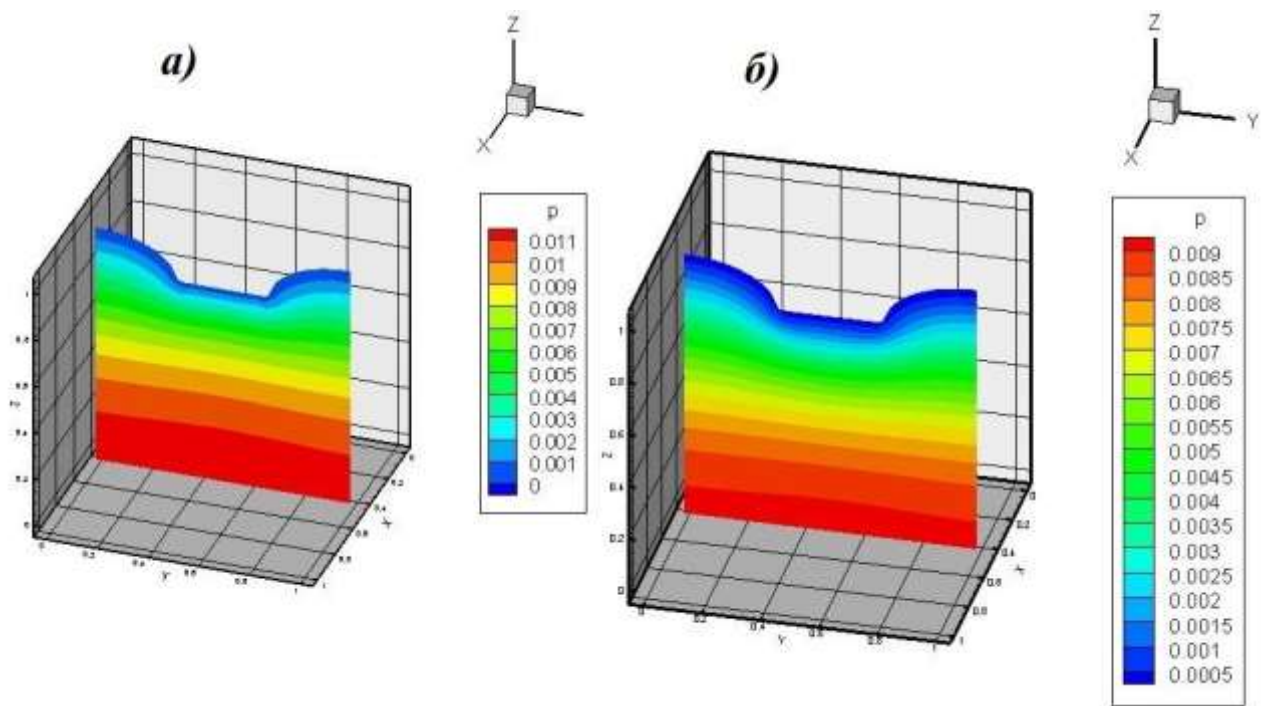


Рис. 2.5.13. Распределение давления воды в плоскости $X = 0,5$ м на 6-м шаге по времени (единицы измерения $P \cdot 7,5^{-1}$ МПа) для а) переменных и б) постоянных n и k_f (общая деформация 15%).

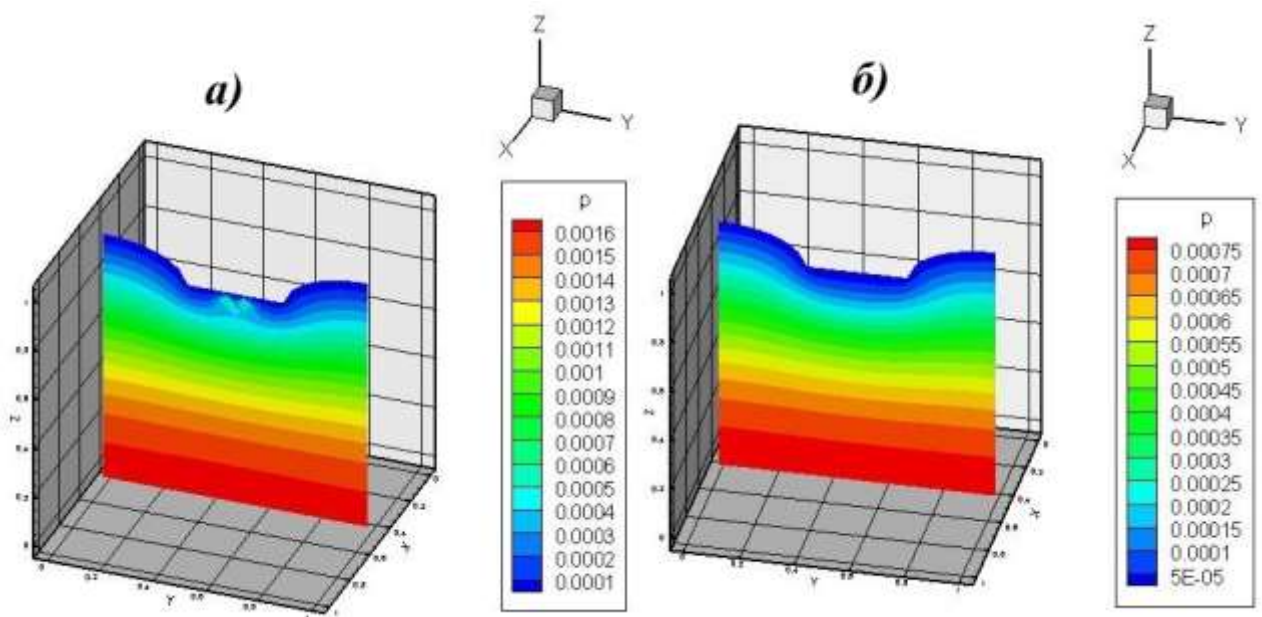


Рис. 2.5.14. Распределение давления воды в плоскости $X = 0,5$ м на 8-м шаге по времени (единицы измерения $P \cdot 7,5^{-1}$ МПа) для а) переменных и б) постоянных n и k_f (общая деформация 15%).

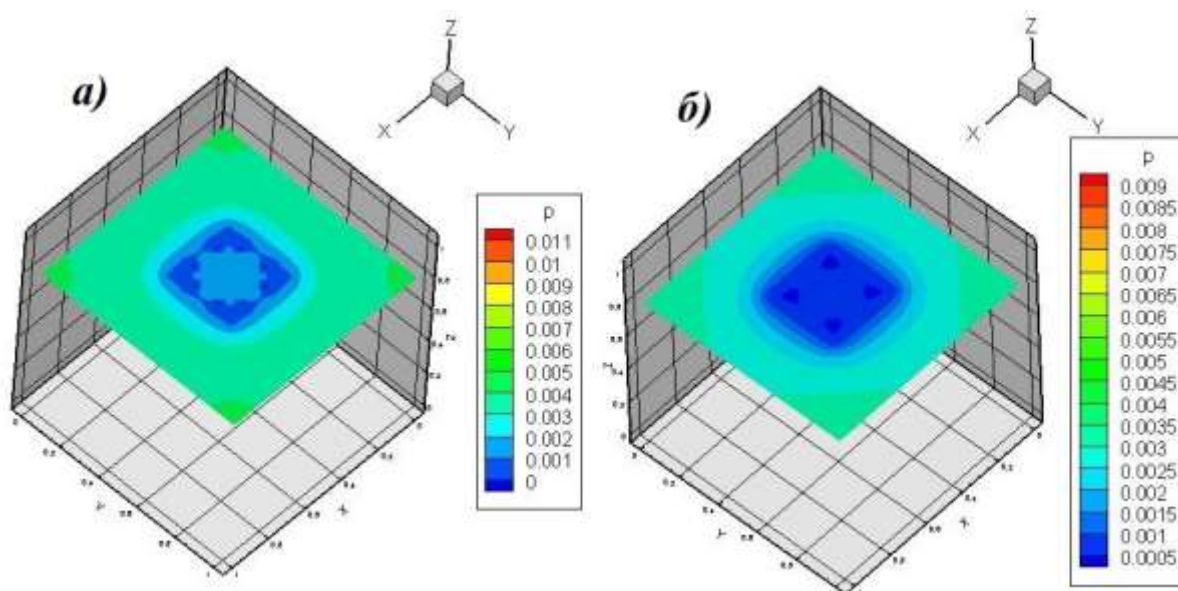


Рис. 2.5.15. Распределение давления воды в плоскости $Z = 0,8$ м на 6-м шаге по времени (единицы измерения $P \cdot 7,5^{-1}$ МПа) для а) переменных и б) постоянных n и k_{ϕ} (общая деформация 15%).

На рис. 2.5.13 и 2.5.14 показано распределение давления воды на вертикальной плоскости, параллельной оси Y и проходящей через центр штампа, при учете и без учета изменения n и k_{ϕ} на 6-м и 8-м шагах по времени соответственно. А на рис. 2.5.15 представлено распределение давления воды на горизонтальной плоскости $Z = 0,8$ м для переменных и постоянных n и k_{ϕ} на 6-м шаге по времени. Как видно, в случае изменяющихся пористости и проницаемости значения порового давления выше. На рис. 2.5.14а и 2.5.15а под центром штампа прослеживается зона затрудненного оттока жидкости (голубого цвета), которая не формируется при постоянных n и k_{ϕ} .

Таким образом, результаты расчетов показали, что учет уменьшения пористости и коэффициента фильтрации при вычислении изменения НДС материала в ходе опускания штампа закономерно приводит к увеличению порового давления в области под штампом (по сравнению со случаем, где принимается допущение о постоянных n и k_{ϕ}). Рост порового давления обусловлен тем, что вода зажимается в сужающихся порах и не может быстро отфильтровываться из-за уменьшения проницаемости материала.

Пример гиперупругого деформирования биологической ткани

Одним из приложений использования гиперупругой модели является моделирование деформирования мягких биологических материалов, таких как ткани артерий и мозга, содержащие кровь и плазму. Теория гиперупругости для исследования поведения мягких биоматериалов применяется, например, в работах [58, 81, 82, 104, 109, 110, 113, 115, 122], в которых учитывается влияние больших упругих деформаций пористого скелета, считается, что жидкость фильтруется через поровое пространство согласно закону Дарси, в определяющих соотношениях используются эффективные напряжения, зависящие от полных напряжений и давления насыщающих поры флюидов. В работах [58, 104] моделируется развитие аневризмы в аорте брюшной полости и исследуется влияние на сосуды повышения давления у пациентов с гипертонической болезнью. Актуальная задача в медицине, которую в [104] также предлагается решать с использованием гиперупругих потенциалов, – образование экстрадуральной гематомы головного мозга в результате удара тупым предметом по голове.

В качестве примера гиперупругого деформирования биологической ткани предлагается моделирование деформации материала мозга при повреждении черепа в результате удара тупым предметом. Область мозга, заключенного в черепную коробку, будем моделировать частью сферы (рис. 2.5.16). В расчетах свойства биологического материала мозга задавались, как предлагается в [104] : $C_{01} = 0,025$ МПа, $C_{10} = 0,1$ МПа, $K = 0,5$ МПа ($E = 0,64$ МПа , $\nu = 0,28$), $k_{\phi}^0 = 3,18 \cdot 10^{-6}$ м/с (начальный коэффициент фильтрации до деформирования), $n_0 = 15\%$ (начальная пористость), $\gamma_f = 10600$ кг/(м² · с²) . Зависимость коэффициента фильтрации k_{ϕ} от изменяющейся пористости $n(\vec{u})$ задавалась по формуле Козени [16]:

$$k_{\phi}(n) = \frac{d \cdot n(\vec{u})}{1 - n(\vec{u})},$$

где $d = 1,802 \cdot 10^{-5}$ м/с, n – значение пористости на конкретном шаге по времени в долях единиц. Изменение модуля упругости E при изменении пористости n задавалось по формуле, полученной из численных экспериментов по методу осреднения (методика расчета приведена в главе 3):

$$E(n) = 0,8628 - 1,4853n.$$

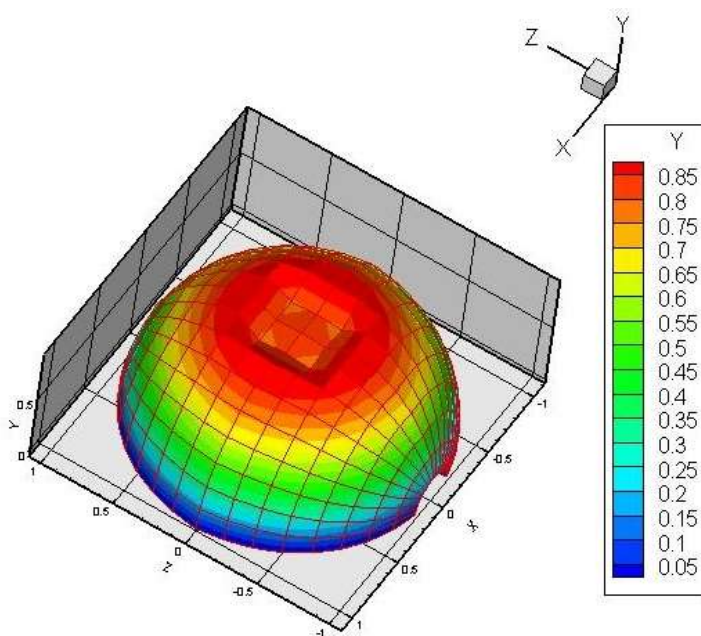


Рис. 2.5.16. Модель деформирования биологического материала (мозга) в результате удара тупым предметом по голове (координаты выражены в дм).

На части поверхности модели в течение первых 5,2 с задается перемещение, имитирующее деформацию черепа, вызванную ударом тупого предмета по голове (рис. 2.5.16). На остальной части поверхности модели мозга задаются нулевые перемещения. Поврежденная часть поверхности модели мозга – проницаемая, вся остальная поверхность модели – непроницаема. Определяющие соотношения для пористого биологического материала записываются с помощью потенциала Муни, который наиболее точно описывает поведение гиперупругого материала при деформациях $>5-10\%$, но $<40\%$. Общее время 1240 с, количество шагов по времени 240, величина шага по времени 1,28 с.

На рис. 2.5.17 и 2.5.18 приведены результаты решения задачи для деформации 5% и 7%. На рис. 2.5.17 показана зависимость изменения давления жидкости от времени в точке на глубине 4 см под зоной удара, а на рис. 2.5.18а и 2.5.18б показано распределение изменения давления жидкости на вертикальной линии под серединой зоны удара через 5,2 и 20,7 сек соответственно.

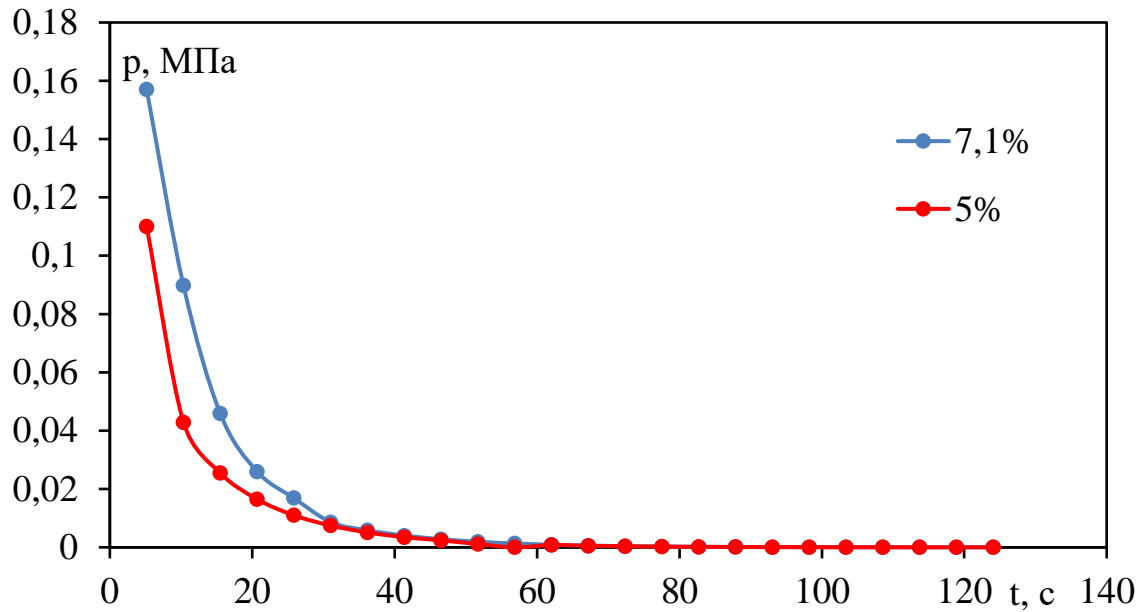
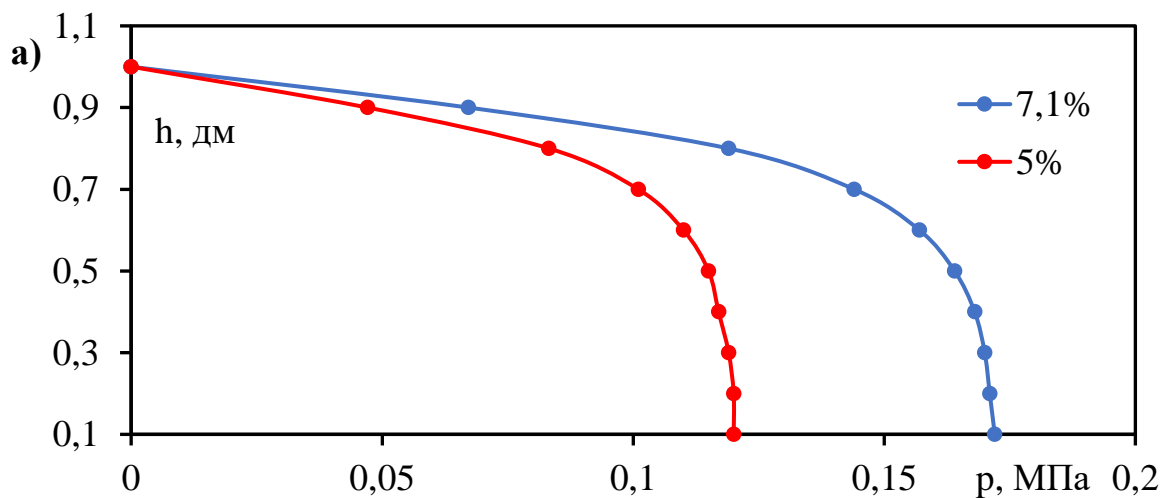


Рис. 2.5.17. Зависимость изменения давления жидкости от времени в точке под серединой зоны удара на глубине 4 см.



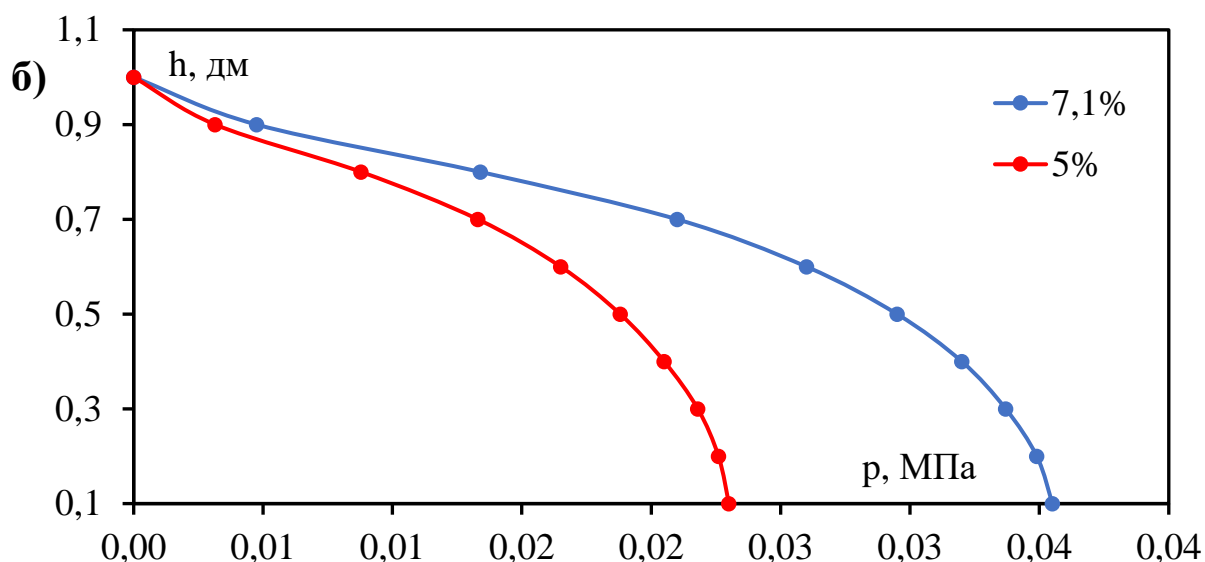
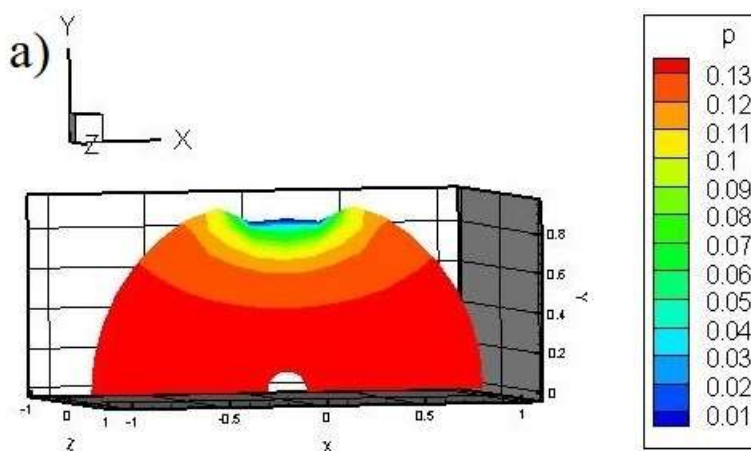


Рис. 2.5.18. Распределение давления жидкости по центральной вертикальной линии под серединой зоны удара: а) на 1-м (5,2 с) и б) 4-м (20,7 с) шагах по времени для деформации 5% и 7,1%.

На рис. 2.5.19 показано распределение изменения давления жидкости через 5,2 и 20,7 с от начала удара для деформации 7,1%. Как видно, давление жидкости через 20,7 с становится в 5 раз ниже, чем через 5,2 с. В нижней части модели давление жидкости возрастает больше всего, а по направлению к верхней части модели давление постепенно снижается (рис. 2.5.18, 2.5.19).



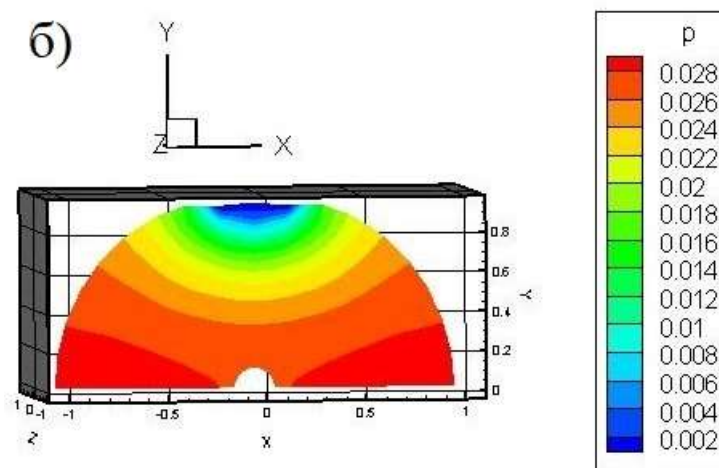


Рис. 2.5.19. Распределение изменения давления жидкости в вертикальной плоскости ($Z = 0$), проходящей через середину зоны удара: а) на 1-м (5,2 сек) и б) 4-м (20,7 сек) шагах по времени (единицы измерения $P \cdot 1,28^{-1}$ МПа) (деформация 7,1%).

2.6. Решение задачи об упругопластическом деформировании пористого водонасыщенного грунта

Как показали многочисленные экспериментальные исследования [33], вообще говоря, необходимо учитывать чувствительность сред к скорости деформаций. Исследованием поведения материалов, которые проявляют вязкость только в пластической области, а до пластического состояния являются упругими, занимались еще Гогенемзер и Прагер в 1932 году [33]. Затем эти исследования были продолжены в работах В.В. Соколовского и Малверна, которые исследовали распространение волн при одноосном напряженном состоянии. Теория Гогенемзера и Прагера для сред, чувствительных к скорости деформации, была обобщена Пэжиной на случай распространения волн в сложном напряженном состоянии [33]. В работе Ольшака и Пэжины предложены определяющие уравнения для грунтов, учитывающие их реологические свойства и чувствительность к изменению скорости деформаций [33].

Уравнения, описывающие поведение грунтов при заданной скорости деформации предложены С.С. Григоряном [17]. Согласно С.С. Григоряну, необратимое изменение объема материала в процессе нагрузки выражается формулой: $\sigma = f_1(\rho)$. Для процесса разгрузки справедливо соотношение: $\sigma = f_2(\rho, \sigma^*)$, где σ^* – максимальное давление, до которого нагружен материал в процессе предшествующего необратимого изменения объема. В качестве условия текучести в теории Григоряна принята зависимость второго инварианта девиатора напряжений от давления σ :

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = F(\sigma), \quad (2.6.1)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$, а $F(\sigma)$ – неубывающая функция своего аргумента. Соотношение (2.6.1) является условием типа идеальной пластичности, в котором предел текучести зависит от первого инварианта тензора напряжений (давления σ).

Экспериментальные исследования песчаных грунтов подтвердили справедливость условия пластичности (2.6.1), а также позволили установить, что для песчаных грунтов в реальных условиях при $\sigma < 1,5$ МПа функция $F(\sigma)$ имеет вид: $F(\sigma) = (\alpha\sigma + \beta)$, где α и β – постоянные [33].

Одна из актуальных проблем, связанных с деформированием водонасыщенного грунта под нагрузкой, – это ухудшение ровности нежестких дорожных покрытий в процессе эксплуатации дороги. Для моделирования деформирования пористого водонасыщенного грунта под нагрузкой предлагается использовать модель Григоряна [17, 36], обобщенную на случай геометрической нелинейности.

Определяющие соотношения упругопластического деформирования грунта

Уравнение равновесия в вариационном виде следует переписать в виде:

$$\int_V \left(\tilde{d}(\vec{w}) : \tilde{\sigma}^{TR}(d\vec{u}) \right) dV + \int_V \tilde{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : \left[(\vec{\nabla}\vec{w})^T \cdot \vec{\nabla}d\vec{u} \right] dV -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_V \alpha dp \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dV - \int_V \alpha p (\vec{\nabla} \cdot d\vec{u}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) dV - \\
& - \int_V \alpha p \vec{\nabla} \vec{w} : \vec{\nabla} d\vec{u} dV - \int_V \rho d\vec{f} \cdot \vec{w} dV - \int_{\Sigma_2} d\vec{S} \cdot \vec{w} d\Sigma = 0
\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\sigma}^{TR}$ – производная Трусделла [63, 64] тензора напряжений Коши. Один из вариантов формулировки соотношений теории пластичности состоит в использовании тензора Кирхгофа $\tilde{\tau}$ [108]:

$$\tilde{\tau} = J\tilde{\sigma}.$$

Этот тензор имеет те же компоненты, что и второй тензор Пиолы-Кирхгофа S , но в текущем локальном базисе, а не в начальном:

$$\tilde{\tau} = J\sigma^{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j, \quad S = J\sigma^{ij}\vec{E}_i\vec{E}_j.$$

Производные Трусделла тензора Коши и Ли тензора Кирхгофа связаны соотношением [64]:

$$J\tilde{\sigma}^{TR} = \tilde{\tau}^{Li}.$$

Для гипопругого материала:

$$\dot{\tilde{S}} = \tilde{C}^E(E) : \dot{E}, \quad \tilde{\tau}^{Li}(d\vec{u}) = \tilde{C}(E) : d(d\vec{u}), \quad C_{ijkl} = F_{ip}F_{jq}F_{kr}F_{ls}C_{pqrs}^E,$$

\tilde{d} – тензор скоростей (дифференциалов) деформации:

$$\tilde{d}(d\vec{u}) = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} d\vec{u})^T + \vec{\nabla} d\vec{u}].$$

В описании модели используется аддитивное разложение девиатора скоростей деформаций \bar{d} и скорости объемной деформации $\overset{\circ}{d}$:

$$\tilde{d} = \bar{d} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{d} I, \quad \bar{d} = \bar{d}^e + \bar{d}^p, \quad \overset{\circ}{d} = \overset{\circ}{d}^e + \overset{\circ}{d}^p,$$

где \bar{d}^e и \bar{d}^p – девиаторы скоростей упругой и пластической деформации, $\overset{\circ}{d}^e$ и $\overset{\circ}{d}^p$ – скорости объемной упругой и пластической деформации.

Принимаем, что упругие деформации малы [108]:

$$J_{\tilde{\sigma}}^{TR} = \tilde{C} : [\tilde{d} - \tilde{d}^p],$$

где \tilde{C} – постоянный тензор модулей упругости. Также принимаем, что изменение объема мало по сравнению с деформациями сдвига.

Функция нагружения имеет вид:

$$f = \frac{1}{2} \tilde{\tau} : \tilde{\tau} - \frac{1}{2} F^2, \quad F(\tilde{\tau}, \chi) = A + M \tilde{\tau} + \chi. \quad (2.6.2)$$

Здесь $\tilde{\tau} = \tau - \tilde{\tau} \delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений, $\tilde{\tau} = \frac{1}{3} \tau_{ij} \delta_{ij}$. Для грунта земляного полотна и слабо связных материалов конструктивных слоев одежда поверхность пластического течения лучше всего описывается критерием Кулона-Мора [29]. В критерии Кулона-Мора параметры M и A из (2.6.2) выражаются формулами [94]:

$$M = \frac{2\sqrt{6} \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}, \quad A = \frac{2\sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi},$$

где φ – угол внутреннего трения грунта, c – сцепление.

В работе [17] для сдвиговых свойств выбрана модель идеальной пластичности, но в численных расчетах удобно использовать малое изотропное упрочнение χ для устойчивости вычислений.

В качестве параметра упрочнения на сдвиг выбрана эквивалентная по Мизесу деформация:

$$\varepsilon_{eqv}^p = \int_0^t \sqrt{\bar{d}_{ij}^p \bar{d}_{ij}^p} dt.$$

Функцию изотропного χ упрочнения выбираем в виде:

$$\chi = \varphi(\varepsilon_{eqv}^p).$$

Можно считать, что малое упрочнение происходит по линейному закону [24, 25]. Тогда функции модели будут иметь вид:

$$\varphi(\varepsilon_{eqv}^p) = 2\mu_{sec} \varepsilon_{eqv}^p, \quad \varphi'(\varepsilon_{eqv}^p) = 2\mu_{sec}, \quad \mu_{sec} = \frac{\mu \mu_t}{\mu - \mu_t}.$$

Здесь μ_{sec} – секущий модуль сдвига, который выражается через упругий модуль сдвига μ и касательный модуль сдвига μ_t , соответствующий малому

упрочнению и выбираемый как вычислительный параметр для улучшения сходимости.

Если скорость объемной деформации близка к постоянной ($\overset{\circ}{d} = const$), то можно принять [17]: $\overset{\circ}{\tau} = f_1(\theta)$ при нагрузке и $\overset{\circ}{\tau} = f_2(\theta, \overset{\circ}{\tau}^*)$ при разгрузке ($\overset{\circ}{\tau}^*$ – максимальное давление, до которого нагружен материал в процессе предшествующего необратимого изменения объема).

Диаграмма для шаровых частей (рис. 2.6.1) соответствует конкретной скорости нагружения.

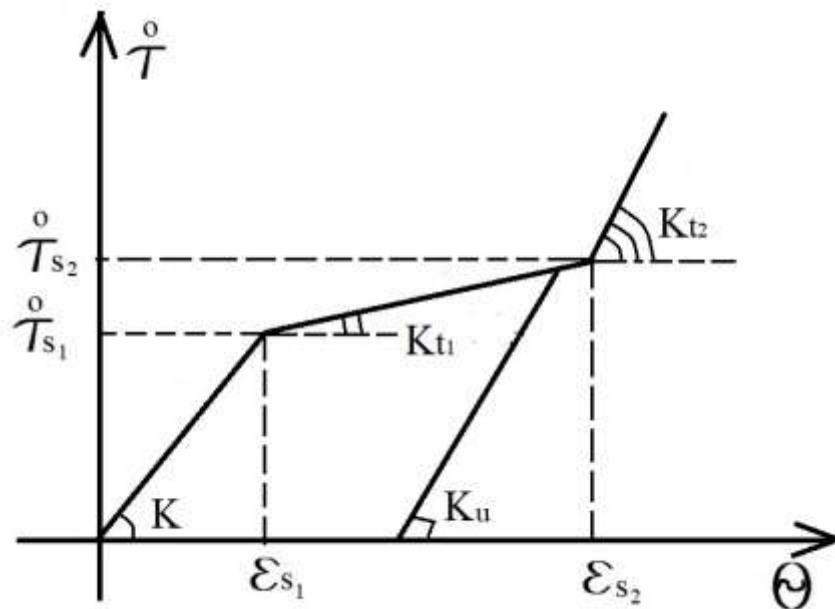


Рис. 2.6.1. Зависимость шаровых тензоров напряжения и деформации при упругопластическом деформировании грунта.

В настоящий момент расчеты проведены для достаточно малых деформаций 4-10%, поэтому были выбраны определяющие соотношения деформационного типа (2.6.3) в рамках предположения, что для деформаций порядка 4-10% деформационная теория сохраняет приемлемую точность.

$$\dot{S}_{ij} = 2\mu \left[(1 - \omega) \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij}\delta_{kl} \right] - \frac{\partial \omega}{\partial E_u} \frac{\bar{E}_{ij}\bar{E}_{kl}}{E_u} - \right.$$

$$-\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \bar{E}_{ij} \delta_{kl} + K_t(\theta) \delta_{ij} \delta_{kl} \Big] \dot{E}_{kl}, \quad (2.6.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{C}^E(\tilde{E}) = (1 - \omega) \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] - \frac{\partial \omega}{\partial E_u} \frac{\bar{E}_{ij} \bar{E}_{kl}}{E_u} - \\ - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \bar{E}_{ij} \delta_{kl} + K_t(\theta) \delta_{ij} \delta_{kl}, \end{aligned}$$

$$\omega(E_u, \theta) = \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_s(\theta)}{E_u} \right), \quad \varepsilon_s(\theta) = \frac{\tau_s + b \overset{\circ}{\tau}(\theta)}{2\mu},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \left(\frac{\mu_t}{\mu} - 1 \right) \frac{b}{2\mu} K_t(\theta),$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2} (\bar{F}^T \cdot \bar{F} - I), \quad \bar{F} = \frac{F}{J^{1/3}}, \quad J = \det \tilde{F}, \quad E_u = \sqrt{\bar{E}_{ij} \bar{E}_{ij}},$$

$$\dot{\tilde{S}} = \tilde{C}^E(\tilde{E}) : \dot{\tilde{E}}, \quad \tilde{\tau}^{Li}(d\tilde{u}) = \tilde{C}(\tilde{E}) : d(d\tilde{u}), \quad C_{ijkl} = F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} C_{pqrs}^E,$$

$\theta = I_3(\tilde{C}) - 1$, \tilde{C} – мера деформаций Коши-Грина, $\tilde{C}^E(\tilde{E})$ и $\tilde{C}(\tilde{E})$ – касательные модули упругости соответственно в начальной и текущей конфигурациях, ω – функция Ильюшина, \bar{E}_{ij} – компоненты девиатора накопленной деформации Грина-Лагранжа, E_u – интенсивность накопленной деформации, $K_t(\theta)$ – касательный модуль на диаграмме $\overset{\circ}{\tau}(\theta)$ (рис. 2.6.1), $b = \operatorname{tg} \varphi$ – тангенс угла внутреннего трения, τ_s – предел текучести при $\theta = 0$, F – деформационный градиент, $d(d\tilde{u})$ – тензор скоростей (дифференциалов) деформации.

Пример решения задачи о деформировании пористого водонасыщенного грунта под нагрузкой

Решалась модельная задача о действии штампа на область кубической формы с ребром 1 м, штамп – квадратный со стороной 0,4 м. Материал – песчаный грунт.

Выполнялись расчеты в следующих четырех вариантах. На верхней границе задавалось перемещение штампа равномерно: 1) на первых четырех

шагах по времени (общая деформация 4%), 2) на первых шести шагах по времени (6%), 3) на первых восьми шагах (8%), 4) на первых десяти шагах (10%). Остальная часть верхней границы свободна от напряжений. Боковые и нижняя границы области закреплены и непроницаемы. Вся верхняя граница проницаема, через штамп также может просачиваться жидкость.

Такие численные эксперименты аналогичны натурным экспериментам для исследования прогиба земляного полотна и малосвязных конструктивных слоев дорожных одежд в дорожном строительстве [29].

Общее время – 47,5 с, число шагов по времени – 20, величина шага по времени – 2,375 с.

На каждом шаге по времени решалось уравнение для пористости (2.4.2) с использованием неявной (2.4.3) разностной схемы. Зависимость коэффициента фильтрации k_ϕ от пористости $n(\vec{u})$ (выраженной в долях единиц) задавалась по формуле Козени [16]:

$$k_\phi(n) = \frac{d \cdot n(\vec{u})}{1 - n(\vec{u})},$$

где $d = 5,67 \cdot 10^{-4}$ м/с, $k_\phi^0 = 10^{-4}$ м/с (начальный коэффициент фильтрации до деформирования), $n_0 = 15\%$ (начальная пористость), $\gamma_f = 10^4$ кг/(м² · с²).

Свойства песчаного грунта, принятые в расчетах, задавались по литературным источникам [29]:

$K = 100$ МПа, $K_{t1} = 25$ МПа, $K_{t2} = 5000$ МПа, $\tau_{s1}^0 = 1,5$ МПа, $\tau_{s2}^0 = 4$ МПа (рис. 2.6.1), $\tau_s^0 = 2$ МПа, $\mu = 21,4$ МПа, $\mu_\tau = \mu/50$, $\varphi = 40^\circ$, $c = 0$ МПа, $M = 1,336$, $A = 0$ МПа (для функции нагружения (2.6.2)), $b = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}40^\circ = 0,839$ (из формул (2.6.3)).

На рис. 2.6.2 показаны графики изменения давления воды от времени в двух точках, находящихся на разной глубине (0,1 м и 0,4 м) под серединой штампа.

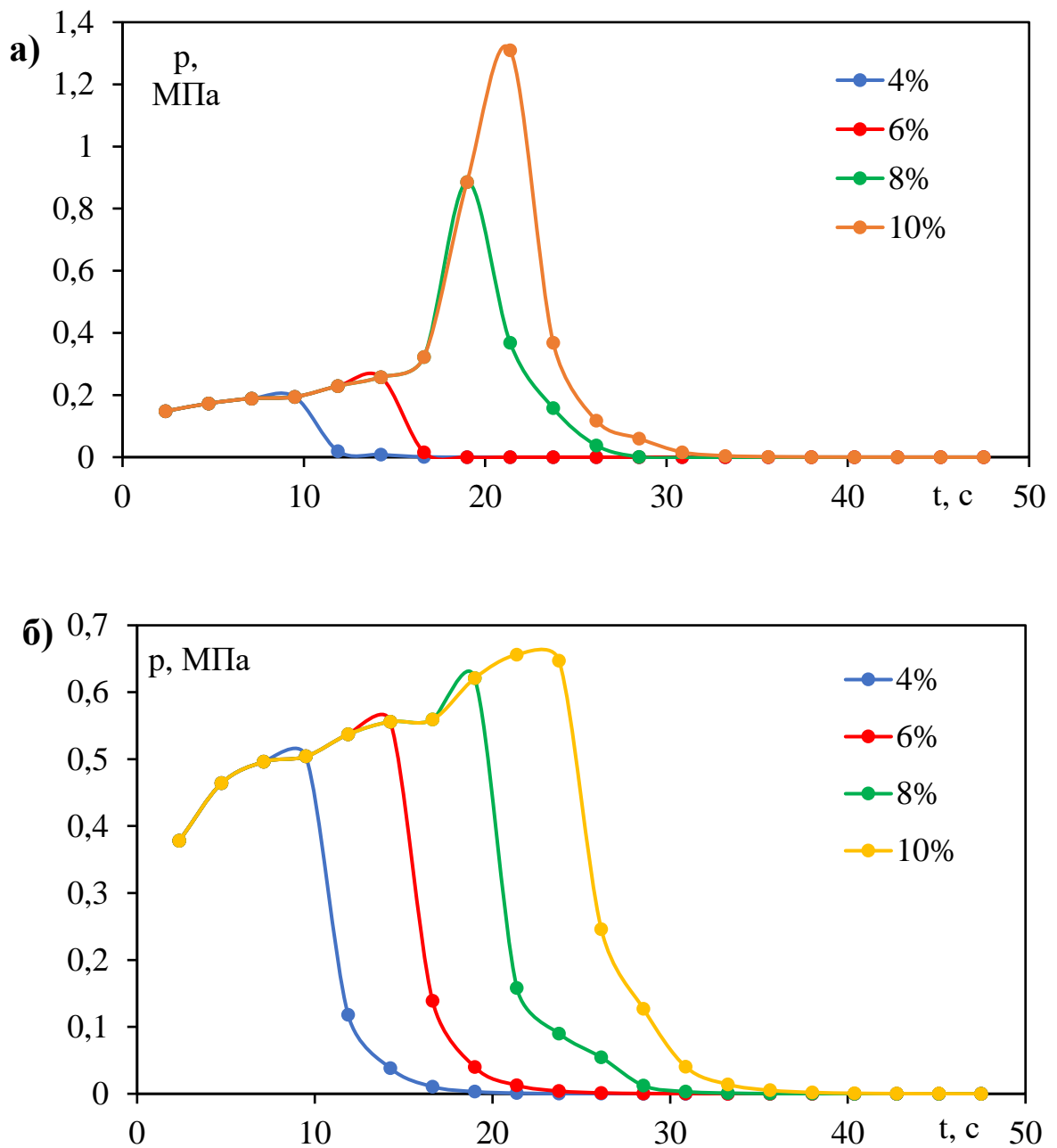


Рис. 2.6.2. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине: а) 0,1 м и б) 0,4 м.

На рис. 2.6.3 показано распределение давления воды в вертикальной плоскости, проходящей через середину штампа, на 10-м и 15-м шагах по времени. Как видно (рис. 2.6.3а), в области под штампом на 10-м шаге по времени заметна зона повышения давления воды. На 15-м шаге по времени (рис. 2.6.3б) распределение давления воды становится более равномерным, а

величины давления ниже примерно на два порядка в результате оттока жидкости через верхнюю границу модели.

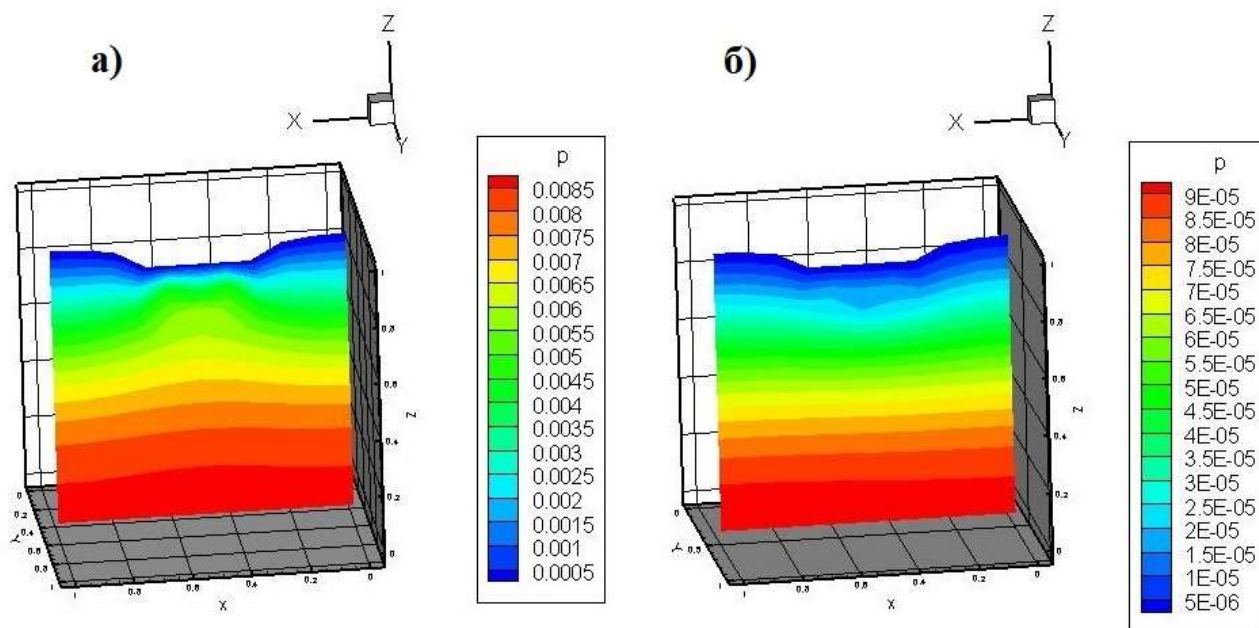


Рис. 2.6.3. Распределение давления воды в плоскости $Y = 0,5$ м
 а) на 10-м и б) 15-м шагах по времени (единицы измерения $P \cdot 10^{-2}$ МПа)
 (деформация 10%).

Глава 3. Вычисление эффективных свойств грунтов

В главе 3 использованы результаты работ [1, 2, 3, 6, 46, 47, 49, 52, 53, 57].

Для расчета напряженно-деформированного состояния пористого водонасыщенного грунта при фильтрации жидкости необходимо знать эффективные свойства грунта (например, упругие модули и коэффициент передачи порового давления), входящие в математическую модель Био в качестве параметров, а также зависимости этих свойств от изменяющейся пористости.

На практике эффективные упругие свойства грунтов определяются с помощью натуральных опытов или экспериментов на образцах керна, а также косвенными геофизическими методами. Для определения эффективных свойств целесообразно также использовать вычислительные методы, например, асимптотический метод осреднения [9], базирующийся на решении локальных задач в представительной области. Кроме того, некоторые свойства грунтов, например тензор передачи порового давления или тензор расширения грунта при замерзании воды в порах, сложно определять экспериментально, особенно в случае анизотропных и неоднородных пород, поэтому вычислительный способ является фактически единственным способом их оценки.

Асимптотический метод осреднения был разработан в 80-ые годы прошлого столетия одновременно в трех странах – во Франции (E. Sanchez-Palencia), в США и в России (Н.С. Бахвалов). Методика определения эффективных модулей упругости на основе метода осреднения создана Б.Е. Победрей [35]. Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород описано в книге А.Н. Власова, В.П. Мерзлякова [14]. В работе предлагается способ определения тензора передачи порового давления и тензора расширения грунта при замерзании также на основе асимптотического метода осреднения.

Вычислительная методика может стать оценочным способом определения эффективных свойств пород, если известна структура порового пространства и упругие свойства компонентов матрицы. Минеральный состав пород и структура порового пространства изучаются по шлифам и по изображениям, полученным с помощью рентгеновской томографии, а свойства минералов, из которых состоят исследуемые образцы, приведены в соответствующих справочниках и кадастрах [37, 39, 41].

3.1. Теоретические аспекты и примеры определения эффективных упругих модулей и параметра Био

Тензор передачи порового давления (параметр Био) α_{ij} входит в формулу расчета эффективных напряжений σ_{ij}^{eff} [84]:

$$\sigma_{ij}^{eff} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \alpha_{ij} p. \quad (3.1.1)$$

В формуле (3.1.1) давление жидкости p – положительная величина при сжатии. Угловые скобки означают осреднение по объему:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\vec{x}) dV. \quad (3.1.2)$$

Эффективные напряжения (3.1.1) связаны определяющим соотношением с макроскопическими деформациями. При нулевом поровом давлении эффективные напряжения являются осредненными полными напряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$, согласно формуле (3.1.2).

Для изотропных пород α – скалярный коэффициент, варьирующий от 0 до 1 и зависящий от свойств грунта (пористости, формы пор, коэффициента Пуассона твердой фазы грунта) и от приложенных давлений. Впервые коэффициент α появился в работе М. Био [61] еще в 1941 году, но до сих пор для α еще нет устоявшегося термина. В литературе его называют: “Biot parameter”, “Biot coefficient”, “Biot-Willis coefficient”, “ α coefficient”, “pore pressure transfer coefficient”, “effective stress coefficient”. Позже в работах [62,

83, 107] эмпирически была предложена формула для вычисления изотропного коэффициента передачи порового давления α :

$$\alpha = 1 - \frac{\beta_s}{\beta^{eff}} = 1 - \frac{K^{eff}}{K_s}, \quad (3.1.3)$$

где β_s – сжимаемость материала матрицы, β^{eff} – эффективная сжимаемость пористого материала, K_s – коэффициент объемного расширения материала матрицы, K^{eff} – эффективный коэффициент объемного расширения. Строгий математический вывод формулы (3.1.3) для α был дан В.М. Добрыниным [19], А. Nur и J.D. Byerlee [97].

Из формулы (3.1.3) видно, что коэффициент Био α близок единице, если эффективная сжимаемость породы сильно превышает сжимаемость твердого материала матрицы. Наоборот, $\alpha \approx 0$, если $\beta^{eff} \approx \beta_s$. Такая ситуация может произойти в слабопористых материалах. Сильно влияет на значение α форма пор, которая определяет площадь контакта жидкой и твердой составляющих грунта [97]. Чем сильнее форма пор отличается от круглой, чем более извилистым является поровое пространство, тем больше площадь контакта твердой и жидкой фаз и, следовательно, на большую площадь поверхности скелета породы действует поровое давление, т.е. больше коэффициент α .

Многие исследователи предлагают экспериментальные способы определения коэффициента эффективного напряжения α (в случае изотропных материалов) на основе статических [56, 79, 96, 98] или динамических [56, 90, 99, 117] опытов на образцах пород. Все эти способы определения α используют соотношение (3.1.3) и основаны на расчете сжимаемости материала матрицы и эффективной сжимаемости. Статические методы предполагают трехосные испытания на сжатие образцов грунта на установках высокого давления, позволяющих независимо создавать внешнее всестороннее давление на заключенный в оболочку образец породы и поровое давление внутри образца. Динамический способ определения α включает измерение скоростей продольных и поперечных волн в образцах породы и в

твердом материале грунта, по значениям которых (с учетом эффективной плотности и плотности материала матрицы) рассчитываются K^{eff} и K_s соответственно по известным формулам теории упругости. Другими словами, лабораторные эксперименты для определения коэффициента Био α – достаточно трудоемкие.

Для материалов со структурной анизотропией (если скелет сложен однородным материалом, а анизотропия обусловлена структурой порового пространства) М.М. Carroll [67] вывел формулу для расчета тензора α_{ij} через эффективные модули упругости C_{ijkl} и компоненты тензора податливостей материала матрицы S_{mnpq}^s :

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} - C_{ijkl} S_{klmm}^s.$$

В работе [121] выведены тензорные параметры Био отдельно для пор и отдельно для трещин для так называемых материалов «двойной пористости». Однако практическое определение тензорного параметра Био пока предложено в литературе только для частных случаев структурной анизотропии пород (например, ортотропии, трансверсальной изотропии) [67, 70, 116, 121], для которых компоненты C_{ijkl} и S_{mnpq}^s определялись экспериментально.

Поэтому актуально применение вычислительного метода, который позволяет определять тензорный параметр Био α_{ij} для случая общей анизотропии пористого природного композита, матрица которого неоднородна по минеральному составу.

В литературе широко представлены результаты экспериментального определения коэффициента Био α для различных типов пород (песчаников, алевролитов, аргиллитов, глинистых сланцев, мела, ангидритов) [56, 79, 90, 96, 98, 99, 117]. В нашей работе демонстрируется вычислительная методика определения тензорного параметра Био α_{ij} на примере карбонатных пород (доломитов, известняков) и вулканогенно-осадочных пород (гиалокластитов), рассчитываются значения упругих модулей для этих типов пород и

проводится их сравнение с экспериментальными данными, определяются зависимости модуля Юнга и коэффициента Био от пористости [1, 2, 3, 6, 47, 49, 57].

Асимптотический анализ

Математически строгий способ определения эффективных модулей упругости и тензора передачи порового давления основывается на асимптотическом осреднении уравнения равновесия неоднородной упругой пористой среды [1]:

$$[C_{ijkl}u_{k,l}]_{,j} + X_i = 0, \quad \vec{x} \in V \quad (3.1.4)$$

с граничными условиями на поверхности пор Σ_{int} :

$$C_{ijkl}u_{k,l}n_j = -pn_i. \quad (3.1.5)$$

Здесь предполагается, что p – известное поровое давление.

Стандартным образом вводятся быстрые координаты ξ_i :

$$\xi_i = x_i/\varepsilon, \quad \varepsilon = l/L \ll 1,$$

где x_i – медленные координаты, l – характерный размер представительной области (RVE – *representative volume element*) пористой среды, L – характерный глобальный размер всей пористой среды. В уравнениях (3.1.4), (3.1.5) тензор модулей упругости и нормаль \vec{n} зависят от быстрых координат ξ_i , а давление p – от x_i . Дело в том, что давление жидкости p имеет асимптотическое представление [91]:

$$p = p_0(\vec{x}) + \varepsilon p_1(\vec{x}, \vec{\xi}) + \dots \quad (3.1.6)$$

Для нахождения первых членов асимптотического решения задачи (3.1.4), (3.1.5) достаточно первого члена в (3.1.6), который будем обозначать далее как $p(\vec{x})$.

Решение задачи (3.1.4), (3.1.5) ищется в виде асимптотического ряда:

$$u_k(\vec{x}, \vec{\xi}) = v_k(\vec{x}) + \varepsilon N_{krq}(\vec{\xi})v_{p,q}(\vec{x}) + \varepsilon M_k(\vec{\xi})p(\vec{x}) + \dots, \quad (3.1.7)$$

где $N_{kpq_1\dots q_m}(\vec{\xi})$, $M_{kq_1\dots q_m}(\vec{\xi})$ – локальные функции быстрых координат. Здесь первые два члена используются для определения эффективных модулей упругости, а третий – для определения тензора передачи порового давления.

В силу линейности решение задачи (3.1.4) с условием (3.1.5) естественно представить как сумму решений двух функций:

$$u_k = u_k^{(1)} + u_k^{(2)}.$$

Тогда задача (3.1.4), (3.1.5) разделяется на две задачи. Первая задача:

$$\left[C_{ijkl}(\vec{\xi}) u_{k,l}^{(1)} \right]_{,j} + X_i = 0, \quad \vec{\xi} \in V_{RVE} \quad (3.1.8)$$

$$C_{ijkl}(\vec{\xi}) u_{k,l}^{(1)} n_j(\vec{\xi}) = 0, \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{int}$$

И вторая задача:

$$\left[C_{ijkl}(\vec{\xi}) u_{k,l}^{(2)} \right]_{,j} = 0, \quad \vec{\xi} \in V_{RVE} \quad (3.1.9)$$

$$C_{ijkl}(\vec{\xi}) u_{k,l}^{(2)} n_j(\vec{\xi}) = -p(\vec{x}) n_i(\vec{\xi}), \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{int}$$

Асимптотическое решение (3.1.7) разбивается на два решения соответственно:

$$u_k^{(1)}(\vec{x}, \vec{\xi}) = v_k(x) + \varepsilon N_{kpq}(\vec{\xi}) v_{p,q}(x) + \dots \quad (3.1.10)$$

и

$$u_k^{(2)}(\vec{x}, \vec{\xi}) = \varepsilon M_k(\vec{\xi}) p(\vec{x}) + \dots \quad (3.1.11)$$

Подстановка (3.1.10) в (3.1.8) приводит к краевой задаче для определения упругих модулей:

$$\left[C_{ijkl} N_{kpq,l} + C_{ijpq} \right]_{,j} = 0, \quad \vec{\xi} \in V_{RVE} \quad (3.1.12)$$

$$\left[C_{ijkl} N_{kpq,l} + C_{ijpq} \right] n_j = 0, \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{int}$$

А подстановка (3.1.11) в (3.1.9) приводит к задаче для определения тензора передачи порового давления:

$$\left[C_{ijkl} M_{k,l} \right]_{,j} = 0, \quad \vec{\xi} \in V_{RVE} \quad (3.1.13)$$

$$C_{ijkl} M_{k,l} n_j = -n_i, \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{int}$$

Граничные условия на границе Σ_{RVE} имеют разный вид в зависимости от того, какая среда рассматривается – периодическая или непериодическая.

Если пористая среда непериодическая, то на границе RVE можно поставить условия [1]:

$$N_{kpq} = 0, \quad M_k = 0, \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{RVE}. \quad (3.1.14)$$

При этом вблизи границы Σ_{RVE} возникает пограничный слой, который не влияет в пределах принятой точности на значения средних по RVE. Последнее свойство является просто следствием определения RVE.

Если же представительная область – ячейка периодичности:

$$-l_\alpha/2 \leq \xi_\alpha \leq l_\alpha/2,$$

то на ее границе Σ_{RVE} относительно функций N_{kpq} и M_k формулируются условия периодичности для задач (3.1.12), (3.1.13) соответственно:

$$N_{kpq} \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = N_{kpq} \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.1.15)$$

$$(C_{ijkl}N_{kpq,l} + C_{ijpq})n_j \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = -(C_{ijkl}N_{kpq,l} + C_{ijpq})n_j \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}}$$

и

$$M_k \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} = M_k \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} \quad (3.1.16)$$

$$C_{ijkl}M_{k,l}n_j \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} = -C_{ijkl}M_{k,l}n_j \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}}$$

Для локальных задач (3.1.12), (3.1.13) с условиями (3.1.15), (3.1.16) требуются дополнительные условия:

$$\langle N_{kpq} \rangle = 0, \quad \langle M_k \rangle = 0, \quad (3.1.17)$$

(угловые скобки обозначают осредненное по RVE значение).

Среднее напряжение $\langle \sigma_{ij} \rangle$ имеет вид:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijkl}N_{kpq,l} + C_{ijpq} \rangle v_{p,q} + \langle C_{ijkl}M_{k,l} \rangle p, \quad (3.1.18)$$

где эффективные модули упругости выражаются следующим образом:

$$C_{ijpq}^{eff} = \langle C_{ijkl}N_{kpq,l} + C_{ijpq} \rangle.$$

При сравнении выражения (3.1.18) с выражением (3.1.1) видно, что тензор передачи порового давления α_{ij} равен:

$$\alpha_{ij} = -\langle C_{ijkl} M_{k,l} \rangle.$$

При этом осредненное уравнение равновесия (первое уравнение линейной связанной модели пороупругости Био) имеет вид [1]:

$$C_{ijkl}^{eff} v_{k,lj} + X_i = \alpha_{ij} p_{,j},$$

где C_{ijkl}^{eff} и α_{ij} вычисляются на основе решения локальных задач в RVE (3.1.12) и (3.1.13) соответственно с условиями (3.1.14) или (3.1.15)–(3.1.17). Предполагается, что эти задачи следует решать методом конечных элементов.

Второе уравнение линейной модели пороупругости Био получено асимптотически в работах [9, 91], где было дано осреднение течения вязкой жидкости в пористой среде, приводящее к закону Дарси и собственно уравнению фильтрации.

Решение локальных задач, необходимое для вычисления эффективных свойств, позволяет одновременно оценить и локальное распределение напряжений по формуле:

$$\sigma_{ij} = (C_{ijkl} N_{krq,l} + C_{ijpq}) v_{p,q} + C_{ijkl} M_{k,l} p.$$

При этом нет ограничения на неоднородность материала скелета пористой среды, наличие закрытых пор, содержащих жидкость или газ, находящихся под давлением (локально распределенным) или нет.

Локальная краевая задача для определения упругих модулей

Таким образом, локальная краевая задача для определения модулей упругости [1], вытекающая из метода осреднения, совпадает с общим определением эффективных модулей, хорошо известным в механике композитов [35]. Для упрощения записи задачи (3.1.12), (3.1.14) введем обозначение:

$$L_{krq} = N_{krq} + \frac{1}{2} (\xi_p \delta_{kq} + \xi_q \delta_{kp}). \quad (3.1.19)$$

Подставим (3.1.19) в (3.1.12), (3.1.14) и после дальнейших преобразований с учетом (3.1.7) получим задачу в представительной области для определения эффективных модулей упругости со специальным

граничным условием в виде линейной функции координат на внешней границе области Σ_{RVE} и нулевым давлением p на границе пор Σ_{int} и на внешней границе Σ_{RVE} [57]:

$$\left(C_{ijkl}(\vec{\xi}) u_{k,l}^1(\vec{\xi}) \right)_{,j} = 0, \quad \vec{\xi} \in V_{RVE} \quad (3.1.20)$$

$$u_k^1 = \frac{1}{2} \varepsilon (\varepsilon_{pk}^0 \xi_p + \varepsilon_{kq}^0 \xi_q) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{pk}^0 x_p + \varepsilon_{kq}^0 x_q), \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{RVE}$$

$$C_{ijkl}(\vec{\xi}) u_{k,l}^1(\vec{\xi}) n_j = 0, \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{int}$$

$$p = 0, \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{int} \cup \Sigma_{RVE}$$

$$\sigma_\tau = C_{ijkl}(\vec{\xi}) u_{k,l}^1 n_j \tau_i = 0, \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{RVE}$$

Здесь \vec{n} – вектор нормали к Σ_{RVE} или к Σ_{int} , $\vec{\tau}$ – вектор в касательном направлении к Σ_{RVE} .

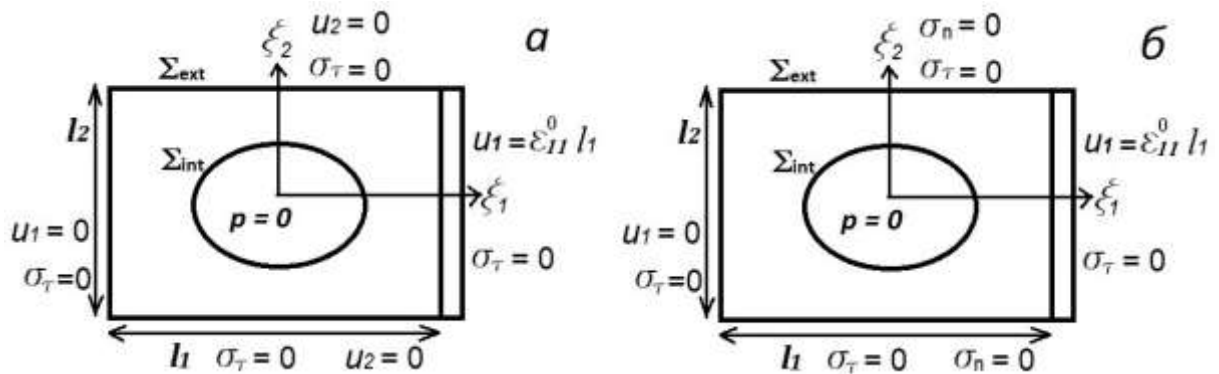


Рис. 3.1.1. Граничные условия локальной краевой задачи для определения эффективных упругих модулей: а) изотропных и б) анизотропных образцов.

Численное решение задачи (3.1.20) посредством метода конечных элементов не вызывает трудностей, если известна трехмерная геометрическая структура материала. Однако вопрос возникает, если имеются только двумерные изображения некоторого количества шлифов. Мы использовали два подхода. Во-первых, используя двумерную оцифрованную структуру неоднородностей материала и форму пор, рассматривали двумерную задачу (3.1.20) при плоскодеформированном состоянии, схематично показанную на рис. 3.1.1а. Это позволяет вычислить следующие компоненты упругих

модулей в плоскости изображения структуры материала: $C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{eff}$, $C_{\beta\beta\alpha\alpha}^{eff}$ и $C_{\alpha\beta\alpha\beta}^{eff}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \alpha \neq \beta$) по формулам:

$$C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{eff} = \frac{\langle \sigma_{\alpha\alpha} \rangle}{\varepsilon_{\alpha\alpha}^0}, \quad C_{\beta\beta\alpha\alpha}^{eff} = \frac{\langle \sigma_{\beta\beta} \rangle}{\varepsilon_{\alpha\alpha}^0}, \quad C_{\alpha\beta\alpha\beta}^{eff} = \frac{\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle}{\varepsilon_{\alpha\beta}^0}.$$

Для удобства интеграл в выражении $\langle \sigma_{\alpha\alpha} \rangle$ (см. (3.1.2)) преобразовывался к интегралу по границе с помощью формулы Гаусса-Остроградского.

Далее для материала, для которого априорно известно свойство изотропии, рассчитывались модуль упругости (E^{eff}) и коэффициент Пуассона (ν^{eff}) исходя из формул теории упругости (для упрощения записи в формулах опущен верхний индекс «*eff*»):

$$C_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = \lambda + 2\mu, \quad C_{\beta\beta\alpha\alpha} = \lambda, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \mu \cdot 2(1 + \nu).$$

Здесь λ и μ – упругие модули Ламе.

Во-вторых, решалась задача (3.1.20) при плосконапряженном состоянии (см. рис. 3.1.1б). Здесь верхняя и нижняя границы модели могут свободно деформироваться. В направлении растяжения образца вычисляется эффективный модуль Юнга:

$$E_{\alpha}^{eff} = \frac{1}{\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 \cdot l_{\beta}} \int_{l_{\beta}} \sigma_{\alpha\alpha} dl_{\beta}.$$

Использование двух подходов позволяет сравнить результаты и при их достаточно хорошем совпадении сделать вывод о достоверности результатов вычислений.

Для анизотропных образцов проводились вычислительные эксперименты только при плосконапряженном состоянии, т.е. решалась задача, показанная на рис. 3.1.1б. Такие вычислительные эксперименты позволяют исследовать зависимость модуля Юнга от ориентации вытянутых пор.

Локальная краевая задача для определения тензорного параметра Био

Согласно (3.1.13), (3.1.14), (3.1.11), для определения компонент тензора передачи порового давления α_{ij} в представительной области V_{RVE} формулируется краевая задача, где на границе пор Σ_{int} задается постоянное давление жидкости p_0 , а граница представительной области Σ_{RVE} жестко закреплена (рис. 3.1.2) [57]:

$$\sigma_{ij,j} = [C_{ijkl}(\vec{\xi})u_{k,l}^2]_{,j} = 0, \quad \vec{\xi} \in V_{RVE} \quad (3.1.21)$$

$$C_{ijkl}(\vec{\xi})u_{k,l}^2 n_j = -p_0 n_i(\vec{\xi}), \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{int}$$

$$u_n^2 = u_k^2 n_k = 0, \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{RVE}$$

$$\sigma_\tau = C_{ijkl}(\vec{\xi})u_{k,l}^2 n_j \tau_i = 0, \quad \vec{\xi} \in \Sigma_{RVE}$$

Задача (3.1.21) решается при плоскодеформируемом состоянии, в результате рассчитываются компоненты параметра Био:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{p_0 l_2} \int_{l_2} \sigma_{11} dl_2, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{p_0 l_1} \int_{l_1} \sigma_{22} dl_1.$$

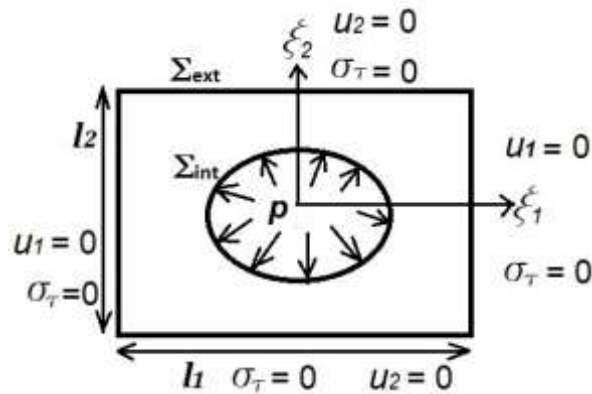


Рис. 3.1.2. Граничные условия локальной краевой задачи для определения компонент тензора передачи порового давления.

Модели образцов реальных грунтов для расчета эффективных свойств строились на основе фотографий шлифов, сделанных с помощью оптического микроскопа «Olympus» со встроенной цифровой фотокамерой «Olympus SP-500 UZ». Оцифровка шлифов проводилась в программе AutoCAD 2016 (учебная версия). Пример такой модели показан на рис. 3.1.3.



Рис. 3.1.3. Построение модели реальной структуры грунта для вычисления эффективных свойств по методу осреднения.

Были оцифрованы поры и минеральные составляющие образца. Упругие свойства компонентов твердой матрицы в расчетах задавались по литературным данным. Расчеты проводились в конечно-элементной программе ANSYS Mechanical APDL 2019 (Учебная версия).

Примеры расчета

Рассмотрим примеры расчета эффективных модулей Юнга и параметра Био по методу осреднения.

Как известно [47], коэффициент Био (коэффициент передачи порового давления) сильно зависит от формы пор. На рис. 3.1.4 приведены значения коэффициента α для модельных образцов с порами разной формы (поры изображены черным цветом). В расчетах задавались свойства матрицы моделей: $E = 5560$ МПа, $\nu = 0,3$. Все модели имеют одинаковую пористость: $n = 28\%$.

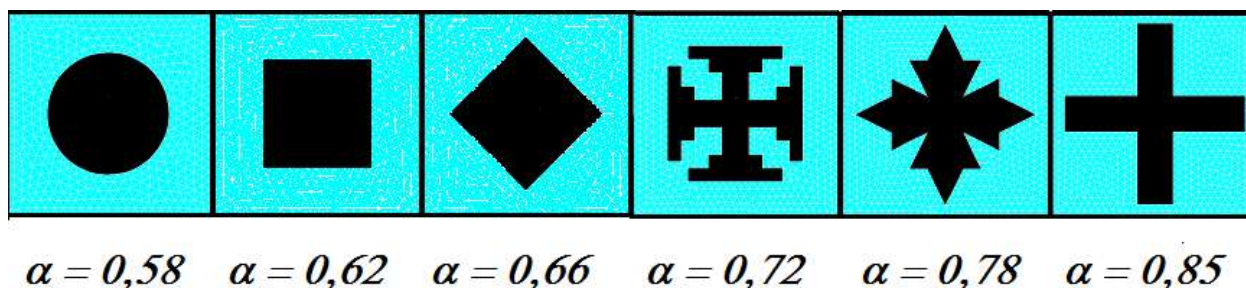


Рис. 3.1.4. Зависимость коэффициента Био от формы поры.

Как видно на рис. 3.1.4, наибольшее значение α наблюдается у образцов с извилистыми порами, у которых больше площадь контакта жидкой и твердой фаз грунта, а самое маленькое значение параметра Био закономерно наблюдается у образца с круглой порой.

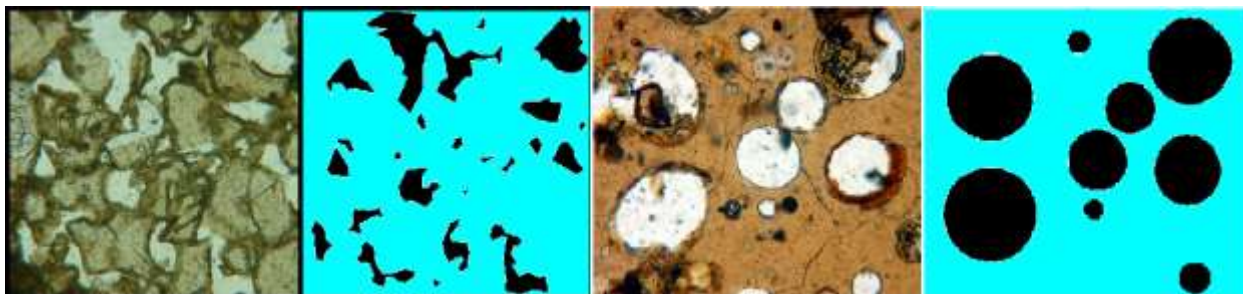


Рис. 3.1.5. Фотографии шлифов и модели гиалокластитов с разной формой пор. Ширина поля зрения, мм: 1,2 (слева), 0,7 (справа).

Влияние формы пор на величину параметра Био можно изучать на примере реальных грунтов – гиалокластитов Исландии. Гиалокластиты – вулканогенно-осадочные породы, образующиеся при подводных извержениях вулканов. Быстрое охлаждение лавы при контакте с водой приводит к ее превращению в мелкие обломки вулканического стекла, которые впоследствии цементируются под влиянием различных постгенетических процессов [42].

Слабоизмененные гиалокластиты характеризуются однородным составом матрицы, состоящей из вулканического стекла, и присутствием пор разной формы – круглой и угловатой (рис. 3.1.5). Свойства вулканического стекла, принятые в расчетах: $E = 20000$ МПа, $\nu = 0,35$ [37].

На рис. 3.1.6 видно, что для образцов со смешанными порами с возрастанием пористости увеличивается величина коэффициента Био (зависимость α от n полиномиальная), для угловатых пор – значения параметра Био выше, чем для смешанных пор, при одинаковых значениях пористости, а для круглых пор – наоборот, ниже.

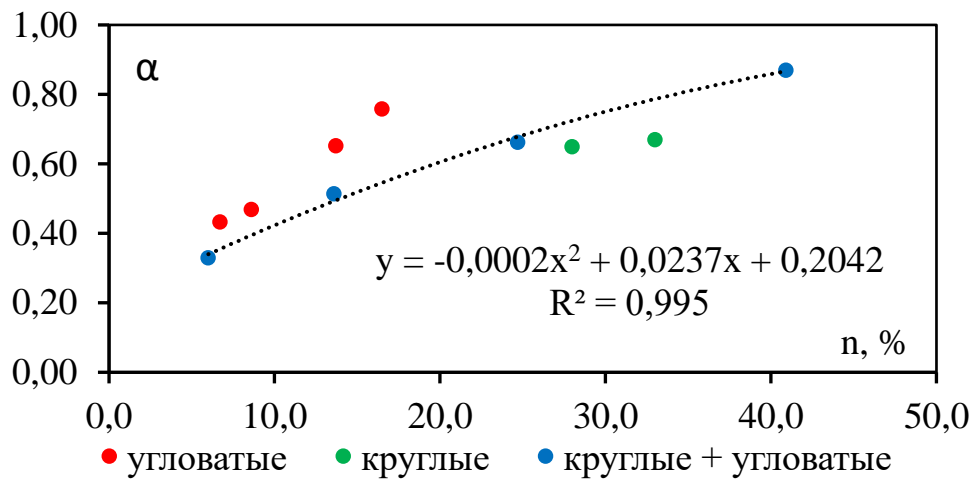


Рис. 3.1.6. Зависимость эффективного коэффициента Био гиалокластитов от пористости и формы поры.

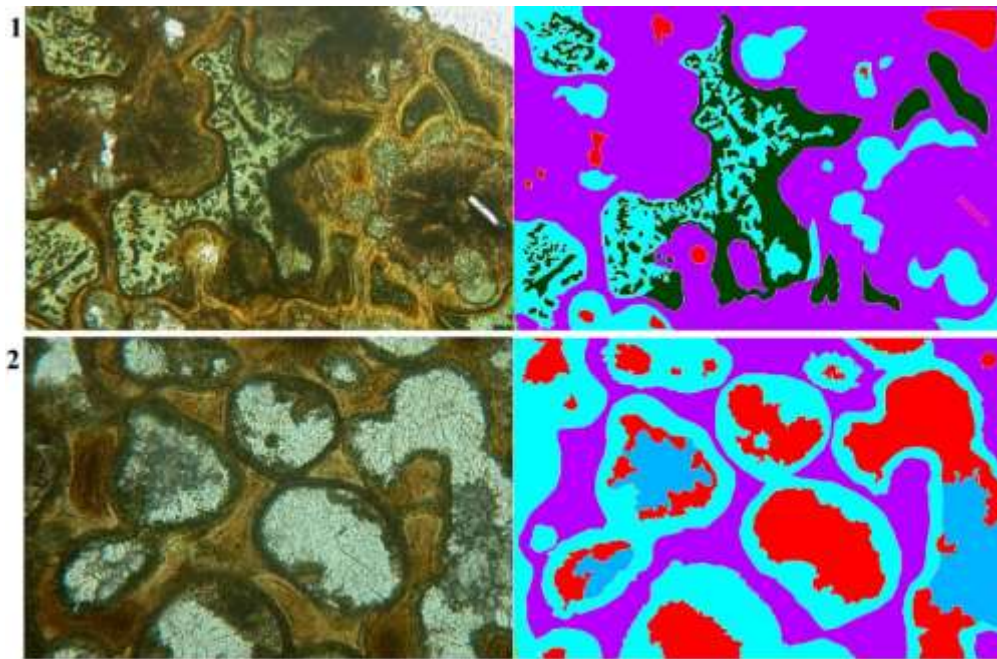


Рис. 3.1.7. Интенсивно измененные гиалокластиты с неоднородной матрицей.

Ширина поля зрения 0,7 мм.

У сильно измененных гиалокластитов, которые подверглись постгенетическим преобразованиям, все поры заполнены вторичными минералами, состав матрицы – неоднородный (рис. 3.1.7). На примере расчетов таких образцов метод осреднения позволяет исследовать влияние минерального состава на эффективные свойства грунтов.

В табл. 3.1.1 приведены свойства минералов, принятые в расчетах. Они задавались по литературным данным [37, 39, 41, 93, 112, 118, 119].

Таблица 3.1.1.

Свойства минералов, заданные в расчетах.

Название минерала или породы	Цвет в моделях	Модуль Юнга, МПа	Коэфф. Пуассона
Смектит	фиолетовый	12000	0,33
Хлорит	голубой	25000	0,29
Кальцит	синий	55000	0,29
Пренит	красный	62000	0,28
Клиноцоизит	темно-зеленый	70000	0,28
Плагиоклаз	розовый	80000	0,28

Таблица 3.1.2.

Результаты расчетов и концентрация минералов в образцах

Номер образца	1	2
Модуль Юнга, МПа	18700	26000
Коэффициент Пуассона	0,31	0,30
Смектит, %	59,6	27,0
Хлорит, %	20,7	39,7
Кальцит, %	0	8,5
Пренит, %	2,2	24,8
Клиноцоизит, %	17,4	0
Плагиоклаз, %	0,1	0

В табл. 3.1.2 показаны результаты расчетов эффективных упругих модулей для образцов, представленных на рис. 3.1.7, и концентрации минералов в этих образцах. Анализ результатов расчетов показывает, что большое процентное содержание в образцах таких минералов, как пренит и кальцит, сильно повышает эффективный модуль Юнга образца, так как эти

минералы характеризуются высокими значениями упругих свойств (см. табл. 3.1.1). Образцы, состоящие преимущественно из смектита (табл. 3.1.1), дают меньшие значения эффективного модуля Юнга (табл. 3.1.2).

На примере расчета карбонатных пород (доломита и известняка) (рис. 3.1.8) с однородной матрицей рассмотрим влияние пористости на эффективный упругий модуль Юнга и параметр Био.

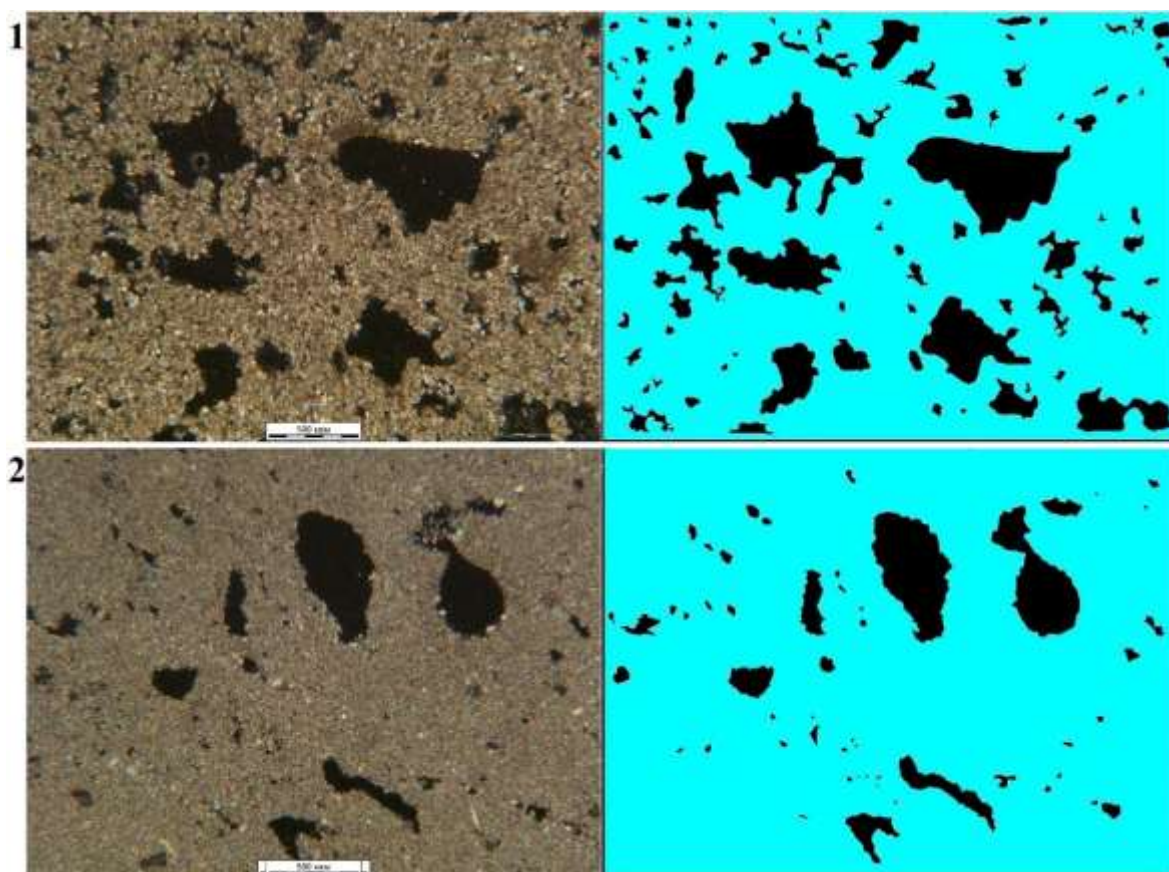


Рис. 3.1.8. Фотографии шлифов (слева) и моделей (справа):

1) доломита и 2) известняка.

Для расчетов были заданы следующие свойства матрицы: для доломита $E = 90000$ МПа, $\nu = 0,33$; для известняка $E = 50000$ МПа, $\nu = 0,33$.

Результаты расчетов эффективного модуля Юнга для доломита показаны на рис. 3.1.9. В создании моделей и расчетах принимали участие студенты кафедры инженерной и экологической геологии Новиков Павел и Бессонова Ольга.

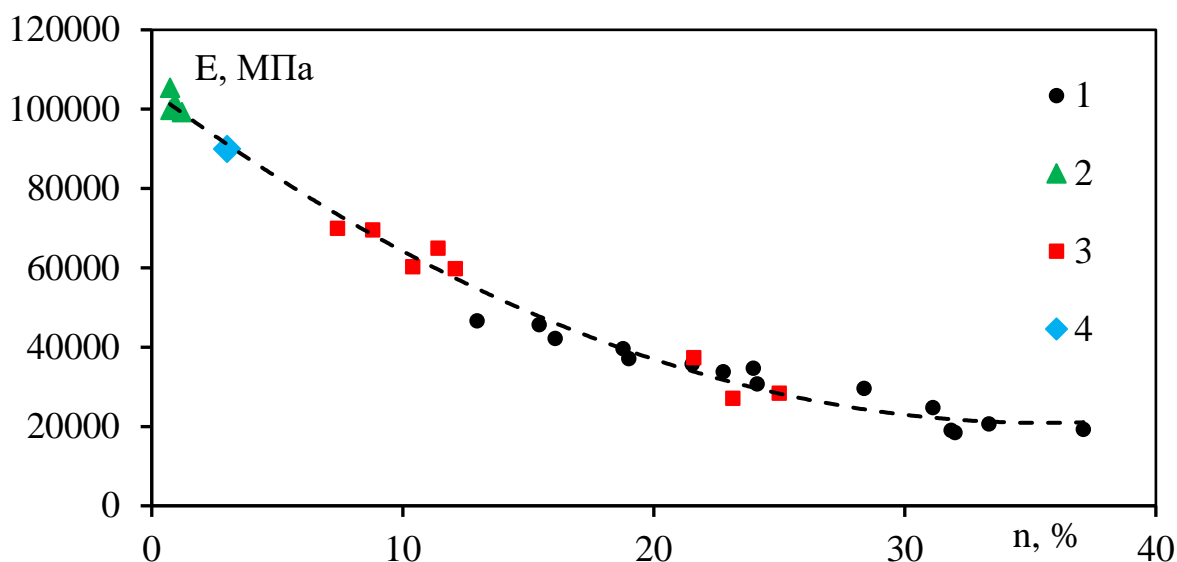


Рис. 3.1.9. Зависимость эффективного модуля Юнга чистых доломитов от пористости по результатам: 1) экспериментов, 3) расчетов по методу осреднения, 2) и 4) литературных данных [23].

Расчеты в представительной области ложатся на одну и ту же кривую зависимости модуля Юнга от пористости, на эту же кривую попадают и экспериментальные данные, и значения, известные из литературы. Эта кривая позволяет сделать обобщение понятия представительного объема. Согласно классическому определению представительного объема, области, представляющие породу, должны иметь одинаковые пористости. По результатам наших исследований, область, на которой производится расчет численным методом, может быть меньше, чем области, которые имеют одну и ту же пористость. Но тем не менее при расчетах на меньших областях все точки, отражающие соответствие E и n , ложатся на одну и ту же кривую, в результате получают точки для разных значений пористости. Следовательно, необязательно требовать одинаковых значений пористости для образцов. Этот результат позволяет использовать расчетные области меньшего размера, чем те, которые соответствуют классическому определению представительной области.

Это есть обобщение представительной области. Тогда возникает вопрос, какая же наименьшая область, для которой можно проводить расчет? Размер области можно уменьшать до тех пор, пока кривые зависимости какого-либо свойства породы от параметра структуры (например, пористости) совпадают с разумной точностью.

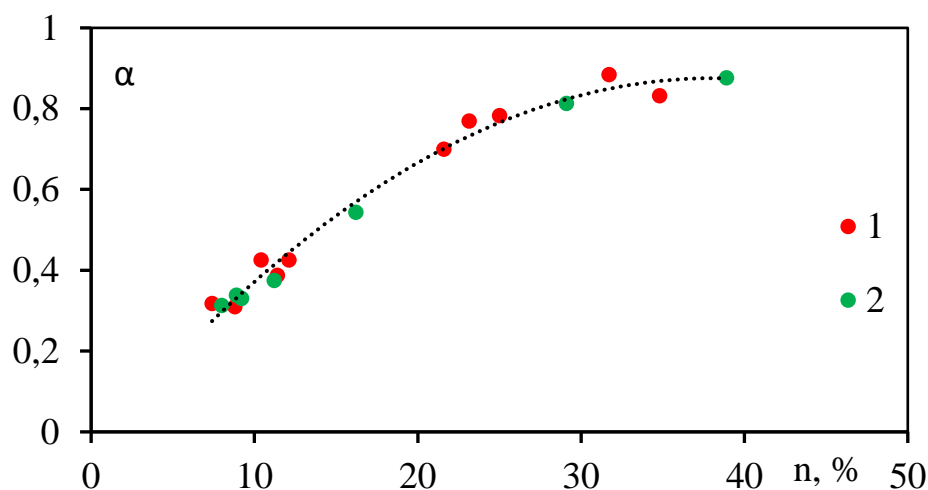


Рис. 3.1.10. Зависимость эффективного параметра Био от пористости:

1) для доломитов и 2) известняков по результатам расчетов по методу осреднения.

На рис. 3.1.10 показана зависимость коэффициента Био от пористости, также соответствующая обобщенному определению представительной области. Все точки графика легли на одну кривую. Результаты подтверждают закономерность, что параметр Био не зависит от модуля Юнга матрицы.

На рис. 3.1.11 показана 3D модель известняка (изображенного на рис. 3.1.8(2)), построенная в программе VG MAX 3.3 в ООО «Совтест-Сервис» (г. Курск) по изображениям, снятым на рентгеновском компьютерном микротомографе Yamato TDM-1000H-II (Япония) (который был приобретен в рамках реализации Программы развития МГУ). Использование метода компьютерной томографии позволило сделать расчеты на трехмерных образцах и получить сравнение результатов 2D и 3D расчетов модуля Юнга (рис. 3.1.12).

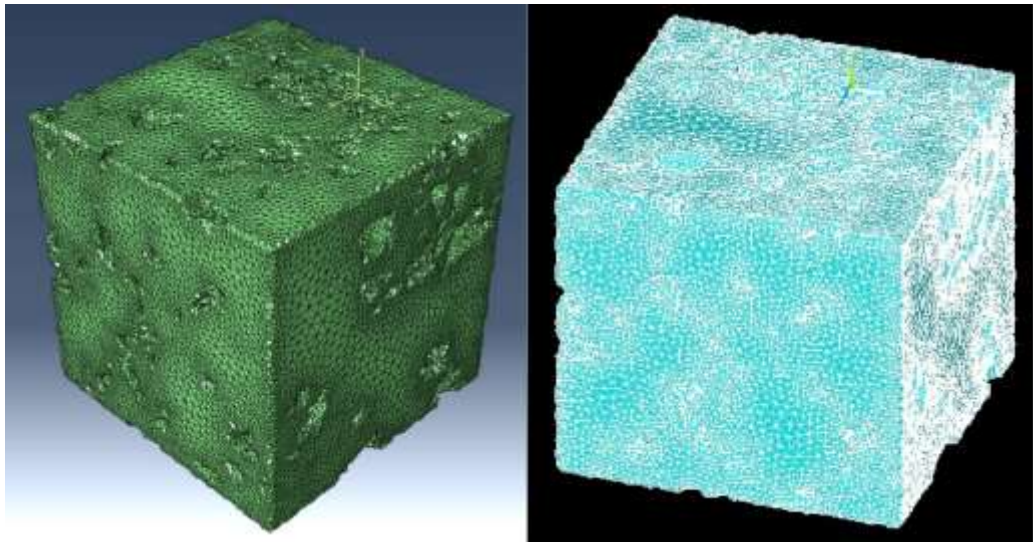


Рис. 3.1.11. 3D модели известняка (длина ребра куба 5,5 мм).

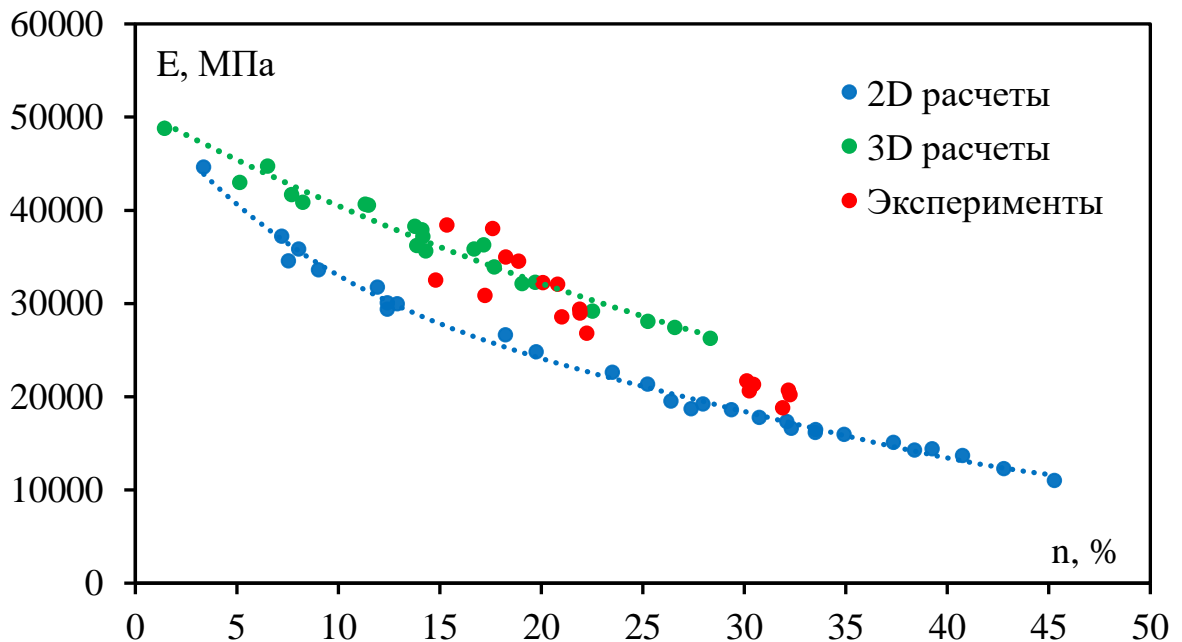


Рис. 3.1.12. Зависимости модуля Юнга от пористости по результатам 2D и 3D расчетов и экспериментов.

Большая часть экспериментальных данных, приведенных на рис. 3.1.12, любезно предоставлена доцентом кафедры инженерной и экологической геологии Ю.В. Фроловой. Расчеты выполнялись студентом кафедры инженерной и экологической геологии Орловым Егором под руководством автора диссертации. Как видно на рис. 3.1.12, трехмерные расчеты модуля

Юнга известняка точнее двумерных, они лучше соответствуют экспериментальным данным. Следует отметить, что при пористости <5% результаты 2D и 3D расчетов совпадают, а при пористости около 30% результаты 2D расчетов становятся близки результатам экспериментов. Для промежуточных значений пористости различия 2D и 3D результатов колеблются от 10 до 30%.

3.2. Теоретические аспекты и примеры определения тензора расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании

Определение коэффициента расширения пористой среды при фазовом переходе поровой жидкости в лед является важной практической задачей в инженерной геологии и строительной механике. При замерзании воды в порах необходимо определять напряженно-деформированное состояние грунта и величину морозного пучения. Обычно коэффициент расширения грунта при замерзании принимается равным величине коэффициента расширения воды при переходе в лед [28], однако практика показывает, что такое определение этого параметра не является вполне корректным.

Теоретический анализ

В работе предлагается вычислительный метод определения эффективного (осредненного) коэффициента относительного расширения пористой среды при замерзании с помощью метода осреднения [52, 53]. При этом предполагается исключительно механическое взаимодействие воды со скелетом грунта. Для среды с открытыми порами коэффициент относительного расширения пористой среды находится в виде формулы. Для среды с закрытыми порами требуется решить так называемые локальные задачи в представительной области, а параметр относительного расширения пористой среды является, вообще говоря, тензором второго ранга.

Будем рассматривать два характерных размера: макро размер L определяется областью, занимаемой пористой средой; микро размер l связан с представительной областью пористой среды (RVE – representative volume

element). Для периодической среды RVE – это ячейка периодичности. Как всегда в методе осреднения, вводятся быстрые координаты $\vec{\xi}$ ($\xi_i = x_i/\varepsilon$, $\varepsilon = l/L \ll 1$).

Тензоры напряжений σ_{ij} и малых деформаций ε_{ij} связаны определяющим соотношением, которое представляет собой обобщение закона термоупругости на случай фазового перехода поровой жидкости:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}) = C_{ijkl}(\vec{\xi})[\varepsilon_{kl}(\vec{x}, \vec{\xi}) - \alpha_{kl}(\vec{\xi})T(\vec{x}) - \chi_{kl}(\vec{\xi})H(\vec{x})]. \quad (3.2.1)$$

Здесь C_{ijkl} – модули упругости, зависящие от быстрых координат, они являются кусочно-постоянными и равны C_{ijkl}^s в области скелета грунта V_{RVE}^s , C_{ijkl}^{ice} в области льда V_{RVE}^{ice} , C_{ijkl}^f в области жидкости V_{RVE}^f . Жидкость находится в статике и может рассматриваться при малых деформациях как упругое тело с модулем объемного сжатия K_f и нулевым модулем сдвига ($\mu_f = 0$). Часто можно пренебречь также и модулем объемного сжатия жидкости по сравнению с модулем скелета. В нашем случае выбор модели не важен, поскольку никак не влияет на определение осредненного расширения среды при замерзании поровой жидкости.

$$\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl},$$

где α_{kl} – тензор теплового расширения.

$$\gamma_{ij} = C_{ijkl}\chi_{kl},$$

где γ_{ij} – тензор расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании, $\chi_{kl} = \chi(\vec{\xi})\delta_{kl}$, χ – коэффициент относительного расширения жидкости при замерзании: $\chi = \chi_{ice}$ в области поры V_{RVE}^p , $\chi = 0$ в области скелета грунта V_{RVE}^s .

Все эти характеристики изменяются в представительной области V_{RVE} и, следовательно, зависят только от быстрых координат $\vec{\xi}$.

Будем считать, что изменение температуры T задано и зависит только от глобальных (медленных) координат \vec{x} . Это обосновано тем, что асимптотическое представление изменения температуры имеет вид [35]:

$$T(\vec{x}, \vec{\xi}) = T_0(\vec{x}) + \varepsilon T_1(\vec{x}, \vec{\xi}) + \dots$$

Функция $H = 0$ там, где замерзание не произошло, и $H = 1$ там, где жидкость замерзла. Поскольку замерзание определяется температурой, то в первом приближении функция H зависит только от медленных координат: $H = H(\vec{x})$. Согласно теории метода осреднения [9, 35], напряжения и деформации зависят как от медленных, так и быстрых координат.

Таким образом, в соотношении (3.2.1) первое слагаемое предполагает возникновение деформаций за счет действия внешней механической нагрузки, второе слагаемое описывает тепловое расширение грунта при изменении температуры без фазовых переходов, а третье слагаемое представляет расширение грунта при переходе поровой жидкости в лед.

Перемещения представимы в виде асимптотического разложения, первые члены которого имеют вид:

$$u_k(\vec{x}, \vec{\xi}) = v_k(\vec{x}) + \varepsilon N_{kprq}(\vec{\xi}) v_{p,q}(\vec{x}) + \varepsilon M_k(\vec{\xi}) T(\vec{x}) + \varepsilon L_k(\vec{\xi}) H(\vec{x}) + \dots, \quad (3.2.2)$$

где N_{kprq} , M_k и L_k – локальные функции быстрых координат, а $v_k(\vec{x})$ – «медленные» компоненты вектора перемещения. Здесь и далее запятая обозначает частные производные по медленным или быстрым координатам в зависимости от контекста.

Подставим выражение для u_k в уравнение равновесия:

$$[C_{ijkl} u_{k,l}]_{,j} + X_i = 0, \quad \vec{x} \in V. \quad (3.2.3)$$

В результате получаем три локальные задачи для определения функций N_{kprq} , M_k и L_k . Локальная задача для определения функции N_{kprq} описывается стандартным уравнением:

$$[C_{ijkl}(\vec{\xi}) N_{kprq,l} + C_{ijpq}(\vec{\xi})]_{,j} = 0, \quad \vec{\xi} \in V_{RVE}, \quad (3.2.4)$$

с граничными условиями, которые подробно обсуждаются в параграфе 3.1.

Задача для определения локальных функций M_k имеет вид [35]:

$$[C_{ijkl}(\vec{\xi}) M_{k,l} - \beta_{ij}(\vec{\xi})]_{,j} = 0, \quad \vec{\xi} \in V_{RVE}. \quad (3.2.5)$$

Наш интерес представляет третья локальная задача, так как ее решение даст нам возможность вычислить эффективный тензор расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании γ_{ij}^{eff} :

$$[C_{ijkl}(\vec{\xi})L_{k,l} - \gamma_{ij}(\vec{\xi})]_{,j} = 0, \quad \vec{\xi} \in V_{RVE}, \quad (3.2.6)$$

где

$$R_{ij}(\vec{\xi}) = C_{ijkl}(\vec{\xi})L_{k,l} - \gamma_{ij}(\vec{\xi}), \quad \gamma_{ij}^{eff} = \langle R_{ij} \rangle = \langle -\sigma_{ij} \rangle.$$

Если решения задач (3.2.3)–(3.2.5) найдены, то напряжения вычисляются в виде:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, \vec{\xi}) = P_{ijpq}(\vec{\xi})v_{p,q} + Q_{ij}(\vec{\xi})T(\vec{x}) + R_{ij}(\vec{\xi})H(\vec{x}),$$

где

$$\begin{aligned} P_{ijpq}(\vec{\xi}) &= C_{ijkl}(\vec{\xi})N_{kpq,l} + C_{ijpq}(\vec{\xi}), \\ Q_{ij}(\vec{\xi}) &= C_{ijkl}(\vec{\xi})M_{k,l} - \beta_{ij}(\vec{\xi}), \\ R_{ij}(\vec{\xi}) &= C_{ijkl}(\vec{\xi})L_{k,l} - \gamma_{ij}(\vec{\xi}). \end{aligned}$$

При этом осредненное уравнение равновесия имеет вид:

$$[\langle P_{ijpq} \rangle(\vec{x})v_{p,q}] + [\langle Q_{ij} \rangle(\vec{x})T] + [\langle R_{ij} \rangle(\vec{x})H] + X_i(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in V,$$

где угловые скобки означают осреднение по V_{RVE} .

Перейдем к вычислению параметра γ_{ij}^{eff} в общем случае для открытых и закрытых пор. Для вычисления γ_{ij}^{eff} нужно решить задачу (3.2.6).

При решении этой задачи учтем тот факт, что образование льда всегда начинается вдали от границы поры [30], и при замерзании воды в поре между льдом и границей скелета остается тонкий слой воды. В этом слое действует гидростатическое давление p , которое препятствует расширению льда и способствует сжатию материала скелета.

Следовательно, решение задачи (3.2.6) целесообразно начать с определения этого давления. Очевидно, что, зная p , можно решить до конца локальную задачу (3.2.6), т.е. найти перемещения в скелете и во льду, которые находятся под действием соответственно внутреннего и внешнего давления p .

Первая задача аналогична локальным задачам, которые описаны в параграфе 3.1 и рассматривались в [1, 47, 49, 57], где они решались методом конечных элементов.

Для определения p будем использовать неизменность объема представительной области V_{RVE} . В рамках малых деформаций сумма изменений объемов скелета и льда равна нулю:

$$\theta_s(1 - n) + \theta_{ice}n = 0, \quad (3.2.7)$$

где n – объемная доля порового пространства (объем, занимаемый тонким слоем жидкости между льдом и границей поры, не будем учитывать ввиду его малости).

В случае **закрытых пор** относительные изменения объема льда θ_{ice} и объема скелета породы θ_s связаны с давлением p следующими соотношениями:

$$\gamma - p = K_{ice}\theta_{ice}, \quad p = -k_s\theta_s, \quad (3.2.8)$$

где $\gamma = K_{ice}\theta_{ice}^{full}$, $K_{ice} = 8,3 \cdot 10^3$ МПа – коэффициент объемного изотермического расширения льда, $\theta_{ice}^{full} = 0,09$, $\gamma = 747$ МПа.

Коэффициент k_s неизвестен и зависит как от материала скелета, так и от формы пор. В силу линейности для определения неизвестного коэффициента k_s нужно решить численно локальную задачу о действии на границе поры любого заданного давления p^* :

$$k_s = p^* / \theta_s^*,$$

где θ_s^* – вычисленное относительное изменение объема твердой фазы.

Уравнение сохранения объема (3.2.7) с учетом выражений для p и $\gamma - p$ (3.2.8) принимает вид:

$$\frac{p}{k_s}(1 - n) + \frac{p - \gamma}{K_{ice}}n = 0.$$

Отсюда находим давление жидкости в тонком слое между льдом и скелетом:

$$p = \frac{nyk_s}{(1 - n)K_{ice} + nk_s}.$$

Зная p , можно вычислить напряжения σ_{ij}^s в скелете, используя КЭ решение. А в области льда напряжения вычисляются по формуле: $\sigma_{ij}^{ice} = -p\delta_{ij}$. Тогда осредненное напряжение, возникшее в результате замерзания воды в порах, будет:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = -\frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_s} \sigma_{ij}^s dV - np\delta_{ij}.$$

Отсюда получаем тензор расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании:

$$\gamma_{ij}^{eff} = \langle -\sigma_{ij} \rangle.$$

В случае **открытых пор**, если зерна скелета полностью находятся внутри жидкости, $k_s = K_s$, где K_s – коэффициент объемного сжатия материала скелета. Поэтому для открытых пор численное решение не требуется, и коэффициент относительного расширения пористой среды находится в виде формулы:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = -p\delta_{ij}, \quad \gamma_{ij}^{eff} = \langle -\sigma_{ij} \rangle = \frac{n\gamma K_s}{(1-n)K_{ice} + nK_s} \delta_{ij}.$$

Примеры расчета

Описанная методика была применена для расчета коэффициента расширения при замерзании модельных образцов (рис. 3.2.1) одинаковой пористости с порами разной формы и образца вулканического туфа (рис. 3.2.2) из Мутновского геотермального района на Камчатке. Туф состоит из обломков лавы андезитового состава, которые облекают цеолитовые пленки толщиной 30-40 мкм, при этом межобломочное пространство часто остается пустым [43]. Свойства модельных образцов и компонентов туфа (модуль упругости, коэффициент Пуассона, пористость), принятые в расчетах, представлены в табл. 3.2.1.

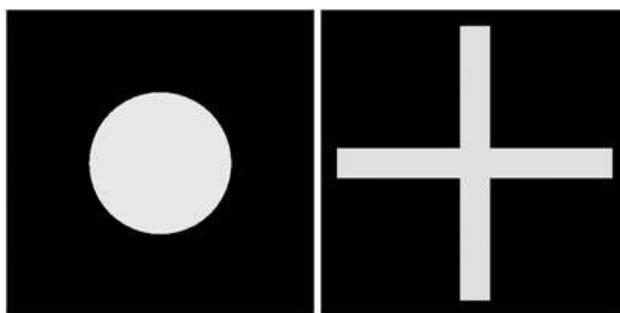


Рис. 3.2.1. Модели с разной формой пор.

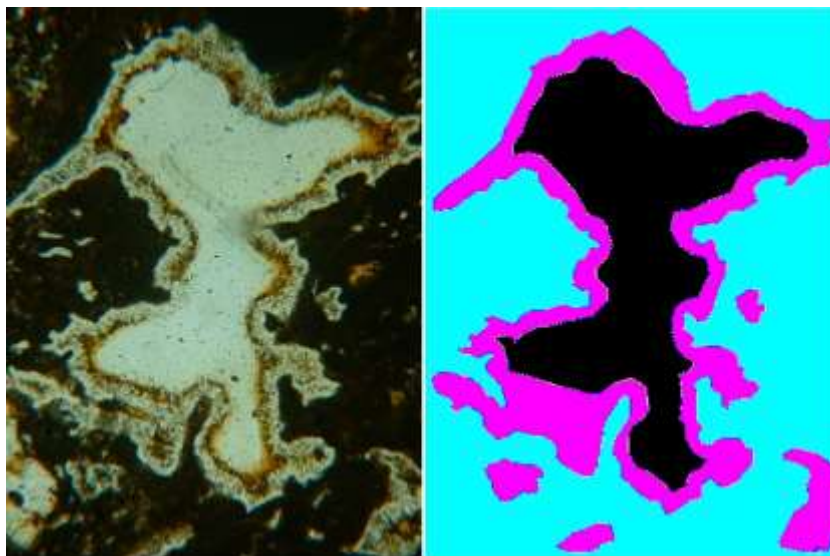


Рис. 3.2.2. Фотография шлифа (слева) и модели (справа) вулканического туфа. Высота образца 0,9 мм.

В табл. 3.2.2 показаны результаты расчетов по методу осреднения. Как видно, величина отношения эффективных коэффициентов расширения γ_{ij} образцов при замерзании, вычисленных методом осреднения, к коэффициенту расширения льда γ , сильно зависит от формы пор: для крестообразной поры $\gamma_{\alpha\alpha}/\gamma = 0,45$, для круглой $\gamma_{\alpha\alpha}/\gamma = 0,28$ при одинаковой пористости 17%.

Расчеты эффективного тензора расширения вулканического туфа при замерзании воды в порах показали, что $\gamma_{11}^{eff} = 0,34\gamma$, а $\gamma_{22}^{eff} = 0,29\gamma$, что доказывает необходимость при исследовании НДС массива пород определять истинные значения коэффициентов расширения пород при замерзании, а не принимать их равными коэффициенту ($\gamma = 747$ МПа) расширения воды при

переходе в лед. Образец туфа характеризуется слабой анизотропией по коэффициенту расширения при замерзании, что обусловлено структурой его порового пространства и неоднородным составом твердой фазы.

Таблица 3.2.1.

Свойства компонентов матрицы, принятые в расчетах.

Образец		E , МПа	ν
Круг		66700	0,15
Крест		66700	0,15
Туф	Лава	22000	0,20
	Цеолиты	28000	0,22

Таблица 3.2.2.

Результаты расчетов по методу осреднения

	n , %	k_s , МПа	K_s , МПа	$\frac{k_s}{K_s}$	p , МПа	γ_{11} , МПа	γ_{22} , МПа	γ_{12} , МПа	$\frac{\gamma_{11}}{\gamma}$	$\frac{\gamma_{22}}{\gamma}$
Круг	17	216775	41429	5,3	629	206	206	0	0,28	0,28
Крест	17	58874	41429	1,4	442	333	333	0	0,45	0,45
Туф	22	31112	~18500	1,7	382	256	218	0,5	0,34	0,29

Заключение

1. Сформулирована вариационная линеаризованная постановка полностью нелинейной (физически и геометрически) связанной задачи консолидации в скоростях перемещений и изменения давления воды, где все переменные зависят от лагранжевых координат твердой фазы скелета. В этой постановке в качестве определяющих соотношений могут использоваться соотношения упругости, деформационная теория пластичности или теория течения.
2. Реализовано численное решение связанной нелинейной задачи консолидации с использованием обобщения неявной схемы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы.
3. На тестовых примерах проведен анализ устойчивости решения линейной задачи консолидации при аппроксимации элементами Q1-Q1 и Q2-Q1. Результаты расчета модельной задачи со штампом подтвердили известный в литературе вывод, что аппроксимация седловой задачи квадратичными конечными элементами Q2 для перемещений скелета грунта и трилинейными КЭ Q1 для давления воды обеспечивает устойчивость решения задачи, а применение элементов Q1-Q1 приводит, вообще говоря, к неустойчивой системе уравнений.
4. Показано, что при использовании конечных элементов Q1-Q1 устойчивость решения линейной седловой задачи можно улучшить, увеличивая соотношение шага по времени к квадрату шага сетки $\left(\frac{\tau}{h^2}\right)$, т.е. увеличивая шаг по времени или измельчая конечно-элементную сетку.
5. Исследовано влияние геометрической нелинейности на результаты решения связанной задачи консолидации и показано, что на первых шагах по времени расчетные значения давления воды в линейной задаче значительно выше, чем в геометрически нелинейной, и эта разница увеличивается при увеличении заданного перемещения штампа.

6. Проведено сравнение решения задачи консолидации при аппроксимации гиперупругого материала потенциалами Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана–Кирхгофа и на примере расчета задачи со штампом показано, что потенциалы Муни, Муни-Ривлина и Трелоара дают близкие результаты, а квадратичный потенциал Сен-Венана–Кирхгофа, по-видимому, не подходит для аппроксимации материала при деформации 20%.
7. На примере расчетов модельной задачи со штампом показано, что учет влияния изменения пористости и проницаемости материала в процессе его деформирования приводит к существенному увеличению величин порового давления на начальном этапе процесса консолидации.
8. Разработанная нелинейная модель консолидации, учитывающая изменение пористости и проницаемости, применена для моделирования гиперупругого деформирования биологического материала, насыщенного кровью или плазмой.
9. Решена модельная задача об упругопластическом деформировании пористого водонасыщенного песчаного грунта при действии штампа. Для моделирования определяющих соотношений упругопластического деформирования грунта при кратковременных нагрузках была использована модель Григоряна (1960), обобщенная на большие деформации.
10. На основе асимптотического метода осреднения и решения локальных задач в представительной области разработаны процедуры определения тензора передачи порового давления (параметра Био) и тензора расширения водонасыщенного пористого грунта при замерзании воды в порах. Методы опробованы на реальных грунтах.
11. Изучено влияние пористости, формы пор и минерального состава на модуль Юнга, параметр Био и тензор расширения пористой водонасыщенной среды при замерзании, получены зависимости первых двух параметров от пористости.

Литература

1. *Артамонова Н.Б., Мукатова А.Ж., Шешенин С.В.* Асимптотический анализ уравнения равновесия флюидонасыщенной пористой среды методом осреднения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. №2. С.115–129.
2. *Артамонова Н.Б., Фролова Ю.В., Шешенин С.В.* Вычислительная методика определения тензора передачи порового давления // Сборник материалов научно-практической конференции «Инженерно-геологические задачи современности и методы их решения». Москва, Россия. 13-14 апреля 2017 г. М.: Геомаркетинг М, 2017. С.240–247.
3. *Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.* Вычисление эффективных свойств грунтов // Сборник трудов 7-ой Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, Россия. 21-23 ноября 2017 г. М.: ИПРИМ РАН, 2017. С.272–274.
4. *Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.* Математическая формулировка и метод решения связанной задачи консолидации в нелинейной постановке // Сборник трудов 9-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию Института прикладной механики РАН. Москва, Россия. 19-21 ноября 2019 г. М.: ИПРИМ РАН, 2019. С.21–24.
5. *Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.* Связанная задача консолидации в нелинейной постановке. Теория и метод решения // Механика композиционных материалов и конструкций. 2020. Т.26. №1. С.122–138.

6. *Артамонова Н.Б., Шешенин С.В., Фролова Ю.В., Новиков П.В., Орлов Е.А., Кузнецов Р.А.* Применение асимптотического метода осреднения для оценки эффективных свойств грунтов // *Материалы X-ой научно-практической конференции «Ломоносовские чтения» (Душанбе, 25-26 сентября 2020 г.)*. Т.1. Душанбе: Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, 2020. С.102–107.
7. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
8. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 488 с.
9. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1984. 352 с.
10. *Болдырев Г.Г., Муйземнек А.Ю., Малышев И.М.* Численное моделирование оснований при больших деформациях. Пенза: ПГУАС, 2007. 14 с. (Препринт / docplayer.ru/31152946)
11. *Быченков Ю.В., Чижонков Е.В.* Итерационные методы решения седловых задач. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. 349 с.
12. *Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б.* Асимптотическое усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в многофазных средах с периодической структурой // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2012. Т.18. №1. С.92–110.
13. *Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Саваторова В.Л., Талонов А.В.* Усреднение нестационарных уравнений фильтрации вязкого вещества в деформируемой пористой среде // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2013. Т.19. №4. С.535–554.
14. *Власов А.Н., Мерзляков В.П.* Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород. М.: Изд-во Ассоц. строительных вузов, 2009. 207 с.

15. *Власов А.Н., Саваторова В.Л., Талонов А.В.* Усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в слоистой пористой среде // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2010. Т.16. №4. С.483–502.
16. *Гидрогеология. Часть 1: методические указания к практическим занятиям / А.Я. Гаев и др.* Оренбург: ОГУ, 2010. 75 с.
17. *Григорян С.С.* Об основных представлениях динамики грунтов // *Прикладная математика и механика*. 1960. Т.24. С.1057–1072.
18. *Добрынин В.М.* Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. М.: Недра, 1970. 239 с.
19. *Добрынин В.М.* Физические свойства нефтегазовых коллекторов в глубоких скважинах. М.: Недра, 1965. 163 с.
20. *Ентов В.М.* Теория фильтрации // *Соросовский образовательный журнал*. 1998. №2. С.121–128.
21. *Какушев Э.Р.* Численное решение связанных трехмерных краевых задач упругой пористой среды // *Дисс. соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук*. Москва, 2013. 111 с.
22. *Какушев Э.Р., Шешенин С.В.* Связанная и несвязанная модели нестационарной фильтрации // *Вестник ЦКР Роснедра*. 2012. № 2. С. 27–35.
23. *Капитонов А.М., Васильев В.Г.* Физические свойства горных пород западной части Сибирской платформы. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. 424 с.
24. *Киселев Ф.Б.* Численное моделирование в задачах механики грунтов // *Дисс. соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук*. Москва, 2006. 101 с.
25. *Киселев Ф.Б., Шешенин С.В.* Моделирование контакта подземных сооружений с упруговязкопластическим грунтом // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*. 2006. №3. С.61–65.
26. *Киселев Ф.Б., Шешенин С.В.* Разностная схема для задачи нестационарной фильтрации в слоистых грунтах // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 1996. №4. С.129–135.

27. *Коллинз Р.* Течение жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.
28. *Комаров И.А.* Термодинамика и тепломассообмен в дисперсных мерзлых породах. М.: Научный мир, 2003. 608 с.
29. Конструирование и расчет нежестких дорожных одежд // Под ред. *Н.Н. Иванова*. М.: Транспорт, 1973. 328 с.
30. *Макарова И.А., Лохова Н.А.* Физико-химические методы исследования строительных материалов. Братск: Изд-во БрГУ, 2011. 139 с.
31. *Низматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 464 с.
32. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 339 с.
33. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.
34. *Павловский Н.Н.* Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения. Петербург: Научно-мелиорационный институт, 1922. 752 с.
<https://dlib.rsl.ru/viewer/01007210733#?page=107>
35. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
36. *Рыков Г.В., Скобеев А.М.* Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. М.: Наука, 1978. 168 с.
37. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород / Под ред. *Н.В. Мельникова, В.В. Ржевского, М.М. Протодьяконова*. М.: Недра, 1975. 279 с.
38. Справочник по нефтепромысловой геологии / *Н.Е. Быков, А.Я. Фурсов, М.И. Максимов* и др. М.: Недра, 1981. 525 с.
39. Справочник физических констант горных пород / Под ред. *С. Кларка мл.* М.: Мир, 1969. 543 с.

40. *Фасхеев И.О.* Моделирование механических процессов в пористых наполненных средах с учетом интерактивных сил // Дисс. соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. Москва, 2017. 95 с.
41. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика) / Под ред. *Н.Б. Дортман.* М.: Недра, 1984. 455 с.
42. *Фролова Ю.В.* Закономерности изменения состава и свойств гиаалокластитов Исландии в процессе литогенеза // Вестн. МГУ. Сер. 4. Геология. 2010. № 2. С. 45–55.
43. *Фролова Ю.В., Ладыгин В.М.* Петрофизические преобразования пород Мутновского вулканического района (Южная Камчатка) под воздействием гидротермальных процессов // Вестн. КРАУНЦ. Сер. Науки о Земле. 2008. №1 (вып. 11). С.158–170.
44. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. 436 с.
45. *Шестаков В.М.* Гидрогеодинамика. М.: КДУ, 2009. 334 с.
- 46. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. Моделирование нелинейной связанной задачи консолидации // Механика композиционных материалов и конструкций. 2020. Т.26. №3. С.341–361.**
- 47. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Мукатова А.Ж. Применение метода осреднения для определения коэффициента передачи порового давления // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. №2. С.42–45.**
- 48. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. Физически и геометрически нелинейная связанная задача консолидации // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.). Т.2. Ростов-на-Дону – Таганрог: Изд-во Южного федерального университета, 2020. С.266–270.**
- 49. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Фролова Ю.В., Ладыгин В.М. Определение упругих свойств и тензора передачи порового давления**

- горных пород методом осреднения // Вестник МГУ. Сер. 4. Геология. 2015. №4. С.90–97.
50. *Шешенин С.В., Какушев Э.Р., Артамонова Н.Б.* Моделирование нестационарной фильтрации, вызванной разработкой месторождений // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. №5. С.66–68.
51. *Шешенин С.В., Киселев Ф.Б., Артамонова Н.Б.* Неявные численные схемы в задачах фильтрации в пористых средах // Вестник МГСУ. 2011. №6. С.312–317.
52. *Шешенин С.В., Лазарев Б.П., Артамонова Н.Б.* Асимптотический анализ расширения флюидо-насыщенной пористой среды при фазовом переходе // Сборник материалов «Упругость и неупругость» Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, Россия. 20-21 января 2016 г. М.: Изд-во МГУ, 2016. С.267–270.
53. *Шешенин С.В., Лазарев Б.П., Артамонова Н.Б.* Применение асимптотического метода осреднения для определения коэффициента расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. №6. С.32–36.
54. *Щелкачев В.Н., Ланук Б.Б.* Подземная гидравлика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 736 с.
55. *Щелкачев В.Н.* Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. Ч.2. М.: Нефть и газ, 1995. 493 с.
56. *Alam M. M., Fabricius I. L., Christensen H. F.* Static and dynamic effective stress coefficient of chalk // Geophysics. 2012. Vol.77. No.2. P.L1–L11.
57. *Artamonova N.B., Sheshenin S.V., Frolova Yu V., Bessonova O.Yu, Novikov P.V.* Calculating components of the effective tensors of elastic moduli and Biot's parameter of porous geocomposites // Mechanics of Composite Materials. 2020. Vol.55. No.6. P.715–726.

58. *Ayyalasomayajula A., Vande Geest J.P., Simon B.R.* Poro-hyperelastic finite element modelling of abdominal aneurysms // *J. Biomed. Eng. ASME*. 2010. Vol.132. P.104502–104501-8.
59. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. New York: Elsevier, 1972. 764 p.
60. *Biot M.A.* General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*. 1956. Vol.23. No.1. P.91–96.
61. *Biot M.A.* General theory of three-dimensional consolidation // *Journal of Applied Physics*. 1941. Vol.12. No.2. P.155–164.
62. *Biot M.A., Willis D.G.* The elastic coefficients of the theory of consolidation // *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol.24. P.594–601.
63. *Bonet J., Gil A.J., Wood R.D.* Worked examples in nonlinear continuum mechanics for finite element analysis // New York: Cambridge University Press, 2012. 138 p.
64. *Bonet J., Wood R.D.* Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis // New York: Cambridge University Press, 2008. 340 p.
65. *Borja R.I., Alarcón E.* A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1995. Vol.122. P.145–171.
66. *Borja R.I., Tamagnini C., Alarcón E.* Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation and numerical examples // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1998. Vol.159. P.103–122.
67. *Carroll M.M.* An Effective Stress Law for Anisotropic Elastic Deformation // *J. Geoph. Research*. 1979. Vol.84. P.7510–7512.
68. *Carter J.P., Booker J.R., Davis E.H.* Finite deformation of an elasto-plastic soil // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 1977, Vol.1, P.25–43.
69. *Carter J.P., Booker J.R., Small J.C.* The analysis of finite elasto-plastic consolidation. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 1979. Vol.3. P.107–129.
70. *Chesnokov E.M., Ammerman M., Sinha S., Kukharensko Y.A.* Tensor Character of Biot Parameter in Poroelastic Anisotropic Media Under Stress: Static and

- Dynamic Cases // Proc. 2nd Int. Workshop Rainbow in the Earth. Berkley, California, 2005.
71. *Darcy H.* Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris, 1856. 647 p.
72. *Dean R.H., Gai X., Stone C.M., Minkoff S.E.* A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. SPE J. 2006. Vol.11. P.132-140.
73. *Di Y., Sato T.* Computational modelling of large deformation of saturated soils using an ALE finite element method // Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ. No.47 C. 2004. P.1–11.
74. *Donea J.* Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods // Computational methods for transient analysis (*T. Belytschko* and *T.J.R. Hughes*, eds). Amsterdam: Elsevier Scientific, 1983. P.473–516.
75. *Donea J., Fasoli-Stella P., Giuliani S.* Lagrangian and Eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems // Transactions of the 4th SMIRT Conference, Vol. B. paper B1/2, San Francisco, 1977, 15-19 August.
76. *Donea J., Giuliani S., Halleux J.-P.* An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1982. Vol.33. P.689–723.
77. *Donea J., Huerta A.* Finite element methods for flow problems. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003. 358 p.
78. *El-Amrani M., Seaid M.* Eulerian–Lagrangian time-stepping methods for convection-dominated problems // Int. J. Computer Math. 2008. Vol.85. P.421–439.
79. *Fatt I.* Compressibility of sandstones at low to moderate pressures // Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geol. 1958. Vol.42. No.8. P.1924–1957.
80. *Fitts C.R.* Groundwater science. Academic Press. 2002. 450 p.
81. *Fung Y.C.* Biomechanics // Applied Mechanics Reviews. 1985. Vol.38. P.1251–1255.
82. *Fung Y.C.* Biomechanics: mechanical properties of living tissue. New York: Springer-Verlag, 1993. 584 p.

83. *Geertsma J.* The Effect of Fluid Pressure Decline on Volumetric Changes of Porous Rocks // *Trans. AIME.* 1957. Vol.210. P.331–339.
84. *Gueguen Y., Bouteau M.* *Mechanics of fluid-saturated rocks.* Elsevier Acad. Press, 2004. 450 p.
85. *Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L.* An Arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds // *Journal of Computational Physics.* 1974. Vol.14. No.3. P.227–253.
86. *Jeannin L., Mainguy M., Masson R., Vidal-Gilbert S.* Accelerating the convergence of coupled geomechanical-reservoir simulations. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2006. Vol.31. Iss.10. P.1163–1181.
87. *Kim J., Tchalepi H.A., Juanes R.* Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics. *SPE J.* 2011. Vol.16. P.249–262.
88. *Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N.* *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow.* John Wiley & Sons, 2004. 335 p.
89. *Liu Z., Liu R.* A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part I: Theory and formulation. // *Comput. Geosci.* 2018. Vol.22. Iss.3. P.623–637.
90. *Luo X., Were P., Liu J., Hou Zh.* Estimation of Biot's effective stress coefficient from well logs // *Environmental Earth Sciences.* 2015. Vol.73. P.7019–7028.
91. *Mei C.C.* Micro-scale basis of seepage flow. *Theory of homogenization // Lectures Notes on Fluid Dynamics.* 2002. Chapter 6.2. P.1–7.
92. *Mojarad R.S., Settari A.* New solution for anisotropic formation damage due to produced water re-injection // *J. Can. Petrol. Technol.* 2009. Vol.48. Iss.4. P.1–7.
93. *Mondol N.H., Jahren J., Bjorlykke K., Brevik I.* Elastic properties of clay minerals // *The Leading Edge,* June 2008. P.758–770.
94. *Mróz Z., Zienkiewicz O.* Uniform formulation of constitutive equations for clays and sands // *Mechanics of Engineering Materials / Eds. C.S. Desai, R.H. Gallaher.* New York: Wiley, 1984. P.415–449.

95. *Nazem M., Sheng D.* Arbitrary Lagrangian-Eulerian Method for Consolidation Problems in Geomechanics // Proc. VIII Int. Conf. Comput. Plasticity. COMPLAS VIII. Eds.: *E. Onate, D.R.J. Owen*. Barcelona, 2005. P.1–4.
96. *Nowakowski A.* The law of effective stress for rocks in light of results of laboratory experiments // Archives of Mining Sciences. 2012. Vol.57. No.4. P.1027–1044.
97. *Nur A., Byerlee J.D.* An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids // J. Geophys. Research. 1971. Vol.76. No.26. P. 6414–6419.
98. *Omdal E., Breivik H., Næss K.E., Ramos G.G., Kristiansen T.G., Korsnes R.I., Hiorth A., Madland M.V.* Experimental investigation of the effective stress coefficient for various high porosity outcrop chalks // The Int. Symp. of the Society of Core Analysis, Abu Dhabi, UAE, 29 October-2 November, 2008.
99. *Sarker R., Batzle M.* Effective stress coefficient in shales and its applicability to Eaton's equation // The Leading Edge, June, 2008. P. 798–804.
100. *Savatorova V.L., Talonov A.V., Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B.* Averaging the nonstationary equations of viscous substance filtration through a rigid porous medium // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. 2014. Vol.5. No.1. P.35–61.
101. *Savatorova V.L., Talonov A.V., Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B.* Brinkman's filtration of fluid in rigid porous media: multiscale analysis and investigation of effective permeability // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. 2015. Vol.6. No.3. P.239–264.
102. *Savatorova V.L., Vlasov A.N.* Modeling of viscous fluid filtration in porous media with cylindrical symmetry // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. 2013. Vol.4. No.1. P.1–20.
103. *Selladurai B., Reilly P.* Initial management of head injury: A Comprehensive Guide. McGraw-Hill Medical. 2007. 315 p.
104. *Selvadurai A.P.S., Suvorov A.P.* Coupled hydro-mechanical effects in a poro-hyperelastic material // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol.91. P.311–333.

105. *Settari A., Mourits F.M.* A coupled reservoir and geomechanical simulation system // SPE J. 1998. Vol.3. Iss.3. P.219–226.
106. *Settari A., Walters D.A.* Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction // SPE J. 2001. Vol.6. Iss.3. Pp.334–342.
107. *Skempton A.W.* Effective stress in soils, concrete and rocks // Proceedings of Conference on Pore Pressure and Suction in Soils. Butterworth. London. 1960. P. 4–16.
108. *Simo J.C., Hughes T.J.R.* Computational inelasticity. New York: Springer-Verlag, 1998. 392 p.
109. *Simon B.R., Gaballa M.A.* Finite strain, poroelastic finite element models for arterial cross sections // In: R.L. Spilker, B.R. Simon (Eds.) Computational methods in bioengineering. BED (Series). Vol.9. New York: ASME, 1988. P.325–334.
110. *Simon B.R.* Multiphase poroelastic finite element models for soft tissue structures // Appl. Mech. Rev. 1992. Vol.45. P.191–218.
111. *Small J.C., Booker J.R., Davis E.H.* Elasto-plastic consolidation of soils. Int. J. Solids and Struct. 1976. Vol.12. P.431–448.
112. Soft rock mechanics and engineering / Red. *Milton Kanji, Manchao He, Luis Ribeiro e Sousa.* Springer, 2020. 757 p.
113. *Spilker R.L., Simon B.R.* Computational methods in bioengineering. BED (Series). Vol. 9. New York: ASME, 1988.
114. *Streeter V.L., Wylie E.B.* Fluid mechanics. New York: McGraw Hill, 1979. 562 p.
115. *Suvorov A.P., Selvadurai A.P.S.* On poro-hyperelastic shear // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol.96. P.445–459.
116. *Thompson M., Willis J.R.* A Reformulation of the Equations of Anisotropic Poroelasticity // J. Appl. Phys. 1991. Vol.58. P.612–616.

117. *Todd T., Simmons G.* Effect of pore pressure on the velocity of compressional waves in low-porosity rocks // *J. Geophys. Research.* 1972. Vol.77. P. 3731–3743.
118. *Vanorio T., Prasad M., Nur A.* Elastic properties of dry clay mineral aggregates, suspensions, and sandstones // *Geophysical Journal International,* 2003. Vol.55. P.319–326.
119. *Wang Zh., Wang H., Cates M.E.* Effective elastic properties of solid clays // *Geophysics.* 2001. Vol.66. No.2. P.428–440.
120. *Wheeler M.F., Gai X.* Iteratively Coupled Mixed and Galerkin Finite Element Methods for Poro-Elasticity. *Numer. Meth. Partial Differ. Eqs.* 2007. Vol.23. Iss.4. P.785–797.
121. *Zhao Ying, Chen Mian, Zhang Guangqing* Effective stress law for anisotropic double porous media // *Chinese Science Bulletin.* 2004. Vol.49. No.21. P. 2327–2331.
122. *Zhurov A.I., Limbert G., Aeschlimann P., Middleton J.* A constitutive model for the periodontal ligamentasa compressible transversely isotropic visco-hyperelastic tissue. *Comp. Meth. Biomech. Biomed. Eng.* 2007. Vol.10. P.223–235.

**Линеаризация вариационного уравнения равновесия
в начальной конфигурации**

Рассмотрим линеаризацию вариационного уравнения равновесия в начальной конфигурации (1.9.3)

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \tilde{S}^{eff}(\tilde{u}) : D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \tilde{C}^{-1}(\tilde{u}) : D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] d\overset{\circ}{V} - A^e[\tilde{w}] = 0, \forall \tilde{w}, \quad (1.9.3)$$

в случае «мертвой» нагрузки:

$$A^e[\tilde{w}] = \int_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} \vec{f}(\vec{X}, t) \cdot \tilde{w} d\overset{\circ}{V} + \int_{\overset{\circ}{\Sigma}_2} \vec{S}^0(\vec{X}, t) \cdot \tilde{w} d\overset{\circ}{\Sigma}.$$

При дифференцировании будем пользоваться дифференциалом Гато. Дифференциал функционала L в смысле Гато вычисляется по формуле:

$$DL(\tilde{u})[\tilde{w}] = \left. \frac{dL(\tilde{u} + \zeta \tilde{w})}{d\zeta} \right|_{\zeta=0}.$$

DL зависит нелинейно от \tilde{u} и линейно от \tilde{w} . Если при дифференцировании окажется, что зависимость от \tilde{w} нелинейна, то дифференциал Гато не существует.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\zeta} \int_{\overset{\circ}{V}} \tilde{S}^{eff}(\tilde{u} + \zeta d\tilde{u}) : D\tilde{E}(\tilde{u} + \zeta d\tilde{u})[\tilde{w}] \Big|_{\zeta=0} d\overset{\circ}{V} - \\ & - \frac{d}{d\zeta} \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J(\tilde{u} + \zeta d\tilde{u}) \tilde{C}^{-1}(\tilde{u} + \zeta d\tilde{u}) : D\tilde{E}(\tilde{u} + \zeta d\tilde{u})[\tilde{w}] \Big|_{\zeta=0} d\overset{\circ}{V} = dA^e[\tilde{w}] \end{aligned}$$

1) 2)

$$\int_{\overset{\circ}{V}} D\tilde{S}^{eff}(\tilde{u})[d\tilde{u}] : D\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}] d\overset{\circ}{V} + \int_{\overset{\circ}{V}} \tilde{S}^{eff}(\tilde{u}) : D^2\tilde{E}(\tilde{u})[\tilde{w}, d\tilde{u}] d\overset{\circ}{V} -$$

3)

$$- \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha dp J \tilde{C}^{-1}(\vec{u}) : D\tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p DJ(\vec{u})[d\vec{u}] \tilde{C}^{-1}(\vec{u}) : D\tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} +$$

4)

$$- \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J D \tilde{C}^{-1}(\vec{u})[d\vec{u}] : D\tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \tilde{C}^{-1}(\vec{u}) : D^2\tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}, d\vec{u}] d\overset{\circ}{V} =$$

$$= dA^e[\vec{w}]$$

Проведем промежуточные выкладки для простоты в декартовой системе координат, затем запишем в инвариантном виде.

$$1) D\tilde{S}^{eff}(\vec{u})[d\vec{u}] = \frac{\partial S^{eff}}{\partial \tilde{E}} : D\tilde{E}(\vec{u})[d\vec{u}] = \tilde{C}^E : D\tilde{E}(\vec{u})[d\vec{u}]$$

$$\tilde{C}^E = \frac{\partial S^{eff}}{\partial \tilde{E}}; \quad \tilde{C}^E - \text{касательный модуль}$$

$$D\tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}] = \frac{1}{2} \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \tilde{F}(\vec{u}) + \tilde{F}^T(\vec{u}) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_j}{\partial X_i} \vec{k}_i \vec{k}_j \cdot \frac{\partial x_m}{\partial X_n} \vec{k}_m \vec{k}_n + \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \vec{k}_i \vec{k}_j \cdot \frac{\partial w_m}{\partial X_n} \vec{k}_m \vec{k}_n \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j + \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial w_m}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j \right]$$

$$D\tilde{S}^{eff}(\vec{u})[d\vec{u}] : D\tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}] = D\tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}] : \tilde{C}^E : D\tilde{E}(\vec{u})[d\vec{u}] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \tilde{F}(\vec{u}) + \tilde{F}^T(\vec{u}) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right] : \tilde{C}^E : \frac{1}{2} \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right)^T \cdot \tilde{F}(\vec{u}) + \tilde{F}^T(\vec{u}) \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j + \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial w_m}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j \right] : [C_{pqrs}^E \vec{k}_p \vec{k}_q \vec{k}_r \vec{k}_s] :$$

$$: \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (du_n)}{\partial X_k} \frac{\partial x_n}{\partial X_l} \vec{k}_k \vec{k}_l + \frac{\partial x_n}{\partial X_k} \frac{\partial (du_n)}{\partial X_l} \vec{k}_k \vec{k}_l \right] =$$

(Учтем симметричность касательного модуля \tilde{C}^E .)

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial w_m}{\partial X_j} \frac{\partial x_m}{\partial X_i} C_{ijkl}^E \frac{\partial x_n}{\partial X_k} \frac{\partial (du_n)}{\partial X_l} = \frac{\partial w_m}{\partial X_j} C_{ijkl}^E F_{mi} F_{nk} \frac{\partial (du_n)}{\partial X_l} = \\
&= \frac{\partial w_m}{\partial X_j} C_{mjnl}^{TAN} \frac{\partial (du_n)}{\partial X_l} = \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^{TAN} : \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u}
\end{aligned}$$

$$C_{mjnl}^{TAN} = \frac{\partial x_m}{\partial X_i} C_{ijkl}^E \frac{\partial x_n}{\partial X_k} = C_{ijkl}^E F_{mi} F_{nk}; \quad \underset{\sim}{C}^E = \frac{\partial S^{eff}}{\partial \underset{\sim}{E}}$$

$$\int_{\overset{\circ}{V}} D \underset{\sim}{S}^{eff}(\vec{u})[d\vec{u}] : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} = \int_{\overset{\circ}{V}} \left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^{TAN}(\underset{\sim}{F}(\vec{u})) : \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right) d\overset{\circ}{V}$$

$$2) D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] = \frac{1}{2} \left[D \underset{\sim}{F}^T[\vec{w}] \cdot \underset{\sim}{F}(\vec{u}) + \underset{\sim}{F}^T(\vec{u}) \cdot D \underset{\sim}{F}[\vec{w}] \right]$$

$$\begin{aligned}
D^2 \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}, d\vec{u}] &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta} \left[D \underset{\sim}{F}^T[\vec{w}] \cdot \underset{\sim}{F}(\vec{u} + \zeta d\vec{u}) + \underset{\sim}{F}^T(\vec{u} + \zeta d\vec{u}) \cdot D \underset{\sim}{F}[\vec{w}] \right] \Big|_{\zeta=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left[D \underset{\sim}{F}^T[\vec{w}] \cdot D \underset{\sim}{F}[d\vec{u}] + D \underset{\sim}{F}^T[d\vec{u}] \cdot D \underset{\sim}{F}[\vec{w}] \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} + \left(\overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{S}^{eff}(\vec{u}) : D^2 \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}, d\vec{u}] &= \frac{1}{2} \underset{\sim}{S}^{eff}(\vec{u}) : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} + \left(\overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right] = \\
&= \frac{1}{2} (S_{ij}^{eff} \vec{k}_i \vec{k}_j) : \left[\frac{\partial w_l}{\partial X_k} \vec{k}_k \vec{k}_l \cdot \frac{\partial (du_m)}{\partial X_n} \vec{k}_m \vec{k}_n + \frac{\partial (du_l)}{\partial X_k} \vec{k}_k \vec{k}_l \cdot \frac{\partial w_m}{\partial X_n} \vec{k}_m \vec{k}_n \right] = \\
&= \frac{1}{2} S_{ij}^{eff} : \left[\frac{\partial w_m}{\partial X_i} \frac{\partial (du_m)}{\partial X_j} + \frac{\partial (du_m)}{\partial X_i} \frac{\partial w_m}{\partial X_j} \right] =
\end{aligned}$$

(Воспользуемся симметричностью второго тензора Пиолы-Кирхгофа $\underset{\sim}{S}$.)

$$= S_{ij}^{eff} \frac{\partial w_m}{\partial X_i} \frac{\partial (du_m)}{\partial X_j} = \underset{\sim}{S}^{eff}(\vec{u}) : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right]$$

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \underset{\sim}{S}^{eff}(\vec{u}) : D^2 \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}, d\vec{u}] d\overset{\circ}{V} = \int_{\overset{\circ}{V}} \underset{\sim}{S}^{eff}(\vec{u}) : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right] d\overset{\circ}{V}$$

$$3) DJ(\vec{u})[d\vec{u}] = \frac{\partial J(\vec{u})}{\partial \underset{\sim}{C}} : D \underset{\sim}{C}(\vec{u})[d\vec{u}] = 2 \frac{\partial J(\vec{u})}{\partial \underset{\sim}{C}} : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[d\vec{u}] =$$

$$\begin{aligned}
&= J\underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}): D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}] \\
&\int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p DJ(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}] \underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}): D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[\bar{\mathbf{w}}] d\overset{\circ}{V} = \\
&= \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \left(\underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}): D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}] \right) \left(\underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}): D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[\bar{\mathbf{w}}] \right) d\overset{\circ}{V} \\
4) D\underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}] &= \frac{\partial \underset{\sim}{C}^{-1}}{\partial \underset{\sim}{C}}: D\underset{\sim}{C}(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}] = 2 \frac{\partial \underset{\sim}{C}^{-1}}{\partial \underset{\sim}{C}}: D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J D\underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}]: D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[\bar{\mathbf{w}}] d\overset{\circ}{V} = \\
&= \int_{\overset{\circ}{V}} 2\alpha p J D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[\bar{\mathbf{w}}]: \left(\frac{\partial \underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}})}{\partial \underset{\sim}{C}(\bar{\mathbf{u}})} \right): D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}] d\overset{\circ}{V}
\end{aligned}$$

Получаем линеаризованное вариационное уравнение равновесия в начальной конфигурации:

$$\begin{aligned}
&\int_{\overset{\circ}{V}} \left(\overset{\circ}{\nabla} \bar{\mathbf{w}} : \underset{\sim}{C}^{TAN}(\bar{\mathbf{u}}): \overset{\circ}{\nabla} d\bar{\mathbf{u}} \right) d\overset{\circ}{V} + \int_{\overset{\circ}{V}} \underset{\sim}{S}^{eff}(\bar{\mathbf{u}}): \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \bar{\mathbf{w}} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\bar{\mathbf{u}} \right] d\overset{\circ}{V} - \\
&- \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha dp J \underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}): D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[\bar{\mathbf{w}}] d\overset{\circ}{V} - \\
&- \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \left(\underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}): D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}] \right) \left(\underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}): D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[\bar{\mathbf{w}}] \right) d\overset{\circ}{V} - \\
&- \int_{\overset{\circ}{V}} 2\alpha p J D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[\bar{\mathbf{w}}]: \left(\frac{\partial \underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}})}{\partial \underset{\sim}{C}(\bar{\mathbf{u}})} \right): D\underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[d\bar{\mathbf{u}}] d\overset{\circ}{V} - \\
&- \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \underset{\sim}{C}^{-1}(\bar{\mathbf{u}}): D^2 \underset{\sim}{E}(\bar{\mathbf{u}})[\bar{\mathbf{w}}, d\bar{\mathbf{u}}] d\overset{\circ}{V} = dA^e[\bar{\mathbf{w}}] \tag{1.9.4}
\end{aligned}$$

$$dA^e[\bar{\mathbf{w}}] = \int_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho} d\vec{f}(\vec{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{w}} d\overset{\circ}{V} + \int_{\overset{\circ}{\Sigma}_2} d\vec{S}^0(\vec{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{w}} d\overset{\circ}{\Sigma}$$

**Преобразование линеаризованного вариационного уравнения
равновесия к текущей конфигурации**

Теперь преобразуем уравнение (1.9.4) к текущей области.

$$\begin{aligned}
 & \text{1) } \int_{\overset{\circ}{V}} \left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^{TAN} \left(\underset{\sim}{F}(\vec{u}) \right) : \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right) d\overset{\circ}{V} + \int_{\overset{\circ}{V}} S^{eff}(\vec{u}) : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right] d\overset{\circ}{V} - \\
 & \text{2) } \\
 & \text{3) } - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha dp J \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D\underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} - \\
 & \text{4) } - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \left(\underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D\underset{\sim}{E}(\vec{u})[d\vec{u}] \right) \left(\underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D\underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] \right) d\overset{\circ}{V} - \\
 & \text{5) } - \int_{\overset{\circ}{V}} 2\alpha p J D\underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] : \left(\frac{\partial \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u})}{\partial \underset{\sim}{C}(\vec{u})} \right) : D\underset{\sim}{E}(\vec{u})[d\vec{u}] d\overset{\circ}{V} - \\
 & \text{6) } \text{7) } - \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D^2 \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}, d\vec{u}] d\overset{\circ}{V} = dA^e[\vec{w}] \tag{1.9.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{1) } \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^{TAN} \left(\underset{\sim}{F}(\vec{u}) \right) : \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} = \frac{\partial w_i}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j : [C_{pqrs}^{TAN} \vec{k}_p \vec{k}_q \vec{k}_r \vec{k}_s] : \frac{\partial (du_k)}{\partial X_l} \vec{k}_k \vec{k}_l = \\
 & = \frac{\partial w_i}{\partial X_j} \vec{k}_i \vec{k}_j : \left[\frac{\partial x_p}{\partial X_m} C_{mqns}^E \frac{\partial x_r}{\partial X_n} \vec{k}_p \vec{k}_q \vec{k}_r \vec{k}_s \right] : \frac{\partial (du_k)}{\partial X_l} \vec{k}_k \vec{k}_l = \\
 & = \frac{\partial w_m}{\partial X_q} \frac{\partial x_m}{\partial X_p} C_{pqrs}^E \frac{\partial x_n}{\partial X_r} \frac{\partial (du_n)}{\partial X_s} = \frac{\partial w_m}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_q} \frac{\partial x_m}{\partial X_p} \frac{\partial x_n}{\partial X_r} \frac{\partial (du_n)}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_s} C_{pqrs}^E =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial w_m}{\partial x_i} [F_{mp} F_{iq} F_{nr} F_{ls} C_{pqrs}^E] \frac{\partial (du_n)}{\partial x_l} = \frac{\partial w_m}{\partial x_i} [J C_{minl}^d] \frac{\partial (du_n)}{\partial x_l} = \\
&= J \vec{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^d : \vec{\nabla} d\vec{u} = J d(\vec{w}) : \underset{\sim}{C}^d : d(d\vec{u})
\end{aligned}$$

(Воспользовались симметричностью тензора $\underset{\sim}{C}^d$.)

$$C_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} C_{pqrs}^E; \quad F_{ip} = \frac{\partial x_i}{\partial X_p}; \quad J d\overset{\circ}{V} = dV$$

$$\underset{\sim}{d}(\vec{w}) = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \vec{w})^T + \vec{\nabla} \vec{w}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \vec{k}_i \vec{k}_j$$

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \left(\vec{\nabla} \vec{w} : \underset{\sim}{C}^{TAN}(\underset{\sim}{F}(\vec{u})) : \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right) d\overset{\circ}{V} = \int_{\underset{\sim}{V}} \left(\underset{\sim}{d}(\vec{w}) : \underset{\sim}{C}^d : d(d\vec{u}) \right) dV$$

$$\begin{aligned}
2) \underset{\sim}{S}^{eff}(\vec{u}) : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right] &= (S_{pq}^{eff} \vec{k}_p \vec{k}_q) : \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} \vec{k}_i \vec{k}_j \cdot \frac{\partial (du_m)}{\partial x_n} \vec{k}_m \vec{k}_n \right) = \\
&= S_{ij}^{eff} \frac{\partial w_m}{\partial x_i} \frac{\partial (du_m)}{\partial x_j} = S_{ij}^{eff} \frac{\partial w_m}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial x_i} \frac{\partial (du_m)}{\partial x_q} \frac{\partial x_q}{\partial x_j} = \\
&= S_{ij}^{eff} F_{pi} F_{qj} \frac{\partial w_m}{\partial x_p} \frac{\partial (du_m)}{\partial x_q} = J \sigma_{pq}^{eff} \frac{\partial w_m}{\partial x_p} \frac{\partial (du_m)}{\partial x_q} = J \underset{\sim}{\sigma}^{eff} : [(\vec{\nabla} \vec{w})^T \cdot \vec{\nabla} d\vec{u}]
\end{aligned}$$

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \underset{\sim}{S}^{eff}(\vec{u}) : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right] d\overset{\circ}{V} = \int_{\underset{\sim}{V}} \underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : [(\vec{\nabla} \vec{w})^T \cdot \vec{\nabla} d\vec{u}] dV$$

$$\begin{aligned}
3) \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : DE(\vec{u})[\vec{w}] &= [\underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{I} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T}] : \frac{1}{2} \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{F}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \underset{\sim}{I} : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} \right)^T + \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} \right] = \\
&= \frac{1}{2} (\delta_{ij} \vec{k}_i \vec{k}_j) : \left[\left(\frac{\partial w_k}{\partial x_l} \vec{k}_k \vec{k}_l \cdot \frac{\partial X_m}{\partial x_n} \vec{k}_m \vec{k}_n \right)^T + \frac{\partial w_k}{\partial x_l} \vec{k}_k \vec{k}_l \cdot \frac{\partial X_m}{\partial x_n} \vec{k}_m \vec{k}_n \right] = \\
&= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left[\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = div \vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w}
\end{aligned}$$

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \alpha dp J \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] d\overset{\circ}{V} = \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha dp \operatorname{div} \vec{w} dV$$

$$4) \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[d\vec{u}] = \operatorname{div} d\vec{u}; \quad \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] = \operatorname{div} \vec{w}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J \left(\underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[d\vec{u}] \right) \left(\underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u}) : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] \right) d\overset{\circ}{V} = \\ & = \int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p (\operatorname{div} d\vec{u}) (\operatorname{div} \vec{w}) dV \end{aligned}$$

$$5) \frac{\partial \underset{\sim}{C}^{-1}}{\partial \underset{\sim}{C}} = -\underset{\sim}{C}^{-2} \cdot \frac{\partial \underset{\sim}{C}}{\partial \underset{\sim}{C}} = -\underset{\sim}{C}^{-1} \cdot \underset{\sim}{I}^4 \cdot \underset{\sim}{C}^{-1}$$

$$\underset{\sim}{I}^4 = \left(\underset{\sim}{I}^4 \right)_{ijkl} \vec{k}_i \vec{k}_j \vec{k}_k \vec{k}_l = \delta_{ik} \delta_{jl} \vec{k}_i \vec{k}_j \vec{k}_k \vec{k}_l$$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{C}^{-1} \cdot \underset{\sim}{I}^4 \cdot \underset{\sim}{C}^{-1} &= \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_m} \frac{\partial X_q}{\partial x_m} \vec{k}_p \vec{k}_q \right) \cdot (\delta_{ik} \delta_{jl} \vec{k}_i \vec{k}_j \vec{k}_k \vec{k}_l) \cdot \left(\frac{\partial X_r}{\partial x_n} \frac{\partial X_s}{\partial x_n} \vec{k}_r \vec{k}_s \right) = \\ &= \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_j}{\partial x_n} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} \vec{k}_i \vec{k}_j \vec{k}_k \vec{k}_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[\vec{w}] : \left(\frac{\partial \underset{\sim}{C}^{-1}(\vec{u})}{\partial \underset{\sim}{C}(\vec{u})} \right) : D \underset{\sim}{E}(\vec{u})[d\vec{u}] &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_t}{\partial X_p} \frac{\partial x_t}{\partial X_q} \vec{k}_p \vec{k}_q + \frac{\partial x_t}{\partial X_p} \frac{\partial w_t}{\partial X_q} \vec{k}_p \vec{k}_q \right] : \\ : \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_k}{\partial x_m} \frac{\partial X_j}{\partial x_n} \frac{\partial X_l}{\partial x_n} \vec{k}_i \vec{k}_j \vec{k}_k \vec{k}_l \right] : \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (du_z)}{\partial X_r} \frac{\partial x_z}{\partial X_s} \vec{k}_r \vec{k}_s + \frac{\partial x_z}{\partial X_r} \frac{\partial (du_z)}{\partial X_s} \vec{k}_r \vec{k}_s \right] &= \\ = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w_n}{\partial x_m} \frac{\partial (du_n)}{\partial x_m} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w_n}{\partial x_m} \frac{\partial (du_m)}{\partial x_n} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w_m}{\partial x_n} \frac{\partial (du_n)}{\partial x_m} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial w_m}{\partial x_n} \frac{\partial (du_m)}{\partial x_n} \right] &= \\ = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \vec{w})^T + \vec{\nabla} \vec{w} \right] : \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} d\vec{u})^T + \vec{\nabla} d\vec{u} \right] &= \underset{\sim}{d}(\vec{w}) : \underset{\sim}{d}(d\vec{u}) \end{aligned}$$

$$\underset{\sim}{d}(\vec{w}) = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \vec{w})^T + \vec{\nabla} \vec{w} \right]; \quad \underset{\sim}{d}(d\vec{u}) = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} d\vec{u})^T + \vec{\nabla} d\vec{u} \right]$$

$$\int_{\overset{\circ}{V}} 2\alpha p J D\tilde{E}(\vec{u})[\vec{w}] : \left(\frac{\partial C^{-1}(\vec{u})}{\partial C(\vec{u})} \right) : D\tilde{E}(\vec{u})[d\vec{u}] d\overset{\circ}{V} = - \int_V 2\alpha p \tilde{d}(\vec{w}) : \tilde{d}(d\vec{u}) dV$$

$$6) C^{-1}(\vec{u}) : D^2 E(\vec{u})[\vec{w}, d\vec{u}] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{I} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} \right) : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} + \left(\overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \underset{\sim}{I} : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} + \left(\overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} (\delta_{ij} \vec{k}_i \vec{k}_j) : \left[\frac{\partial w_n}{\partial x_m} \vec{k}_m \vec{k}_n \cdot \frac{\partial (du_k)}{\partial x_l} \vec{k}_k \vec{k}_l + \frac{\partial (du_n)}{\partial x_m} \vec{k}_m \vec{k}_n \cdot \frac{\partial w_k}{\partial x_l} \vec{k}_k \vec{k}_l \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_n}{\partial x_i} \frac{\partial (du_n)}{\partial x_i} + \frac{\partial (du_n)}{\partial x_i} \frac{\partial w_n}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial w_n}{\partial x_i} \frac{\partial (du_n)}{\partial x_i} = \vec{\nabla} \vec{w} : \vec{\nabla} d\vec{u}$$

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \alpha p J C^{-1}(\vec{u}) : D^2 E(\vec{u})[\vec{w}, d\vec{u}] d\overset{\circ}{V} = \int_V \alpha p \vec{\nabla} \vec{w} : \vec{\nabla} d\vec{u} dV$$

$$7) \overset{\circ}{\rho} d\overset{\circ}{V} = \rho dV; \quad d\vec{S} = \frac{d\vec{S}^0}{J_\Sigma}; \quad J_\Sigma = \frac{d\Sigma}{d\overset{\circ}{\Sigma}}; \quad d\vec{S} d\Sigma = d\vec{S}^0 d\overset{\circ}{\Sigma}$$

$$dA^e[\vec{w}] = \int_V \rho d\vec{f} \cdot \vec{w} dV + \int_{\Sigma_2} d\vec{S} \cdot \vec{w} d\Sigma$$

Соберем все члены вместе:

$$\int_V \left(\tilde{d}(\vec{w}) : \underset{\sim}{C}^d : \tilde{d}(d\vec{u}) \right) dV + \int_V \underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : \left[\left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{w} \right)^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} d\vec{u} \right] dV -$$

$$- \int_V \alpha dp \operatorname{div} \vec{w} dV - \int_V \alpha p (\operatorname{div} d\vec{u}) (\operatorname{div} \vec{w}) dV + \int_V 2\alpha p \tilde{d}(\vec{w}) : \tilde{d}(d\vec{u}) dV -$$

$$- \int_V \alpha p \vec{\nabla} \vec{w} : \vec{\nabla} d\vec{u} dV - \int_V \rho d\vec{f} \cdot \vec{w} dV - \int_{\Sigma_2} d\vec{S} \cdot \vec{w} d\Sigma = 0$$

Упростим запись этого уравнения:

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha p \underset{\sim}{d}(\vec{w}) : \underset{\sim}{d}(d\vec{u}) - \alpha p \vec{\nabla} \vec{w} : \vec{\nabla} d\vec{u} = \\
 & = \alpha p \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \frac{\partial (du_m)}{\partial x_n} + \alpha p \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \frac{\partial (du_n)}{\partial x_m} - \alpha p \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \frac{\partial (du_m)}{\partial x_n} = \\
 & = \alpha p \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \frac{\partial (du_n)}{\partial x_m} = \alpha p (\vec{\nabla} \vec{w})^T : \vec{\nabla} d\vec{u}
 \end{aligned}$$

В результате получаем линейризованное уравнение равновесия в текущей конфигурации:

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left(\underset{\sim}{d}(\vec{w}) : \underset{\sim}{C}^d : \underset{\sim}{d}(d\vec{u}) \right) dV + \int_V \underset{\sim}{\sigma}^{eff}(\vec{u}) : \left[(\vec{\nabla} \vec{w})^T : \vec{\nabla} d\vec{u} \right] dV - \\
 & - \int_V \alpha dp \operatorname{div} \vec{w} dV - \int_V \alpha p (\operatorname{div} \vec{w}) (\operatorname{div} d\vec{u}) dV + \int_V \alpha p (\vec{\nabla} \vec{w})^T : \vec{\nabla} d\vec{u} dV - \\
 & - \int_V \rho d\vec{f} \cdot \vec{w} dV - \int_{\Sigma_2} d\vec{S} \cdot \vec{w} d\Sigma = 0 \tag{1.9.5}
 \end{aligned}$$

**Перевод линейризованного вариационного уравнения равновесия
в дифференциальную форму**

Запишем линейризованное вариационное уравнение равновесия (1.9.5) (см. Приложение 2) в индексной форме:

$$\begin{aligned}
 & \int_V C_{ijkl}^d du_{k,l} w_{i,j} dV + \int_V \sigma_{ij}^{eff} du_{m,i} w_{m,j} dV - \int_V \alpha dp w_{i,i} dV - \int_V \alpha p du_{i,i} w_{j,j} dV + \\
 & \quad 1) \qquad\qquad\qquad 2) \qquad\qquad\qquad 3) \qquad\qquad\qquad 4) \\
 & \quad 5) \qquad\qquad\qquad 6) \qquad\qquad\qquad 7) \\
 & + \int_V \alpha p du_{i,m} w_{m,i} dV - \int_V \rho df_i w_i dV - \int_{\Sigma_2} dS_i w_i d\Sigma = 0
 \end{aligned}$$

Граничные условия, которые учитывались при создании вариационных уравнений:

$$\begin{cases}
 \vec{u} = 0; & \vec{\xi} \in \Sigma_u = \Sigma_1 \\
 \sigma^{eff} \cdot \vec{n} = \vec{S}; & \vec{\xi} \in \Sigma_\sigma = \Sigma_2 \\
 \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0; & \vec{\xi} \in \Sigma_w = \Sigma_1 \\
 p = 0; & \vec{\xi} \in \Sigma_p = \Sigma_2
 \end{cases} \quad (1.7.15)$$

$$\Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma; \quad \Sigma_w \cup \Sigma_p = \Sigma; \quad \Sigma_u = \Sigma_w = \Sigma_1; \quad \Sigma_\sigma = \Sigma_p = \Sigma_2$$

1) и 7)

$$\begin{aligned}
 & \int_V C_{ijkl}^d du_{k,l} w_{i,j} dV = \int_V (C_{ijkl}^d du_{k,l} w_i)_j dV - \int_V (C_{ijkl}^d du_{k,l})_j w_i dV = \\
 & = \int_{\Sigma_1} C_{ijkl}^d du_{k,l} n_j \underbrace{w_i}_{=0 \text{ на } \Sigma_1} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \underbrace{C_{ijkl}^d du_{k,l} n_j}_{=dS_i \text{ на } \Sigma_2} w_i d\Sigma - \int_V (C_{ijkl}^d du_{k,l})_j w_i dV = \\
 & = \int_{\Sigma_2} dS_i w_i d\Sigma - \int_V (C_{ijkl}^d du_{k,l})_j w_i dV
 \end{aligned}$$

$$\int_V C_{ijkl}^d du_{k,l} w_{i,j} dV - \int_{\Sigma_2} dS_i w_i d\Sigma \Rightarrow -(C_{ijkl}^d du_{k,l})_{,j} w_i$$

2)

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij}^{eff} du_{m,i} w_{m,j} dV &= \int_V (\sigma_{ij}^{eff} du_{m,i} w_m)_{,j} dV - \int_V (\sigma_{ij}^{eff} du_{m,i})_{,j} w_m dV = \\ &= \int_{\Sigma_1} \sigma_{ij}^{eff} du_{m,i} n_j \underbrace{w_m}_{=0 \text{ на } \Sigma_1} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \underbrace{\sigma_{ij}^{eff} n_j}_{=S_i \text{ на } \Sigma_2} du_{m,i} w_m d\Sigma - \\ &- \int_V (\sigma_{ij}^{eff} du_{m,i})_{,j} w_m dV = \int_{\Sigma_2} S_i du_{m,i} w_m d\Sigma - \int_V (\sigma_{ij}^{eff} du_{m,i})_{,j} w_m dV = \\ &= \int_{\Sigma_2} S_m du_{i,m} w_i d\Sigma - \int_V (\sigma_{mj}^{eff} du_{i,m})_{,j} w_i dV \end{aligned}$$

Первое слагаемое $\int_{\Sigma_2} S_m du_{i,m} w_i d\Sigma$ относится к граничным условиям на Σ_2 . Следовательно, получаем:

$$\int_V \sigma_{ij}^{eff} du_{m,i} w_{m,j} dV \Rightarrow -(\sigma_{mj}^{eff} du_{i,m})_{,j} w_i$$

3)

$$\begin{aligned} \int_V \alpha dp w_{i,i} dV &= \int_V (\alpha dp w_i)_{,i} dV - \int_V \alpha dp_{,i} w_i dV = \\ &= \int_{\Sigma_1} \alpha dp n_i \underbrace{w_i}_{=0 \text{ на } \Sigma_1} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \alpha \underbrace{dp}_{=0 \text{ на } \Sigma_2} n_i w_i d\Sigma - \int_V \alpha dp_{,i} w_i dV = - \int_V \alpha dp_{,i} w_i dV \\ &- \int_V \alpha dp w_{i,i} dV \Rightarrow \alpha dp_{,i} w_i \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \int_V \alpha p du_{i,i} w_{j,j} dV &= \int_V (\alpha p du_{i,i} w_j)_{,j} dV - \int_V (\alpha p du_{i,i})_{,j} w_j dV = \\ &= \int_{\Sigma_1} \alpha p n_j du_{i,i} \underbrace{w_j}_{=0 \text{ на } \Sigma_1} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \alpha \underbrace{p}_{=0 \text{ на } \Sigma_2} n_j du_{i,i} w_j d\Sigma - \int_V (\alpha p du_{i,i})_{,j} w_j dV = \\ &= - \int_V (\alpha p du_{j,j})_{,i} w_i dV \end{aligned}$$

$$-\int_V \alpha p du_{i,i} w_{j,j} dV \Rightarrow (\alpha p du_{j,j})_{,i} w_i = \alpha p_{,i} du_{j,j} w_i + \alpha p du_{j,j,i} w_i$$

5)

$$\begin{aligned} \int_V \alpha p du_{i,m} w_{m,i} dV &= \int_V (\alpha p du_{i,m} w_m)_{,i} dV - \int_V (\alpha p du_{i,m})_{,i} w_m dV = \\ &= \int_{\Sigma_1} \alpha p n_i du_{i,m} \underbrace{w_m}_{=0 \text{ на } \Sigma_1} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \alpha \underbrace{p}_{=0 \text{ на } \Sigma_2} n_i du_{i,m} w_m d\Sigma - \\ - \int_V (\alpha p du_{i,m})_{,i} w_m dV &= - \int_V (\alpha p du_{i,m})_{,i} w_m dV = - \int_V (\alpha p du_{m,i})_{,m} w_i dV \\ \int_V \alpha p du_{i,m} w_{m,i} dV &\Rightarrow -(\alpha p du_{j,i})_{,j} w_i = -\alpha p du_{j,i,j} w_i - \alpha p_{,j} du_{j,i} \end{aligned}$$

6) Объемные силы

$$-\int_V \rho df_i w_i dV \Rightarrow -\rho df_i w_i$$

Собираем все члены вместе, получаем дифференциальное линейризованное уравнение равновесия:

$$(C_{ijkl}^d du_{k,l})_{,j} + (\sigma_{mj}^{eff} du_{i,m})_{,j} - \alpha dp_{,i} - \alpha p_{,i} du_{j,j} + \alpha p_{,j} du_{j,i} + \rho df_i = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\tilde{C}^d : \operatorname{grad} d\vec{u}) + \operatorname{div} (\tilde{\sigma}^{eff}(\vec{u}) \cdot \operatorname{grad} d\vec{u}) - \alpha \operatorname{grad} dp - \\ - \alpha (\operatorname{grad} p)(\operatorname{div} d\vec{u}) + \alpha (\operatorname{grad} p) \cdot (\operatorname{grad} d\vec{u}) + \rho d\vec{f} = 0 \end{aligned}$$