МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Мокроусов Илья Сергеевич

О свойствах решений смешанных задач для волнового и телеграфного уравнений с нелокальными краевыми условиями

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2020

Работа выполнена на кафедре Общей математики факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Ломов Игорь Сергеевич,**

доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Костин Андрей Борисович,**

доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», институт общей профессиональной подготовки, кафедра высшей математики, профессор

Потапов Михаил Михайлович,

доктор физико-математических наук, доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра оптимального управления, профессор

Солдатов Александр Павлович,

доктор физико-математических наук, профессор, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, отдел прикладной математической физики, главный научный сотрудник

Защита состоится 16 декабря 2020 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета *МГУ.01.09* Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: *Российская федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, строение 52, факультет ВМК, комната 685*

E-mail: ilgova@cs.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27). Со сведениями о регистрации участия в защите в удаленном интерактивном режиме и с диссертацией в электронном виде также можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»:

http://istina.msu.ru/dissertations/330362565/

Автореферат разослан «13» ноября 2020 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук,

член-корр. РАН *Ильин А. В.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

В XVIII веке разгорелась научная дискуссия между знаменитыми математиками Д'Аламбером, Эйлером, Д. Бернулли, Лагранжем, известная истории как «Спор о звучащей струне». Дискуссия началась как диспут об определении понятия функции, а позднее дала толчок развитию различных теорий, таких как дифференциальные уравнения в частных производных, математический анализ, теория функций комплексного и вещественного переменного, теория тригонометрических рядов Фурье, теория обобщенных функций и пространств Соболева.

Одним из итогов этого многолетнего спора было открытие волнового уравнения. Данное уравнение используется в описании таких физических явлений, как механические колебания (например малые продольные или поперечные колебания металлических стержней), процесс распространения электро-магнитных, гравитационных и акустических волн в газах, жидкостях и твердых средах. Многие известные математики рассматривали в своих работах как классические, так и обобщенные решения начально-краевых задач для волнового уравнения.

Одномерное телеграфное уравнение является обобщением волнового уравнения и описывает большое количество физических процессов. В частности, для электродинамический теории телеграфные уравнения, являясь частным случае уравнений Максвелла, определяют напряжение и силу тока в линиях электрической связи. С помощью телеграфного уравнения можно описать релятивистскую версию уравнения Шредингера; в литературе это уравнение известно под названием уравнение Клейна-Гордона-Фока. Телеграфное уравнение характеризует динамику изменения давления жидкости и газа в трубопроводе.

Среди первопроходцев исследований в области граничного управления распределенными системами стоит выделить Ж.-Л. Лионса. В его работах вопросы поведения колебательных систем формулировались в терминах смешанных начально-краевых задач. Так в работе [8] для волнового уравнения, пользуясь видом обобщенного решения задачи, было доказано, что задача успокоения колеблющейся струны имеет решение, не являющееся при этом единственным для длительных временных промежутков рассмотрения процесса. Идеи Лионса нашли свое отражение в работах E. Zuazua [9] для описания управления квазилинейным волновым уравнением. Метод единственности Гильберта, используемый в вышеперечисленных работах, показал себя удобным подходом для изучения свойств решений задачи о граничном управлении.

Большое число технологических процессов, рассмотренных в книге А.Г. Бутковского [10], также приводит к смешанным граничным задачам. Для исследования поведения решений рассматриваемых задач используются различные аналитические методы, такие как метод Фурье, метод моментов, метод гармоник. В рамках численного подхода к решению задач для волнового уравнения стоит отметить работы Ф.П. Васильева [11] и его учеников [12] [13] [14]. В этих статьях были разработаны эффективные численные методы решения задач наблюдения, опирающиеся на концепцию теории двойственности для линейных систем управления.

Важные фундаментальные результаты исследования именно обобщенных решений для смешанных задач для гиперболических уравнений содержатся в книге О.А. Ладыженской [15] и большой статье В.А. Ильина [16].

Начиная с 1999г. в цикле работ, опубликованном В.А. Ильиным [17], Е.И. Моисеевым [18] и их учениками решались различные вариации начально-краевых задач для гиперболических уравнений. В этих работах ключевую роль при решении задач оптимального граничного управления играло решение поставленной задачи, выраженное в явном аналитическом виде и зависящее от граничной функции. Данная диссертация является продолжением начатых исследований и большая ее часть посвящена построению решений для волнового уравнения с некоторыми видами нелокальных граничных условий. Стоит отметить, что одними из первых задачи разрешимости дифференциальных уравнений с модельными нелокальными граничными условиями рассмотрели А.В. Бицадзе и А.А. Самарский. Большую роль в развитии этого направления сыграли их статьи [19] и [20], в которых были предложены новые постановки задач для уравнений в частных производных.

Через некоторое время В.А. Ильин в работе [21] предъявил аналитическое решение задачи для волнового уравнения с четырьмя модельными, одноточечными нелокальными условиями типа Бицадзе-Самарского

$$u(l,t) = -u(\dot{x},t), u(l,t) = u(\dot{x},t),$$
$$u_x(l,t) = -u_x(\dot{x},t), u_x(l,t) = u_x(\dot{x},t),$$

где $\dot{x}$ произвольная точка из интервала $(0,l)$. Позднее он получил результаты [22], [23] в оптимизации граничного управления решением волнового уравнения с этими условиями. Отметим также статью А.А. Кулешова [24], чьи результаты для начально-краевых задач с одноточечными нелокальными граничными условиями обобщаются в данной диссертационной работе. Отметим и статью А.А. Холомеевой [25], где нелокальным рассматривается само управление $\mu(t) = u_x(l,t) - u_x(0,t)$.

Рассмотрение непрерывно дифференцируемых решений накладывает существенные ограничения на задачи для уравнений в частных производных. Но если исходить не из дифференциальных, а из интегральных уравнений (см. например работы А.П. Хромова и его учеников [26], [27]), то класс решений, а значит, и класс исходных краевых задач, можно существенно расширить. Для большого класса задач для волнового и телеграфного уравнений получены явные решения методом учета волн. Из вида этих решений легко следует достаточное условие принадлежности тому или иному функциональному классу. Более тонкую работу нужно проделать для установления критерия принадлежности решения различным классам обобщенных функций. Данные результаты позволяют по свойствам граничной функции устанавливать свойства решения, рассматриваемой задачи.

Исследования свойств решений смешанной задачи для волнового уравнения были проведены в цикле работ В.А. Ильин и Е.И. Моисеева совместно с учениками [28], [29], [30]. Отдельно хотелось бы выделить работу [31], в которой был получен критерий принадлежности классу W_p^1 обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения и отметить, что в рамках данной диссертационной работы этот критерий обобщается на случай W_p^l с целым показателем l.

Также отметим работы И.С. Ломова по многоточечным краевым задачам (см. [32]).

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является исследование вопросов существования и единственности решения задач для волнового и телеграфного уравнений с различными граничными условиями, в рамках аналитического подхода. А также исследование свойств этих решений в зависимости от поставленных граничных условий.

Для достижения намеченной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Задача построения аналитического решения для волнового уравнения с нулевыми начальными условиями и четырьмя вариантами граничных условий, где на правом задается нелокальное условие.

2. Задача получения критерия принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения.

3. Задача построения обобщенного из класса L_p решения смешанной задачи для телеграфного уравнения.

4. Задача установления единственности обобщенного из класса L_p решения смешанной задачи для телеграфного уравнения.

Научная новизна. Степень разработанности диссертации. В диссертационной работе были получены следующие новые результаты:

1. Для смешанной задачи для волнового уравнения получены критерии принадлежности решения пространству Соболева W_p^l с целыми индексами l, что обобщает ранее полученный результат с $l = 1$.

2. Для волнового уравнения с двумя видами нелокальных граничных условий на правом конце и условием первого или второго рода на левом конце получены два алгоритма вычисления коэффициентов, используемых для получения явного аналитического решения.

3. Для уравнения колебания струны с двумя видами нелокальных граничных условий получены решения в явном аналитическом виде.

4. Для обобщенного из класса L_p решения смешанной задачи для телеграфного уравнения показана единственность в L_p. Дополнительно установлено, что формулы решений в пространствах W_2^1 и L_p совпадают при $p \geqslant 1$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит в основном теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для построения решений некоторых задач для волнового и телеграфного уравнений. Эти решения играют важную роль в задачах наблюдения и управления. На практике полученные результаты находят применение в обработке и передаче сигналов, поддержании стабильности колебательных систем.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории уравнений с нелокальными граничными условиями и методы функционального анализа.

Положения, выносимые на защиту. В диссертационной работе получены следующие новые научные результаты, которые выносятся на защиту:

1. Существование и единственность решений четырех смешанных задач для уравнения колебания струны с нелокальными граничными условиями первого и второго рода;

2. Критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения ($l \in \mathbb{N}, p \geqslant 1$);

3. Существование и единственность решения смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока в пространстве L_p при $p \geqslant 1$;

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов данной работы обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов.

Основные результаты диссертации и отдельные ее части докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Научно-исследовательский семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова (руководители акад. Е.И. Моисеев и проф. И.С. Ломов) (Москва, ВМК МГУ, 2019) ;

2. Научно-исследовательский семинар «Теория операторов» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (руководитель член кор. РАН А.А. Шкаликов) (Москва, Мех-мат МГУ, 2018) ;

3. Международная конференция "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX посвященная 90-летию В.А. Ильина (Москва, ВМК МГУ, 2018);

4. Международная научная конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2017» (Москва, МГУ, 2017);

5. Международная Конференция (Семинар (workshop)): Boundary Value Problem, Functional Equations and Applications 3 (Rzeszow, Польша, 2016);

6. Международная Конференция: ВВМШ "Понтрягинские чтения XXVII" (Воронеж, ВГУ, 2016);

7. Международная Конференция: Ломоносовские чтения - 2016 (Москва, МГУ, 2016);

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [1–3], и 4 тезиса докладов [4–7]. Работа [2] выполнена в соавторстве. В этой работе теорема 2 принадлежит автору диссертации, теорема 1 соавтору А.А. Кулешову. Использованное в работе представление решения задачи для телеграфного уравнения было ранее получено соавтором И.Н. Смирновым в работе [33].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 77 страниц. Библиография включает 68 наименований на 9 страницах.

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируются цели работы и основные положения, выносимые на защиту; обосновываются научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость представляемой работы.

В **главе 1** рассматриваются четыре смешанные задачи для уравнения колебания струны с нелокальными граничными условиями первого рода и общего вида.

Параграф 1 содержит в себе постановку и описание рассматриваемых задач. Для этого вводится прямоугольник $Q_T = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ и на нем рассматривается введенный В. А. Ильиным в работе [34] класс $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ функций двух переменных $u(x,t)$, непрерывных в Q_T и обладающих обобщенными частными производными $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, принадлежащими классу $L_2\,(Q_T)$, а также классу
$L_2\,[0 \leqslant x \leqslant l]$ при всех $t \in [0,T]$ и классу $L_2[0 \leqslant t \leqslant T]$ при всех $x \in [0,l]$. В этом параграфе приводятся четыре смешанных задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

и одним из следующих краевых условий

$$u(0,t) = \mu(t)\,, \qquad u(l,t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u(x_k,t); \tag{3}$$

$$u(0,t) = \mu(t)\,, \qquad u_x(l,t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_x(x_k,t); \tag{4}$$

$$u_x(0,t) = \mu(t)\,, \qquad u(l,t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u(x_k,t); \tag{5}$$

$$u_x(0,t) = \mu(t)\,, \qquad u_x(l,t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_x(x_k,t); \tag{6}$$

где n – целое неотрицательное число, $0 < x_i < l, i = \overline{0,n}$, α_k – произвольные вещественные постоянные, $k = \overline{0,n}$, $\mu(t)$ — произвольная функция из класса $L_2[0,T]$ в случае (5) и (6), а в случае (3) и (4) $\mu(t)$ — произвольная функция из класса $W_2^1[0,T]$ удовлетворяющая условию $\mu(0) = 0$. Решение задач (1),(2), (3)–(6), также как и в работе [35] понимается в смысле

Определение 1. *Обобщенным из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *решением смешанной задачи для волнового уравнения* (1) *с начальными условиями* (2) *и с одной из совокупностей граничных и нелокальных условий* (3)–(6) *называется функция* $u(x,t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, *удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l u(x,t)\left[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)\right]dxdt=$$

$$=\begin{cases} -\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\int\limits_0^T u(x_k,t)\,\Phi_x(l,t)\,dt, & \text{в случае условия (3), (5) ;}\\ \sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\int\limits_0^T u_x(x_k,t)\,\Phi(l,t)\,dt, & \text{в случае условия (4), (6) ;}\end{cases}+$$

$$+\begin{cases} \int\limits_0^T \mu(t)\,\Phi_x(0,t)\,dt, & \text{в случае условия (3), (4) ;}\\ -\int\limits_0^T \mu(t)\,\Phi(0,t)\,dt, & \text{в случае условия (5), (6) ;}\end{cases}$$

в котором $\Phi(x,t)$ — *произвольная функция из класса* $C^2(Q_T)$, *удовлетворяющая нулевым финальным условиям* $\Phi(x,T)=0$, $\Phi_t(x,T)=0$ *при* $0\leqslant x\leqslant l$, *равенству* $\Phi(0,t)=0$ *при* $0\leqslant t\leqslant T$ *в случае условия* $u(0,t)=\mu(t)$, *равенству* $\Phi_x(0,t)=0$ *при* $0\leqslant t\leqslant T$ *в случае условия* $u_x(0,t)=\mu(t)$, *равенству* $\Phi(l,t)=0$ *при* $0\leqslant t\leqslant T$ *в случае условия* $u(l,t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k u(x_k,t)$, *равенству* $\Phi_x(l,t)=0$ *при* $0\leqslant t\leqslant T$ *в случае условия* $u_x(l,t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k u_x(x_k,t)$.

В этом параграфе будет введена функция $\underline{\mu}(t)$, совпадающая с $\mu(t)$ при $t\geqslant 0$ и равная нулю, при $t<0$. Введена также функция $\widehat{\underline{\mu}}(t)=\int\limits_0^t\underline{\mu}(\tau)\,d\tau$. В этом параграфе будет введено как основное множество

$$\Omega=\left\{\overline{p}=(m,p_0,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^{n+2}\,\middle|\,\left|\sum_{k=0}^{n}p_k-1\right|+1\leqslant m\leqslant m_0,\left|\sum_{k=0}^{n}p_k-2p_j\right|\leqslant m,\,j=\overline{0,n}\right\},\quad(7)$$

так и вспомогательные производные множества

$$\widehat{\Omega}=\left\{\overline{p}=(m,p_0,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^{n+2}\,\middle|\,-1\leqslant m\leqslant m_0,\ 1-m_0\leqslant\sum_{k=0}^{n}p_k\leqslant m_0+1,\ i=\overline{0,n}\right\}; \qquad (8)$$

$$\widehat{\Omega}^{m+1}=\left\{\overline{p}=(m,p_0,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^{n+2}\,\middle|\,(m-1,p_0,\ldots,p_n)\in\widehat{\Omega}\right\}; \qquad (9)$$

$$\widehat{\Omega}^{m-1}=\left\{\overline{p}=(m,p_0,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^{n+2}\,\middle|\,(m+1,p_0,\ldots,p_n)\in\widehat{\Omega}\right\}; \qquad (10)$$

$$\widehat{\Omega}^{p_k-1}=\left\{\overline{p}=(m,p_0,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^{n+2}\,\middle|\,(m,p_0,\ldots,p_k+1,\ldots,p_n)\in\widehat{\Omega}\right\}; \qquad (11)$$

$$\widehat{\Omega}^{p_k+1}=\left\{\overline{p}=(m,p_0,\ldots,p_n)\in\mathbb{Z}^{n+2}\,\middle|\,(m,p_0,\ldots,p_k-1,\ldots,p_n)\in\widehat{\Omega}\right\}. \qquad (12)$$

Решения граничной задачи для волнового уравнения обычно представляются в виде линейной комбинации граничных функций с некоторыми коэффициентам. Дальнейшие параграфы будут содержать алгоритмы поиска вещественных чисел, которые будут использоваться в этих линейных комбинациях. Данные коэффициенты будут использованы для записи решения задач (1),(2), (3)–(6).

Для задачи (1), (2), (3) алгоритм получения этих коэффициентов может быть описан рекуррентным соотношением

$$a_{\overline{p}}=0 \text{ при } \overline{p}\in\widehat{\Omega}\backslash\Omega\backslash\{\overrightarrow{0}\},\ a_{\overline{0}}=1,$$

$$a_{\overline{p}_m^+}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(a_{\overline{p}_k^+}-a_{\overline{p}_k^-})+a_{\overline{p}_m^-}, \qquad (13)$$

где $a_{\overline{p}_m^\pm}=a_{(m\pm1,p_0,p_1,\ldots,p_n)}$, $a_{\overline{p}_k^\pm}=a_{(m,p_0,p_1,\ldots p_{k-1},p_k\pm1,p_{k+1},\ldots p_n)}$.

Для задачи (1), (2), (4) алгоритм получения этих коэффициентов может быть описан рекуррентным соотношением

$$a_{\overline{p}}=0 \text{ при } \overline{p}\in\widehat{\Omega}\backslash\Omega\backslash\{\overrightarrow{0}\},\ a_{\overline{0}}=-1.$$

$$a_{\overline{p}_m^+} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_{\overline{p}_k^+} - a_{\overline{p}_k^-}) + a_{\overline{p}_m^-}, \tag{14}$$

где $a_{\overline{p}_m^\pm} = a_{(m\pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\overline{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots p_n)}$.

Для задачи (1), (2), (5) алгоритм получения этих коэффициентов может быть описан рекуррентным соотношением

$$a_{\overline{p}} = 0 \text{ при } \overline{p} \in \widehat{\Omega} \backslash \Omega \backslash \{\overrightarrow{0}\},\ a_{\overline{0}} = 1,$$

$$a_{\overline{p}_m^+} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_{\overline{p}_k^+} + a_{\overline{p}_k^-}) - a_{\overline{p}_m^-}, \tag{15}$$

где $a_{\overline{p}_m^\pm} = a_{(m\pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\overline{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots p_n)}$.

Для задачи (1), (2), (6) алгоритм получения этих коэффициентов может быть описан рекуррентным соотношением

$$a_{\overline{p}} = 0 \text{ при } \overline{p} \in \widehat{\Omega} \backslash \Omega \backslash \{\overrightarrow{0}\},\ a_{\overline{0}} = -1.$$

$$a_{\overline{p}_m^+} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_{\overline{p}_k^+} + a_{\overline{p}_k^-}) - a_{\overline{p}_m^-}, \tag{16}$$

где $a_{\overline{p}_m^\pm} = a_{(m\pm 1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, $a_{\overline{p}_k^\pm} = a_{(m, p_0, p_1, \dots p_{k-1}, p_k \pm 1, p_{k+1}, \dots p_n)}$.

Подсчет совершается по значениям связанным с первой координатой m. Коэффициенты $a_{\overline{p}}$ при неположительных m известны и равны нулю кроме разве что точки $\overline{p} = \overline{0}$.

Параграф 2 посвящен решению задачи в случае краевого условия первого рода на левом конце и нелокального условия первого рода на правом конце, итогом которого является следующая

Теорема 1. *Для произвольных вещественных чисел* $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}, x_k \in (0, l)$ *и* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *где* $k = \overline{0, n}$ *и произвольной функции* $\mu(t)$ *из класса* $W_2^1[0, T]$, *удовлетворяющей условию $\mu(0) = 0$, смешанная задача (1), (2), (3) имеет единственное обобщенное решение $u\,(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой*

$$u\,(x,t) = \underline{\mu}(t-x) + \\ + \sum_{\overline{p}\in\Omega} a_{\overline{p}} \left[\underline{\mu}\left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)\right) - \underline{\mu}\left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)\right)\right], \tag{17}$$

где $a_{\overline{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\overline{p}} = 0 \text{ при } \overline{p} \in \left(\widehat{\Omega}\backslash\Omega\right)\backslash\{\overline{0}\},\ a_{\overline{0}} = 1,$$

где множество Ω определено (7), а множество $\widehat{\Omega}$ определено (8) Для остальных значений $a_{\overline{p}_m^+}$ при $\overline{p}_m^+ \in \Omega$ выполнено соотношение

$$a_{\overline{p}_m^+} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_{\overline{p}_k^+} - a_{\overline{p}_k^-}) + a_{\overline{p}_m^-}, \tag{18}$$

где $a_{\overline{p}_m^\pm} = a_{(m\pm1,p_0,p_1,\dots,p_n)}$, а $a_{\overline{p}_k^\pm} = a_{(m,p_0,p_1,\dots p_{k-1},p_k\pm1,p_{k+1},\dots p_n)}$.

Параграф 3 посвящен решению задачи в случае краевого условия первого рода на левом конце и нелокального условия второго рода на правом конце, итогом которого является следующая

Теорема 2. *Для произвольных вещественных чисел $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}, x_k \in (0,l)$ и $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, где $k = \overline{0,n}$ и произвольной функции $\mu\,(t)$ из класса $W_2^1[0,T]$, удовлетворяющей условию $\mu(0) = 0$, смешанная задача (1), (2), (4) имеет единственное обобщенное решение $u\,(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которое определяется формулой*

$$u\,(x,t) = \underline{\mu}(t-x) + \\ + \sum_{\overline{p}\in\Omega} a_{\overline{p}} \left[\underline{\mu}\left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)\right) - \underline{\mu}\left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)\right)\right], \tag{19}$$

где $a_{\overline{p}}$ постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями

$$a_{\overline{p}} = 0 \text{ при } \overline{p} \in \left(\widehat{\Omega}\backslash\Omega\right)\backslash\{\overline{0}\},\ a_{\overline{0}} = 1,$$

где множество Ω *определено* (7), *а множество* $\widehat{\Omega}$ *определено* (8) *Для остальных значений* $a_{\overline{p}_m^+}$ *при* $\overline{p}_m^+ \in \Omega$ *выполнено соотношение*

$$a_{\overline{p}_m^+} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_{\overline{p}_k^+} + a_{\overline{p}_k^-}) - a_{\overline{p}_m^-}, \tag{20}$$

где $a_{\overline{p}_m^\pm} = a_{(m\pm1,p_0,p_1,\dots,p_n)}$, *а* $a_{\overline{p}_k^\pm} = a_{(m,p_0,p_1,\dots p_{k-1},p_k\pm1,p_{k+1},\dots p_n)}$.

Параграф 4 посвящен решению задачи в случае краевого условия второго рода на левом конце и нелокального условия первого рода на правом конце, итогом которого является следующая

Теорема 3. *Для произвольных вещественных чисел* $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}, x_k \in (0,l)$ *и* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *где* $k = \overline{0,n}$ *и произвольной функции* $\mu(t)$ *из класса* $L_2[0,T]$, *смешанная задача* (1), (2), (5) *имеет единственное обобщенное решение* $u(x,t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, *которое определяется формулой*

$$u(x,t) = -\underline{\widehat{\mu}}(t-x) + \\ + \sum_{\overline{p}\in\Omega} a_{\overline{p}} \left[\underline{\widehat{\mu}}\left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)\right) + \underline{\widehat{\mu}}\left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)\right)\right], \tag{21}$$

где $a_{\overline{p}}$ *постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями*

$$a_{\overline{p}} = 0 \text{ при } \overline{p} \in \left(\widehat{\Omega} \backslash \Omega\right) \backslash \{\overline{0}\}, \; a_{\overline{0}} = -1,$$

где множество Ω *определено* (7), *а множество* $\widehat{\Omega}$ *определено* (8) *Для остальных значений* $a_{\overline{p}_m^+}$ *при* $\overline{p}_m^+ \in \Omega$ *выполнено соотношение*

$$a_{\overline{p}_m^+} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_{\overline{p}_k^+} + a_{\overline{p}_k^-}) - a_{\overline{p}_m^-}, \tag{22}$$

где $a_{\overline{p}_m^\pm} = a_{(m\pm1,p_0,p_1,\dots,p_n)}$, *а* $a_{\overline{p}_k^\pm} = a_{(m,p_0,p_1,\dots p_{k-1},p_k\pm1,p_{k+1},\dots p_n)}$.

Параграф 5 посвящен решению задачи в случае краевого условия второго рода на левом конце и нелокального условия второго рода на правом конце, итогом которого является следующая

Теорема 4. *Для произвольных вещественных чисел* $T > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}, x_k \in (0, l)$ *и* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *где* $k = \overline{0, n}$ *и произвольной функции* $\mu(t)$ *из класса* $L_2[0, T]$, *смешанная задача* (1), (2), (6) *имеет единственное обобщенное решение* $u(x, t)$ *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, *которое определяется формулой*

$$u(x,t) = -\underline{\widehat{\mu}}(t-x) + \\ + \sum_{\overline{p}\in\Omega} a_{\overline{p}} \left[\underline{\widehat{\mu}}\left(t - x - \left(ml + \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)\right) + \underline{\widehat{\mu}}\left(t + x - \left(ml + \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)\right)\right], \qquad (23)$$

где $a_{\overline{p}}$ *постоянные коэффициенты, которые определены следующими соотношениями*

$$a_{\overline{p}} = 0 \text{ при } \overline{p} \in \left(\widehat{\Omega} \backslash \Omega\right) \backslash \{\overline{0}\}, \ a_{\overline{0}} = -1,$$

где множество Ω *определено* (7), *а множество* $\widehat{\Omega}$ *определено* (8) *Для остальных значений* $a_{\overline{p}_m^+}$ *при* $\overline{p}_m^+ \in \Omega$ *выполнено соотношение*

$$a_{\overline{p}_m^+} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (a_{\overline{p}_k^+} - a_{\overline{p}_k^-}) + a_{\overline{p}_m^-}, \qquad (24)$$

где $a_{\overline{p}_m^{\pm}} = a_{(m\pm1, p_0, p_1, \dots, p_n)}$, *а* $a_{\overline{p}_k^{\pm}} = a_{(m, p_0, p_1, \dots p_{k-1}, p_k\pm1, p_{k+1}, \dots p_n)}$.

Параграф 6 посвящен доказательству основной теоремы 1 параграфа 2. Доказательство состоит из четырех подразделов, где первый, касается доказательства единственности решения смешанных задач (1), (2), (3) - (4). В рамках этого раздела используется

Теорема 5. *(Ильин В.А. [35]) Для любого фиксированного* $T > 0$ *существует не более одного обобщенного решения каждой из смешанных задач* (1), (2), (3) - (6) *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Второй раздел подтверждает выполнение нелокального граничного условия для задачи (1), (2), (3). Третий раздел завершает доказательство основной теоремы параграфа 2, доказывая, что полученное решение согласуется с определением 1 и принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. В финальном разделе приводится схема доказательства для случая нелокального граничного условия второго рода на правом конце. В рамках этого параграфа приводятся только те моменты, которые отличаются для случая нелокального граничного условия первого рода.

Параграф 7 посвящен доказательству основной теоремы 3 параграфа 4. Доказательство состоит из четырех подразделов, где первый, касается доказательства единственности решения смешанных задач (1), (2), (5) - (6). Второй раздел подтверждает выполнение нелокального граничного условия для задачи (1), (2), (5). Третий раздел завершает доказательство основной теоремы параграфа 3, доказывая, что полученное решение согласуется с определением 1 и принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. В финальном разделе приводится схема доказательства для случая нелокального граничного условия второго рода на правом конце. В рамках этого параграфа приводятся только те части доказательства, которые отличаются для случая нелокального граничного условия первого рода.

Таким образом в первой главе в явном виде получены решения смешанных нелокальных задач (1),(2),(3)-(6) для произвольных весовых параметров α_i, произвольных внутренних точек x_i из интервала $(0, l)$, где $i = \overline{0, n}$ и произвольного рассматриваемого времени T. Результаты **главы 1** были опубликованы в работах [1], [6] [7].

Глава 2 посвящена критерию принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения.

Параграф 1 содержит уже известные результаты о принадлежности решения задачи для волнового уравнения функциональным пространствам. Как и в первой главе рассматривается в прямоугольнике $Q_T = [0 \leqslant x \leqslant X] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение $u(x,t)$ смешанной задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \tag{25}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0)=0, \qquad u_t(x,0)=0 \tag{26}$$

и на этот раз с граничными условиями первого рода на левом конце и закреплением на правом

$$u(0,t)=\mu(t)\,, \qquad u(X,t)=0. \tag{27}$$

Отметим, что во второй главе используется иное обозначение длинны рассматриваемого участка. Это сделано, чтобы использовать обозначение l для верхнего индекса пространства W_p^l.

Параграф 2 содержит две теоремы. Первая определяет необходимое условие принадлежности пространству Соболева

Теорема 6. *Для того чтобы обобщенное из класса $L_p(Q_T)$ решение смешанной задачи* (25) - (27) *принадлежало классу $W_p^l(Q_T)$ при целых $l \geqslant 1, p \geqslant 1$ необходимо, чтобы принадлежащая классу $L_p[0,T]$ граничная функция $\mu(t)$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ принадлежала классу $W_p^l[0,T-\varepsilon]$.*

В следующей теореме непосредственно сформулирован критерий принадлежности решения рассматриваемой задачи классу W_p^l.

Теорема 7. *Если при фиксированных $T>0$ и $p \geqslant 1$ граничная функция $\mu(t)$ принадлежит классу $L_1[0,T-\varepsilon]$ при любом ε из интервала $0<\varepsilon<T$, то для принадлежности обобщенного из класса $L_p(Q_T)$ решения $u(x,t)$ смешанной задачи* (25) - (27) *к классу $W_p^l(Q_T)$ при $l \in \mathbb{N}$ необходимо и достаточно, чтобы граничная функция $\mu(t)$ имела на $0<t<T$ обобщенную производную $\mu^{(l)}(t)$, и чтобы существовал интеграл*

$$\int\limits_0^T (T-t)|\mu^{(l)}(t)|^p dt \tag{28}$$

Стоить отметить, что приведенных две теоремы отличаются от теорем из работы [36] лишь классом, для которого исследуется принадлежность решения. Это и составляет основное содержимое исследования.

Результаты **главы 2** были опубликованы в работе [3], [4].

Глава 3 посвящена вопросам разрешимости смешанных задач в прямоугольнике $Q_T = [0 \leqslant x \leqslant l] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ для уравнения Клейна-Гордона-Фока

$$u_{tt}(x,t) - Lu(x,t) = 0, \tag{29}$$

где

$$Lu := u_{xx} - au, a \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \text{ при } x \in [0,l] \tag{31}$$

и с граничными условиями

$$u(0,t) = \mu(t), u(l,t) = 0 \text{ при } t \in [0,T], \tag{32}$$

предполагается, что граничная функция μ принадлежит классу $L_p[0,T]$ при $p \geqslant 1$. С помощью явного аналитического вида решения из класса W_2^1 строится решение из класса L_p. Где решение понимается в смысле

Определение 2. *Обобщенным из класса $L_p(Q_T)$ решением смешанной задачи (29)-(32) назовем функцию $u \in L_p(Q_T)$, удовлетворяющую тождеству*

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l u(x,t)\Big[\Phi_{tt}(x,t) - L\Phi(x,t)\Big]dxdt = \int\limits_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)dt \tag{33}$$

для любой функции $\Phi \in C^2(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $\Phi(x,T) \equiv 0$, $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ и условиям $\Phi(0,t) \equiv 0$, $\Phi(l,t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Параграф 1 посвящен доказательству теоремы единственности, сформулированной в виде

Теорема 8. *Может существовать не более одного обобщенного из класса $L_1(Q_T)$ решения смешанной задачи (29)-(32).*

Данная теорема вытекает из полноты собственных функций двух дифференциальных операторов, описывающих телеграфное уравнение. В **параграфе 2** показывается существование решения задачи, что также формулируется в виде

Теорема 9. *Для любых фиксированных $T > 0$, $a \geqslant 0$ и $p \geqslant 1$ существует обобщенное решение из класса $L_p(Q_T)$ смешанной задачи (29)-(32), определяемое равенством*

$$u\,(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \left[\underline{\mu}(t-x-2kl) - cx \int\limits_0^{t-x-2kl} \underline{\mu}(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2}} d\tau \right] -$$
$$-\sum_{k=1}^{n+1} \left[\underline{\mu}(t+x-2kl) - cx \int\limits_0^{t+x-2kl} \underline{\mu}(\tau) \frac{J_1(c\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2})}{\sqrt{(t-\tau-2kl)^2-x^2}} d\tau \right], \quad (34)$$

где $J_1(x)$ функция Бесселя первого рода, $c := \sqrt{a}$, n - наименьший из номеров, удовлетворяющих неравенству $T \leqslant 2l(n+1)$, а символ $\underline{\mu}(t)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(t)$ при $t \geqslant 0$ и равную нулю при $t < 0$.

Доказательство, приведенное в этом параграфе, опирается на идею о том, что при переходе граничной функции из класса W_2^1 в класс L_p решение так же переходит из класса W_2^1 в класс L_p.

Результаты **главы 3** были опубликованы в работе [2],[5].

В **Заключении 3** приводятся основные полученные результаты, подводятся итоги проведенной работы и описываются возможные направления для дальнейших исследований.

Автор выражает благодарность коллективу кафедры Общей математики факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и предоставленные ему благоприятные условия для работы. Автор выражает благодарность А.А. Кулешову и И.Н. Смирнову за идеи и полезные советы в процессе работы.

Особую благодарность автор выражает своему научному руководителю профессору Игорю Сергеевичу Ломову за внимательное руководство процессом исследования поставленных задач.

Список публикаций в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.02

1. Мокроусов И. С. Смешанные задачи для уравнения колебаний струны с нелокальными условиями общего вида на правом конце и неоднородным условием на левом // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 516–523. Trans. Differential Equations. — 2017. — Vol. 53, no. 4. — P. 509–515 (импакт-фактор 0.677).
2. Кулешов А. А., Мокроусов И. С., Смирнов И. Н. О разрешимости смешанных задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока в классе L_p при $p >= 1$ // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 3. С. 336–340. Trans. Differential Equations. — 2018. — Vol. 54, no. 3. — P. 330–334 (импакт-фактор 0.677).
3. Мокроусов И. С. Критерий принадлежности классу W_l^p обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, № 3. С. 297–304 (импакт-фактор 0.346).

Список иных публикаций

4. Мокроусов И. С. Критерий принадлежности классу W_p^l обобщенного из класса L_p решения волнового уравнения // Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXIX. МАКС Пресс Москва, 2018. С. 161.
5. Кулешов А. А., Мокроусов И. С., Смирнов И. Н. О разрешимости смешанных задач для телеграфного уравнения в пространстве L_p при $p >= 1$ // Материалы XXIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2017» (11-13 апреля 2017 Москва, Россия). МАКС Пресс Москва, 2017. С. 146–148.

6. Mokrousov I. Mixed problems for string wave equation with uniform non-local conditions and first or second type boundary conditions // The 3rd International Workshop Boundary Value Problems, Functional Equations and Applications. University of Rzeszow, 2016. C. 49.
7. Мокроусов И. С. Смешанные задачи для уравнения колебания струны с нелокальными граничными условиями первого рода и общего вида // Сборник тезисов XXI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «ЛОМОНОСОВ-2014», секция «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА». М., 2014. С. 120.

Цитированная литература

8. Lion J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM. — 1988. — Vol. 30, no. 2. — P. 1–68.
9. Zuazua E. Exact controllability for the semilinear wave equation // J. Math. pures et appl. — 1990. — no. 69. — P. 1–31.
10. Бутковский А. Г. Теория оптимального граничного управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1965.
11. Васильев Ф. П. О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. уравнения. — 1995. — Т. 31, № 1. — С. 1893–1900.
12. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения / Ф. П. Васильев, М. А. Куржанский, М. М. Потапов, А. В. Разгулин. — М. : Макс Пресс, 2010.
13. Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М. Метод прямых в задачах граничного управления и наблюдения для уравнений колебаний струны // Вестник МГУ. — 1993. — Т. 15, № 3. — С. 8–15.
14. Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Разгулин А. В. О методе фурье для решения одной задачи управления колебанием струны // Вестник МГУ. — 1993. — Т. 15, № 2. — С. 3–8.

15. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. — Москва : Гостехиздат, 1953.
16. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи математических наук. — 1960. — Т. 15, № 2. — С. 97–154.
17. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах // Доклады РАН. — 1999. — Т. 369, № 5. — С. 592–596.
18. Ильин В. А., Моисеев Е. И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36, № 5. — С. 656–661.
19. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады Академии наук СССР. — 1969. — Т. 185, № 4. — С. 793–740.
20. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 11. — С. 1925–1935.
21. Ильин В. А. Аналитический вид оптимального граничного управления смещением на одном конце струны с модельным нелокальным граничным условием одного из четырех типов // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 420, № 3. — С. 309–313.
22. Ильин В. А. Оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце струны с модельным нелокальным граничным условием одного из четырех типов // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 420, № 4. — С. 442—-446.
23. Ильин В. А. Оптимизация граничного управления на одном конце струны при наличии модельного нелокального граничного условия // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 11. — С. 1487—1498.
24. Кулешов А. А. О четырех смешанных задачах для уравнения колебаний струны с однородными нелокальными условиями // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 810—-817.

25. Холомеева А. Оптимизация нелокального граничного управления колебаниями струны с закрепленным концом за произвольный кратный $2l$ промежуток времени // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 696–700.

26. Хромов А. П., Бурлуцкая М. Ш. Классическое решение методом фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14, № 2. — С. 171—198.

27. Хромов А. П. О классическом решении одной смешанной задачи для волнового уравнения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 56—66.

28. Ильин В. А., Кулешов А. А. О некоторых свойствах обобщенных решений волнового уравнения из классов l_p и w_p^1 при $p \geqslant 1$ // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 11. — С. 1493–1500.

29. Моисеев Е. И., Холомеева А. А. О разрешимости смешанных задач для уравнения колебаний струны в пространстве $w_p^1, p \geqslant 1$ // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 441, № 3. — С. 310–312.

30. Ильин В. А., Кулешов А. А. Об эквивалентности двух определений обобщенного из класса l_p решения смешанной задачи для волнового уравнения // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. — 2014. — Т. 284. — С. 163—168.

31. Ильин В. А., Кулешов А. А. Необходимые и достаточные условия принадлежности классу w_p^1 при $p \geqslant 1$ обобщенного решения смешанной задачи для волнового уравнения // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. — 2013. — Т. 283. — С. 115—120.

32. Ломов И. С. Спектральный метод В. А. Ильина. Несамосопряженные операторы. — Москва : МАКС Пресс, 2019.

33. Smirnov I. Solution of mixed problems with boundary displacement con-

trol for the telegraph equation // Conference: International Conference on Applied Mathematics and Sustainable Development – Special track within SCET2012. — 2012. — 01.

34. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36, № 11. — С. 1513–1528.
35. Ильин В. А. Единственность обобщенных решений смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 672–680.
36. Ильин В. А., Кулешов А. А. О некоторых свойствах обобщенных решений волнового уравнения из классов l_p и w_p^1 при $p \geqslant 1$ // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 11. — С. 1493–1500.

Научное издание

Мокроусов Илья Сергеевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук на тему:

О свойствах решений смешанных задач для волнового и телеграфного уравнений с нелокальными краевыми условиями