МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Платонова Ксения Сергеевна

Групповой анализ кинетических уравнений и проблема замыкания моментной системы

01.01.02 —
дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Боровских Алексей Владиславович**, доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Аксенов Александр Васильевич,** доктор физико-математических наук, доцент, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра гидромеханики, профессор

Орлов Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, отдел «Вычислительной физики и кинетических уравнений», заведующий отделом

Хабиров Салават Валеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова, лаборатория «Дифференциальные уравнения механики», главный научный сотрудник

Защита состоится 16 декабря 2020 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, строение 52, факультет ВМК, комната 685.

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией, а также со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС «Истина»: https://istina.msu.ru/dissertations/310399582/.

Автореферат разослан « » 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ 01.09,
д.ф.-м.н., проф., член-корр. РАН А.В. Ильин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Классическому уравнению Больцмана

$$f_t + cf_x + Ff_c = J, \tag{1}$$

где t – время, x – вектор координат, c – вектор скорости, f – фазовая (по координатам и скоростям) плотность распределения количества частиц, F – внешняя сила, J – интеграл столкновений, посвящено много работ даже монографического характера (см., напр., [1], [2]-[6], [8]).

Интерес к этому уравнению связан, в первую очередь, с работами Дж. К. Максвелла [1], в которых впервые была сформулирована мысль о том, что свойства газов можно вывести из кинетических законов, используя распределение типа гауссовского (имеется в виду распределение частиц в газе по скоростям, которое обычно также называют «максвелловским распределением»). H-теорема Больцмана, показавшая, в определенном смысле, устойчивость максвелловского распределения, придала этому распределению статус «главного», отличиями от которого можно просто пренебрегать.

Современное развитие мысли Максвелла, в [3] называемое «программой Максвелла», состоит в том, чтобы выводить уравнения сплошной среды из уравнения Больцмана, используя тот факт, что моментные функции

$$j^{[\alpha]}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t,x,c)c^\alpha \, dc$$

(α – мультииндекс) имеют ясную физическую интерпретацию (при $|\alpha| = 0$ это – плотность массы, при $|\alpha| = 1$ – плотности распределения компонент импульса, и т.д.), и поэтому умножением уравнения Больцмана на c^α и интегрированием по скоростям мы получаем так называемую систему моментных уравнений, очень близких по своей форме к уравнениям сплошной среды.

Основная проблема, которая при этом возникает, состоит в том, что уравнения сплошной среды представляют собой конечную систему, в то время как моментная система бесконечна. Кроме того, физический смысл имеют только первые моментные функции, и поэтому с точки зрения физики рассмотрение всех моментных величин является введением излишних сущностей.

Для решения возникшей проблемы есть несколько подходов (см., напр., [4], [7], [24], [25]). Ключевая идея, которая используется многими авторами, состоит в том, чтобы усечь моментную систему, оставив в ней лишь необходимое число уравнений. Единственным препятствием для этого является то, что каждое уравнение, описывающее динамику $j^{[\alpha]}$ (то есть содержащее ее производную по времени), содержит обязательно и моментные величины более высокого порядка, с которыми при усечении необходимо что-то делать.

Простейший вариант – простого отбрасывания этих величин приводит к соотношениям, которые подвергаются критике как некорректные, поэтому в современной реализации этого подхода используется более деликатный вариант усечения, при котором «лишние» моментные функции некоторым образом выражаются через те, которые фигурируют в усеченной системе. Такая операция, называемая *замыканием* моментной системы, и должна давать, по идее, уравнения сплошной среды.

Один из основных дефектов этого метода – достаточная произвольность в выборе выражения одних моментных функций через другие, что, с одной стороны, хорошо, поскольку оставляет широкие возможности для моделирования, а с другой – плохо, поскольку для выбора в той или иной модели конкретных соотношений фактически отсутствуют какие-либо основания. И если для физиков есть возможность обращаться к тем или иным «физическим соображениям», то для математиков выбор таких соотношений остается весьма неопределенной процедурой.

Настоящая диссертационная работа посвящена именно этой проблеме. В ней исследуется возможность решать эту проблему с позиций группового анализа. А именно, найдя группу симметрий исходного кинетического уравнения, вычислить действие этой группы на моментные величины, найти инварианты этой группы, и уже в терминах инвариантов попытаться осуществить усечение и замыкание системы моментных уравнений.

Групповой анализ уравнений Больцмана ранее осуществлялся целым рядом авторов – см. [9]-[20] – однако в этих исследованиях вычисление полной группы симметрий уравнения либо совсем не рассматривалось (и авторы ограничивались лишь подгруппами, естественными с точки зрения физики), либо рассматривались семейства преобразований не очевидные с точки зрения физики, но достаточно узкие. Наиболее полный результат был получен

в [11], где для классического уравнения Больцмана с произвольным «эффективным сечением» была получена 11-мерная группа симметрий, которая для некоторых случаев расширялась до 13-мерной. В рассуждениях авторов не учитывалось условие сохранения числа частиц, что приводило к результатам, из которых следовало, что при однородных растяжениях пространственных и временных координат количество частиц в конкретном фазовом объеме $dxdc$ оказывается изменяющимся. В силу указанных причин групповой анализ уравнения необходимо было проводить заново.

Также следует отметить, что сама идея «переезжать» с помощью группы симметрий с одной модели на другую (в нашем случае – с микромодели кинетики частиц на макромодель сплошной среды) является новой, и ранее не использовалась, хотя эта идея явно обладает достаточно большим ресурсом самых разнообразных приложений.

Несмотря на ясность постановки вопроса – возможно ли реализовать описанную схему – ответ на него был изначально совершенно не очевиден, идея подхода не имела до того каких-то примеров своего воплощения, поэтому, для начала, идея была реализована в максимально упрощенном случае – одномерном варианте уравнения Больцмана. Следует подчеркнуть, что одномерный случай связан не только с уменьшением количества переменных, но и с существенным искажением ситуации, поскольку в этом случае интеграл столкновений оказывается нулевым (частицы при столкновении просто обмениваются импульсами, а это не меняет распределения f), и уравнение из нелинейного становится линейным. Тем не менее, даже для этого уравнения ответ на все тот же вопрос был столь же не очевиден, как и в основном случае, поэтому, называя этот случай «одномерным уравнением Больцмана» (хотя правильнее было бы называть его «уравнением Лиувилля»), мы апеллируем не столько к его собственному содержанию, сколько к тому, что оно исследуется в контексте проблемы, поставленной именно для исходного уравнения Больцмана.

Таким образом, актуальность темы определяется значимостью проблемы связи между кинетическими уравнениями и уравнениями сплошной среды для широкого класса моделей взаимодействия частиц.

Цель работы – сначала на одномерном случае выяснить, насколько возможно реализовать заявленную схему, а затем постараться перенести, на-

сколько это удастся, полученные результаты уже на трехмерное уравнение Больцмана.

Научная новизна исследования определяется, во-первых, новизной самого подхода к проблеме (ранее группы симметрий как средство построения замыкания моментной системы не использовались), во-вторых, новизной постановки задачи групповой классификации (групповой анализ конкретных версий уравнений Больцмана и Власова проводился разными авторами [9]-[23], однако общая задача построения групповой классификации в максимально широкой постановке ими не рассматривалась), в-третьих, новизной полученных результатов.

Методы исследования. В работе используются методы группового анализа, теории дифференциальных уравнений, теории обобщенных функций.

На защиту выносятся следующие результаты:

– полная групповая классификация уравнения (1) в одномерном случае и классифицирующие соотношения для многомерных уравнений Больцмана и Власова;

– инварианты для групп симметрий размерности больше двух в случае одномерного уравнения (1) с $F = F(t,x,c)$;

– замыкание моментной системы, построенное для случая $F = 0$ и положительный ответ на принципиальный вопрос о возможности реализовать схему построения замыкания с помощью групп симметрий;

– действие групп симметрий на моментные функции для многомерных кинетических уравнений;

– феномен немасштабируемости, полученный для многомерного уравнения Больцмана с $F = 0$;

– частичная групповая классификация потенциалов взаимодействия между частицами для многомерного уравнения Власова с отсутствующим внешним силовым полем.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами в области группового анализа, а также специалистами по теории кинетических уравнений. Разработанная схема исследования может быть полезна при

исследовании математических моделей, в основе которых лежат уравнения термодинамики.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях

1. Всероссийская конференция с международным участием и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред», Новосибирск, 13-17 мая 2019

2. Международная конференция «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXIX», посвященная 90-летию В.А. Ильина, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет Вычислительной математики и Кибернетики, Россия, 2-6 мая 2018

3. Международная школа-конференция «Соболевские чтения», Новосибирск, Россия, 20-23 августа 2017

4. Международная научная конференция «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики», посвященная 110-летию академика А.Н. Тихонова, Москва, МГУ, 31 октября – 3 ноября 2016 года

5. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016», МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11-15 апреля 2016

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и в научных школах

1. Осенняя школа «Hyperbolic Conservation Laws and Mathematical Fluid Dynamics», Вюрцбург, Германия, 1-5 октября 2018

2. Семинар имени К.И. Бабенко под руководством д.ф.-м.н. А.Л. Афендикова, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша, 19 апреля 2018

3. Семинар «Асимптотические методы в уравнениях математической физики» при кафедре дифференциальных уравнений МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством проф., д.ф.-м.н. Е.В. Радкевича, проф., д.ф.-м.н. А.С. Шамаева, проф., д.ф.-м.н. Т.А. Шапошниковой, 2016, 2018 и 2019 г.г.

4. Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений при кафедре дифференциальных уравнений МГУ имени М.В. Ломоносова под ру-

ководством проф., д.ф.-м.н. И.В. Асташовой, проф. д.ф.-м.н. А.В. Боровских, проф. д.ф.-м.н. Н.Х Розова, проф. д.ф.-м.н. И.Н. Сергеева, 2015, 2016, 2017 и 2018 г.г.

5. Научный семинар кафедры газовой и волновой динамики МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством проф. д.ф.-м.н. Р.И. Нигматулин, 2017, 2019 г.г.

6. Научный семинар по моделям сплошных сред с внутренними степенями свободы под руководством проф. д.ф.-м.н. А.Н. Голубятникова и проф. д.ф.-м.н. А.В. Аксенова, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018 г.

7. Семинар по групповому анализу дифференциальных уравнений под руководством проф. д.ф.-м.н. А.В. Боровских, 2019 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора 1-5 (последние три из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science.

Личный вклад автора: все выносимые на защиту результаты получены лично автором. А.В. Боровских в работах 3-5 принадлежат постановка задачи и некоторые интерпретации полученных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 58 наименований. Общий объем диссертации составляет 162 страницы. Технические вычисления вынесены в 8 приложений.

Краткое содержание диссертации

Нумерация приводимых здесь формул, теорем и таблиц соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

Во введении дается краткое описание принципов группового анализа, в соответствии с которыми уточняется постановка задачи. А именно: в результате предварительного анализа выясняется, что уравнение (одномерный вариант уравнения (1))

$$f_t + cf_x + (Ff)_c = 0. \tag{2}$$

необходимо рассматривать в совокупности с набором дополнительных условий, налагаемых на группу симметрий и выражающих в математической форме сохранение при заменах переменных физического смысла входящих в уравнение величин и отношений между ними. Таких условий три: сохранение связи между временем, координатой, скоростью и внешней силой

$$dx = cdt, \qquad dc = Fdt; \tag{3}$$

сохранение интегрирования по переменной c в формуле для вычисления моментных величин

$$j^{[n]}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c^n f(t,x,c)\, dc, \tag{4}$$

то есть условие инвариантности соотношений

$$dt = 0, \qquad dx = 0; \tag{5}$$

сохранение числа частиц в фиксированном фазовом объеме при $t = \theta(x,c)$.

$$(1 - c\theta_x - F\theta_c) f\, dx\, dc. \tag{8}$$

Таким образом, окончательная постановка задачи групповой классификации приобрела следующую форму: произвести классификацию уравнений (1) по произвольному элементу $F(t,x,c)$ и, если удастся, по произвольному элементу $F(t,x,c,f)$, используя класс точечных преобразований пространства переменных (t,x,c,f), удовлетворяющих следующим условиям: они оставляют инвариантными соотношения (3); они оставляют инвариантным семейство прямых (5); они оставляют инвариантной величину (8).

В первой главе данной работы получена полная групповая классификация для уравнений (2). Во-первых, найдены алгебры симметрий и алгебры эквивалентности уравнений, удовлетворяющие обсуждаемым ранее дополнительным условиям

Теорема 1.1. *Алгебра Ли группы эквивалентности уравнения (2), сохраняющей дифференциальные соотношения (3), (5) и форму (8), имеет вид* $\Xi = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \gamma\partial_c + \eta\partial_f + \phi\partial_F$, *где* $\tau = \tau(t,x)$ *и* $\xi = \xi(t,x)$ *– произвольные*

функции,

$$\gamma = \xi_t + c\xi_x - c(\tau_t + c\tau_x), \quad \eta = f(3c\tau_x - 2\xi_x + \tau_t),$$
$$\phi = \gamma_t + c\gamma_x + F(\xi_x - 2\tau_t - 3c\tau_x).$$

Теорема 1.2. *Алгебра Ли группы симметрий уравнения (2), сохраняющей дифференциальные соотношения (3), (5) и форму (8), имеет вид* $\Xi = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \gamma\partial_c + \eta\partial_f$, *где функции*

$$\tau = \tau(t,x), \xi = \xi(t,x),\ \gamma = \xi_t + c\xi_x - c(\tau_t + c\tau_x),\ \eta = f(3c\tau_x - 2\xi_x + \tau_t), \quad (9)$$

удовлетворяют уравнению

$$\gamma_t + c\gamma_x + F\gamma_c - F(\tau_t + c\tau_x) = \tau F_t + \xi F_x + \gamma F_c + \eta F_f. \quad (10)$$

Во-вторых, классифицирующее уравнение (10) для алгебры симметрий было полностью исследовано и тем самым получена групповая классификация относительно произвольной функции F.

Теорема 1.3. *Алгебра* $\Xi = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \gamma\partial_c + \eta\partial_f$, *определяемая соотношениями (9) и удовлетворяющая условию (10), конечномерна для любой функции* $F(t,x,c)$. *Нетривиальные алгебры, удовлетворяющие (10), имеются для функций* $F(t,x,c)$ *классов (с точностью до преобразований из группы, порожденной группой диффеоморфизмов пространства* t, x*), представители которых приведены в таблице 1.1. Для остальных* $F(t,x,c)$ *уравнение (10) не имеет других решений* $\tau(t,x)$, $\xi(t,x)$, *кроме тривиальных.*

Таблица 1.1. (A, B, D, H, λ – произвольные константы, $G(\cdot)$ и $\Phi(\cdot,\cdot)$ – произвольные функции).

	$F(t,x,c)$	Базис алгебры
I	$F = 0$	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = \partial_x$, $\Xi_3 = t\partial_t$, $\Xi_4 = x\partial_x$, $\Xi_5 = x\partial_t$, $\Xi_6 = t\partial_x$, $\Xi_7 = t^2\partial_t + tx\partial_x$, $\Xi_8 = tx\partial_t + x^2\partial_x$
II.1.1	$F = Ac^\lambda$ $(\lambda \neq 0,1,2,3)$	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = \partial_x$, $\Xi_3 = (\lambda - 1)t\partial_t + (\lambda - 2)x\partial_x$

II.1.2	$F = A\exp\lambda c\ (\lambda \neq 0)$	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = \partial_x$, $\Xi_3 = \lambda t\partial_t + (\lambda x - t)\partial_x$
II.1.3	$F = A(c^2+1)^{3/2}e^{\lambda \operatorname{arctg} c}$	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = \partial_x$, $\Xi_3 = (x+\lambda t)\partial_t + (\lambda x - t)\partial_x$
II.2	$F = A/x^3$	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = 2t\partial_t + x\partial_x$, $\Xi_3 = t^2\partial_t + tx\partial_x$
II.3	$F = A\left(1 - \dfrac{(t-\lambda c)^2}{t^2 - 2\lambda x}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(\lambda \neq 0)$	$\Xi_1 = \lambda\partial_t + t\partial_x$, $\Xi_2 = t\partial_t + 2x\partial_x$, $\Xi_3 = (t^2 - \lambda x)\partial_t + tx\partial_x$
II.4	$F{=}A\left(\dfrac{(x-ct)^2 + c^2 + 1}{t^2 + x^2 + 1}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\Xi_1 = (t^2+1)\partial_t + tx\partial_x$, $\Xi_2 = tx\partial_t + (x^2+1)\partial_x$, $\Xi_3 = -x\partial_t + t\partial_x$.
III.1	$F = G(c)$	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = \partial_x$
III.2	$F = G(c)/t$	$\Xi_1 = \partial_x$, $\Xi_2 = t\partial_t + x\partial_x$
IV	$F = \Phi(t,c)$	$\Xi_1 = \partial_x$

Теорема 1.4. *Алгебра $\Xi = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \gamma\partial_c + \eta\partial_f$, определяемая соотношениями (9) и удовлетворяющая (10), конечномерна для любой функции $F(t,x,c,f)$. Нетривиальные алгебры, удовлетворяющие (10), имеются для функций $F(t,x,c,f)$ классов (с точностью до преобразований из группы, порожденной группой диффеоморфизмов t,x), представители которых приведены в таблицах 1.2-1.5. Для остальных $F(t,x,c,f)$ уравнение (10) не имеет других решений $\tau(t,x)$, $\xi(t,x)$ кроме тривиальных.*

Таблицы 1.2-1.5, упомянутые в формулировке теоремы, приведены в тексте диссертации.

Во второй главе был осуществлен перенос алгебры симметрий одномерного уравнения Больцмана на моментные величины $j^{[n]}$ (определяемые формулой (4)) и были исследованы замыкания моментной системы, инвариантные относительно восьмимерной и трехмерных алгебр из таблицы 1.1.

В первой части главы был осуществлен поиск функций

$$I(t,x,j^{[0]},\ldots,j^{[N]}), \tag{11}$$

инвариантных относительно восьмимерной и трехмерных алгебр и зависящих от конечного числа моментных величин (4). Такие инварианты будем называть **конечными**.

Теорема 2.1. *Нетривиальных конечных инвариантов восьмимерной алгебры симметрий уравнения (2) не существует.*

Теорема 2.2. *Конечные инварианты для трехмерных алгебр симметрий II.1–II.4 таблицы 1.1 уравнения (2) существуют. Базисы инвариантов приведены в таблице 2.1.*

Таблица 2.1. Базисы конечных инвариантов трехмерных алгебр

$F(t,x,c)$	Базис алгебры	Базис инвариантов
Ac^{λ}	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = \partial_x$, $\Xi_3 = (\lambda-1)t\partial_t + (\lambda-2)x\partial_x$	$j^{[n]}(j^{[0]})^{-\frac{n+\lambda-2}{\lambda-2}}$, $n \geq 1$
$A\exp\lambda c$	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = \partial_x$, $\Xi_3 = \lambda t\partial_t + (\lambda x - t)\partial_x$,	$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{j^{[n-k]}}{j^{[0]}} \frac{(\ln j^{[0]})^k}{\lambda^k}$, $n \geq 1$
$A(c^2+1)^{\frac{3}{2}}e^{\lambda\,\mathrm{arctg}\,c}$	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = \partial_x$, $\Xi_3 = (x+\lambda t)\partial_t + (\lambda x - t)\partial_x$	$\sqrt{(j^{[0]})^2 + (j^{[1]})^2}e^{-\lambda\mathrm{arctg}\,\frac{j^{[1]}}{j^{[0]}}}$
$\dfrac{A}{x^3}$	$\Xi_1 = \partial_t$, $\Xi_2 = 2t\partial_t + x\partial_x$, $\Xi_3 = t^2\partial_t + tx\partial_x$	$xj^{[0]}$, $x^{n+1}[(-1)^n(1-n)(j^{[1]})^n + \sum\limits_{k=0}^{n-2}(-1)^k C_n^k (j^{[1]})^k j^{[n-k]} \cdot (j^{[0]})^{n-k-1}]$, $n \geq 2$,
$\frac{A\lambda(c^2+\lambda)^{3/2}+c(c^2+\lambda)}{\lambda t}$	$\Xi_1 = \partial_x$, $\Xi_2 = t\partial_t + x\partial_x$, $\Xi_3 = 2tx\partial_t + (x^2-\lambda t^2)\partial_x$	$t^2[(j^{[1]})^2 + \lambda(j^{[0]})^2]$
$A\left(\frac{(x-ct)^2+c^2+1}{t^2+x^2+1}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\Xi_1 = (t^2+1)\partial_t + tx\partial_x$, $\Xi_2 = tx\partial_t + (x^2+1)\partial_x$, $\Xi_3 = -x\partial_t + t\partial_x$.	$(t^2+x^2+1)[(j^{[0]})^2(x^2+1) - 2j^{[0]}j^{[1]}tx + (j^{[1]})^2(t^2+1)]$

Так как случай самой широкой (восьмимерной) алгебры привел к отрицательному результату, был расширен класс рассматриваемых инвариантов (11) и для восьмимерной алгебры найдены инварианты I, зависящие не только от моментных величин, но и от их производных первого порядка (дифференциальные инварианты). А также был исследован вопрос, могут ли найденные инварианты быть предложены в качестве замыканий моментной системы, получаемой из уравнения (2).

Теорема 2.3. *Единственная система, образованная с помощью конечных дифференциальных инвариантов первого порядка, которая инвариантна относительно всей группы симметрий исходного уравнения (2) с $F = 0$, – это*

система

$$\rho_t + (u\rho)_x = 0, \quad u_t + uu_x = 0, \tag{12}$$

решение которой достраивается до решения полной моментной системы по формулам

$$j^{[n]} = u^n\rho + (-1)^{n-2}\phi_1^{(n-2)}(t)\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... - \phi'_{n-2}(t)x + \phi_{n-1}(t), \tag{13}$$

где $\phi_i(t)$ – произвольные бесконечно гладкие функции, а $\phi_i^{(k)}(t)$ - соответственно их k-ые производные.

Теорема 2.5. *Замыкание системы моментных величин дифференциальным инвариантом первого порядка группы симметрий уравнения (2) с $F = 0$ приводит к системе (12) из уравнения Хопфа и уравнения переноса массы.*

Любое решения системы (12) продолжается по формулам (13) до решения полной моментной системы.

По решению моментной системы ρ, u, ρu^2, $\ldots$ $\rho u^n, \ldots$ восстанавливается решение

$$f(t,x,c) = \rho_0(x - ct)\delta(c - u_0(x - ct)). \tag{14}$$

исходного уравнения (2) с $F = 0$, которое оказывается обобщенной функцией. Вычисление моментов (14) дает нам решение первого уравнения (12) в виде

$$\rho(t,x) = \frac{\rho_0(x - tu(t,x))}{1 + tu_0'(x - tu(t,x))}.$$

В последнем параграфе этой главы найдены инварианты уже второго порядка, точные формулировки этих результатов приведены в тексте диссертации.

В **третьей главе** исследуются два уравнения: многомерное уравнение Больцмана

$$f_t + c^i f_{x^i} + (F^i f)_{c^i} = J, \tag{15}$$

$$J = \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} [f(t,x,c')f(t,x,c_1')k(t,x,c',c_1',c,c_1) - \tag{16}$$

$$-f(t,x,c)f(t,x,c_1)k(t,x,c,c_1,c',c_1')]dc_1dc'dc_1'.$$

и «обобщенное» уравнение Власова

$$f_t + c^i f_{x^i} + (\mathcal{F}^i f)_{c^i} = 0, \tag{17}$$

$$\mathcal{F}^i = F^i(t,x,c) + \int\limits_{\mathbb{R}^{2n+1}} G^i(t,\theta; x,y; c,c') f(\theta,y,c') d\theta\, dy\, dc'. \tag{18}$$

Проведен групповой анализ указанных уравнений. По аналогии с одномерным случаем для введены три дополнительных ограничения на преобразования как группы эквивалентности, так и группы симметрий: инвариантность соотношений

$$dx^j = c^j dt, \;\; dc^j = F^j dt, \quad dx^j = dt = 0, \tag{19}$$

и условие сохранения величины

$$f(1 - c^i \theta_{x^i} - F^i \theta_{c^i}) dx dc \tag{20}$$

для любой поверхности $t = \theta(x,c)$.

Для уравнения (15)-(16) получены следующие результаты:

Теорема 3.1. *Алгебра Ли группы эквивалентности, сохраняющая дифференциальные соотношения (19) и форму (20), имеет вид:*

$$\Xi = \tau\partial_t + \xi^i \partial_{x^i} + \gamma^i \partial_{c^i} + \eta\partial_f + \phi^i \partial_{F^i}$$

$$\text{где } \tau = \tau(t,x) \text{ и } \xi^i = \xi^i(t,x) \text{– произвольные функции,} \tag{21}$$

$$\gamma^j = \xi^j_t - c^j \tau_t + (\xi^j_{x^i} - c^j \tau_{x^i}) c^i, \quad \eta = f[n\tau_t - 2\xi^k_{x^k} + (n+2) c^k \tau_{x^k}], \tag{22}$$

$$\phi^j = \gamma^j_t - F^j \tau_t + (\gamma^j_{x^i} - F^j \tau_{x^i}) c^i + \gamma^j_{c^i} F^i.$$

При этом действие полученной алгебры на левую часть (15) определяется формулой

$$\Xi(f_t + c f_x + (Ff)_c) = \tag{23}$$

$$= [(n-1)\tau_t - 2\xi^k_{x^k} + (n+1) c^k \tau_{x^k}] \big(f_t + c^i f_{x^i} + (F^i f)_{c^i}\big)\,.$$

Алгебра Ли группы симметрий, сохраняющая дифференциальные соотношения (19) и форму (20), имеет вид:

$$\Xi = \tau\partial_t + \xi^i \partial_{x^i} + \gamma^i \partial_{c^i} + \eta\partial_f,$$

где τ, ξ, γ и η определяются формулами (21)-(22), при этом выполнено (23) и должно выполняться соотношение

$$\gamma^j_t - F^j\tau_t + (\gamma^j_{x^i} - F^j\tau_{x^i})c^i + \gamma^j_{c^i}F^i - F^j_t\tau - F^j_{x^i}\xi^i - F^j_{c^i}\gamma^i = 0. \qquad (24)$$

Далее для краткости далее будем писать γ' вместо $\gamma(t,x,c')$, γ_1 вместо $\gamma(t,x,c_1)$ и γ'_1 вместо $\gamma(t,x,c'_1)$ и аналогично для функции f. Под $(\gamma')_{c^i}$, $(\gamma_1)_{c^i}$ и $(\gamma'_1)_{c^i}$ будем подразумевать дифференцирование по i-й компоненте скорости.

Обозначим через $\mathcal{K}(t,x,p,q,r) = \int_{\mathbb{R}^n} k(t,x,p,q,r,s)\,ds$, представив интеграл (16) в виде

$$J = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f'f'_1\mathcal{K}(t,x,c',c'_1,c)dc'dc'_1 - \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} ff_1\mathcal{K}(t,x,c,c_1,c')dc_1dc'. \qquad (25)$$

Теорема 3.2. *Классифицирующее уравнение для функции $\mathcal{K}$ в уравнении (16),(25) имеет вид*

$$2\mathcal{K}[(n+1)(\tau_t - c'^i\tau_{x^i}) - 2\xi^i_{x^i} + (n+2)\tau_{x^i}(c^i + c^i_1) + (\gamma)^i_{c^i} + (\gamma_1)^i_{c^i}]+$$

$$+2(\mathcal{K}_t\tau + \mathcal{K}_{x^i}\xi^i + \mathcal{K}_{c^i}\gamma^i + \mathcal{K}_{c^i_1}\gamma^i_1 + \mathcal{K}_{c'^i}(\gamma')^i) = \qquad (26)$$

$$= (\delta(c'-c_1) + \delta(c'-c))[(n+1)(\tau_t - c'^i\tau_{x^i}) - 2\xi^i_{x^i} + (n+2)\tau_{x^i}(c^i + c^i_1)]+$$
$$+\delta(c'-c)(\gamma_1)^i_{c^i} + \delta(c'-c_1)(\gamma)^i_{c^i},$$

где τ, ξ, γ определяются формулами (21)-(22).

Дальнейшее исследование уравнения (16), (25) состоит в решении классифицирующих уравнений (24), (26). В каноническом случае $F = 0$ оно приводит к «парадоксу масштабирования».

При $F = 0$ решение уравнение (24) – это алгебра с базисом

$$\partial_t,\ \partial_{x^i};\ t\partial_t,\ t\partial_{x^i},\ x^i\partial_t,\ x^i\partial_{x^j};\ t(t\partial_t + x^j\partial_{x^j}),\ x^i(t\partial_t + x^j\partial_{x^j}).$$

Теорема 3.4. *В случае $n \neq 1$, если уравнение (26) выполнено для алгебры сдвигов ∂_t, ∂_{x^j} и растяжений $t\partial_t + \sum_j x^j\partial_{x^j}$, то $\mathcal{K}$ не зависит от t и x и*

справедливо равенство

$$\mathcal{K}(t,x,c,c',c_1) = \frac{1}{2}[\delta(c'-c_1)+\delta(c'-c)],$$

из которого следует, что значение интеграла столкновений (25) равно нулю для любых $f(t,x,c)$.

В заключительной части третьей главы рассматривается уравнение (17)-(18). Для него остаются справедливы формулы (9), а классифицирующие соотношения для алгебры симметрий имеют вид

$$\gamma^j_t - F^j\tau_t + (\gamma^j_{x^i} - F^j\tau_{x^i})c^i + \gamma^j_{c^i}F^i = \tau F^j_t + \xi^i F^j_{x^i} + \gamma^i F^j_{c^i}, \tag{27}$$

$$\begin{gathered} G^i_t\tau + G^i_\theta\tau' + G^i_{x^k}\xi^k + G^i_{y^k}\xi'^k + G^i_{c^k}\gamma^k + G^i_{c'^k}\gamma'^k + \\ +G^i(\tau_t + c^k\tau_{x^k} + \tau'_\theta + c'^k\tau'_{y^k}) = \gamma^i_{c^j}G^j. \end{gathered} \tag{28}$$

В случае $F=0$ для уравнения (17)-(18) проведена частичная групповая классификация по функциям взаимодействия частиц G. Желая выделить именно значимые для физики случаи, были рассмотрены только алгебры, содержащие алгебру

$$\mathcal{A} = Lin(\partial_t, \partial_{x^j}, x^i\partial_{x^j} - x^j\partial_{x^i}, t\partial_{x^j}).$$

В результате были найдены всевозможные расширения алгебры $\mathcal{A}$, являющиеся решениями (27). Для каждой из 13 полученных алгебр найдены соответствующие функции G^i (они приведены в тексте диссертации), для которых уравнения (17)-(18) с $F=0$ допускают указанные алгебры. В том числе показано, что для «обобщенного» уравнения Власова не возникает «парадокс масштабирования»

Теорема 3.6. *Для уравнений с* $F=0$ *алгебра* $\{\mathcal{A}, t\partial_t + \sum x^i\partial_{x^i}\}$ *допускается уравнениями (17)-(18) с*

$$G = \frac{u}{s^3}P\left(\frac{|u|}{s}, \frac{|v|}{s}, \frac{(u,v)}{s^2}\right) + \frac{v}{s^3}Q\left(\frac{|u|}{s}, \frac{|v|}{s}, \frac{(u,v)}{s^2}\right),$$

где P и Q – произвольные функции; $s = t-\theta$; u, v – векторы с компонентами $u^j = x^j - y^j - sc^j$ и $v^j = x^j - y^j - sc'^j$;

$$|u|^2 = \sum_i (u^i)^2, \qquad |v|^2 = \sum_i (v^i)^2, \qquad (u,v) = \sum_i u^i v^i.$$

Заключение. В работе получен ответ на вопрос о реализуемости схемы получения замыканий моментной системы с помощью группы симметрий кинетического уравнения. Эта схема полностью реализована для одномерного уравнения Больцмана (уравнения Лиувилля), где произведена полная групповая классификация уравнений, действие полученных групп перенесено на моментные величины, найдены дифференциальные инварианты, с помощью которых построены замыкания моментной системы в условиях отсутствия внешних сил.

По этой же схеме начат анализ многомерных уравнений Больцмана и Власова: найдены классифицирующие соотношения, установлено, что классификация является двухуровневой. При этом для уравнения Больцмана обнаружен феномен немасштабируемости. Получена частичная групповая классификация потенциалов взаимодействия между частицами для многомерного уравнения Власова с отсутствующим внешним силовым полем.

Благодарность. Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, доценту Алексею Владиславовичу Боровских за постановку задачи, обсуждение результатов и постоянную поддержку в работе.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.02

1. Платонова К. С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. I. Группы симметрий // Дифференциальные уравнения, 2017, №4, С. 538-546 (импакт-фактор WOS 0.677)

2. Платонова К. С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. II. Группы эквивалентности и группы симметрий в специальном случае // Дифференциальные уравнения, 2017, №6, С. 801-813 (импакт-фактор 0.677)

3. Платонова К. С., Боровских А.В. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Условия сохранения физического смысла моментных величин // Теоретическая и математическая физика. 2018. Т. 195, № 3. С. 452-483 (импакт-фактор 0.854)

4. Боровских А.В., Платонова К.С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. IV. Полная групповая классификация в общем случае, 2019 , ТМФ, Т. 201, № 2, С. 232–265 (импакт-фактор 0.854)

5. Платонова К. С., Боровских А. В. Групповой анализ уравнений Больцмана и Власова // Теоретическая и математическая физика. — 2020. — Т. 203, № 3. — С. 417–450 (импакт-фактор 0.854)

Препринты

6. Borovskikh A.V., Platonova K.S. Group analysis of the one-dimensional Boltzmann equation, Arxiv preprint arXiv:1905.08873 (May 2019). URL https://arxiv.org/abs/1905.08873

Тезисы докладов

7. Боровских А. В., Платонова К. С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана и проблема замыкания моментной системы // Всероссийская конференция и школа для молодых ученых, посвященные 100-летию академика Л.В. Овсянникова. — Т. 1. — Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН Новосибирск, 2019. — С. 48–49.

8. Платонова К. С. Об уравнениях состояния, согласованных с группой симметрий кинетического уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 6. — С. 853–854.

9. Боровских А. В., Платонова К. С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана // Соболевкие чтения. Международная школа-конференция (Новосибирск, 20-23 августа 2017 г.): Тез. докладов / под ред. Г.В.Демиденко. — Изд-во Института математики Новосибирск, 2017. С. 40.

10. Платонова К. С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана при условии сохранения физического смысла моментных величин // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1570–1571.

11. Платонова К. С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана: группы эквивалентности // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики: Международная конференция,

Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 31 октября - 3 ноября 2016 г.: Тезисы докладов. — Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс Москва, 2016. — С. 63.

12. Платонова К. С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана: группы эквивалентности и группы симметрий в специальном случае // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1580–1581.

13. Платонова К. С. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1559–1560.

Список литературы

[1] Максвелл Д. К. Труды по кинетической теории. Пер. с англ. под ред. В.В. Веденяпина и Ю.Н. Орлова – 2011. с. 121-242

[2] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана /пер. с англ. под ред. Р.Г. Баранцева. М.: "Мир" , 1978

[3] Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. — М. : Физматлит, 2001. с. 7

[4] Mueller I., Ruggeri T. Extended thermodynamics //Springer Tracts in Natural Philosophy, 1998, v. 37, P. 1 - 222

[5] Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика 3. Теория неравновесных систем. – 2003., С. 283

[6] Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. – 1998. С. 121

[7] Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов /пер. с англ. под ред. Н.Н.Боголюбова. М.: ИИЛ, 1960. с. 510

[8] Villani C. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory in Handbook of Fluid Mechanics S. Friedlander and D. Serre, Eds. – 2002.

[9] Бобылев А. В. Об одном классе инвариантных решений уравнения Больцмана //ДАН СССР. – 1976. – Т. 231. – №. 3. – С. 571-574.

[10] Бобылев А. В., Ибрагимов Н. Х. Взаимосвязь свойств симметрии уравнений динамики, кинетической теории газов и гидродинамики //Математическое моделирование. – 1989. – Т. 1. – №. 3. – С. 100-109.

[11] Bobylev A., Dorodnitsyn V. Symmetries of evolution equations with nonlocal operators and applications to the Boltzmann equation //Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2009. – Т. 24. – №. 1. – С. 35-57.

[12] Бунимович А. И., Краснослободцев А. В. Инвариантно-групповые решения кинетических уравнений //Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1982. – №. 4. – С. 135-140.

[13] Бунимович А. И., Краснослободцев А. В. О некоторых инвариантных преобразованиях кинетических уравнений//Вестник МГУ, серия I, матем. механика, 1983, 4, С. 69-72

[14] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Групповой анализ интегродифференциального уравнения Больцмана //Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 297. – №. 2. – С. 323.

[15] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Исследование инвариантных решений кинетического уравнения Больцмана и его моделей //Препринт М 18-8б. ИТПМ ОО АН ОООР, Новосибирск. – 1986.

[16] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Групповой анализ уравнений Больцмана релаксирующего многокомпонентного газа //Доклады РАН. – 1998. – №. 4. – С. 459-462.

[17] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Полная группа Ли и инвариантные решения системы уравнений Больцмана многокомпонентной смеси газов //Сибирский математический журнал. – 1997. – Т. 38. – №. 3. – С. 510-525.

[18] Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. Symmetries of integro-differential equations: with applications in mechanics and plasma physics. – Springer Science & Business Media, 2010. – Т. 806.

[19] Akhiev S. S., Özer T. Symmetry groups of the equations with nonlocal structure and an application for the collisionless Boltzmann equation

//International journal of engineering science. – 2005. – Т. 43. – №. 1-2. – С. 121-137.

[20] Ильин О. В. Симметрии и инвариантные решения одномерного уравнения Больцмана для неупругих столкновений //Теоретическая и математическая физика. – 2016. – Т. 186. – №. 2. – С. 221-229.

[21] Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В. Групповой анализ кинетического уравнения Власова. I //Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29. – №. 10. – С. 1804-1817.

[22] Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В. Групповой анализ кинетического уравнения Власова. II //Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29. – №. 11. – С. 1971–1983.

[23] Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Групповой анализ интегродифференциальных кинетических уравнений. Результаты и перспектива //Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7. – №. 2.

[24] Levermore C. D. Moment closure hierarchies for kinetic theories //Journal of statistical Physics. – 1996. – Т. 83. – №. 5-6. – С. 1021-1065.

[25] Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases //Communications on pure and applied mathematics. – 1949. – Т. 2. – №. 4. – С. 331-407.