

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ФИЗТЕХ-ШКОЛА АЭРОКОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи



Бычков Олег Павлович

**Исследование физических механизмов усиления шума за счет
взаимодействия струи и крыла самолета**

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н.
Фараносов Георгий Анатольевич

Москва – 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Исследование возможного механизма, отвечающего за усиления шума струи вблизи крыла, на примере двумерной модельной задачи	20
1.1 Постановка задачи. Допущения и предположения.....	20
1.2 Приближенное решение модельной задачи	26
1.3 Анализ приближенного решения.....	35
1.4 Точное решение модельной задачи.....	40
1.5 Анализ точного решения	52
1.6 Выводы по Главе 1	63
Глава 2. Разработка аналитической модели шума взаимодействия струи и крыла	65
2.1 Постановка задачи. Допущения и предположения	65
2.2 Решение первой подзадачи. Моделирование ближнего поля струи	67
2.3 Решение второй подзадачи. Поиск поля рассеяния	69
2.4 Анализ полученного решения.....	74
2.5 Верификация полученного решения.....	86
2.6 Выводы по Главе 2	90
Глава 3 Экспериментальное исследование шума взаимодействия струи и крыла для различных конфигураций	92
3.1 Экспериментальное исследование полярной направленности шума взаимодействия струи и крыла самолета для упрощенной конфигурации	92

3.2 Экспериментальное исследование азимутального состава шума изолированной и установленной струи для упрощенной конфигурации	97
3.3 Экспериментальное исследование влияния отклонения закрылка на шум взаимодействия струи и крыла самолета для маломасштабной модели реалистичной конфигурации	108
3.4 Выводы по Главе 3	110
Глава 4. Валидация разработанной аналитической модели шума взаимодействия струи и крыла	112
4.1 Экспериментальное исследование структуры ближнего поля изолированной струи в статических условиях.....	112
4.2 Валидация аналитической модели для упрощенной конфигурации «струя-пластина» в статических условиях	117
4.3 Экспериментальное исследование структуры ближнего поля изолированной струи в условиях полета	124
4.4 Валидация аналитической модели для упрощенной конфигурации «струя-пластина» в условиях полета.....	126
4.5 Определение информации о рассеиваемом поле на задней кромке закрылка в случае приближенной к реальной конфигурации	129
4.6 Валидация разработанной модели для конфигурации «скользящее крыло-закрылок-двухконтурная струя».....	131
4.7 Выводы по Главе 4.....	134
Заключение.....	136
Список литературы.....	138

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Ужесточение международных норм ИКАО по шуму гражданских самолетов на местности [1] приводит к необходимости исследования всех возможных источников шума самолета. Комплекс таких исследований позволяет определить относительный вклад каждого источника в общие уровни излучаемой акустической энергии, выявить доминирующие источники, подавление которых является наиболее перспективным, а также изыскать саму возможность проведения специальных мер по снижению общего уровня шума самолета на местности. Таким образом, проведение таких исследований вместе с выработкой определенных мер, как на этапе модификации существующих образцов отечественной летательной техники, так и еще на стадии проектирования самолетов нового поколения, позволяет определить существующий уровень, а также создать необходимый задел для эффективной конкурентоспособности отечественных самолетов на мировом рынке.

Одним из основных источников шума самолета на местности, особенно на режиме взлета и набора высоты, является силовая установка, в шуме которой, в свою очередь, можно выделить две основных составляющих: шум вентилятора и шум истекающей из сопла двигателя турбулентной реактивной струи [2,3]. Последний источник шума в силу своего доминирования остается одним из основных предметов исследования в аэроакустике, начиная с основополагающей работы Лайтхилла [4]. Тем не менее, использование современных турбореактивных двигателей повышенной степени двухконтурности (рисунок 0.1) позволило существенно снизить вклад данного источника шума, в первую очередь за счет снижения скорости истечения струи. Однако повышенный диаметр таких двигателей вместе с необходимостью проведения аэродинамической оптимизации также приводит к тому, что силовая установка становится более интегрированной в планер (рисунки 0.1б-в), что сопровождается появлением новых источников

шума взаимодействия (в иностранной литературе – «installation noise»), влиянием которых нельзя пренебрегать [9]. Таким образом, для оценки уровней шума самолета на местности и определения потенциала его снижения недостаточно знать лишь характеристики отдельных источников шума, таких как струя, винт, вентилятор, элементы планера и т.п., но также необходимо иметь представление об эффектах взаимодействия между ними (реактивная струя - планер, вентилятор - планер и т.д.) [10-13].

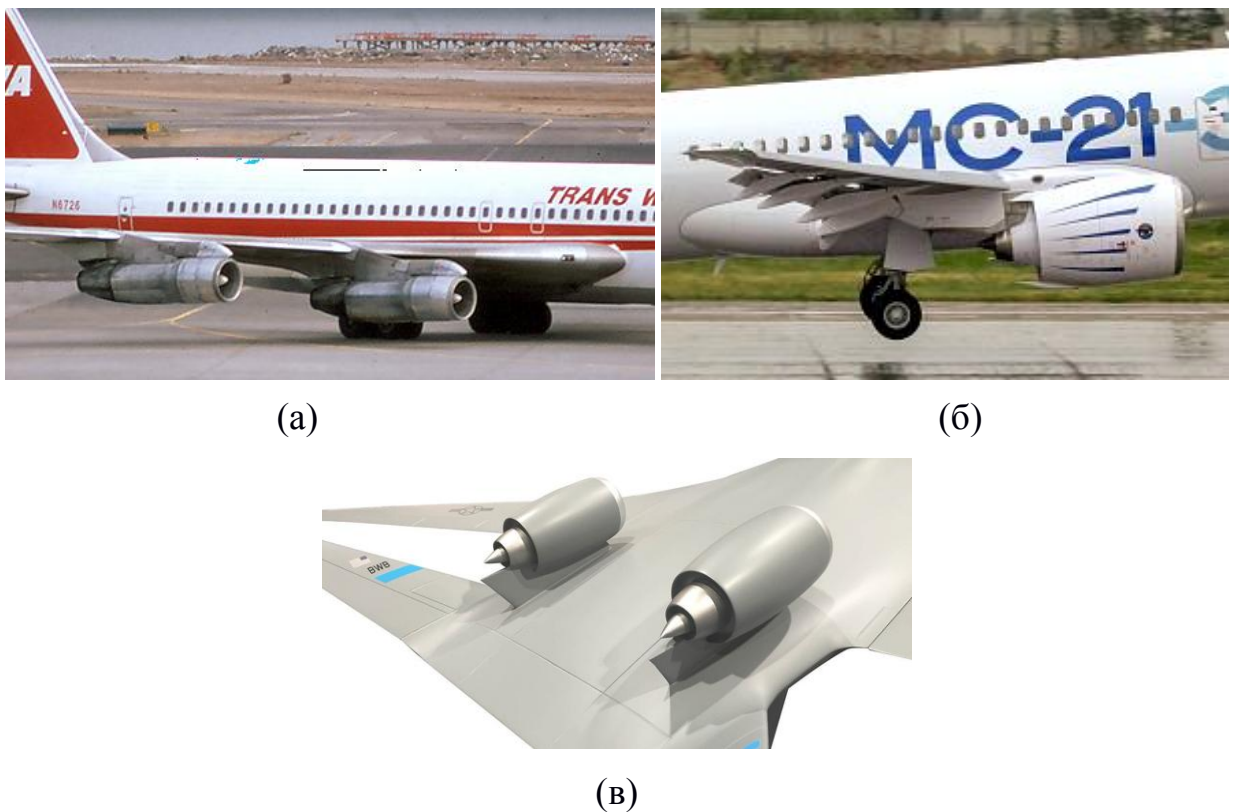


Рисунок 0.1 — Примеры компоновки «установленный двигатель»: (а) — пример самолета В-707 с двигателями малой степени двухконтурности (источник: <https://de.wikipedia.org>); (б) — пример современного самолета МС-21 с двигателями большой степени двухконтурности (источник <http://mc21.irkut.com>); (в) — пример перспективной компоновки с двигателями большой степени двухконтурности над фюзеляжем (источник <https://pbs.twimg.com>).

Одним из значимых источников шума такого рода является взаимодействие струи и крыла самолета (в иностранной литературе Jet-Wing Interaction noise, или сокращенно JWI noise). Данный эффект был замечен достаточно давно [5], однако он был не столь важен в силу двух обстоятельств. Во-первых, двигатели первых

поколений имели малую степень двухконтурности и, соответственно, высокоскоростные реактивные струи, которые в силу закона восьмой степени Лайтхилла [4] с большим отрывом доминировали в общем шуме. Во-вторых, малая степень двухконтурности двигателей, а значит, их малый диаметр, позволяла располагать двигатели довольно далеко от крыла (рисунок 0.1а), так что эффекты взаимодействия были достаточно слабы и проявлялись лишь в тех экзотических конфигурациях, в которых отклоненный закрылок намеренно замывался средним полем реактивной струи для увеличения подъемной силы [14,15].

Переход к двигателям большой степени двухконтурности, как уже отмечалось, позволил существенно снизить шум реактивной струи, и на этом фоне шум взаимодействия струи и крыла стал хорошо заметен, причем даже в том случае, когда гидродинамическое взаимодействие струи и крыла самолета оказывается сравнительно малым из-за принятого в последнее время использования однощелевых закрылков с малыми углами отклонения [7,16,17,18] (рисунок 0.1б).

С точки зрения излучаемого шума конфигурация «сопло-крыло» является сложной системой. На рисунке 0.2 схематично показаны основные составляющие шума такой конфигурации (на основе [18]). В ней имеется две «самостоятельных» компоненты шума: шум собственно струи и шум обтекания крыла набегающим потоком, вызываемый взаимодействием турбулентного пограничного слоя с кромками элементов крыла, нестационарными течениями в нише предкрылков и закрылков и т.п. Поскольку скорости полета на взлетно-посадочных режимах невелики, шум обтекания элементов крыла проявляется в основном на очень низких частотах (рисунок 0.2б). Более существенными оказываются компоненты, связанные именно с взаимодействием струи и крыла. На высоких частотах такое взаимодействие носит чисто акустический характер: шум, излучаемый струей, рассеивается на крыле так, что для наблюдателя под крылом шум усиливается на величину до 3 дБ (вследствие отражения от крыла), а для наблюдателя над крылом – шум ослабляется вследствие эффекта экранирования (рисунок 0.2б).

Однако в области низких и средних частот при близком расположении струи и крыла наблюдается существенное (10 дБ и более) усиление шума, причем оно симметрично относительно крыла (рисунок 0.2). Именно это низкочастотное усиление шума струи и будет рассматриваться в рамках диссертационной работы.

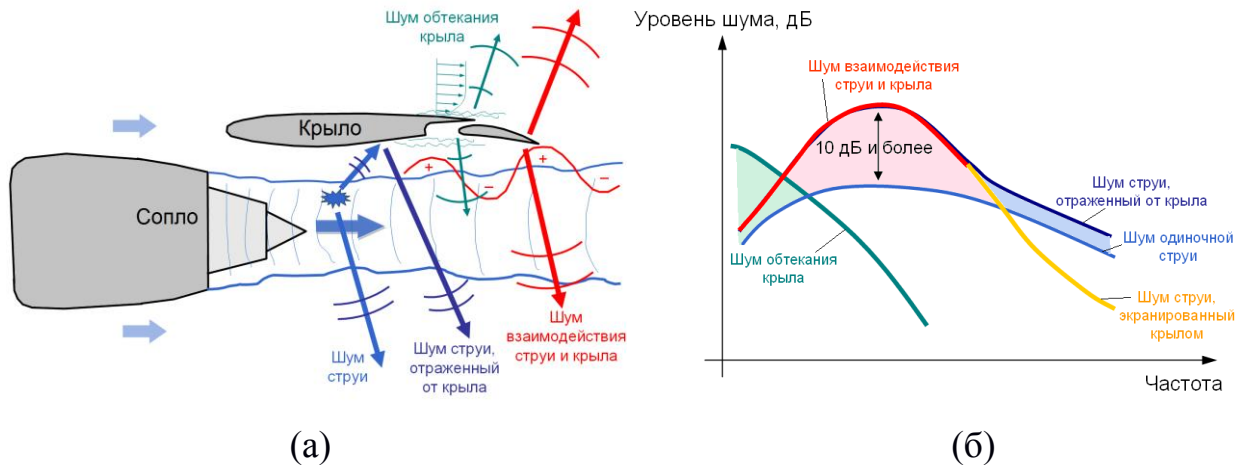


Рисунок 0.2 — Схематичное представление основных источников шума системы «сопло-крыло»: а) основные источники; б) типичные спектры шума различных источников (на основе данных работы [18])

За последнее время было представлено множество экспериментальных работ, демонстрирующих данный эффект усиления шума как для упрощенных [6,8,12,19-23], так и реалистичных [6,7,11,18,24] конфигураций. Тот факт, что наблюдаемый эффект очень силен и носит низкочастотный характер, т.е. соответствующие длины акустических волн много больше характерных размеров задачи (диаметра сопла, толщины пограничного слоя на крыле, а также отдельных элементов механизации – закрылков, предкрылков), позволяет при исследованиях физических механизмов его возникновения использовать упрощенные конфигурации как в экспериментальных исследованиях, так и в теоретических моделях. Для случая упрощенной конфигурации, в которой крыло самолета моделируется пластиной (рисунок 0.3) в отсутствие набегающего потока, продемонстрировано изменение спектра шума изолированной струи (черная кривая) при установке вблизи нее пластины (красная и синяя кривые), аналогичное наблюдаемому для реалистичных конфигураций (рисунок 0.2): в высокочастотной части спектра также наблюдаются эффекты отражения и

экранирования пластиной акустических возмущений; в тоже время, в низкочастотной части спектра шум струи претерпевает существенное усиление, практически одинаковое с обеих сторон пластины.

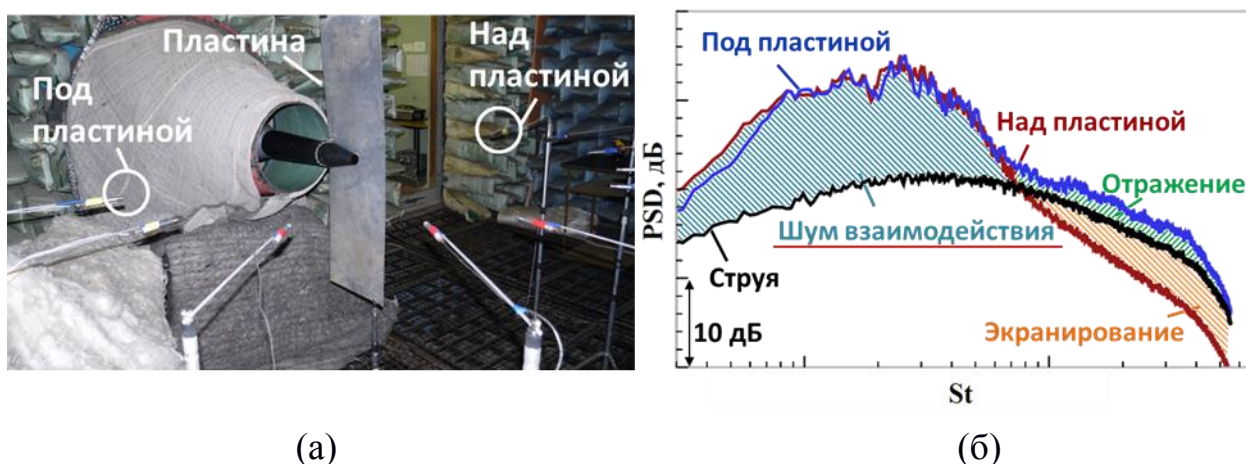


Рисунок 0.3 — Исследование шума взаимодействия струи и пластины [22].
 а) фотография эксперимента в заглушенной камере; б) изменение спектра шума струи в боковых направлениях при установке вблизи нее пластины.

В работах [7,8] было высказано предположение, что за усиление шума в области низких частот могут быть ответственны гидродинамические возмущения ближнего поля струи, рассеивающиеся на кромке сопла. Обычно эти возмущения связывают с волнами неустойчивости, развивающимися в слое смешения струи за счет неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В основной массе работ, посвященных физическому моделированию данного эффекта, рассматривается упрощенная конфигурация с круглой одноконтурной струей и плоской пластиной, моделирующей крыло. Так в работе [8] производился поиск функции распределения на оси струи квадруполей, позволяющей описать шум осесимметричной моды изолированной струи в дальнем поле, в области вблизи струи. Сшивка полученного распределения источников с соответствующей функцией Грина позволила получить качественное совпадение с результатами экспериментального исследования шума взаимодействия. Этот же подход к моделированию ближнего поля струи использовался в последующих работах этой группы ученых для оценки влияния стреловидности и угла атаки пластины [21] на шум взаимодействия. Недостаток такого подхода состоит в том, что ближнее поле

струи моделируется исходя из гипотезы о генерации шума турбулентной дозвуковой струи под малыми углами к оси струи волновыми пакетами неустойчивости. Такое представление излучающей и неизлучающей части турбулентного движения в струе в виде набора сфазированных квадрупольных источников, распределенных вдоль оси струи, является излишне упрощенным, что может объяснить лишь качественное, а не количественное согласие модели с экспериментом [21]. В работе [25] для расчета шума взаимодействия в дальнем поле было предложено использование характеристик поля пульсаций, уже непосредственно измеренных на пластине. В этом подходе решение задачи было основано на способе, разработанном применительно к шуму задней кромки крыла, возникающему из-за рассеяния на ней пульсаций турбулентного пограничного слоя, что требовало определения, в том числе, поперечных масштабов корреляции возмущений. Однако сбор необходимых данных такого характера представляет некоторую сложность. В то же время в работе [26] возмущения ближнего поля струи, рассеивающиеся на задней кромке, рассматривались в виде суперпозиции азимутальных мод, представляющих собой однородные волны, бегущие вдоль оси струи и экспоненциально затухающие в радиальном направлении. Сбор необходимых данных в таком случае уже оказывается более простым в реализации. Здесь стоит отметить, что в реальных струях возмущения ближнего поля действительно представляют собой волны, бегущие вниз по потоку и затухающие в поперечном направлении [27], однако они не являются однородными: их амплитуда модулирована по продольной координате, так что эти возмущения имеют вид волновых пакетов [28].

Во всех перечисленных работах характеристики возмущений ближнего поля струи считались заданными изначально (например, из эксперимента) и рассматривались как входные данные в модель расчета шума взаимодействия, а их физическая природа, в частности, связь с волнами неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, не рассматривалась детально. Кроме того, во всех обозначенных моделях низкочастотный шум взаимодействия струи и пластины рассматривался как дополнительный к шуму самой струи источник, в то время как структура

пульсаций изолированной струи считалась неизменной. Частично такой подход может быть оправдан неизменностью средних и пульсационных характеристик поля струи в конфигурации без и с пластиной, что было получено, как в рамках термоанемометрических измерений [8,29], так и в рамках анализа устойчивости упрощенной модели слоя смешения струи [25]. В настоящей работе впервые поставлена и решена двумерная модельная задача, в рамках которой можно проследить всю цепочку в механизме шума взаимодействия струи и крыла: от генерации волн неустойчивости на кромке сопла до их рассеивания на кромке крыла и излучения дополнительного шума в дальнее поле. В дополнение к этому, в рамках данной модельной задачи оказалось возможным провести исследование зависимости параметров устойчивости слоя смешения от взаимного расположения кромки сопла и кромки крыла.

Применительно к трехмерной конфигурации «сопло-пластина» неисследованной осталась задача моделирования рассеяния на задней кромке крыла волновых пакетов различных азимутальных мод с учетом продольной модуляции амплитуды возмущений. В настоящей работе поставлена и аналитически решена соответствующая модельная задача и разработан полуэмпирический метод расчета шума взаимодействия струи и крыла.

Также стоит отметить, что до настоящего времени сравнение результатов моделирования шума взаимодействия с экспериментом производилось в статических условиях и для плоскости наблюдения, перпендикулярной плоскости крыла [8,26,30] (полярная направленность). При этом исследование шума взаимодействия для различных азимутальных углов, анализ азимутального состава шума взаимодействия, а также анализ влияния на шум спутного потока, моделирующего эффект полета самолета, не проводились. В диссертационной работе впервые выполнены экспериментальные исследования по анализу указанных эффектов, и на основе полученных данных проведена тщательная валидация разработанного метода расчета шума взаимодействия струи и крыла.

Целью диссертационной работы является теоретическое и экспериментальное исследование механизмов усиления шума струи и крыла

самолета и последующая разработка надежной модели, предсказывающей качественно и количественно основные характеристики исследуемого эффекта в области низких частот.

Задачи исследования.

- Постановка и аналитическое решение модельной двумерной задачи, в рамках которой исследуются основные особенности возможного физического механизма, отвечающего за усиление шума реактивной турбулентной струи вблизи крыла.
- Постановка и аналитическое решение модельной трехмерной задачи о рассеянии различных азимутальных мод ближнего гидродинамического поля струи на задней кромке моделирующей крыло полуплоскости с целью построения простой полуэмпирической модели шума взаимодействия.
- Проведение ряда экспериментальных исследований шума взаимодействия в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ для упрощенных и приближенных к реалистичным конфигураций с использованием различных измерительных систем с целью определения основных характеристик исследуемого эффекта.
- Проведение экспериментального исследования ближнего гидродинамического поля изолированной дозвуковой турбулентной струи.
- Проведение валидации разработанной аналитической модели эффекта усиления шума струи вблизи крыла на основе полученных экспериментальных данных.

Научная новизна работы, теоретическая и практическая значимость.

Впервые поставлена и решена двумерная модельная задача о генерации и последующем рассеянии волны неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на задней кромке полуплоскости.

Впервые поставлена и решена трехмерная модельная задача о рассеянии возмущений ближнего поля струи, представленных в виде суперпозиции волновых пакетов различных азимутальных чисел, на задней кромке полуплоскости.

В ходе последовательного решения поставленных задач построена аналитическая модель шума взаимодействия струи и крыла самолета, способная, при наличии входных данных различной степени подробности, предсказывать эффект усиления шума струи вблизи крыла и объяснять основные наблюдаемые особенности в низкочастотном усилении шума струи.

При помощи метода азимутальной декомпозиции впервые измерен азимутальный состав шума взаимодействия струи и плоской пластины, моделирующей крыло, и дано объяснение наблюдаемым эффектам трансформации азимутальных мод шума свободной струи за счет ее взаимодействия с пластиной.

Впервые на основе разработанной аналитической модели и предложенного метода сбора данных о ближнем поле турбулентной струи выполнен расчет основных характеристик шума взаимодействия струи и крыла самолета в условиях наличия спутного потока, продемонстрировавший хорошее согласие с данными эксперимента.

При помощи разработанной модели впервые продемонстрирована возможность производить количественную оценку шума взаимодействия для реалистичной модели двухконтурного сопла вблизи крыла с отклоняющейся механизацией.

Таким образом, теоретическая значимость работы заключается в том, что проведенная совокупность теоретических исследований позволила получить достаточно глубокое представление об эффекте усиления шума струи вблизи крыла. Данное обстоятельство дало возможность объяснить и предсказать различные особенности шума взаимодействия, наблюдаемые в эксперименте. Практическая значимость работы заключается в том, что разработанная модель позволяет производить количественную оценку величины шума взаимодействия струи и крыла, и таким образом оценивать вклад данного источника в сертификационные уровни шума самолета на местности на стадии его проектирования или модернизации. Кроме того, результаты проведенных

теоретических и экспериментальных исследований эффекта позволяют сформулировать стратегию по его подавлению.

Методология и методы исследования.

Для решения поставленных модельных задачи с несколькими разрывами граничного условия применяется метод Винера-Хопфа в постановке Джонсона, как в скалярном, так и в матричном виде. Для асимптотической оценки итоговых выражений в дальнем поле используется метод перевала, в том числе для случая кратных интегралов.

Для проведения экспериментального исследования в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ с потоком рассматривается как упрощенная конфигурация, моделирующая систему «сопло-крыло», так и более реалистичная – модель двухконтурного сопла вблизи крыла с отклоняющейся механизацией. В качестве измерительных систем используются полярные и азимутальные решетки микрофонов, позволяющие производить азимутальную декомпозицию измеренного поля пульсаций давления.

Основные положения, выносимые на защиту.

- • Рассеяние на кромке крыла гидродинамического поля от волны неустойчивости приводит к излучению звуковых волн, амплитуда которых пропорциональна амплитуде падающей на кромку крыла волны неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, т.е. экспоненциально возрастает при уменьшении расстояния между слоем смешения и крылом. Направленность такого источника шума может быть описана симметричной относительно плоскости крыла кардиоидой с конвективным растяжением в случае трехмерной постановки. Наличие кромки крыла в двумерной постановке приводит к изменению параметров волны неустойчивости лишь в случае малого безразмерного поперечного расстояния между кромками сопла и крыла.
- Влияние безразмерной ширины волнового пакета на шум взаимодействия в дальнем поле при фиксированном значении амплитуды пульсаций ближнего гидродинамического поля струи под задней кромкой крыла проявляется существенным образом лишь в области её малых значений.

- Рассеяние косинус-мод ближнего гидродинамического поля струи на задней кромке приводит к появлению суперпозиции нечетных косинус-мод акустического поля в дальней зоне, в то же время рассеяние синус-мод приводит к появлению суперпозиции четных синус-мод акустического поля в дальней зоне.
- Наличие отличного от нуля спутного потока в задаче о взаимодействии ближнего гидродинамического поля струи и острой кромки приводит к уменьшению шума взаимодействия в основном за счет изменения характеристик самого ближнего поля струи.
- Анализ проведенного эксперимента непосредственно позволяет продемонстрировать неизменность шума изолированной струи в дальнем поле для исследуемой конфигурации не очень близкого расположения пластины вблизи слоя смещения струи. Изменение азимутального состава шума струи при установке вблизи нее пластины отмечается в четных синус-модах и косинус-модах, которые также становятся скоррелированными.
- Экспериментальное выделение характеристик шума взаимодействия может быть уточнено при применении метода азимутальной декомпозиции.
- Первая синус- и две косинус-моды являются доминирующими для низкочастотных гидродинамических пульсаций ближнего поля струи. Для данных мод экспериментальным фактом является универсальность зависимости от числа Струхала относительной конвективной скорости возмущений ближнего поля струи для различных скоростей истечения струи. Наблюдаемая особенность азимутального состава ближнего поля позволяет производить оценку эффекта усиления шума струи вблизи крыла при наличии данных о пульсациях давления лишь в двух точках около рассеивающей кромки.
- Сравнение результатов теоретического моделирования и эксперимента показывает что, разработанная упрощенная модель шума взаимодействия струи и крыла, не только качественно, но и с достаточно хорошей точностью в 2-3 дБ (в области максимума эффекта) количественно позволяет предсказывать основные характеристики эффекта усиления шума, как в случае упрощенной конфигурации «струя-пластина», так и в случае реалистичной конфигурации «струя-крыло».

Личный вклад автора.

Все результаты диссертации получены автором лично, либо с его определяющим участием в постановке задач, выборе методов их решения и анализе результатов, при научном руководстве Г.А. Фараносова.

Степень достоверности изложенных в работе результатов обеспечивается проведением сравнения полученного решения с результатами известных теоретических работ, предложением нескольких способов постановки и решения трехмерной модельной задачи, приводящих к одинаковым итоговым результатам, проведением валидации полученной модели на различных конфигурациях в акустической заглушенной камере АК-2 ЦАГИ. Результаты работы физически непротиворечивы, согласуются с имеющимися представлениями о физической сути рассматриваемых явлений, результаты расчетов согласуются с данными измерений. Результаты апробированы на большом количестве конференций и опубликованы в ряде рецензируемых научных журналах.

Соответствие паспорту специальности. Рассматриваемая в работе проблема находится в области задача аэроакустики, раздела физики, который находится на стыке аэродинамики и акустики. При этом исследуются звуковые колебания, генерируемые нестационарными аэродинамическими силами и возмущениями, которые возникают в самом потоке, а не приложенными извне силами или колебаниями, как в классической акустике. Таким образом, содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.02.05 — «Механика жидкости, газа и плазмы», в частности, результаты исследования соответствуют следующим пунктам:

11 — «Пограничные слои, слои смешения, течения в следе», в части «слои смешения»;

13 — «Гидродинамическая устойчивость»;

14 — «Линейные и нелинейные волны в жидкостях и газах».

Апробация работы:

Результаты работы были представлены на следующих конференциях:

1. Вычислительный эксперимент в аэроакустике СЕЕА-2014, г. Светлогорск (2014).
2. Всероссийская научно-техническая конференция молодых специалистов ЦИАМ, Москва (2015).
3. Четвертая открытая всероссийская конференция по аэроакустике, Звенигород (2015).
4. 58-я научная конференция МФТИ, Жуковский (2015).
5. XXVII научно-техническая конференция по аэродинамике, п. Володарского (2016).
6. AIAA AVIATION Forum, Lyon, France (2016).
7. 23rd International Congress on Sound and Vibration (ICSV23), Афины, Греция (2016).
8. Greener Aviation, 11-13 October, Brussels, Belgium (2016).
9. 59-я научная конференция МФТИ, Жуковский (2016).
10. Юбилейная международная научно-техническая конференция СибНИА, Новосибирск (2016).
11. XXVIII научно-техническая конференция по аэродинамике, п. Володарского (2017).
12. II Всероссийская акустическая конференция, г. Нижний Новгород (2017).
13. AIAA AVIATION Forum, Denver, USA (2017).
14. 24th International Congress on Sound and Vibration (ICSV24), Лондон, Англия (2017).
15. 60-я юбилейная научная конференция МФТИ, Жуковский (2017).
16. 5-я открытая всероссийская (XVII научно-техническая) конференция по аэроакустике, Звенигород (2017).
17. 6-ой ежегодный российско-французский семинар ЦАГИ–ONERA, г. Нофль–ле–Шато, Франция (2017).
18. Третья Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов АСО-2018, г. Москва (2018).

19. 61-ая Всероссийская научная конференция МФТИ (2018).
20. Вычислительный эксперимент в аэроакустике СЕЕА-2018, г. Светлогорск (2018).
21. AIAA AVIATION Forum, Delft, Netherlands (2019).
22. XXXII сессия Российского акустического общества, Москва (2019).
23. Шестая открытая всероссийская конференция по аэроакустике, Звенигород (2019).
24. Видеосеминар по аэромеханике ЦАГИ – ИТПМ СО РАН – СПбПУ-НИИМ МГУ, г. Жуковский (2020).
25. Пятая Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов АСО-2020, г. Москва (2020).
26. Семинар сплошных сред под руководством академика РАН А.Г. Куликовского, профессора В.П. Карликова, член-корр. РАН О.Э. Мельника, профессора А.Н. Осипцова.

Публикации:

1. Бычков О.П., Фараносов Г.А. О возможном механизме усиления шума струи вблизи крыла // Акустический Журнал. 2014. Т.60, №.6. С.596-609.
2. Bychkov O.P., Faranosov G.A., Denisov S.L., and Ostrikov N.N. Theoretical Modeling of the Excess Noise Due to Jet–Wing Interaction // 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2016. AIAA Paper 2016-2932.
3. Faranosov G.A., Bychkov O.P. Two-Dimensional Model of the Interaction of a Plane Acoustic Wave with Nozzle Edge and Wing Trailing Edge // Journal of the Acoustical Society of America. 2017. V. 141, no. 1. P. 289–299.
4. Бычков О.П., Фараносов Г.А. Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование шума взаимодействия струи и крыла самолета. // Акустический Журнал. 2018. Т.64. №.4. стр. 437–453.
5. Faranosov G.A., Kopiev V.F., Belyaev I.V., Bychkov O.P., and Chernyshev S.A. On the Azimuthal Structure of Installed Jet Noise // 23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2017. AIAA-2017-3527.

6. Беляев И.В., Бычков О.П., Зайцев М.Ю., Копьев В.А., Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Фараносов Г.А., Чернышев С.А. Разработка стратегии активного управления волнами неустойчивости в невозбужденных турбулентных струях // Известия российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2018. №3. С. 14-27.
7. Bychkov O.P., Faranosov G.A., Kopiev V.F., Soares L.F.M., Cavalieri A.V.G. The Modelling of Jet-Plate Interaction Noise in the Presence of Co-Flow // 25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2019. AIAA-2019-2492.
8. Faranosov G.A., Belyaev I.V., Kopiev V.F., Bychkov O.P. Azimuthal Structure of Low-Frequency Noise of Installed Jet // AIAA Journal. 2019. V. 57, no. 5. P. 1885–1898.
9. Бычков О.П., Фараносов Г.А., Программное обеспечение для оценки характеристик низкочастотного шума взаимодействия струи и крыла самолета в статических условиях на основе данных о структуре ближнего поля свободной турбулентной струи. Свидетельство о регистрации программы, RU 2019663664// Бюл. №11 от 22.10.2019.
10. Бычков О.П., Фараносов Г.А. Анализ взаимной связи модовой структуры пульсаций ближнего поля струи и шума взаимодействия струи и крыла. // Акустический Журнал. 2020. Т.66. №1. С.34-45.
11. Бычков О.П., Копьев В.Ф., Фараносов Г.А. Валидация двухточечной модели предсказания низкочастотного усиления шума струи вблизи крыла. // Ученые записки физического факультета московского университета. 2020. №1. 2010801.

В том числе 5 публикации в журналах, включенных в перечень ВАК (№1,4,6,10,11), а также 9 публикаций, входящие в Scopus (№1-9), и 1 программа для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав основной части, заключения. Полный объем диссертации составляет 145 страниц, включая 51 рисунок и 1 таблицу. Список литературы содержит 82 наименования.

Содержание работы:

Во **введении** дана общая характеристика работы и сделан обзор литературы посвященной рассматриваемой проблеме.

В **главе 1** поставлена и решена в приближенном и точном подходе двумерная модельная задача о генерации и рассеянии волн неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на задней кромке полуплоскости, что позволяет продемонстрировать физический механизм, отвечающий за существенное усиление шума струи вблизи крыла.

В **главе 2** поставлена и решена трехмерная модельная задача о моделировании ближнего поля турбулентной струи и его рассеянии на задней кромке полуплоскости. На основе решения строится аналитическая модель для предсказания основных характеристик шума взаимодействия по известным данным о ближнем поле струи различной степени подробности.

В **главе 3** приведены результаты экспериментальных исследований в акустической заглушенной камере с потоком АК-2 ЦАГИ шума взаимодействия для упрощенных и приближенных к реалистичным конфигураций «струя-крыло».

В **главе 4** описываются различные способы получения необходимых характеристик пульсаций давления в ближнем поле турбулентной струи, на основе которых проводится сравнение результатов предсказания разработанной модели шума взаимодействия с полученными ранее экспериментальными данными.

В **заключении** изложены основные результаты работы.

Глава 1. Исследование возможного механизма, отвечающего за усиления шума струи вблизи крыла, на примере двумерной модельной задачи¹

1.1 Постановка задачи. Допущения и предположения

Целью настоящей главы является демонстрация физического механизма, который отвечает за существенное усиление шума струи вблизи крыла, при помощи упрощенной двумерной задачи, для которой получено приближенное [31] и точное [32] решение.

Первые исследования генерации шума турбулентностью вблизи рассеивающих поверхностей были представлены в работах Curle [33], Powell [34], Ffowcs Williams & Hall [35], and Jones [36]. Curle [33] первым показал, что наличие твердого жесткого тела можно учесть при помощи распределенных на его поверхности диполей, звуковое поле которых может быть сильнее поля от квадрупольных источников в свободном пространстве. Powell [34] отметил, что для пластины не наблюдается существенного усиления шума вдали от кромки пластины, когда дипольные источники начинают вносить основной вклад в шум дальнего поля. Ffowcs Williams & Hall [35], используя функцию Грина в форме Макдональда, решили задачу об усилении шума турбулентности вблизи полуплоскости, при этом турбулентный источник звука моделировался компактными квадрупольями. Jones [36] продолжил исследования работы [35] для случая однородного потока около пластины и исследовал эффект применения условия Чаплыгина-Жуковского-Кутта для кромки. Данные исследования отметили определяющую роль острых кромок во взаимодействии турбулентности с препятствиями.

Дальнейший переход к двигателям большой степени двухконтурности и близкое расположение плоскости крыла и ближнего поля турбулентной

¹ Результаты данного раздела опубликованы в работах [31,32].

реактивной струи привели к возобновлению исследований взаимодействия струи и крыла в виду важности этого эффекта. Тем не менее, конфигурация «струя + крыло + закрылок» оказывается достаточно сложной, что обуславливает изначальное преобладание экспериментальных исследований данного источника шума [5-8,16,19]. Данные исследования продемонстрировали такие физические особенности усиления шума струи вблизи крыла как величина низкочастотного эффекта, превышающая 3 дБ даже для крыла с убранной механизацией, симметричность усиления относительно плоскости крыла и экспоненциальная зависимость величины эффекта усиления от расстояния между осью струи и плоскостью крыла. Таким образом, усиление шума струи вблизи крыла не могло быть объяснено простым отражением излучаемого струей звука от поверхности крыла, но опираясь на результаты упомянутых теоретических работ, могло быть связано с процессом взаимодействия турбулентного поля струи с острой кромкой. Однако современные характерные геометрии относительного расположения крыла и струи привели к тому, что в более поздних работах стала определяться специфичная структура ближнего поля струи, рассеиваемая в дальнейшем на задней кромке крыла. Так в области нескольких диаметров струи вблизи среза сопла для случая не слишком высоких частот ближнее поле струи вне слоя смешения может быть представлено в виде стохастической суммы крупномасштабных волновых пакетов, связанных с неустойчивостью слоя смешения Кельвина-Гельмгольца. Исходя из этого в работах [8, 31] было предложено объяснить экспоненциальную зависимость шума взаимодействия реактивной струи и крыла от расстояния между ними рассеянием на задней кромке крыла волновых пакетов, которые сами по себе в дозвуковых струях звук практически не излучают.

Однако для теоретического моделирования предложенного механизма естественным оказывалось создание упрощенной модели, не рассматривающей все особенности реалистичной конфигурации «струя – крыло – закрылок» (рисунок 1.1а). Такая модель, с одной стороны, должна позволять получение аналитического решения, а с другой стороны, должна сохранять основные

упомянутые физические особенности, позволяя явным образом проследить влияние основных параметров на рассматриваемое явление. В свете вышесказанного подавляющая часть предложенных аналитических (или полуаналитических) моделей [7,8,55-58] имела дело не с взаимодействием струи и закрылка, а с взаимодействием струи и пластины (рисунок 1.1б). Несмотря на простоту рассматриваемой конфигурации, экспериментально отмечалась схожесть наблюдаемых тенденций при анализе результатов реальных конфигураций [6,12,18,59]. Таким образом, в работе [8] модельный осесимметричный волновой пакет располагался вблизи задней кромки плоской пластины в условиях покоящейся среды, а решение для рассеянного поля было найдено путем свертки источников с соответствующей функцией Грина для полуплоскости.

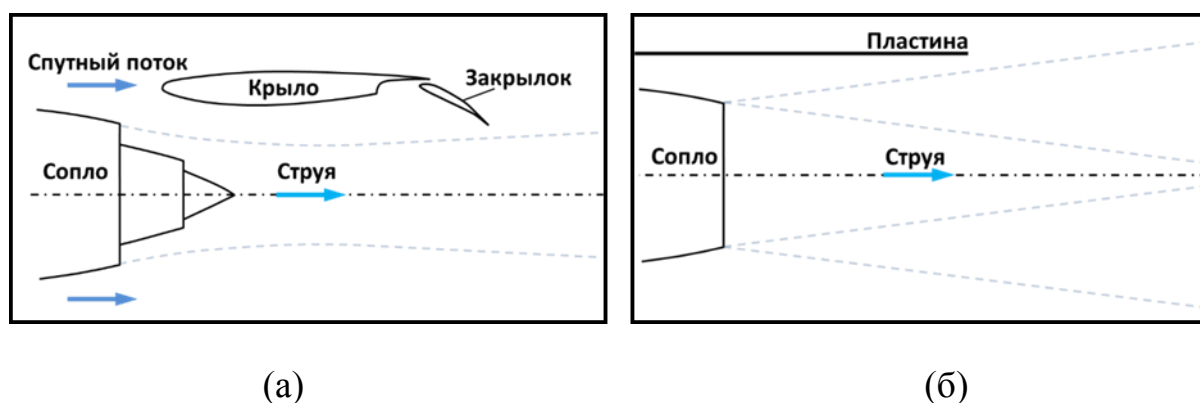


Рисунок 1.1 — Конфигурации для исследования эффекта усиления шума струи вблизи крыла. а) реалистичная конфигурация; б) упрощенная конфигурация.

В настоящей главе, в отличие от трехмерной постановки задачи работы [8], в которой рассматривались смоделированные пакеты волн неустойчивости с искусственно заданными параметрами, будет поставлена и решена задача, позволяющая проследить за самим процессом генерации волн неустойчивости и их дифракции при наличии рассеивающей поверхности вблизи смоделированного тангенциальным разрывом слоя смешения струи. Стоит отметить, что несмотря на упрощенность задачи в двумерной постановке она сохраняет основные физические особенности эффекта взаимодействия, а также, что очень важно,

позволяет получить аналитическое решение новой задачи о дифракции и проследить явным образом влияние входящих в задачу параметров.

Таким образом, в данной задаче исследуется взаимодействие с задней кромкой крыла волны неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, сходящей с кромки сопла двигателя и развивающейся в слое смешения струи. При этом спусковым механизмом для развития волны неустойчивости считается акустическое возмущение в виде плоской волны заданной частоты, исходящее изнутри сопла.

Перейдем теперь к самой постановке задачи. Рассмотрим близко расположенные кромку сопла и кромку крыла, которые для простоты будут моделироваться полуплоскостями (рисунок 1.2). Введем также декартову систему координат, связанную с кромкой сопла (x, y) . В этом случае относительное расположение кромки крыла можно описать парой геометрических параметров d и h , так что координата кромки крыла может быть записана как (d, h) .

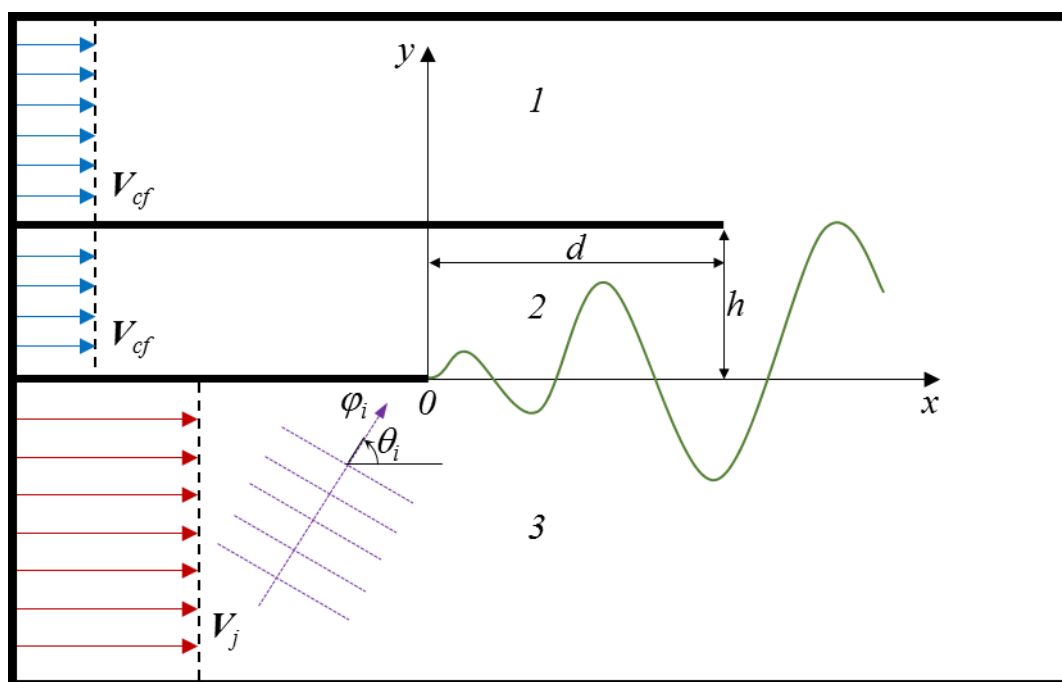


Рисунок 1.2 — Постановка модельной задачи.

Среднее поле, в котором находятся жесткие поверхности, представлено в виде двух направленных вдоль оси x однородных потоков, моделирующих течение струи V_j ($y < 0$) и обтекание спутным потоком V_{cf} ($y > 0$), и разделенных при $y = 0$ свободным полем, на котором образуется тангенциальный разрыв

скорости. Здесь и далее для удобства определения принадлежности характеристик к потоку струи или спутному потоку будут использоваться соответствующие нижние индексы j (от англ. «jet») и cf (от англ. «concurrent flow»). Плотность газа и скорость распространения звука в двух потоках будут соответственно обозначаться как ρ_j , ρ_{cf} и c_j , c_{cf} , что в дальнейшем может помочь оценить эффект разницы температур и плотности окружающей среды и потока, исходящего из сопла двигателя. Также введем обозначения различных подобластей задачи, так полуплоскость $y > h$ будет обозначаться областью 1, полоса $h > y > 0$ - областью 2, а полуплоскость $y < 0$ - областью 3.

Газ в задаче предполагается идеальным (нетеплопроводным, невязким), возмущения считаются малыми, а движение газа в таком случае потенциальным. Зависимость основных переменных от времени описывается множителем $\exp(-i\omega t)$, где ω - действительная и положительная частота. Данный подход позволяет для не слишком высоких частот представлять слой смешения струи в виде тангенциального разрыва [37-42], и позволяет проследить всю динамику рождения, развития и дифракции волны неустойчивости на полуплоскости.

В качестве начального возмущения задачи рассмотрим распространяющуюся в области 3 плоскую акустическую волну, так, что угол между осью x и нормалью к ее фазовому фронту составляет θ_i . Потенциал скорости такого возмущения можно записать в следующем виде

$$\varphi_i = A_i \exp\left(-i\omega t + i \frac{k_j \cos \theta_i}{1 + M_j \cos \theta_i} x + i \frac{k_j \sin \theta_i}{1 + M_j \cos \theta_i} y\right), \quad (1.1)$$

где A_i - заданная амплитуда возмущений, $k_j = \omega/c_j$ - волновое число, а $M_j = V_j/c_j < 1$ - число Маха, посчитанное по скорости струи. Здесь стоит отметить, что выбор упрощенного начального возмущения не сказывается на характере развития волн неустойчивости, поскольку эти волны являются собственным решением для модельного слоя смешения, а их пространственные характеристики можно считать в этом случае независимыми от характера начального возмущения [28,43].

Исходя из вышеперечисленных предположений и допущений основными уравнениями данной задачи являются конвективные волновые уравнения, которые для возмущения потенциала скорости φ могут быть записаны как

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi - \left(M_{cf} \frac{\partial}{\partial x} - ik_{cf} \right)^2 \varphi = 0, y > 0, \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi - \left(M_j \frac{\partial}{\partial x} - ik_j \right)^2 \varphi = 0, y < 0, \quad (1.3)$$

где $k_{cf} = \omega/c_{cf}$ - волновое число в спутной среде, а $M_{cf} = V_{cf}/c_{cf} < 1$ - число Маха, посчитанное по скорости спутного потока. Для задания граничных условий введем величину, характеризующую нормальное смещение свободной границы между областями 1 и 2 для $y = h, x > d$ и свободной границы между областями 2 и 3 для $y = 0, x > 0$. Такие нормальные смещения обозначим соответственно как η_{12} и η_{23} . В этом случае условие равенства нормальных смещений частиц газа η и равенства давления p по обеим сторонам пластины можно записать в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{h+0} = -i\omega\eta_{12} + V_{cf} \frac{d\eta_{12}}{dx}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{h-0} = -i\omega\eta_{12} + V_{cf} \frac{d\eta_{12}}{dx}; \quad \eta_{12} = 0, x < d;$$

$$p_{12} = p|_{h+0} - p|_{h-0} = -i\rho_{cf}\omega(\varphi|_{h+0} - \varphi|_{h-0}) + \rho_{cf}V_{cf} \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{h+0} - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{h-0} \right); \quad p_{12} = 0, x > d; \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{+0} = -i\omega\eta_{23} + V_{cf} \frac{d\eta_{23}}{dx}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{-0} = -i\omega\eta_{23} + V_j \frac{d\eta_{23}}{dx}; \quad \eta_{23} = 0, x < 0;$$

$$p_{23} = p|_{+0} - p|_{-0} = -i\omega(\rho_{cf}\varphi|_{+0} - \rho_j\varphi|_{-0}) + \left(\rho_{cf}V_{cf} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{+0} - \rho_jV_j \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{-0} \right); \quad p_{23} = 0, x > 0. \quad (1.5)$$

Кроме того, полученные решения должны удовлетворять условию излучения при $y \rightarrow \pm\infty$ [37-39,42].

1.2 Приближенное решение модельной задачи

Изначально, ввиду сложности получения точного решения, производился поиск приближенного решения поставленной задачи [31]. Данный подход основывается на рассмотрении задачи в рамках двух подзадач, что в конечном итоге приводит к необходимости решения двух скалярных уравнений Винера-Хопфа, что существенно проще, чем иметь дело с факторизацией матрицы, состоящей из неголоморфных функций [32].

Разбиение на подзадачи, в которых рассеяние происходит лишь на одной кромке, означает пренебрежение взаимным влиянием кромок или многократным перерассеянием, что может быть справедливым при достаточном удалении кромок друг от друга $d \gg 2\pi/k_{cf}$, и неучете резонансных эффектов, которые возможны и в случае существенного превышения расстояния между пластинами над рассматриваемой характерной длиной волны. Данный подход уже был апробирован в работах по исследованию моделей двухконтурных осесимметричных сопел [41,44].

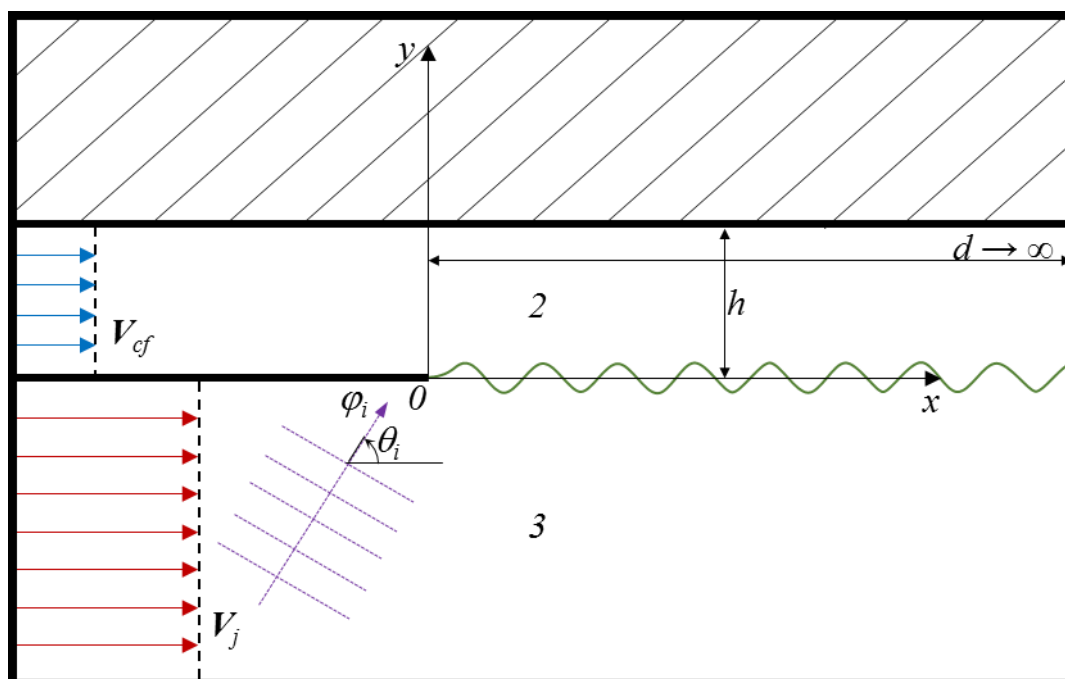


Рисунок 1.3 — Постановка первой подзадачи.

Обратимся к первой подзадаче (рисунок 1.3) о рассеянии начального возмущения на кромке сопла при бесконечно удаленной кромке крыла ($d \rightarrow \infty$). Для этого случая граничное условие (1.4) модифицируется в условие непротекания:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{h=0} = 0. \quad (1.6)$$

Перейдем теперь от продольной координаты x к спектральной плоскости α при помощи преобразования Фурье

$$\Phi(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx.$$

В Фурье пространстве уравнения (1.2) и (1.3) запишутся в следующем виде

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi - \beta_{cf} \Phi = 0, \quad y > 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi - \beta_j \Phi = 0, \quad y < 0, \quad (1.8)$$

где

$$\beta_{cf} = \sqrt{(1 - M_{cf}^2)(\alpha - k_{cf1})(\alpha - k_{cf2})}, \quad k_{cf1,2} = \mp \frac{k_{cf}}{1 \pm M_{cf}},$$

$$\beta_j = \sqrt{(1 - M_j^2)(\alpha - k_{j1})(\alpha - k_{j2})}, \quad k_{j1,2} = \mp \frac{k_j}{1 \pm M_j}.$$

Разрезы и ветви для многозначных функций $\beta_{cf}(\alpha)$ $\beta_j(\alpha)$ выбираются таким образом, чтобы удовлетворять условию излучения на бесконечности [42]. Для этого в данном случае из точек k_{cf2} и k_{j2} разрезы проводятся вертикально вверх, а из точек k_{cf1} и k_{j1} вертикально вниз (рисунок 1.4), ветви же выбираются так, чтобы $\beta_{cf}(0) = -ik_{cf}$, $\beta_j(0) = -ik_j$. При этом считается, что $|k_{j1}| < |k_{cf1}|$, $|k_{cf2}| < |k_{j2}|$.

Кроме того, необходимо применить процедуру для нахождения причинного решения, предложенную в работе [45]. Для этого изначально поиск решения производится для частоты $\omega + i\omega_I$ с мнимой добавкой ω_I , и уже после этого случай действительной частоты рассматривается как предельный переход $\omega_I \rightarrow 0$. После

необходимой подготовки можно сказать, что решение уравнений (1.7) и (1.8) необходимо искать в следующем виде

$$\Phi_{I_2}(\alpha, y) = B(\alpha)e^{\beta_{cf}y} + C(\alpha)e^{-\beta_{cf}y}, 0 < y < h,$$

$$\Phi_{I_3}(\alpha, y) = D(\alpha)e^{\beta_j y}, y < 0.$$

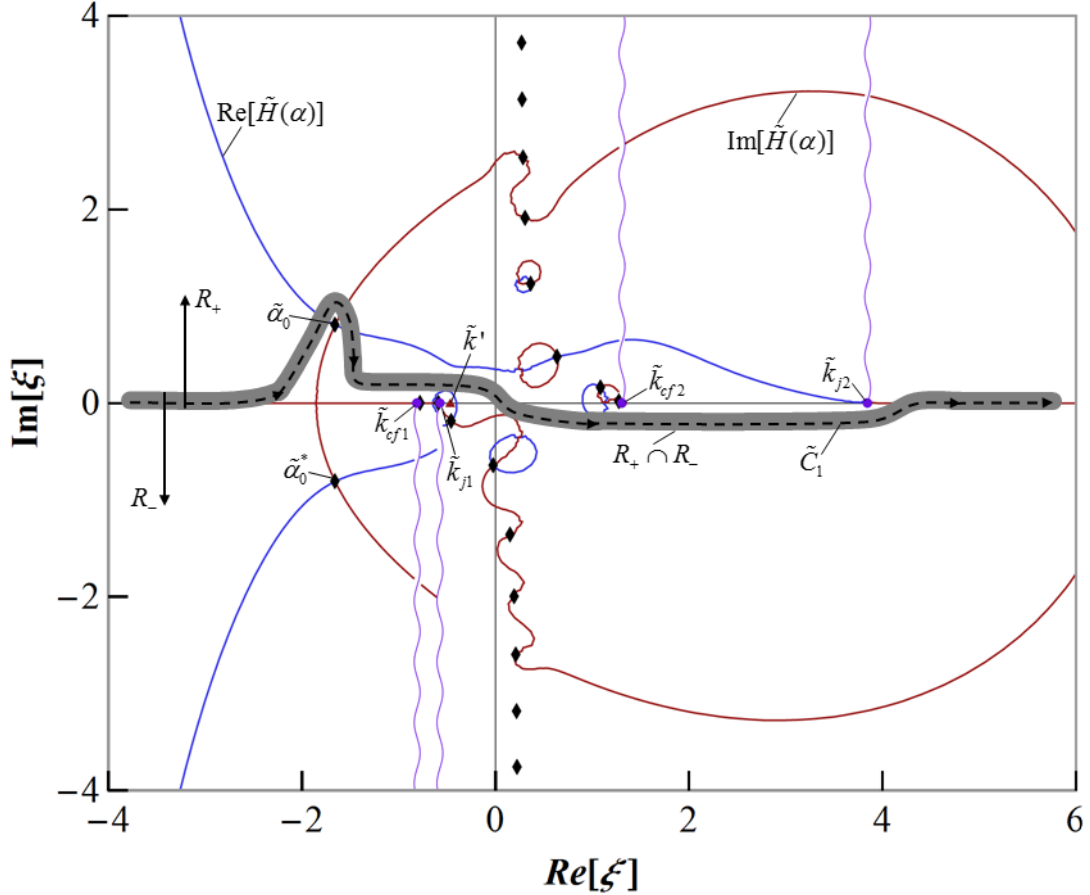


Рисунок 1.4 — Положение на комплексной плоскости $\xi = \alpha/k_{cf}$ нулей функции \tilde{H} (\blacklozenge), точек ветвления (\bullet) и разрезов (\sim) функций β_j и β_{cf} , полюса k' (\blacktriangle). $\theta = \pi/4$, $\rho_{cf} = \rho_j = 1.21 \text{ кг/м}^2$, $c_{cf} = c_j = 340 \text{ м/с}$, $M_j = 0.74$, $M_{cf} = 0.235$, $f = 300 \text{ Гц}$, $h = 1.05 \text{ м}$. Волны над символами означают обезразмеривание на k_{cf} .

Далее необходимо перейти к формированию уравнения Винера-Хопфа. Для этого применяется преобразование Фурье к граничным условиям (1.4) и (1.5), а также подстановка в них обозначенного вида решения, при этом Фурье образ начального возмущения (1.1) будут для краткости записываться как $\Phi_i(\alpha, y)$. В итоге получается следующее

$$\begin{aligned}\beta_{cf}B(\alpha)e^{\beta_{cf}h} - \beta_{cf}C(\alpha)e^{-\beta_{cf}h} &= 0, \\ \beta_{cf}B(\alpha) - \beta_{cf}C(\alpha) &= -iw_{cf}(\alpha)h_{23}^+(\alpha), \\ \beta_jD(\alpha) - \beta_j\Phi_i(\alpha, 0) &= -iw_j(\alpha)h_{23}^+(\alpha),\end{aligned}\tag{1.9}$$

$$p_{23}^-(\alpha) = -i\rho_{cf}w_{cf}(\alpha)(B(\alpha) + C(\alpha)) + i\rho_jw_j(\alpha)(D(\alpha) + \Phi_i(\alpha, 0)),$$

где $w_{cf}(\alpha) = \omega + V_{cf}\alpha$, $w_j(\alpha) = \omega + V_j\alpha$, p_{23}^- , h_{23}^+ - Фурье образы соответственно разности давлений p_{23} и смещения свободной границы η_{23} . Верхние индексы «+» и «-» означают, что функция регулярная соответственно в верхней R_+ или нижней R_- полуплоскости комплексной плоскости α , где отмеченная регулярность функций p и h связана с тем, что они были получены интегрированием по соответственно отрицательной или положительной оси x . После ряда преобразований система (1.9) может быть записана в следующем виде:

$$\tilde{H}(\alpha)h_{23}^+(\alpha) + i\rho_jw_j(\alpha)\Phi_i(\alpha, 0) = p_{23}^-, \tag{1.10}$$

Где $\tilde{H}(\alpha) = \rho_{cf} \cdot w_{cf}^2 \cdot \text{cth}(\beta_{cf}h) / \beta_{cf} + \rho_j w_j^2 / \beta_j$ - функция, отвечающая за дисперсионное соотношение данной системы. После получения первого скалярного уравнения Винера-Хопфа (10), необходимо, следуя стандартной процедуре [46], произвести факторизацию функций $\tilde{H}(\alpha) = \tilde{H}^+(\alpha) \cdot \tilde{H}^-(\alpha)$ и $\Phi_i(\alpha, 0) = \Phi_i^+(\alpha, 0) \cdot \Phi_i^-(\alpha, 0)$. Если учесть, что функция $\Phi_i(\alpha, 0)$ является образом падающей плоской волны, то можно записать следующее справедливое в полосе $R_+ \cap R_-$ уравнение:

$$\tilde{H}^+(\alpha)h_{23}^+(\alpha) + 2i \frac{\rho_j w_j(k')}{\tilde{H}^-(k')} \Phi_i^+(\alpha, 0) = \frac{p_{23}^-(\alpha)}{\tilde{H}^-(\alpha)} - 2i \frac{\rho_j w_j(k')}{\tilde{H}^-(k')} \Phi_i^-(\alpha, 0), \tag{1.11}$$

где $k' = -k_j \cos \theta_i / (1 + M_j \cos \theta_i)$ - продольное волновое число начального возмущения,

взятое с обратным знаком, а $\Phi_i^\pm(\alpha, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{iA_i}{\alpha - k' \pm i\varepsilon}$ [42]. Факторизация функции

$\tilde{H}(\alpha)$ представляет собой достаточно кропотливый процесс (подробное описание приводится в приложении работы [31]), однако необходимо отметить то, что функция $\tilde{H}^+(\alpha)$ содержит нуль α_0 , который соответствует неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Именно он пересекает действительную ось α при процедуре предельного перехода к действительной частоте.

Для получения единственного решения данной подзадачи главную роль играет правильная постановка условия на кромке сопла. Согласно экспериментальным и теоретическим исследованиям работы [47], для акустических волн не слишком большой частоты адекватным является применение полного условия Чаплыгина-Жуковского-Кутта, при котором накладывається требование на максимальную гладкость схода возмущений с кромки. Вместе с обобщенной теоремой Лиувилля [46] данное условие позволяет утверждать, что уравнение (1.11) определяет регулярную на всей комплексной плоскости α функцию, тождественно равную 0.

Исходя из вышесказанного решение первой подзадачи могут быть записаны в виде обратного преобразования Фурье:

$$\varphi_{I2} = -\frac{A_i \rho_j w_j(k')}{\pi \tilde{H}^-(k')} \int_{C_1} \frac{w_{cf}(\alpha)}{\tilde{H}^+(\alpha)(\alpha - k')} \frac{\text{ch}(\beta_{cf}(y-h))}{\beta_{cf} \text{sh}(\beta_{cf}h)} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1.12)$$

$$\varphi_{I3} = -\frac{A_i \rho_j w_j(k')}{\pi \tilde{H}^-(k')} \int_{C_1} \frac{w_j(\alpha)}{\tilde{H}^+(\alpha)(\alpha - k')} \frac{1}{\beta_j} e^{-i\alpha x + \beta_j y} d\alpha, \quad (1.13)$$

где контур интегрирования C_1 лежит в полосе $R_+ \cap R_-$ и обходит полюса α_0 и k' сверху как показано на рисунке 1.4. Полученные решения (1.12) и (1.13) используется затем в качестве начального возмущения рассеивающегося на кромке крыла (рисунок 1.5).

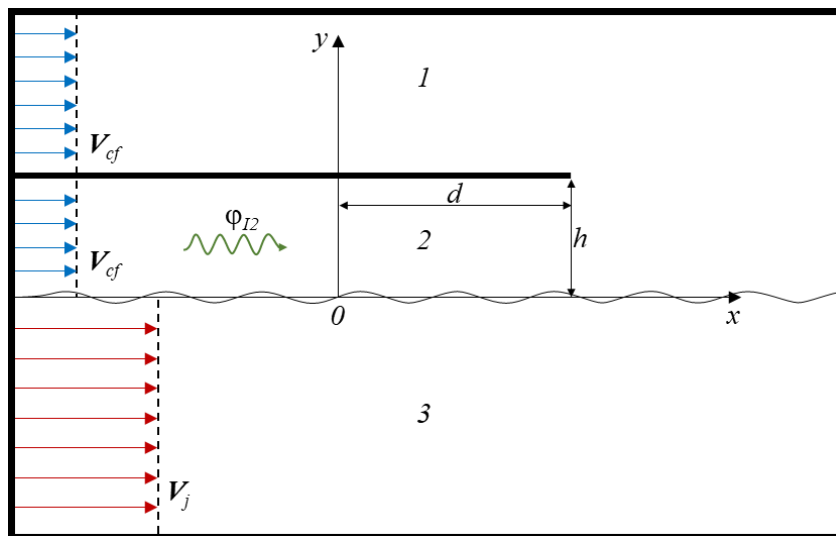


Рисунок 1.5 — Постановка второй подзадачи.

Исходя из опыта решения предыдущей подзадачи, решение уравнений (1.7) и (1.8) при наличии лишь верхней полуплоскости необходимо искать в следующем виде

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{I1}(\alpha, y) &= \hat{A}(\alpha)e^{-\beta_{cf}y}, y > h, \\ \hat{\Phi}_{I2}(\alpha, y) &= \hat{B}(\alpha)e^{\beta_{cf}y} + \hat{C}(\alpha)e^{-\beta_{cf}y}, 0 < y < h, \\ \hat{\Phi}_{I3}(\alpha, y) &= \hat{D}(\alpha)e^{\beta_j y}, y < 0.\end{aligned}$$

Далее применяя преобразование Фурье к граничным условиям (1.4) и (1.5) (с учетом отсутствия жесткой полуплоскости при $y = 0$), и используя вышеприведенный вид решения, получим следующую систему

$$\begin{aligned}\beta_{cf}\hat{A}(\alpha)e^{-\beta_{cf}h} &= -iw_{cf}(\alpha)h_{12}^+(\alpha)e^{i\alpha d}, \\ \beta_{cf}\hat{B}(\alpha)e^{\beta_{cf}h} - \beta_{cf}\hat{C}(\alpha)e^{-\beta_{cf}h} &= -iw_{cf}(\alpha)h_{12}^+(\alpha)e^{i\alpha d}, \\ p_{12}^-(\alpha)e^{i\alpha d} &= -ip_{cf}w_{cf}(\alpha)\tilde{A}(\alpha)e^{-\beta_{cf}h} + ip_{cf}w_{cf}(\alpha)(\tilde{B}(\alpha)e^{\beta_{cf}h} + \hat{C}(\alpha)e^{-\beta_{cf}h} + \Phi_{I2}(\alpha, h)), \\ \beta_{cf}\hat{B}(\alpha) - \beta_{cf}\hat{C}(\alpha) &= -iw_{cf}(\alpha)h_{23}^+(\alpha), \\ \beta_j\hat{D}(\alpha) &= -iw_j(\alpha)\hat{h}_{23}^+(\alpha), \\ \rho_{cf}w_{cf}(\alpha)(\hat{B}(\alpha) + \hat{C}(\alpha)) &= \rho_jw_j(\alpha)\hat{D}(\alpha),\end{aligned}\tag{1.14}$$

где $h_{12}^+(\alpha)e^{i\alpha d}$, $\hat{h}_{23}^+(\alpha)$ и $p_{12}^-(\alpha)e^{i\alpha d}$ - Фурье-образы соответственно смещения свободных границ и разности давления по обеим сторонам от верхней полубесконечной жесткой пластины. Также уже учтены все условия, наложенные в предыдущей подзадаче на начальные возмущения Φ_{I2} и Φ_{I3} . Используя стандартные математические преобразования, получим второе скалярное уравнение Винера-Хопфа:

$$F(\alpha)h_{12}^+(\alpha) + ip_{cf}w_{cf}(\alpha)e^{-i\alpha d}\Phi_{I2}(\alpha, h) = p_{12}^-(\alpha),\tag{1.15}$$

где $F(\alpha) = \frac{2\rho_{cf}w_{cf}^2(\alpha)}{\beta_{cf}(\alpha)} \frac{1}{1 + \frac{\Delta_{(-)}(\alpha)}{\Delta_{(+)}(\alpha)} e^{-2\beta_{cf}(\alpha)h}}$, $\Delta_{(\pm)}(\alpha) = \rho_{cf}w_{cf}^2(\alpha)\beta_j(\alpha) \pm \rho_jw_j^2(\alpha)\beta_{cf}(\alpha)$. В

работе [31] на данном этапе производился анализ начального возмущения

Φ_{I_2} (1.12) и его упрощение для дальнейших выкладок. Однако ввиду приобретенного опыта при поиске приведенного ниже точного решения далее предлагается использование Паде аппроксимации, что, в том числе, позволит проведение более наглядного сравнения результатов приближенного и точного решений. Но для начала необходимо провести факторизацию функции $F(\alpha) = F^+(\alpha)F^-(\alpha)$, подробности которой представлены в работе [31]. Далее уравнение (1.15) делится на функцию $F^-(\alpha)$, а также используется найденный в первой подзадаче образ рассеиваемого на задней кромке поля $\Phi_{I_2}(\alpha, h)$:

$$F^+(\alpha)h_{12}^+(\alpha) - 2A \frac{\rho_j w_j(k')}{\tilde{H}^-(k')} \frac{e^{-i\alpha d}}{F^-(\alpha)} \frac{1}{\alpha - k'} \frac{\rho_{cf} w_{cf}^2(\alpha)}{\tilde{H}^+(\alpha) \beta_{cf} \sinh(\beta_{cf} h)} = \frac{p_{12}^-(\alpha)}{F^-(\alpha)}; \quad (1.16)$$

далее второй член в правой части домножается и делится на функцию $\tilde{H}^-(\alpha)$ и получается следующее

$$F^+(\alpha)h_{12}^+(\alpha) - 2A \frac{\rho_j w_j(k')}{\tilde{H}^-(k')} \frac{\tilde{H}^-(\alpha) e^{-i\alpha d}}{F^-(\alpha)} \frac{1}{\alpha - k'} k_{12/22}(\alpha) = \frac{p_{12}^-(\alpha)}{F^-(\alpha)}, \quad (1.17)$$

где $k_{12/22}(\alpha) = \frac{\rho_{cf} w_{cf}^2(\alpha)}{\tilde{H}(\alpha) \beta_{cf} \sinh(\beta_{cf} h)}$. Функция $k_{12/22}$ является не голоморфной и далее

для применения метода вычитания полюсов необходимо аппроксимировать данную функцию при помощи метода Паде. Для того, чтобы не усложнять главу, посвященную поиску приближенного решения, здесь стоит отметить лишь то, что метод Паде позволяет аппроксимировать функцию отношением полиномов степени соответственно N и M , то есть голоморфной функцией. Более же подробно об этом будет описано в следующей главе. Таким образом, пусть найдена Паде аппроксимация:

$$k_{12/22p}(\alpha_-) \approx k_{12/22}(\alpha), \alpha \in R_+ \cap R_-,$$

обладающая лишь особенностями в виде полюсов α_i^\pm первого порядка, лежащих соответственно в верхней и нижней комплексной полуплоскости. Тогда (1.17) можно переписать как

$$\begin{aligned}
F^+(\alpha)h_{12}^+(\alpha) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{(\alpha - \alpha_i^-)} &= \\
&= \frac{p_{12}^-(\alpha)}{F^-(\alpha)} + 2A \frac{\rho_j w_j(k')}{\tilde{H}^-(k')} \frac{\tilde{H}^-(\alpha) e^{-i\alpha d}}{F^-(\alpha)} \frac{k_{12/22p}(\alpha)}{\alpha - k'} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{(\alpha - \alpha_i^-)};
\end{aligned} \tag{1.18}$$

где $R_i = 2A \frac{\rho_j w_j(k')}{\tilde{H}^-(k')} \frac{\tilde{H}^-(\alpha_i^-)}{F^-(\alpha_i^-)} e^{-i\alpha_i^- d} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_i^-} (k_{12/22p}(\alpha) \frac{\alpha - \alpha_i^-}{\alpha - k'})$ - вычет в полюсах нижней полуплоскости. В таком случае справедливое в полосе регулярности $\hat{R}_+ \cap \hat{R}_-$ равенство (1.18) определяет, согласно обобщенной теореме Лиувилля и условию Чаплыгина-Жуковского-Кутта на кромке крыла, функцию, регулярную во всей комплексной полуплоскости и тождественно равную нулю. Выражая, например, $h_{12}^+(\alpha)$ из (1.18) и подставляя в (1.14), можно найти неизвестные $\hat{A}(\alpha)$ и $\hat{D}(\alpha)$, определяющие поле в полуплоскостях над и под пластиной:

$$\Phi_{II1} \approx \frac{i}{2\pi} \int_{C_2} \frac{w_{cf}(\alpha)}{\beta_{cf}(\alpha) F^+(\alpha)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{(\alpha - \alpha_i^-)} e^{-i\alpha(x-d) - \beta_{cf}(y-h)} d\alpha, \tag{1.19}$$

$$\Phi_{II3} = -\frac{i\rho_{cf}}{2\pi} \int_{C_2} \frac{w_j(\alpha) w_{cf}^2(\alpha)}{\beta_{cf}(\alpha) \beta_j(\alpha) \tilde{H}(\alpha) \text{sh}(\beta_{cf} h)} \frac{1}{F^+(\alpha)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_i}{(\alpha - \alpha_i^-)} e^{-i\alpha(x-d) + \beta_j y} d\alpha, \tag{1.20}$$

где контур интегрирования C_2 , также как и C_1 , лежит в соответствующей полосе $R_+ \cap R_-$. Для перехода от потенциала скорости к пульсациям давления необходимо воспользоваться выражениями (1.1), (1.13), (1.19), (1.20):

$$p_1 = -\rho_{cf} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_{cf} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi_{II1}, \tag{1.21}$$

$$p_3 = -\rho_j \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_j \frac{\partial}{\partial x} \right) (\Phi_i + \Phi_{I3} + \Phi_{II3}). \tag{1.22}$$

В тоже время интегралы (1.13), (1.19) и (1.20) в дальнем поле могут быть оценены при помощи метода перевала [48]:

$$\Phi_{II1} \approx \sqrt{2\pi \hat{k}_{cf}} \frac{\sin \vartheta_{II1} e^{-i\hat{k}_{cf} M_{cf}(x-d) + i\hat{k}_{cf} r_{II1} - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{r_{II1}}} \frac{i}{2\pi} \frac{w_{cf}(\alpha)}{\beta_{cf}(\alpha) F^+(\alpha)} \sum_{i=1}^N \frac{R_i}{(\alpha - \alpha_i^-)} \Bigg|_{\alpha = \hat{k}_{cf} (M_{cf} - \cos \vartheta_{II1})}; \tag{1.23}$$

$$\varphi_{I3} \approx -\frac{A_i \rho_j w_j(k')}{\tilde{H}^-(k')} \sqrt{\frac{2\hat{k}_j}{\pi}} \frac{\sin \vartheta_{I3} e^{-i\hat{k}_j M_j x + i\hat{k}_j r_{I3} - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{r_{I3}}} \frac{w_j(\alpha)}{\tilde{H}^+(\alpha)(\alpha - k')\beta_j} \Big|_{\alpha = \hat{k}_j(M_j - \cos \vartheta_{I3})} ; , \quad (1.24)$$

$$\varphi_{II3} \approx -\sqrt{2\pi\hat{k}_j} \frac{\sin \vartheta_{II3} e^{-i\hat{k}_j M_j(x-d) + i\hat{k}_j r_{II3} - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{r_{II3}}} \frac{i\rho_j}{2\pi} \cdot \frac{w_j(\alpha)w_{cf}^2(\alpha)}{\beta_{cf}(\alpha)\beta_j(\alpha)\tilde{H}(\alpha)\text{sh}(\beta_{cf}h)} \frac{1}{F^+(\alpha)} \sum_{n=1}^N \frac{R_i}{(\alpha - \alpha_i^-)} \Big|_{\alpha = \hat{k}_j(M_j - \cos \vartheta_{II3})} , \quad (1.25)$$

где $r_{II1} = \sqrt{(x-d)^2 + (1-M_{cf}^2)(y-h)^2}$, $r_{I3} = \sqrt{x^2 + (1-M_j^2)y^2}$,

$$r_{II3} = \sqrt{(x-d)^2 + (1-M_j^2)y^2} \quad \sin \vartheta_{II1} = \frac{\sqrt{1-M_{cf}^2}(y-h)}{r_{II1}}, 0 < \vartheta_{II1} < \pi; \quad \sin \vartheta_{I3} = \frac{\sqrt{1-M_j^2}y}{r_{I3}},$$

$$\sin \vartheta_{II3} = \frac{\sqrt{1-M_j^2}y}{r_{II3}}, 0 < \vartheta_{I3}, \vartheta_{II3} < \pi; \quad \hat{k}_{cf} = \frac{k_{cf}}{1-M_{cf}^2}, \quad \hat{k}_j = \frac{k_j}{1-M_j^2}.$$

Здесь стоит отметить, что Паде аппроксимация $k_{12/22p}(\alpha)$, вообще говоря, обладает бесконечным количеством полюсов α_i^- , стремящихся к бесконечности. Тем не менее, строение решения позволяет ограничиться N ближайшими к нулю комплексной плоскости полюсами, поскольку полюса с большей мнимой частью будут давать пренебрежимо малый вклад в сумму в выражениях (1.23,1.25)

Кроме того, к решениям (1.23)-(1.25) необходимо добавить вычеты, в соответствующих полюсах подынтегральных функций (1.13), (1.19) и (1.20). Так прибавка к φ_{I3} вычета в точке $k', k' > \hat{k}_j(M_j - \cos \vartheta_{I3})$ будет соответствовать отражению начального возмущения φ_i от вихревой пелены при $0 < x < d$.

Также к φ_{II3} необходимо добавить вычеты в полюсах $\alpha_n^-, \alpha_n^- > \hat{k}_j(M_j - \cos \vartheta_{I3})$ и в пересеченных деформированным контуром интегрирования до контура наибоыстрейшего спуска полюсах α_n^+ , являющихся нулями функции $\tilde{H}(\alpha)\beta_{cf}\text{sh}(\beta_{cf}h)$, и лежащих в R_+ . Вычеты в полюсах, связанных с неустойчивостью, таких как $\alpha_1^- = \alpha_0$ и $\hat{\alpha}_0, \Delta_{(+)}(\hat{\alpha}_0) = 0$ можно не учитывать, так

как безграничное нарастание вниз по течению не имеет физического смысла и является артефактом рассматриваемой задачи. Кроме того, Паде аппроксимация $k_{12/22p}(\alpha)$ устроена таким образом, что оставшиеся полюса $\alpha_n^-, 2 < n \leq N$ не пересекаются контуром наибоыстрейшего спуска, что физически объясняется экспоненциально затухающей малостью вклада вычетов в данных точках в дальнем поле. В таком случае остается лишь вычет в $\alpha_2^- = k'$, что определяет отражение исходного возмущения φ_i от вихревой пелены при $x > d$.

И, наконец, к φ_{II1} необходимо прибавить вычеты в полюсах $\alpha_n^-, \alpha_n^- > \hat{k}_{cf}(M_{cf} - \cos \vartheta_{II1})$. При этом вклад вычетов в полюсе $\alpha_2^- = k'$ соответствует прошедшему начальному возмущению φ_i из области 3 в область 1, в полюсах $\alpha_n^- (n > 2)$ – распространяющимся волноводным модам, а в полюсе $\alpha_1^- = \hat{\alpha}_0$ безгранично нарастающему вниз по потоку возмущению, чей вклад также как и раньше не будет принят во внимание.

1.3 Анализ приближенного решения

Как уже отмечалось прежде, постановка упрощенной двумерной задачи позволяет явно провести анализ полученного аналитического решения и интерпретировать его. На данном этапе рассмотрим часть решения, связанную с рассеянием на кромках сопла и крыла и представляющих собой сносящиеся средним потоком цилиндрические волны ($\sim e^{ikr} / \sqrt{r}$). Анализируя в этом случае выражения (1.23) и (1.25), можно выделить общую зависимость амплитуды рассеянных на кромке крыла волн в виде суммы вычетов:

$$a_n(h, d) = \sum_{i=1}^N R_i = 2A \frac{\rho_j w_j(k')}{\tilde{H}^-(k')} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{H}^-(\alpha_i^-)}{F^-(\alpha_i^-)} e^{-i\alpha_i^- d} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_i^-} (k_{12/22p}(\alpha) \frac{\alpha - \alpha_i^-}{\alpha - k'}),$$

где все полюса α_n^- , кроме $\alpha_2 = k'$, являются функциями от h . Стоит отметить, что полюса Паде аппроксимации приемлемой точности устроены так, что все полюса кроме $\alpha_1^- = \alpha_0$ являются либо действительными либо обладают отрицательной мнимой частью, отсюда следует, что зависимость от d , выражающаяся членом $e^{-i\alpha_n^- d}$, для них лишь выражается либо в зависимости фазы от данного параметра, и амплитуда волн оказывается независимой от продольного расстояния, либо амплитуда для них экспоненциально затухает. Кроме того, из-за расположения действительных полюсов на оси между разрезами функции β_{cf} , зависимость амплитуды от поперечного расстояния h между кромками носит неубывающий характер. Однако если обратиться к полюсу α_0 , связанному с неустойчивостью, и обладающему положительной мнимой частью, то зависимость от геометрии конфигурации начинает носить совершенно другой характер. Так при увеличении параметра d и уменьшении параметра h амплитуда рассеянного поля начинает экспоненциально нарастать. В свою очередь это означает, что при фиксировании поперечного расстояния и увеличении продольного расстояния рассеянное поле будет в основном определяться рассеянием именно волны неустойчивости Кельвины-Гельмгольца. Экспоненциальная зависимость поля рассеянии в целом отражает наблюдаемые в экспериментальных исследованиях эффекты [7]. При этом здесь стоит акцентировать внимание, на том, что именно наличие кромки в области доминирования волны неустойчивости приводит к наличию существенного акустического поля рассеяния.

Для проведения количественной оценки эффекта рассеяния волны неустойчивости на задней кромке верхней полуплоскости рассмотрим следующие параметры: $\theta_i = \pi/6$, $\rho_{cf} = \rho_j = 1$ кг/м³, $c_{cf} = c_j = 343$ м/с, $M_j = 0.74$, $M_{cf} = 0.235$ и при этом $k = \omega/c_j = \omega/c_{cf} = 5.6$. При этом амплитуда начального возмущения A_i считается произвольной и избирается таким образом, чтобы итоговый результат был наиболее репрезентативен. Зафиксируем также два продольных расстояния $kd = 5, 10$ и рассмотрим влияние изменения параметра h на уровни акустических

пульсаций давления в дальнем поле ($k\sqrt{x^2 + y^2} = 100$ м). На рисунке 1.6 в сравнении с результатом для случая отсутствия верхней полуплоскости (черная линия) видно, что зависимость амплитуда пульсаций давления, связанная с рассеянием на задней кромке крыла волны неустойчивости, от поперечного расстояния между кромкой крыла и кромкой сопла носит экспоненциальный характер, и приближение крыла к слою смешения струи приводит к существенному усилению шума в дальнем поле.

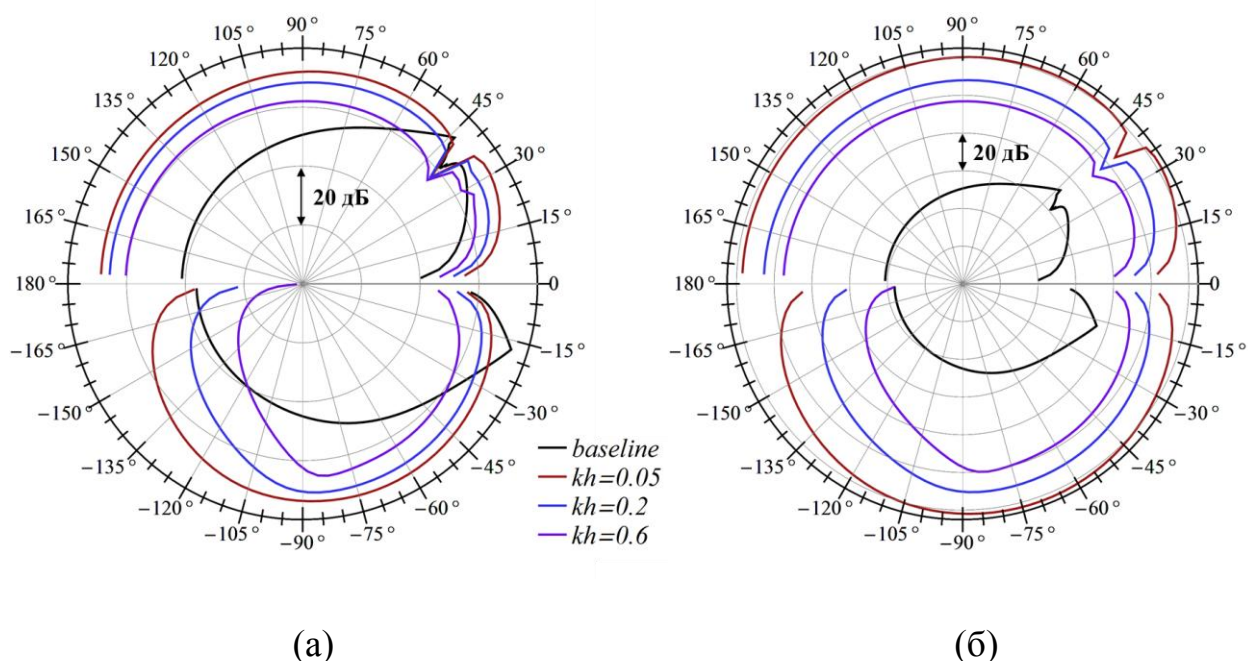


Рисунок 1.6 — Диаграмма полярной направленности поля мощности акустических пульсаций давления, связанного с рассеянием на кромке крыла волны неустойчивости, в зависимости от геометрических параметров. а) $kd = 5$; б) $kd = 10$;

Кроме того, увеличение продольного расстояния kd также приводит к дополнительному усилению шума. При этом пик направленности в нижней полусфере при $\theta \approx -90^\circ$ связан с приближением нуля функции $H(\alpha)$ к действительной оси. Кроме того, при взятии интегралов (1.19), (1.20) методом наибо́льшего спуска не были учтены петли деформированного контура интегрирования около соответствующих разрезов. Для верхней полусферы вклад интеграла по петле около проведенного от точки ветвления k_{j1} разреза

проявляется при $0^\circ < \theta < 40^\circ$, в то время как для нижней полусферы петля у разреза, проведенного от k_{cf2} , в области $-180^\circ < \theta < -90^\circ$. Учет дополнительных членов, связанных с деформацией контура интегрирования, приведет к устранению особенностей представленных направленностей. Тем не менее, для простоты анализа итоговых результатов данный учет в работе не производится.

Дополнительный анализ приближенного решения поставленной задачи позволил также пролить свет на следующий факт. Как указывалось ранее, при построении моделей шума взаимодействия обычно применяют допущение о независимости параметров волны неустойчивости от геометрии задачи. Для теоретической оценки величины ошибок, связанных с применением данного допущения, следует, вообще говоря, решить задачу об устойчивости круглой струи вблизи жесткой поверхности. Это в свою очередь представляет существенные математические трудности, однако определенные выводы можно сделать и в рамках поставленной двумерной модельной задачи. Так результаты, представленные на рисунке 1.7, демонстрируют наличие зависимости параметров волны неустойчивости от взаимного расположения кромок крыла и сопла лишь для малого значения параметра h (при фиксированных и определенных ранее значениях остальных параметров). При этом для трехмерной конфигурации «круглая струя вблизи плоской пластины» зависимость параметров неустойчивости слоя смещения от расстояния между струей и крылом является более слабой, чем для рассмотренного плоского случая. Таким образом, из приведенных результатов можно сделать вывод, что для круглой струи, находящейся вблизи крыла с убранной механизацией, вполне допустимо для получения предварительных оценок усиления шума использовать предположение о независимости характеристик ближнего поля струи, связанных с крупномасштабными структурами в слое смещения, от присутствия крыла. Тем не менее, для случая отклоненного закрылка, в особенности в случае его замыкания струей и изменения самого среднего поля, данный подход окажется, по всей видимости, неспособным позволить даже качественно описать механизм усиления шума струи.

Таким образом, на примере приближенного решения двумерной модельной задачи был рассмотрен механизм усиления шума струи вблизи крыла, связанный с рассеянием волн неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на кромке крыла. Показано, что рассеяние на кромке неизлучающих в отсутствие крыла гидродинамических пульсаций приводит к появлению излучающих возмущений, чья амплитуда линейно связана с амплитудой рассеянного поля. Данная связь приводит к существенному усилению шума в дальнем поле при приближении кромки крыла к области доминирования волны неустойчивости. Стоит отметить, что данная область доминирования в двумерной задаче носит неограниченный характер, в то время как в реальных струях данная область ограничена [28]. Кроме того, дополнительный анализ поведения характеристик волны неустойчивости от геометрии задачи продемонстрировал слабую зависимость характеристик от поперечного расстояния между кромками, в случае его не очень малого значения.

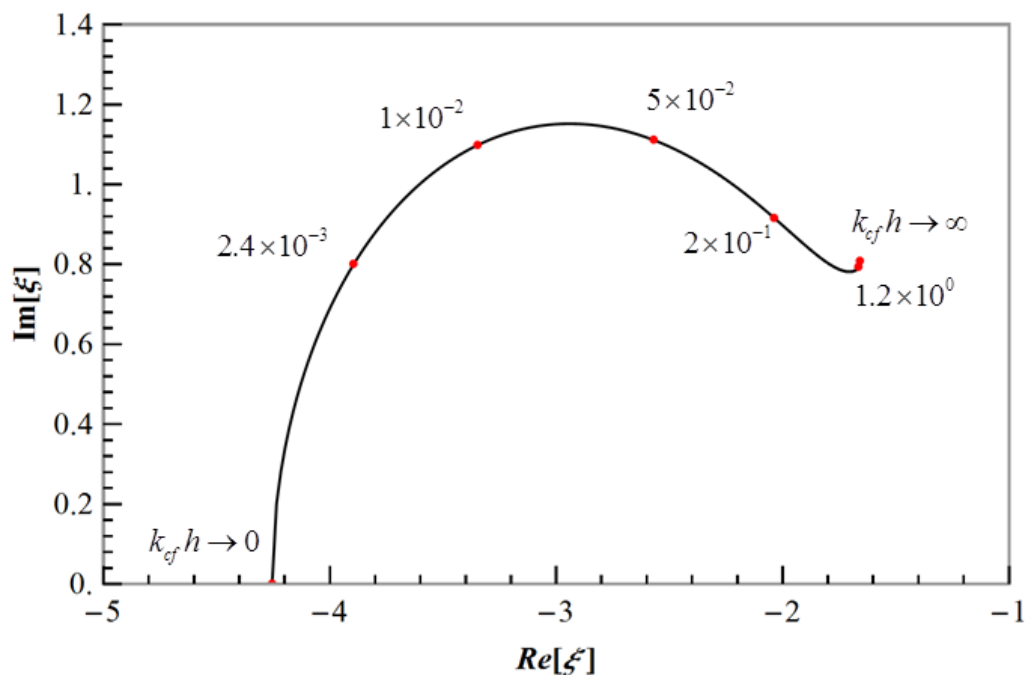


Рисунок 1.7 — Траектория движения в безразмерной комплексной плоскости ξ безразмерного полюса α_0/k_{cf} , соответствующего неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, при изменении безразмерного расстояния $k_{cf} h$.

Необходимо отметить также, что результаты приближенного решения, полученного в том числе при помощи применения Паде аппроксимации, хорошо сопоставляются с результатами, приведенными в работе [31], где вместо Паде аппроксимации использовался дополнительный анализ полюсов начального возмущения второй подзадачи.

1.4 Точное решение модельной задачи

В разделах 1.2, 1.3 исследовалось приближенное решение поставленной в разделе 1.1 задачи. Однако последующий анализ возможностей нахождения точного решения позволил предложить следующую опубликованную в работе [32] процедуру решения.

Многие промежуточные этапы процедуры поиска решения схожи с уже приведенными выше. Так для формирования матричного уравнения Винера-Хопфа изначально также совершается переход от продольной координаты x к спектральной плоскости α , что было описано выражениями (1.6-1.8).

После аналогичных процедур подготовки, связанных с определением ветвей многозначной функции β и учета принципов излучения и причинности, решение уравнений (2) и (3) ищется уже в следующем виде

$$\begin{aligned}\Phi_1(\alpha, y) &= A(\alpha)e^{-\beta_{cf}y}, y > h, \\ \Phi_2(\alpha, y) &= B(\alpha)e^{\beta_{cf}y} + C(\alpha)e^{-\beta_{cf}y}, 0 < y < h, \\ \Phi_3(\alpha, y) &= D(\alpha)e^{\beta_j y}, y < 0.\end{aligned}$$

Далее совершается переход к формированию матричного уравнения Винера-Хопфа. Для этого применяется преобразование Фурье к граничным условиям (1.4) и (1.5), а также подставим в них обозначенный вид решения, при этом Фурье образ начального возмущения (1) будут для краткости записываться как $\Phi_i(\alpha, y)$. Получается следующее

$$\begin{aligned}
\beta_{cf}B(\alpha) - \beta_{cf}C(\alpha) &= -iw_{cf}(\alpha)h_{23}^+(\alpha), \\
\beta_jD(\alpha) - \beta_j\Phi_i(\alpha, 0) &= -iw_j(\alpha)h_{23}^+(\alpha), \\
ip_{23}^-(\alpha) &= \rho_{cf}w_{cf}(\alpha)(B(\alpha) + C(\alpha)) - \rho_jw_j(\alpha)(D(\alpha) + \Phi_i(\alpha, 0)), \\
-\beta_{cf}A(\alpha)e^{-\beta_{cf}h} &= -iw_{cf}(\alpha)h_{12}^+(\alpha)e^{i\alpha d}, \\
\beta_{cf}B(\alpha)e^{\beta_{cf}h} - \beta_{cf}C(\alpha)e^{-\beta_{cf}h} &= -iw_{cf}(\alpha)h_{12}^+(\alpha)e^{i\alpha d}, \\
ip_{12}^-(\alpha)e^{i\alpha d} &= \rho_{cf}w_{cf}(\alpha)(A(\alpha)e^{-\beta_{cf}h} - B(\alpha)e^{\beta_{cf}h} - C(\alpha)e^{-\beta_{cf}h}),
\end{aligned} \tag{1.26}$$

где следуя уже введенной системе обозначений $w_{cf}(\alpha) = \omega + V_{cf}\alpha$, $w_j(\alpha) = \omega + V_j\alpha$, $h_{12}^+(\alpha)e^{i\alpha d}$, $h_{23}^+(\alpha)$ - Фурье образы смещений свободной границы η_{12} и η_{23} , посчитанные, соответственно по интервалам $x > d$ и $x > 0$. Фурье образы разности давлений p_{12} и p_{23} , посчитанные по интервалам $x < d$ и $x < 0$, обозначены как $p_{12}^-(\alpha)e^{i\alpha d}$ и p_{23}^- . Верхние индексы «+» и «-» означают, что функция регулярная соответственно в верхней R_+ или нижней R_- полуплоскости комплексной плоскости α (рисунок 1.3), где отмеченная регулярность функций p и h связана с тем, что они были получены интегрированием по отрицательной или положительной полу-оси x , соответственно.

После ряда математических преобразований систему (26) можно переписать в виде следующего матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} h_{23}^+ \\ h_{12}^+ \end{pmatrix} + 2iw_j\rho_j\Phi_i(\alpha, 0)\frac{1}{H}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\alpha d - \beta_{cf}h} \end{pmatrix} = \frac{1}{H}\mathbf{K}\begin{pmatrix} p_{23}^- \\ p_{12}^- \end{pmatrix}, \tag{1.27}$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12}e^{i\alpha d} \\ k_{21}e^{-i\alpha d} & k_{22} \end{pmatrix}, k_{11} = 1, k_{12} = k_{21} = e^{-\beta_{cf}h}, k_{22} = e^{-\beta_{cf}h} \frac{\beta_{cf} \sinh(\beta_{cf}h)}{\rho_{cf}w_{cf}^2} \tilde{H}, \\
H = \frac{w_{cf}^2\rho_{cf}}{\beta_{cf}} + \frac{w_j^2\rho_j}{\beta_j}, \tilde{H} = \frac{w_{cf}^2\rho_{cf}}{\beta_{cf}} \operatorname{cth}(\beta_{cf}h) + \frac{w_j^2\rho_j}{\beta_j}.$$

Уравнение (1.27) является матричным уравнением Винера-Хопфа, для решения которого ключевым является факторизация матрицы \mathbf{K} и функции H :

$$H = H^+ H^-, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{K}^+ \mathbf{K} = \mathbf{K}^-, \quad (1.29)$$

где функции H^\pm и матрицы \mathbf{K}^\pm являются аналитическими и обладают алгебраическим поведением на бесконечности в верхней и нижней полуплоскостях, соответственно, при этом матрицы \mathbf{K}^\pm - обратимы.

Как и ранее факторизация функции H может быть проведена с помощью стандартных интегралов типа Коши [46]. Однако не существует общего метода для явной факторизации центральной матрицы \mathbf{K} . В виду важности данной процедуры далее она будет рассмотрена более подробно.

Процедура факторизации матрицы \mathbf{K} будет производиться при помощи Паде аппроксимации [49] и метода вычитания полюсов, что, в целом, является аналогичным подходу, представленному в работе о сдвинутых коаксиальных цилиндрах [41]. Одним из достоинств данного подхода является возможность достаточно простого его применения в условиях наличия спутного потока, в то время как другой возможный подход для факторизации матрицы, представленный в работах [50,51], является достаточно сложным и требует внесения дополнительных модификаций для учета ненулевого спутного потока.

Поскольку концепция метода факторизации была заимствована из работы [41], то для удобства сравнения конечных результатов условные обозначения, где это возможно, были оставлены без изменения. Перед применением процедуры факторизации для начала исследуются нули функций H, \tilde{H} и определителя матрицы $\det \mathbf{K} = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}$. Необходимо обратить внимание, что ни k_{ij} ($i, j=1,2$), ни, соответственно, $\det \mathbf{K}$ не зависят от параметра d .

Далее стоит отметить, что $H=0$ представляет собой дисперсионное соотношение для задачи о вихревой пелене в отсутствии верхней полуплоскости (крыла) [42,52,53], в то время как $\tilde{H}=0$ определяет дисперсионное соотношение для задачи о вихревой пелене, над которой на расстоянии h расположена бесконечная жесткая пластина [31]. Для анализа расположения нулей удобно перейти к

безразмерному волновому числу $\xi = \alpha/k_j$. Типичное расположение нулей для H , \tilde{H} и $\det \mathbf{K}$ в комплексной плоскости ξ представлено на рисунке 1.4.

Функция \tilde{H} и определитель $\det \mathbf{K}$ обладают бесконечным количеством нулей, которые выстраиваются вдоль асимптоты $\text{Re}(\xi) = M_{cf} / (1 - M_{cf}^2)$. Функции H обладает двумя комплексно сопряженными нулями $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\alpha}_0^*$, которые также являются нулями для $\det \mathbf{K}$, где нуль $\tilde{\alpha}_0$ определяет развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для вихревой пелены в свободном пространстве. В тоже время у функции \tilde{H} также есть два комплексно сопряженных нуля $\tilde{\alpha}_{00}$ и $\tilde{\alpha}_{00}^*$, где нуль $\tilde{\alpha}_{00}$ определяет развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для вихревой пелены вблизи бесконечной жесткой пластины. Для достаточно большого значения величины $k_{cf}h$, нули $\tilde{\alpha}_{00}, \tilde{\alpha}_{00}^*$ становятся неотличимыми соответственно от $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\alpha}_0^*$.

Далее вводятся следующие обозначения для элементов матриц

$$\mathbf{K}^{\pm} = \begin{pmatrix} k_{11}^{\pm} & k_{12}^{\pm} \\ k_{21}^{\pm} & k_{22}^{\pm} \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Приравнивая соответствующие элементы выражения (1.30) получим следующие соотношения

$$k_{11}^+ + k_{12}^+ e^{-i\alpha d - \beta_{cf} h} = k_{11}^-, \quad (1.31a)$$

$$k_{11}^+ e^{i\alpha d - \beta_{cf} h} + k_{12}^+ L = k_{12}^-, \quad (1.31б)$$

$$k_{21}^+ + k_{22}^+ e^{-i\alpha d - \beta_{cf} h} = k_{21}^-, \quad (1.31в)$$

$$k_{21}^+ e^{i\alpha d - \beta_{cf} h} + k_{22}^+ L = k_{22}^-, \quad (1.31г)$$

где обозначение $L \equiv k_{22}$ было введено специально для удобства сравнения с соответствующим обозначением работы [41].

Выражение (1.31б) может быть переписано как

$$\frac{k_{12} L^+}{k_{22}} k_{11}^+ e^{i\alpha d} + k_{12}^+ L^+ = \frac{k_{12}^-}{L^-}, \quad (1.32)$$

где факторизация функции $L = L^+ L^-$ может быть произведена при помощи Коши интеграла, при этом L^+ и L^- являются аналитическими функциями с алгебраическим поведением на бесконечности в соответственно верхней R_+ и нижней R_- полуплоскостях. Поскольку $d > 0$, то множитель e^{iad} затухает экспоненциально в полуплоскости R_+ .

Можно отметить, что правая часть выражения (1.32) является аналитической в R_- , в то время как левая часть содержит немероморфный множитель k_{12} / k_{22} , затрудняющий определение области аналитичности. Основная идея, представленная в работе [41], заключается в замене немероморфного множителя его двухточечной Паде аппроксимацией (для точек около начала координат и на бесконечности), а также в последующем применении метода вычитания полюсов. Данная методика уже была использована в рамках поиска приближенного решения. На данном этапе стоит рассмотреть ее теперь более подробно. В работе [32] для применения аппроксимации рассматривалась вспомогательная функция

$$F(\alpha) = \frac{\beta_{cf} \sinh(\beta_{cf} h) \tanh(\alpha)(\alpha - \alpha_0)(\alpha - \alpha_0^*) w_j^2}{\alpha w_{cf}^2} \frac{k_{12}}{k_{22}} = \frac{\rho_{cf} \tanh(\alpha)(\alpha - \alpha_0)(\alpha - \alpha_0^*) w_j^2}{\alpha \tilde{H}}$$

Однако дополнительное исследование, в том числе методом проб и ошибок показало, что для малых и средних значений параметра $k_{cf} h$ ($0.01 < k_{cf} h < 1$) также существует возможность поиска аппроксимации удовлетворительной точности для всех значений параметра $k_{cf} h$ в указанном диапазоне. При этом ранее для каждого значения параметра $k_{cf} h$ необходимо было проводить поиск соответствующей аппроксимации. Новый метод состоит в поиске не одной, а нескольких аппроксимаций для соответствующих функций:

$$F_1(\alpha) = \frac{\operatorname{th}\left(\alpha - \frac{k_{cf}^+ + k_{cf}^-}{2}\right) \beta_{cf} \operatorname{th}(\beta_{cf} h)}{\alpha - \frac{k_{cf}^+ + k_{cf}^-}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - M_{cf}^2}};$$

$$F_2(\alpha) = \frac{\sqrt{1-M_j^2}}{\beta_j} \frac{\alpha - \frac{k_j^+ + k_j^-}{2}}{\operatorname{th}\left(\alpha - \frac{k_j^+ + k_j^-}{2}\right)};$$

$$F_3(\alpha) = \frac{\operatorname{th}\left(\alpha - \frac{k_j^+ + k_j^-}{2}\right)}{\alpha - \frac{k_j^+ + k_j^-}{2}} \frac{\alpha - \frac{k_{cf}^+ + k_{cf}^-}{2}}{\operatorname{th}\left(\alpha - \frac{k_{cf}^+ + k_{cf}^-}{2}\right)}.$$

С первого взгляда, кажется, что нет необходимости в аппроксимации функций F_1 и F_3 , однако если обратиться к итоговой функции аппроксимации для немероморфного множителя k_{12} / k_{22}

$$(k_{11} / k_{22})_p = \frac{1}{\cosh(\beta_{cf} h)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{1-M_{cf}^2}}{\sqrt{1-M_j^2}} \frac{w_j^2}{w_{cf}^2} F_{1p}(\alpha) F_{2p}(\alpha) F_{3p}(\alpha)\right)},$$

то можно видеть, что для того, чтобы сохранить в пошаговой аппроксимации характерные полюса функции k_{11} / k_{22} соответствующие распространению волны неустойчивости $\tilde{\alpha}_{00}$ и наличию обратной связи $\tilde{\alpha}_{cl}$ (полюс с положительной действительной частью и наименьшей положительной действительной частью) необходимо представить соответствующий знаменатель в виде полинома, из которого уже явным образом можно вычленив полученные полюса $\tilde{\alpha}_{00p}, \tilde{\alpha}_{clp}$, лежащие близко к полюсам $\tilde{\alpha}_{00}$ и $\tilde{\alpha}_{cl}$, но не тождественно равные им. Эта процедура может быть проведена при помощи домножения знаменателя на отношение $\frac{\alpha - \tilde{\alpha}_{00}}{\alpha - \tilde{\alpha}_{00p}} \frac{\alpha - \tilde{\alpha}_{cl}}{\alpha - \tilde{\alpha}_{clp}}$. Кроме того, если бы не проводилась аппроксимация

функций F_1 и F_3 , то затруднительной была бы последующая процедура вычитания полюсов из функции поскольку знаменатель представлял бы собой не полином с конечным набором известных нулей, а трансцендентную функцию с неизвестными полюсами. При этом индекс p здесь обозначает аппроксимацию соответствующих функций.

Остановимся подробнее на аппроксимации функций F_n . В работе [49] было показано, что для двухточечной Паде аппроксимации на бесконечности возможно

рассмотрение не ряда (например, функция F_2 не регулярна на бесконечности), а асимптотики функций. Так рассматриваемые функции ведут себя как

$$F_n(\alpha) = 1 + o(\alpha^{-1}), n = 1, 2, 3.$$

Далее, следуя работе [49], применяется одноточечная Паде аппроксимация уже к функциям

$$G_n(\alpha) = F_n(\alpha) - 1, \quad (1.33)$$

которые стремятся к нулю на бесконечности и раскладываются около начала координат в ряд следующим образом

$$G_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m (\alpha - \alpha_n)^m, \quad (1.34)$$

Выражения (1.33)-(1.34) единственным образом определяют $[M_n / N_n]$ Паде аппроксимацию для $G_n(\alpha)$

$$G_n(\alpha) \approx \frac{P_{M_n}(\alpha)}{Q_{N_n}(\alpha)}, M_n \leq N_n,$$

что приводит к следующей аппроксимации для $F_n(\alpha)$

$$F_n(\alpha) \approx F_{np}(\alpha) = 1 + \frac{P_{M_n}(\alpha)}{Q_{N_n}(\alpha)} = \frac{\tilde{P}_{N_n}(\alpha)}{Q_{N_n}(\alpha)},$$

где $P_{M_n}(\alpha)$, $Q_{N_n}(\alpha)$, $\tilde{P}_{N_n}(\alpha)$ являются полиномами порядка M_n , N_n соответственно. При этом M_n и N_n для каждой функции G_n подбирались индивидуально с целью увеличения точности аппроксимации. Стоит отметить, что и точка около начала координат α_n , где функции раскладывались в ряд (1.34) подбирались индивидуально, исходя из наблюдения в работе [49], что Паде аппроксимация более точна, если она проводится около точки симметрии функции (отсюда и выбранные множители в функциях F_n).

Таким образом, была получена следующая мероморфная аппроксимация $(k_{12} / k_{22})_p$ для функции k_{12} / k_{22}

$$\frac{k_{12}}{k_{22}} \approx \left(\frac{k_{12}}{k_{22}} \right)_p = \frac{1}{\cosh(\beta_{cf} h)} \frac{\frac{\alpha - \tilde{\alpha}_{00p}}{\alpha - \tilde{\alpha}_{00}} \frac{\alpha - \tilde{\alpha}_{clp}}{\alpha - \tilde{\alpha}_{cl}}}{\left(1 + \frac{\sqrt{1 - M_{cf}^2}}{\sqrt{1 - M_j^2}} \frac{w_j^2}{w_{cf}^2} F_{1p}(\alpha) F_{2p}(\alpha) F_{3p}(\alpha)\right)}, \quad (1.35)$$

Подстановка аппроксимации в выражение (1.32) приводит к тому, что левая часть равенства становится мероморфной функцией и существует возможность применения метода вычитания полюсов. Вычитание бесконечного числа полюсов α_i^+ с обеих сторон равенства приводит к

$$\begin{aligned} \left(\frac{k_{12}}{k_{22}} \right)_p L^+(\alpha) k_{11}^+(\alpha) e^{i\alpha d} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L^+(\alpha_i^+) k_{11}^+(\alpha_i^+) R_i e^{i\alpha_i^+ d}}{(\alpha - \alpha_i^+)} + k_{12}^+(\alpha) L^+(\alpha) = \\ = \frac{k_{12}^-(\alpha)}{L^-(\alpha)} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L^+(\alpha_i^+) k_{11}^+(\alpha_i^+) R_i e^{i\alpha_i^+ d}}{(\alpha - \alpha_i^+)}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где α_i^+ – полюса функции $(k_{12}/k_{22})_p$, расположенные в R_+ , а R_i – вычеты функции $(k_{12}/k_{22})_p$ в полюсах $\alpha = \alpha_i^+$. Теперь про выражение (1.36) можно сказать, что при $d > 0$ его левая и правая часть аналитичны и обладают алгебраическим поведением на бесконечности в R_+ и R_- , соответственно. Таким образом, выражение (1.36) определяет аналитичную во всей комплексной α -плоскости функцию, которая, в соответствии с обобщенной теоремой Лиувилля, тождественно равна константе. Из-за того, что факторизация (1.29) может быть произведена неединственным способом [41], данная константа может принимать любое значение, но для определенности и простоты мы считаем ее равной единице. В связи с этим можно разбить (1.36) на два выражения:

$$k_{12}^+(\alpha) = \frac{1}{L^+(\alpha)} - \left(\frac{k_{12}}{k_{22}} \right)_p k_{11}^+(\alpha) e^{i\alpha d} + \frac{1}{L^+(\alpha)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L^+(\alpha_i^+) k_{11}^+(\alpha_i^+) R_i e^{i\alpha_i^+ d}}{(\alpha - \alpha_i^+)}, \quad (1.37)$$

$$k_{12}^-(\alpha) = L^-(\alpha) + L^-(\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L^+(\alpha_i^+) k_{11}^+(\alpha_i^+) R_i e^{i\alpha_i^+ d}}{(\alpha - \alpha_i^+)}. \quad (1.38)$$

Выражение (1.37) определяет связь между неизвестными функциями $k_{12}^+(\alpha)$ и $k_{11}^+(\alpha)$, а выражение (1.38) определяет неизвестную функцию $k_{12}^-(\alpha)$, в обоих случаях при помощи неизвестного набора коэффициентов $k_{11}^+(\alpha_i^+)$.

Далее, выражая неизвестный элемент k_{12}^+ из уравнения (1.31а) и подставляя в (1.31б), а также применяя метод вычитания полюсов можно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \tilde{L}^-(\alpha)k_{11}^-(\alpha) - k_{12}^-(\alpha)e^{-i\alpha d} \left(\frac{k_{21}}{k_{22}} \right)_p \tilde{L}^-(\alpha) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{L}^-(\alpha_i^-)k_{12}^-(\alpha_i^-)S_i e^{-i\alpha_i^- d}}{(\alpha - \alpha_i^-)} = \\ = \frac{k_{11}^+(\alpha)}{\tilde{L}^+(\alpha)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{L}^-(\alpha_i^-)k_{12}^-(\alpha_i^-)S_i e^{-i\alpha_i^- d}}{(\alpha - \alpha_i^-)}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

где $\tilde{L} = \tilde{L}^+ \tilde{L}^- = \tilde{H} / H$, α_i^- - полюса функции, лежащие в R_- , и S_i - вычеты функции $(k_{12} / k_{22})_p$ в полюсах $\alpha = \alpha_i^-$. И опять факторизация функции $\tilde{L} = \tilde{L}^+ \tilde{L}^-$ может быть проведена при помощи интегралов типа Коши, так что функции \tilde{L}^+ и \tilde{L}^- аналитичны, не имеют нулей и обладают алгебраическим поведением на бесконечности в R_+ и R_- , соответственно. Повторяя процедуру (1.37)-(1.38), выражение (1.39) можно также разделить на два соотношения, определяющие связи между неизвестными функциями через неизвестные коэффициенты $k_{12}^-(\alpha_i^-)$:

$$k_{11}^-(\alpha) = \frac{1}{\tilde{L}^-(\alpha)} + k_{12}^-(\alpha)e^{-i\alpha d} \left(\frac{k_{21}}{k_{22}} \right)_p - \frac{1}{\tilde{L}^-(\alpha)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{L}^-(\alpha_i^-)k_{12}^-(\alpha_i^-)S_i e^{-i\alpha_i^- d}}{(\alpha - \alpha_i^-)}, \quad (1.40)$$

$$k_{11}^+(\alpha) = \tilde{L}^+(\alpha) - \tilde{L}^+(\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{L}^-(\alpha_i^-)k_{12}^-(\alpha_i^-)S_i e^{-i\alpha_i^- d}}{(\alpha - \alpha_i^-)}. \quad (1.41)$$

Для получения оставшихся 4 уравнений необходимо в таком же порядке рассмотреть уже уравнения (1.31в) и (1.31г):

$$k_{22}^+(\alpha) = -\frac{1}{L^+(\alpha)} - \left(\frac{k_{12}}{k_{22}} \right)_p k_{21}^+(\alpha)e^{i\alpha d} + \frac{1}{L^+(\alpha)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L^+(\alpha_i^+)k_{21}^+(\alpha_i^+)R_i e^{i\alpha_i^+ d}}{(\alpha - \alpha_i^+)}, \quad (1.42)$$

$$k_{22}^{-}(\alpha) = -L^{-}(\alpha) + L^{-}(\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{L^{+}(\alpha_i^{+})k_{21}^{+}(\alpha_i^{+})R_i e^{i\alpha_i^{+}d}}{(\alpha - \alpha_i^{+})}, \quad (1.43)$$

$$k_{21}^{-}(\alpha) = \frac{1}{\tilde{L}^{-}(\alpha)} + k_{22}^{-}(\alpha) e^{-i\alpha d} \left(\frac{k_{12}}{k_{22}} \right)_p - \frac{1}{\tilde{L}^{-}(\alpha)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{L}^{-}(\alpha_i^{-})k_{22}^{-}(\alpha_i^{-})S_i e^{-i\alpha_i^{-}d}}{(\alpha - \alpha_i^{-})}, \quad (1.44)$$

$$k_{21}^{+}(\alpha) = \tilde{L}^{+}(\alpha) - \tilde{L}^{+}(\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{L}^{-}(\alpha_i^{-})k_{22}^{-}(\alpha_i^{-})S_i e^{-i\alpha_i^{-}d}}{(\alpha - \alpha_i^{-})}. \quad (1.45)$$

Необходимо отметить, что в случае уравнения (1.31д), вся функция после применения обобщенной теоремы Лиувилля была принята тождественно равной (-1), а не 1, как в случае уравнения (1.31б), что позволило обеспечить линейную независимость решений двух матричных уравнений, представленных ниже.

Для вывода итогового результата необходимо найти неизвестные коэффициенты $k_{11}^{+}(\alpha_i^{+})$ и $k_{12}^{-}(\alpha_i^{-})$. Подстановка α_i^{+} в уравнение (1.41) и α_i^{-} в (1.38) приводит к бесконечному набору линейных уравнений, которые в компактном виде могут быть записаны как:

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{Y}^{-1} - \mathbf{M}\mathbf{X}\mathbf{M}^T)_{ij} A_j = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{M}\mathbf{X})_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.46)$$

$$B_i = X_{ii} - \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{X}\mathbf{M}^T)_{ij} A_j. \quad (1.47)$$

Здесь $A_i = \tilde{L}^{-}(\alpha_i^{-})k_{12}^{-}(\alpha_i^{-})\tilde{R}_i e^{-i\alpha_i^{-}d}$ и $B_i = L^{+}(\alpha_i^{+})k_{11}^{+}(\alpha_i^{+})R_i e^{i\alpha_i^{+}d}$ являются элементами вектор-столбцов, а \mathbf{X} и \mathbf{Y} - диагональными матрицами

$$\mathbf{X} = \text{diag} \left[L^{+}(\alpha_j^{+})R_j e^{i\alpha_j^{+}d} \tilde{L}^{+}(\alpha_j^{+}) \right],$$

$$\mathbf{Y} = \text{diag} \left[L^{-}(\alpha_j^{-})\tilde{L}^{-}(\alpha_j^{-})\tilde{R}_j e^{-i\alpha_j^{-}d} \right],$$

и, наконец, \mathbf{M} - матрица, состоящая из элементов $M_{ij} = (\alpha_j^{+} - \alpha_i^{-})^{-1}$. Далее систему (1.46) необходимо сократить до конечного размера (что заключается в рассмотрении лишь N_p ближайших к началу координат полюсов при применении метода их вычитания), а затем произвести ее решение, следуя стандартным процедурам. Решение системы позволит определить неизвестные $k_{11}^{+}(\alpha_i^{+})$ и

$k_{12}^-(\alpha_i^-)$, чтобы затем подставить их в уравнения (1.37, 1.38, 1.40, 1.41).
 Неизвестные $k_{21}^+(\alpha_i^+)$, $k_{22}^-(\alpha_i^-)$ могут быть также получены из схожей с (1.46) системы уравнений, за одним лишь исключением, что в правой части новой системы стоит не 1, а -1. Кроме того, вместо A_i и B_i в нее соответственно входят $C_i = \tilde{L}[\alpha_i^-]k_{22}^-(\alpha_i^-)\tilde{R}_i e^{-i\alpha_i^- d}$ и $D_i = L^+[\alpha_i^+]k_{21}^+(\alpha_i^+)R_i e^{i\alpha_i^+ d}$. Таким образом, определив $k_{21}^+(\alpha_i^+)$ и $k_{22}^-(\alpha_i^-)$ их можно подставить в выражения (1.42-1.45).

После того как были определены все элементы соотношения (1.29) можно считать процедуру факторизации матрицы \mathbf{K} завершенной и можно переходить к решению матричного уравнения Винера-Хопфа. Используя факторизацию матрицы \mathbf{K} можно переписать уравнение (1.27) в следующем виде:

$$\mathbf{K}^+ H^+ \begin{pmatrix} h_{23}^+ \\ h_{12}^+ \end{pmatrix} + 2i\rho_j \mathbf{E} = \frac{1}{H^-} \mathbf{K}^- \begin{pmatrix} p_{23}^- \\ p_{12}^- \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

где $\mathbf{E} = w_j \Phi_i(\alpha, 0) \frac{\mathbf{K}^+}{H^-} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\alpha d - \beta_{cf} h} \end{pmatrix}$.

Поскольку $\Phi_i(\alpha, 0)$ является Фурье образом падающей начальной плоской волны с продольным волновым числом $k' = \frac{\omega / c_j \cos \theta_i}{1 - M_j \cos \theta_i}$, то вектор \mathbf{E} может быть представлен в виде суммы $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-$ [41], где

$$\mathbf{E}^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\alpha - (k' - i\varepsilon)} \frac{w_j(k') \mathbf{K}^+(k')}{H^-(k')} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-ik'd - \beta_{cf}(k')h} \end{pmatrix}.$$

Далее уравнение (1.48) приводится к

$$\mathbf{K}^+ H^+ \begin{pmatrix} h_{23}^+ \\ h_{12}^+ \end{pmatrix} + 2i\rho_j \mathbf{E}^+ = \frac{1}{H^-} \mathbf{K}^- \begin{pmatrix} p_{23}^- \\ p_{12}^- \end{pmatrix} - 2i\rho_j \mathbf{E}^-. \quad (1.49)$$

Таким образом, правая часть уравнения (1.49) аналитична в нижней комплексной полуплоскости R_- , в то время как левая часть аналитична в верхней полуплоскости R_+ . Теперь необходимо определить поведение членов уравнения (1.49) на бесконечности в соответствующих полуплоскостях, а затем применить

обобщенную теорему Лиувилля [46] для разделения рассматриваемого уравнения на два выражения.

В рамках данной задачи используется нестационарное полное условие Чаплыгина-Жуковского-Кутта, согласно которому, смещение вихревой пелены η ведет себя как $x^{3/2}$ при $x \rightarrow +0$, где x - продольное расстояние от кромки сопла / задней кромки пластины [47]. В этом случае разница давлений p по обеим сторонам границы раздела конечна вблизи кромки, т.е. $p \sim x^\mu$ при $x \rightarrow -0$, $\mu > 0$. Все это позволяет говорить о том, что $h_{12}^+, h_{23}^+ \sim \alpha^{-5/2}$, $p_{12}^-, p_{23}^- \sim \alpha^{-\mu-1}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в R_+ и R_- , соответственно [46]. Элементы векторов \mathbf{E}^\pm на бесконечности ведут себя как α^{-1} в соответствующих полуплоскостях. Следуя работе [46] можно показать, что $H^+ \sim \alpha^{3/2}$, $L^+, \tilde{L}^+ \sim const$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в R_+ , а $H^- \sim \alpha^{-1/2}$, $L^-, \tilde{L}^- \sim const$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в R_- . Из уравнений (1.37,1.38) и (1.40-1.45), и оценок, полученных для L^\pm и \tilde{L}^\pm , следует, что элементы матриц \mathbf{K}^\pm ведут себя как α^{-1} при $\alpha \rightarrow \infty$, в соответствующих полуплоскостях. Таким образом, после применения обобщенной теоремы Лиувилля следует, что уравнение (1.49) определяет аналитичную во все комплексной α -плоскости функцию, тождественно равную нулю. Из этого следует, что

$$\begin{pmatrix} h_{23}^+ \\ h_{12}^+ \end{pmatrix} = -2i\rho_j (\mathbf{K}^+)^{-1} \frac{\mathbf{E}^+}{H^+}.$$

Последняя формула может быть приведена к более наглядной форме, если использовать соотношение $(\det \mathbf{K}^+)^{-1} = -L^+ / (2\tilde{L}^+)$, что приводит к следующим итоговым выражениям для Фурье образов нормального смещения свободных границ

$$h_{12}^+ = \frac{w_j(k')L^+ \left(k_{21}^+ k_{11}^+(k') - k_{11}^+ k_{21}^+(k') + (k_{21}^+ k_{12}^+(k') - k_{11}^+ k_{22}^+(k')) e^{-ik'd - \beta_{ef}(k')h} \right)}{(\alpha - k')\tilde{L}^+ H^+ H^-(k')}, \quad (1.50a)$$

$$h_{23}^+ = \frac{w_j(k')L^+ \left(k_{12}^+ k_{21}^+(k') - k_{22}^+ k_{11}^+(k') + (k_{12}^+ k_{22}^+(k') - k_{22}^+ k_{12}^+(k')) e^{-ik'd - \beta_{ef}(k')h} \right)}{(\alpha - k')\tilde{L}^+ H^+ H^-(k')} \quad (1.50б)$$

Данный результат позволяет определить неизвестные функции $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ из уравнений (1.26), тем самым завершая процедуру решения задачи.

1.5 Анализ точного решения

Анализ полученного точного решения как и в случае приближенного решения направлен на исследование акустических возмущений, связанных именно с рассеянием начального возмущения на кромках сопла и крыла. Для аппроксимации итогового решения в дальнем поле над (область 1) и под (область 3) полуплоскостями как и ранее используется метод наибоыстрейшего спуска [48].

Возмущения в областях 1 и 3 могут быть рассчитаны при помощи обратного преобразования Фурье

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_C A(\alpha) e^{-\beta_{cf} y - i\alpha x} d\alpha = \frac{i}{2\pi} \int_C \frac{w_{cf} h_{12}^+}{\beta_{cf}} e^{-\beta_{cf}(y-h) - i\alpha(x-d)} d\alpha, \quad (1.51)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2\pi} \int_C D(\alpha) e^{\beta_j y - i\alpha x} d\alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{1}{\beta_j} \frac{\partial \Phi_i(\alpha, 0)}{\partial y} e^{-i\alpha x} d\alpha - \frac{i}{2\pi} \int_C \frac{w_j h_{23}^+}{\beta_j} e^{\beta_j y - i\alpha x} d\alpha. \quad (1.52)$$

где C – контур обратного Фурье преобразования, лежащий в полосе $R_+ \cap R_-$ (рисунок 1.4).

Далее следует анализ достаточно стандартной для дифракционных двумерных задач [37-39,41,52,53] структуры интегралов (1.51,1.52). Решение в дальнем поле состоит из таких типичных составляющих как цилиндрические волны, плоские волны, боковые волны, а также гидродинамические волны неустойчивости. Цилиндрические волны возникают из-за рассеяния возмущений на задней кромке и выражаются интегралом, взятым по пути наибоыстрейшего спуска. Плоские волны связаны с отражением от жестких полуплоскостей и пересечением через вихревую пелену начального возмущения и представлены в

виде вычетов подынтегральных функций в вещественных полюсах. Возникновение боковой волны можно связать с различными относительными скоростями распространения возмущений по обеим сторонам вихревой пелены, при этом сама волна выражается путем интегрирования по петле около разреза. Наконец, гидродинамические волны неустойчивости представлены в виде вычета в полюсе неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Данная волна неустойчивости распространяется с дозвуковой скоростью, при этом растет в направлении вниз по течению и затухает в боковом направлении [31,42]. Таким образом, она может эффективно рассеиваться на задней кромке крыла, лежащей достаточно близко к вихревой пелене, в области, где гидродинамические пульсации достаточно сильны. Данный эффект является наиболее интересным в рассматриваемой модели, и именно благодаря этому эффекту задача данной работы существенно отличается от задачи в случае покоящейся среды [41] или задачи с одной кромкой [42,52,53]. Таким образом, в дальнейшем более подробно исследуется именно дифракционная составляющая решения. Математически это означает, что не будет рассматриваться первый член в уравнении (1.52), так как он связан с отражением плоской волны, а в асимптотике дальнего поля интегралов в выражении (1.51,1.52) не будет учитываться вклад боковой волны, а также вычеты, связанные с плоскими волнами и волной неустойчивости Кельвина-Гельмгольца.

Для дальнейшего анализа удобно переписать уравнение (1.51) и второй член выражения (1.52) (обозначая его как $\tilde{\varphi}_3$) в виде

$$\varphi_1 = \frac{i}{2\pi_c} \int \frac{w_{cf} h_{12}^+}{\beta_{cf}} e^{-\beta_{cf} R_1 \sin \theta_1 - i\alpha R_1 \cos \theta_1} d\alpha, \quad (1.53)$$

$$\tilde{\varphi}_3 = -\frac{i}{2\pi_c} \int \frac{w_j h_{23}^+}{\beta_j} e^{\beta_j R_3 \sin \theta_3 - i\alpha R_3 \cos \theta_3} d\alpha, \quad (1.54)$$

где $R_1 = \sqrt{(x-d)^2 + (y-h)^2}$, $R_3 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin \theta_1 = (y-h)/R_1$, $0 < \theta_1 < \pi$, $\sin \theta_3 = y/R_3$, $-\pi < \theta_3 < 0$ соответственные физические полярные координаты

точки наблюдения относительно кромки крыла (в области 1) и кромки сопла (в области 3).

Для дальнего поля $k_{cf}R_1, k_{cf}R_3 \gg 1$, и, следовательно, можно оценить интегралы (1.53-1.54) при помощи метода наибыстрейшего спуска. Седловые точки [48] для соответствующих подынтегральных функций в этом случае могут быть записаны как

$$\alpha_{s1} = \hat{k}_{cf} M_{cf} - \frac{\hat{k}_{cf} \cos \theta_1}{\sqrt{1 - M_{cf}^2 \sin^2 \theta_1}}, \quad \hat{k}_{cf} = k_{cf} / (1 - M_{cf}^2),$$

$$\alpha_{s3} = \hat{k}_j M_j - \frac{\hat{k}_j \cos \theta_3}{\sqrt{1 - M_j^2 \sin^2 \theta_3}}, \quad \hat{k}_j = k_j / (1 - M_j^2).$$

После этого, контур интегрирования C деформируется в путь наибыстрейшего спуска, проходящий через седловую точку. При этом важно следить за тем, чтобы все произведенные до этого факторизации функций проводились таким образом, чтобы седловые точки лежали в полосе регулярности $R_+ \cap R_-$. Далее вычеты в полюсах, пересеченных контуром при его деформации должны учитываться при записи полного решения, однако, как это отмечалось выше, они не связаны с рассеянной частью поля и потому не будут участвовать в итоговом выражении. Боковые волны, связанные с наличием вихревой пелены, и математически представленные как интегралы по петле около разрезов, связанные при этом с деформацией контура, также не будут приниматься во внимание, так как эти волны затухают быстрее чем волны, связанные с дифракцией [52] Таким образом, в дальней зоне поле дифракции записывается в следующем виде

$$\varphi_{1d} \approx \frac{1}{\sqrt{R_1}} D_1(\theta_1) e^{iR_1 \hat{k}_{cf} \sqrt{1 - M_{cf}^2 \sin^2 \theta_1} - iM_{cf} \hat{k}_{cf} (x-d) + i\pi/4}, \quad (1.55)$$

$$\tilde{\varphi}_{3d} \approx \frac{1}{\sqrt{R_3}} D_3(\theta_3) e^{iR_3 \hat{k}_j \sqrt{1 - M_j^2 \sin^2 \theta_3} - iM_j \hat{k}_j x + i\pi/4}, \quad (1.56)$$

где

$$D_1(\theta_1) = \sqrt{\frac{k_{cf}}{2\pi}} \frac{\sin \theta_1}{(1 - M_{cf}^2 \sin^2 \theta_1)^{3/4}} \left(\frac{w_{cf} h_{12}^+}{\beta_{cf}} \right) \Big|_{\alpha=\alpha_{s1}},$$

$$D_3(\theta_3) = \sqrt{\frac{k_j}{2\pi}} \frac{\sin \theta_3}{(1 - M_j^2 \sin^2 \theta_3)^{3/4}} \left(\frac{w_j h_{23}^+}{\beta_j} \right) \Big|_{\alpha=\alpha_{s3}},$$

индекс “ d ” обозначает принадлежность к полю дифракции.

Отметим также, что в определенных случаях (например, если точка обзора лежит в области геометрической тени) полюса подынтегральных функций выражений (1.53,1.54) могут располагаться вблизи точки перевала. В этом случае для получения корректной во всей области асимптотики необходимо применить стандартную коррекцию в виде добавочного члена для выражений (1.55,1.56), представленного в работах [39,48].

С целью верификации полученного решения для начала рассматривается случай без среднего потока $M_j, M_{cf} = 0$. Решение для задачи в такой постановке было получено в работах Abrahams & Wickham [50-51]. Таким образом, результаты этих работ могут быть использованы для сравнения с результатами, полученными с помощью разработанных в данной работе процедур. Отметим, что в работе [50] авторами был сконструирован нетривиальный и подробный метод факторизации матрицы в терминах решения парных интегральных уравнений, для которых можно получить итеративное решение. Однако этот метод достаточно сложен для применения и без существенных модификаций не может быть использован для случая наличия средних течений из-за более сложных функций, содержащихся в матрице. Таким образом, в данной работе используется комбинация Паде аппроксимации и метода вычитания полюсов, что кажется более простым и универсальным в применении [41] (его можно применять, как для покоящейся, так и для движущейся среды). При этом ожидается, что результаты работ [50-51] должны воспроизводиться представленным в данной работе решением в условиях покоящейся внешней среды.

Для сравнения полученных результатов используются следующие параметры (взяты из [51] и приведенные к обозначениям данной работы): $\theta_i = 3\pi/4$, $kh = \pi/2$, $kd = 4$, $kR_1 \approx kR_3 = 100$. При этом в данном случае удобнее было не искать пошаговую Паде аппроксимацию описанную выше, и не искать одиночную Паде аппроксимацию для функции $F(\alpha)$ [32]; для случая отсутствия потоков аппроксимировать удобнее функцию $\tilde{F}(\alpha)$

$$\tilde{F}(\alpha) = \frac{\rho_{cf} c_{cf}^2 k_{cf}^2 + \rho_j c_j^2 k_j^2}{\rho_{cf} c_{cf}^2 k_{cf}^2} \frac{\tanh(\alpha)}{\alpha} \beta_{cf} \sinh(\beta_{cf} h) \frac{(\alpha - \sigma k_j)(\alpha + \sigma k_j)}{(\alpha - k_j)(\alpha + k_j)} \frac{k_{12}}{k_{22}}.$$

При этом k_{12}/k_{22} не имеет полюсов неустойчивости и поэтому нет причин умножать его на $(\alpha - \alpha_0)(\alpha - \alpha_0^*)$, как это было сделано в работе [32] для функции $F(\alpha)$, однако для двухточечной аппроксимации Паде необходим множитель $\beta_{cf} \sinh(\beta_{cf} h) \cosh(\beta_{cf} h)$, тогда на бесконечности функция $\tilde{F}(\alpha)$ становится ограниченной. Кроме того множитель $\frac{\rho_{cf} c_{cf}^2 k_{cf}^2 + \rho_j c_j^2 k_j^2}{\rho_{cf} c_{cf}^2 k_{cf}^2} \frac{\tanh(\alpha)}{\alpha}$ приводит к тому, что на бесконечности функция $\tilde{F}(\alpha)$ не просто ограничена, но стремится к единице. Множитель же $\frac{(\alpha - \sigma k_j)(\alpha + \sigma k_j)}{(\alpha - k_j)(\alpha + k_j)}$, $\sigma > 1$ позволяет достаточно просто избежать появления полюсов в точках k_j и $-k_j$ для Паде аппроксимации. В противном случае появление полюсов в этих точках существенно усложняет применение метода перевала при приближении к ним седловых точек.

Для оценки точности аппроксимации функции k_{12}/k_{22} , следуя работам [41, 49], вводится процентная относительная ошибка $\varepsilon = \left| 1 - k_{12}/k_{22} \cdot (k_{12}/k_{22})_p^{-1} \right| \cdot 100\%$. При этом данная ошибка рассматривается на некотором контуре C , лежащем в полосе регулярности $R_+ \cap R_-$. Исходя из этого, M и N для Паде аппроксимацию избирались таким образом, чтобы ошибка ε на

заданном контуре C была меньше 5%. Так, например, для $M = 6$ и $N = 10$ относительная ошибка ϵ не превышает 3 % (рисунок 1.8).

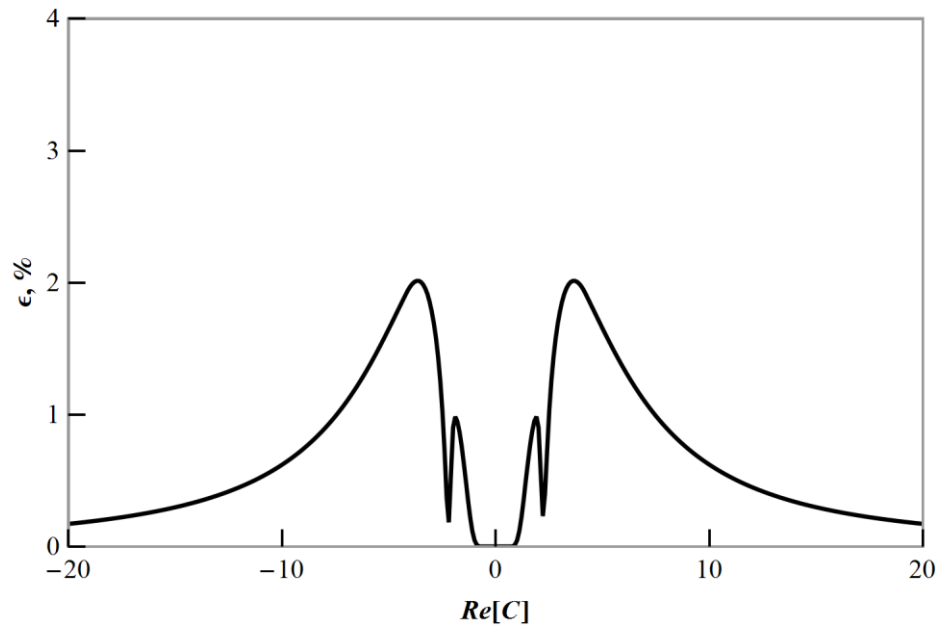


Рисунок 1.8 — Относительная ошибка Паде аппроксимации ϵ на контуре C ($M = 6$, $N = 10$).

Необходимо отметить, что в приближении дальнего поля $kR_1, kR_3 \gg kd, kh$, и тогда $R_1 \approx R_3 = R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Следовательно, угол обзора можно задавать как $\theta = \theta_3 = -\arccos(x/R)$ для $y < 0$ и $\theta = \arccos(x/R) \approx \theta_1$ для $y > 0$. В этом случае нормированная амплитуда $|\varphi_d| \sqrt{kR}$ для связанных с дифракцией на кромках возмущений скоростного потенциала идентична рассматриваемой в работе [51] (φ_d задается выражениями (1.55-1.56)).

Если обратиться к рисунку 3 работы [51] и учесть зеркальную симметрию постановки задач можно видеть, что результаты решения повторяют друг друга (рисунок 1.9). Таким образом, верификацию представленной процедуры получения решения можно считать законченной.

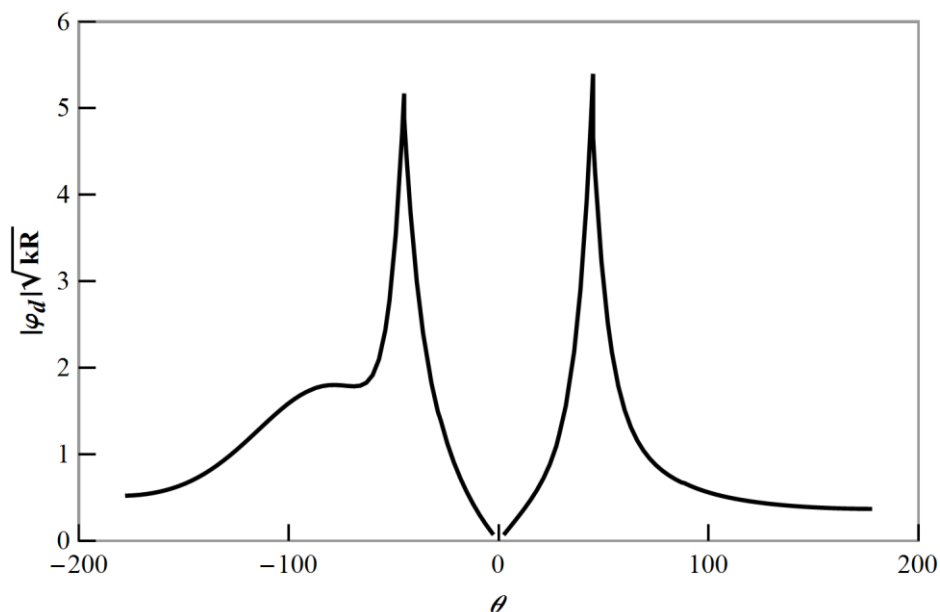


Рисунок 1.9 — Направленность нормализованной дифракционной составляющей поля $|\varphi_d(\theta)|\sqrt{kR}$ для задачи в условиях покоя $M_j, M_{cf} = 0$.

Теперь от случая покоящейся среды можно перейти к анализу новых результатов, полученных в случае подвижной среды. Но для начала проведем анализ структуры решения модельной задачи на примере Фурье образов смещения свободных границ (1.50).

Полюс для выражения (1.50а), связанный с нулем функции H^+ определяет развитие волны неустойчивости, удовлетворяющей граничным условиям на свободной границе при $y = h$. Полюса для выражения (1.50б), связанные с нулями функции $\tilde{L}^+ H^+$, определяют как схождение с кромки сопла и распространение волны неустойчивости Кельвина – Гельмгольца, так и обратную связь, возникающую между двумя кромками. Кроме того полюса, связанные со скобкой-множителем для выражения (1.50б) определяют каналные моды, распространяющиеся по потоку. Последний элемент решения $(\alpha - k')$ в случае для h_{12}^+ отвечает за проходящее в область 1 заданное возмущение (1.1), а в случае для h_{23}^+ отвечает за отражение заданного возмущения (1.1) от жестких полуплоскостей и от свободной границы при $y = 0$.

Далее для визуализации полученного решения в условиях наличия потока рассмотрим следующие значения входящих в задачу параметров: $M_j = 0.74$, $M_{cf} = 0.24$, $\theta_i = 5\pi/6$, $\rho_{cf} = \rho_j$, $c_{cf} = c_j$. При этом рассматривается зависимость направленности поля рассеяния (1.55-1.56) от безразмерных параметров $k_j d$ и $k_j h$, определяющих относительное расположение кромок. Таким образом, ниже представлены результаты для следующих значений параметров: $k_j d = 5, 10$, $k_j h = 0.05, 0.2, 0.6$, в виде уже полярных направленностей в логарифмическом масштабе, что представляется более наглядным.

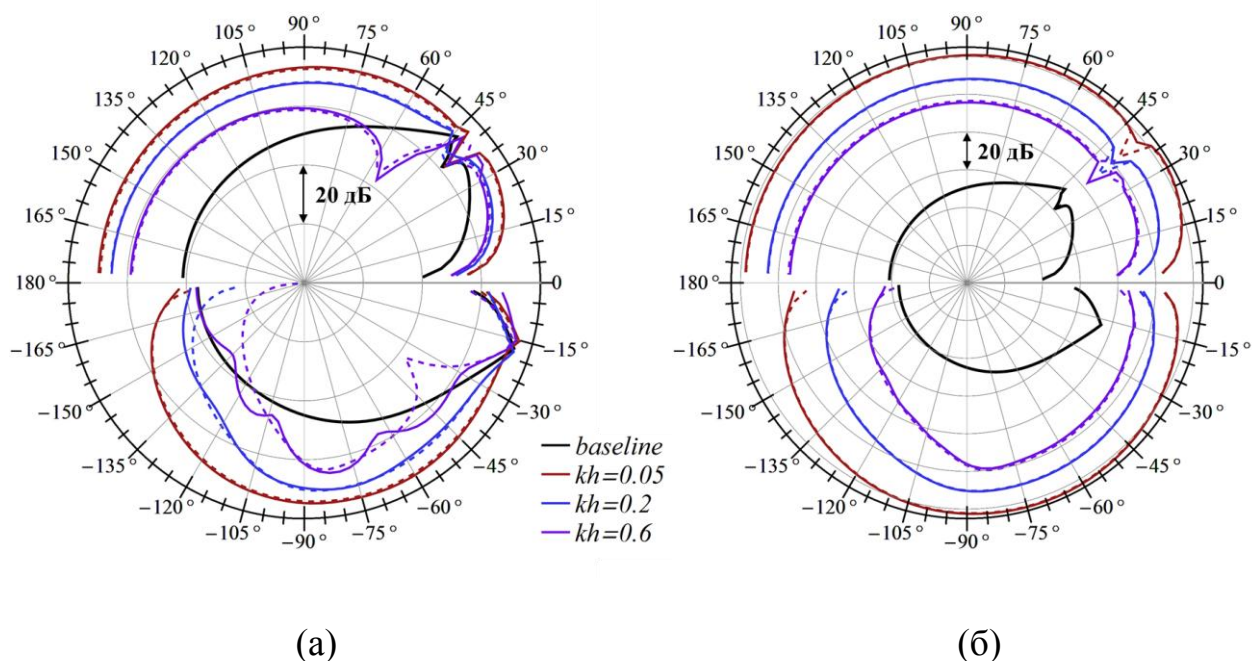


Рисунок 1.10 — Диаграмма полярной направленности поля мощности акустических пульсаций давления. Сплошные линии – точное решение (1.55-1.56), пунктир – приближенное решение (1.23,1.25). а) $kd = 5$; б) $kd = 10$. Черные кривые – решение задачи без верхней полуплоскости (базовый случай).

На рисунке 1.10 представлен результат сравнения приближенного (1.23,1.25) и точного (1.55-1.56) решений задачи о рассеянии начального возмущения в виде плоской волны на двух разнесенных полуплоскостях при наличии двух однородных потоков. Также для демонстрации эффекта усиления шума в дальнем поле на рисунке в виде черных кривых продемонстрировано

решение задачи о рассеянии начального возмущения на задней кромке нижней полуплоскости в случае отсутствия верхней полуплоскости, при котором нет взаимодействия сошедшей волны неустойчивости с задней кромкой верхней полуплоскости.

Необходимо отметить, что основная задача при постановке и решении двумерной модельной задачи состояла в демонстрации того, что сошедшая с кромки нижней полуплоскости (моделирующей сопло) волна неустойчивости, рассеиваясь на задней кромке верхней полуплоскости (моделирующей крыло), может привести к существенному усилению шума как в области над, так и под крылом. При этом особенностям в форме получившихся направленностей уделялось минимальное внимание. Тем не менее, в рамках данной работы был совершен дополнительный анализ различий в направленности точного и приближенного решения, который позволил объяснить некоторые наблюдаемые особенности в работе [32]. Однако, во-первых, стоит отметить, что приближенное и точное решения хорошо совпадают для случая больших kd (рисунок 1.10б), а именно в этом приближении и происходил поиск приближенного решения. Тем не менее, в работе [32] даже в этом случае в области $-180^\circ < \theta < -150^\circ$ наблюдалось различие в результатах решений. Связано это с тем, что для направленности под нижней полуплоскостью важной является точность Паде аппроксимации, в то время как над верхней полуплоскостью Паде аппроксимация входит лишь посчитанная в точке k' . При этом считалось, что достаточно добиться хорошей точности Паде аппроксимации на некотором контуре C , лежащем в полосе регулярности $R_+ \cap R_-$, как это было проделано для случая задачи Abrahams & Wickham. Однако при деформации данного контура в контур наибо́льшего спуска существует возможность пересечения Паде полюсов и для учета данного события необходимо производить корректировку при помощи соответствующих вычетов. Тем не менее, на фоне общей сложности процедуры поиска точного решения введение учета пересеченных полюсов показалось излишним усложнением и новая пошаговая процедура нахождения Паде аппроксимации производилась таким образом, чтобы точность аппроксимации достигала

приемлемых величин не только на контуре C , но и в самих седловых точках, для которых происходит аппроксимация интегралов (1.53-1.54) в дальнем поле. Косвенно это позволило избежать случая пересечения полюсов при деформации контура и поэтому в отличие от результатов работы [32] здесь точное и приближенное решения хорошо сопоставляются для $kd = 10$ и в случае $-180^\circ < \theta < -150^\circ$. Однако проблемным осталось направление $\theta \approx 40^\circ$, для которого в рамках данной работы удалось установить лишь то, что вблизи разреза k_{j1} , слева от него, наблюдается особенность в факторизуемых функциях не позволяющая получать приемлемую точность факторизации для седловой точки вблизи данного угла наблюдения. В связи с этим различие точного и приближенного решения для данного направления не является информативным. Также стоит отметить, что для более качественного сопоставления приближенного и точного решения в выражении (1.18) был учтен также полюс $\alpha_2^- = k'$ (отсюда различия в направленностях для приближенного решения, представленных на рисунках 1.6 и 1.10). Это было сделано в связи с тем, что точное решение в силу представленной процедуры содержит в функции E^+ полюс k' , и технически проще оказалось рассмотреть данный полюс в приближенном решении, чем деформировать контур интегрирования и вычитать вклад вычета в данном полюсе для выражений (1.53-1.54) точного решения [42]. Данная операция позволила показать, что некоторые особенности в направленности для направлений $30^\circ < \theta < 60^\circ$ и $-30^\circ < \theta < 0^\circ$ могут быть описаны и приближенным решением при более аккуратном анализе выражений для точного и приближенного решений.

Тем не менее, для случая, когда поле рассеяния волны неустойчивости перестает доминировать над остальным полем ($kd = 5, kh \leq 0.2$), точное решение позволяет получить отличный от приближенного решения результат, что наблюдается на направлениях $-180^\circ < \theta < -90^\circ$. Это связано с тем, что точное решение позволяет проследивать взаимосвязь рассеяния на двух кромках, что может быть крайне полезным при исследовании резонансных эффектов, когда рассеянное на задней кромке верхней полуплоскости поле начинает влиять на

сход волны неустойчивости с кромки нижней полуплоскости. Однако анализ данного эффекта не входил в задачи настоящей работы.

Таким произведенный в данной работе анализ показывает, что присутствие среднего течения с распространяющейся волной неустойчивости в вихревой пелене может существенно повлиять на решение классической (с точки зрения геометрической конфигурации) задачи о дифракции [50,51]. Стоит отметить, что количественные результаты, полученные для итоговых уровней расчета уровней шума, основываются на принятой модели, рассматривающей слой смешения в виде вихревой пелены. Модель вихревой пелены обычно переоценивает пространственный рост волны неустойчивости, а также не учитывает ее затухание на расстоянии вниз по потоку от кромки сопла. Таким образом, шум в дальнем поле оказывается переоцененным. Однако, существует возможность, что предоставленные результаты могут внести вклад в общее число задач о дифракции с точным решением и улучшить качественное понимание аэроакустического взаимодействия между слоем смешения струи и задней кромкой крыла. Так одним из основных выводов данной главы является тот факт, что для корректного теоретического или численного моделирования взаимодействия круглой струи и крыла необходимо точно описать ближнее поле струи, которое даже в области линейных пульсаций состоит из смеси различных азимутальных мод с излучающими и неизлучающими компонентами [28,54]. И если в случае изолированной струи моделирование неизлучающих структур могло производиться неединственным способом и это никак не влияло на интересующий шум в дальнем поле, то для случая струи вблизи рассеивающей поверхности точное моделирование эффективно рассеивающихся неизлучающих в изолированном случае структур становится крайне важным для точного описания результирующего шума в дальнем поле.

Таким образом, подводя итоги первой главы, стоит отметить, что на примере приближенного и точного решения двумерной модельной задачи был рассмотрен механизм усиления шума струи вблизи крыла, связанный с рассеянием волн неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на кромке крыла.

Продemonстрировано, что присутствие среднего течения с распространяющейся волной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в вихревой пелене может существенно повлиять на решение классической (с точки зрения геометрии) задачи о дифракции [50,51]. Показано, что рассеяние на кромке неизлучающих в отсутствие крыла гидродинамических пульсаций приводит к появлению излучающих возмущений, чья амплитуда линейно связана с амплитудой рассеянного поля. Данная связь приводит к существенному усилению шума в дальнем поле при приближении кромки крыла к области доминирования волны неустойчивости. Стоит отметить, что данная область доминирования в двумерной задаче носит неограниченный характер, в то время как в реальных струях данная область ограничена [28].

Качественное описание особенностей наблюдаемых в эксперименте [7] при помощи полученной модели, основанной на решении двумерной задачи, приводит к возможности дальнейшего рассмотрения предложенного механизма усиления шума уже в случае трехмерной задачи. Данный подход сможет позволить, как предсказывать дополнительные особенности, связанные с изменением шума в дальнем поле, так и давать количественные оценки величины эффекта.

1.6 Выводы по Главе 1

- Предложен возможный механизм усиления шума струи, расположенной вблизи крыла, связанный с рассеянием гидродинамических пульсаций ближнего поля струи в виде волн неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на задней кромке крыла.
- Сформулирована двумерная модельная задача, позволяющая провести качественную оценку особенностей рассматриваемого механизма.
- Получено аналитическое решение модельной задачи с помощью метода Винера-Хопфа. Показано, что рассеяние на кромке крыла

гидродинамического поля от волны неустойчивости приводит к излучению звуковых волн, амплитуда которых пропорциональна амплитуде падающей на кромку крыла волны неустойчивости, т.е. экспоненциально возрастает при уменьшении расстояния между слоем смещения и крылом.

- Для корректного теоретического или численного моделирования взаимодействия круглой струи и крыла продемонстрирована необходимость точного описания ближнего поля струи, которое даже в области линейных пульсаций состоит из смеси различных азимутальных мод с излучающими и неизлучающими компонентами.

- Показано, что для круглой струи, находящейся вблизи крыла с убранной механизацией, вполне допустимо для получения предварительных оценок усиления шума использовать предположение о независимости характеристик ближнего поля струи, связанных с крупномасштабными структурами в слое смещения, от присутствия крыла.

Глава 2. Разработка аналитической модели шума взаимодействия струи и крыла²

2.1 Постановка задачи. Допущения и предположения

Способность упрощенной двумерной модели шума взаимодействия, в которой исследуется ограниченное количество факторов, качественно предсказывать наблюдаемые особенности усиления шума струи вблизи крыла послужила основанием дальнейшего исследования предложенного механизма уже в случае трехмерной постановки задачи, что может позволить получать также и количественную оценку величины эффекта.

Таким образом, с точки зрения теоретического моделирования взаимодействия струи и крыла далее рассматривается модельная задача, в которой круглая дозвуковая струя, истекающая из сопла радиуса $r_j = D/2$, взаимодействует с жесткой пластиной, размещенной параллельно оси струи так, чтобы задняя кромка была перпендикулярна основному потоку [22,60]. В случае если размах и хорда пластины существенно превышают характерную длину рассматриваемой волны, в то время как толщина пластины существенно меньше этой длины, то пластина может быть смоделирована полуплоскостью. При этом пусть струя и полуплоскость находятся в однородном стационарном спутном течении скорости V_{cf} с числом Маха $M_{cf} = V_{cf} / c < 1$, где c – скорость звука вне струи. Расположим начало Декартовой системы координат на задней кромке полуплоскости, а ось z направим вдоль кромки так, как это изображено на рисунке 2.1. Как и в двумерной задаче газ считается идеальным (невязким и нетеплопроводным), а все возмущения считаются малыми, так что движение газа является потенциальным. Зависимость возмущений от времени выражается

² Результаты данного раздела опубликованы в работах [22,60,74,78,81].

множителем $e^{-i\omega t}$, где $\omega = kc$ - действительная и положительная угловая частота (для краткости множитель $e^{-i\omega t}$ далее будет опускаться), где k и c соответствуют обозначениям первой главы с индексами *cf*. Относительное расположение сопла и пластины, как и прежде в двумерной задаче, определяется при помощи двух геометрических параметров d и h .

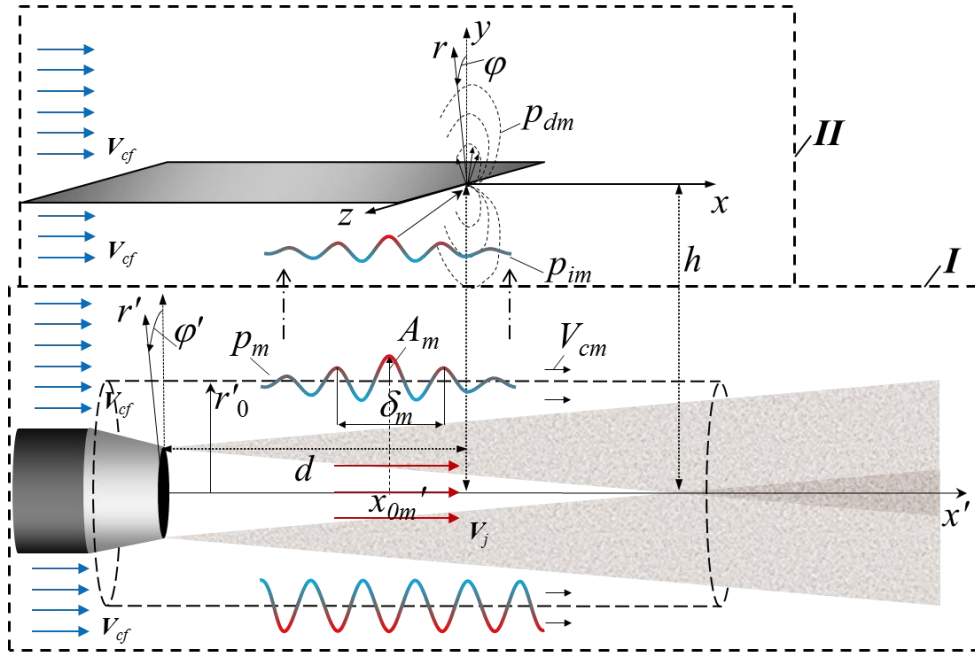


Рисунок 2.1 — Схема трехмерной модельной задачи и ее подразделение на две подзадачи.

В отличие от Главы 1, в которой исследуется, в том числе, процесс генерации волн неустойчивости, для простоты разрабатываемой модели информация о ближнем поле струи считается эмпирической данностью. Так пусть на контрольной поверхности, представляющей собой цилиндрическую соосную со струей поверхность радиуса $r'_0 \leq h$, заданы гидродинамические пульсации ближнего поля струи. Также предположим, что среднее поле струи в случаях наличия и отсутствия пластины совпадают, что выполняется при не слишком малых расстояниях между слоем смещения струи и пластины (как минимум не происходит замыкания пластины струей). Таким образом, гидродинамическое поле около струи можно определить и в случае отсутствия пластины [8,25,29]. Исходя из вышесказанного, задача о рассеянии ближнего поля струи на кромке

полуплоскости может быть разделена на задачу *I* о поиске поля пакетов волн неустойчивости и задачу *II* о рассеянии данного поля на кромке полуплоскости (схематично представлено на рисунке 2.1 в виде пунктирных обводов).

2.2 Решение первой подзадачи. Моделирование ближнего поля струи

Как было отмечено в итогах первой главы: при моделировании шума взаимодействия струи и крыла самолета ключевой является задача моделирования ближнего гидродинамического поля струи.

Пусть известные пульсации давления на контрольной поверхности, которые в рамках данной постановки можно представить в качестве суперпозиции азимутальных мод m :

$$p_i(x', r', \varphi') \Big|_{r'=r'_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m F_m(x') e^{im\varphi'}, \quad (2.1)$$

где (x', r', φ') – цилиндрическая система координат связанная со струей и с началом, помещенным в центр выходного сечения сопла.

Положим также, что задняя кромка полуплоскости расположена в линейном гидродинамическом ближнем поле струи, в области, где нелинейные вихревые возмущения (доминирующие в самом слое смешения) уже затухли, а акустические пульсации еще малы [27,28,54]. Данное предположение основано на том, что в стандартных конфигурациях современной гражданской авиации относительное расположение задней кромки крыла около турбулентной струи [18,55] как раз соответствует области доминирования линейных гидродинамических пульсаций (пакетов волн неустойчивости Кельвина-Гельмгольца).

В свою очередь доминирующие в ближнем поле струи когерентные структуры можно моделировать по-разному. Например, их можно представить в виде волновых пакетов Гауссова типа [22,60].

$$F_m(x) = e^{-\frac{(x'-x_{0m})^2}{\delta_m^2} + ik \frac{x'-x_{0m}'}{M_{cm}}}, \quad (2.2)$$

где x_{0m} , δ_m - расстояние до центра волнового пакета и его характерная ширина, соответственно, M_{cm} - число Маха, посчитанное по скорости конвекции возмущений. Отметим, что обозначенные параметры волнового пакета, вообще говоря, варьируются в зависимости от рассматриваемого азимутального числа (отсюда индекс m).

В таком случае уравнения (2.1) и (2.2) приводят к следующему граничному условию для поля пульсаций давления:

$$p_i(x', r', \varphi') \Big|_{r=r_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{-\frac{(x'-x_{0m})^2}{\delta_m^2} + ik \frac{x'-x_{0m}'}{M_{cm}} + im\varphi'}, \quad (2.3)$$

где A_m - амплитуда возмущений пакета m -ой азимутальной моды.

Вне цилиндрической поверхности возмущение давления удовлетворяет конвективному волновому уравнению:

$$\Delta p - \left(-ik + M_{cf} \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 p = 0, \quad r' > r'_0, \quad (2.4)$$

с граничным условием (2.3) и условием излучения на бесконечности.

После применения Фурье преобразования и разложения в ряд Фурье по азимутальным гармоникам:

$$p(x', r', \varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi'} \int_{-\infty}^{\infty} P_m(\alpha, r') e^{-i\alpha x'} d\alpha,$$

решение в Фурье пространстве, удовлетворяющее условию излучения может быть найден в следующем виде:

$$P_m = \hat{A}_m(\alpha) K_m(\beta r'), \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - (k + M_{cf}\alpha)^2}, \quad r' > r'_0, \quad (2.5)$$

где K_m - модифицированная функция Бесселя второго рода порядка m , квадратный корень β определяется тем, что $\beta(0) = -ik$, а разрезы для нее проведены из точки $-k / (1 + M_{cf})$ к бесконечности в нижней полуплоскости, а из

$k/(1-M_{cf})$ к бесконечности в верхней комплексной полуплоскости, что соответствует определению многозначных функций в первой главе данной работы. Подстановка выражения (2.5) в граничное условие для $r' = r'_0$ приводит к

$$\hat{A}_m(\alpha) = \frac{\tilde{p}_m}{K_m(\beta r'_0)}, \quad (2.6)$$

$$\tilde{p}_m = \sqrt{\pi} \delta_m A_m e^{im\varphi + i\alpha x_{0m} - \frac{\delta_m^2}{4M_{cm}^2}(k+M_{cm}\alpha)^2}.$$

Таким образом, решение для искомого падающего на полуплоскость поля будет иметь вид

$$p_i(x, r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \delta_m \frac{A_m}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_m(\beta r)}{K_m(\beta r_0)} e^{-i\alpha(x-x_{0m}) - \frac{\delta_m^2}{4M_{cm}^2}(k+M_{cm}\alpha)^2} d\alpha. \quad (2.7)$$

2.3 Решение второй подзадачи. Поиск поля рассеяния

Экспериментальные результаты работы [54] показали, что осесимметричная мода является одной из доминирующих в ближнем поле струи. Вместе с результатами предыдущей главы вкупе с работами [8,21] продемонстрировавшими зависимость амплитуды рассеянного поля от амплитуды рассеивающегося возмущения, это позволяет на начальном этапе рассматривать лишь взаимодействие моды $m = 0$ с задней кромкой полуплоскости:

$$p_i(x, r) = \frac{A_0 \delta_0}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0(\beta r)}{K_0(\beta r_0)} e^{-i\alpha(x-x_{00}) - \frac{\delta_0^2}{4M_{c0}^2}(k+M_{c0}\alpha)^2} d\alpha. \quad (2.8)$$

В дальнем поле данный интеграл, при использовании асимптотики функции Макдональда [61], может быть оценен с помощью метода наискорейшего спуска

$$K_0(\beta r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\beta r}}{\sqrt{\beta r}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\beta r}\right) \right), \quad kr \rightarrow \infty,$$

что приводит к

$$p_i(x, r) \approx \frac{1}{2\sqrt{-f''(\alpha_s)}} \frac{A_0 \delta_0 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\beta(\alpha_s) r}} \frac{1}{K_0(\beta(\alpha_s) r_0)} e^{f(\alpha_s)}, \quad kr \rightarrow \infty; \quad (2.9)$$

$$f(\alpha) = -\beta r - i\alpha(x - x_{00}) - \frac{\delta_0^2}{4M_{c0}^2} (k + M_{c0}\alpha)^2;$$

где α_s - седловая точка функции $f(\alpha)$, полученная из уравнения $f'(\alpha_s) = 0$. В общем случае, для конечных значений kr уравнение $f(\alpha_s) = 0$ решается численно, но если $k\delta \ll kr$ то можно показать, что $\alpha_s = -k \cos \chi$, где $\chi = \arccos((x - x_0) / r)$.

Оставшаяся часть процедуры решения заключается в поиске поля рассеяния создаваемого взаимодействием падающего поля (2.8) и полуплоскости (рисунок 2.1 II).

Воспользуемся ранее введенной Декартовой системой координат (x, y, z) , в которой центр выходного сечения сопла имеет следующие координаты $(-d, -h, 0)$. Искомое решение для пульсаций давления должно также удовлетворять конвективному волновому уравнению (2.4) со следующими кинематическими и динамическими граничными условиями на плоскости $y = 0$

$$\frac{\partial p_I}{\partial y} = -\rho \left(-i\omega + V_{cf} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \eta_{12}, \quad \frac{\partial p_{II}}{\partial y} = -\rho \left(-i\omega + V_{cf} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \eta_{12}; \quad \eta_{12} = 0, \quad x < 0; \quad (2.10)$$

$$p_{12} = p_I - p_{II}; \quad p_{12} = 0, \quad x > 0; \quad (2.11)$$

где нижние индексы I и II обозначают величины в верхнем ($y > 0$) и в нижнем ($y < 0$) полупространстве, соответственно, ρ - средняя плотность окружающего пространства (аналог ρ_{cf} в первой главе), η_{12} - нормальное смещение границы между областями I и II , p_{12} - разница давлений по обе стороны от пластины (величины аналогичные смещению свободной границы и разнице давлений около пластины в первой главе).

Поиск решения будет производиться в Фурье пространстве

$$P(\alpha, y, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z) e^{i\alpha x + i\zeta z} dx dz. \quad (2.12)$$

После применения Фурье преобразования (2.12) к конвективному волновому уравнению, можно представить решение, удовлетворяющее условию излучения, в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_I &= \hat{A}(\alpha, \zeta) e^{-\beta_\zeta y}, \quad y > 0, \\ P_{II} &= \hat{B}(\alpha, \zeta) e^{\beta_\zeta y} + P_i, \quad y < 0, \\ \beta_\zeta &= \sqrt{(1 - M_{cf}^2)(\alpha - \alpha_{1\zeta})(\alpha - \alpha_{2\zeta})}, \\ \alpha_{1\zeta, 2\zeta} &= \frac{kM_{cf} \pm \sqrt{k^2 - \zeta^2 + M_{cf}^2 \zeta^2}}{1 - M_{cf}^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где P_i - Фурье образ падающего поля (2.8), который в Декартовой системе координат, с началом на задней кромке (рисунок 2.1), для доминирующей нулевой азимутальной моды имеет следующий вид

$$P_i = \frac{A_0 \pi \delta_0 \sqrt{\pi}}{\beta_\zeta K_0(\beta r_0)} e^{-\beta_\zeta(y+h) + i\alpha(x_0-d) - \frac{\delta_0^2}{4M_{c0}^2}(k+M_{c0}\alpha)^2}, \quad y > -h. \quad (2.14)$$

Для вывода выражения (14) использовалось следующее соотношение из [62]

$$\frac{1}{2} \pi i \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\beta \sqrt{-y^2 - z^2}) e^{i\zeta z} dz = \pi \frac{e^{-y\sqrt{\beta^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{\beta^2 + \zeta^2}} = \pi \frac{e^{-\beta_\zeta y}}{\beta_\zeta}, \quad y > 0.$$

Положение разрывов для функции β_ζ в комплексной α -плоскости зависит от параметра ζ , который считается действительным. Характерное положение разрывов для различных значений ζ и $0 < \text{Im}k \ll 1$ изображено на рисунке 2.2.

Применяя преобразование (2.12) к основным уравнениям и граничным условиям можно получить:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\alpha, \zeta) &= -\frac{\rho \omega^2 w^2 h^+}{\beta_\zeta}, \quad \hat{B}(\alpha, \zeta) = \frac{\rho \omega^2 w^2 h^+}{\beta_\zeta} - \frac{P'_i(\alpha, y, \zeta)|_{y=0}}{\beta_\zeta}, \quad w = \left(1 + \frac{\alpha}{k} M_{cf}\right), \\ 2 \frac{w^2}{\beta_\zeta} h^+ + \frac{1}{\rho \omega^2} \left(P_i(\alpha, 0, \zeta) - \frac{P'_i(\alpha, y, \zeta)|_{y=0}}{\beta_\zeta} \right) &= -\frac{p^-}{\rho \omega^2}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где штрихом отмечена производная по y , h^+ и p^- - Фурье образы соответственно

смещения η_{12} и разницы давлений p_{12} , верхние индексы “+” и “-” как и в первой главе акцентируют внимание на том, что отмеченные ими функции регулярны в верхней R_+ или нижней R_- полуплоскостях комплексной α -плоскости, соответственно.

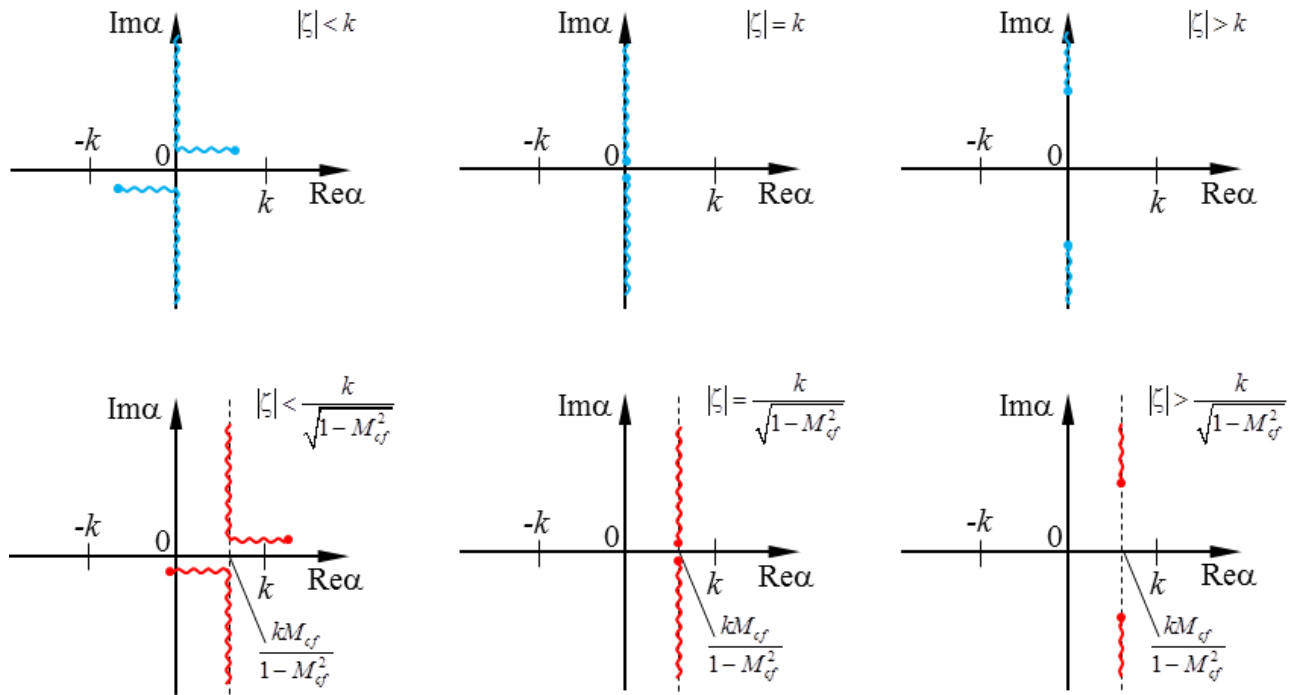


Рисунок 2.2 — Характерное положение разрывов для различных значений ζ при $0 < \text{Im}k \ll 1$. Верхний ряд представлен для случая отсутствия спутного потока ($M_{cf} = 0$), нижний для случая $M_{cf} > 0$.

Последнее уравнение из блока (2.15) может быть разрешено с помощью метода Винера-Хопфа [46]. Так как из (2.14) следует, что $P'_i(\alpha, y, \zeta)|_{y=0} = -\beta_\zeta P_i(\alpha, 0, \zeta)$, то уравнение Винера-Хопфа может быть переписано в следующем простом виде

$$h^+ + 2LP_i(\alpha, 0, \zeta) = -Lp^-, \quad (2.16)$$

$$L = \frac{\beta_\zeta}{2w^2\rho\omega^2}.$$

Следуя стандартной процедуре, необходимо произвести факторизацию функции L , что не вызывает особых трудностей в рамках настоящей задачи:

$$\begin{aligned}
L &= L^+ L^-, \\
L^+ &= \frac{\beta_\zeta^+}{2w^2 \rho \omega^2}, \beta_\zeta^+ = \sqrt{(1 - M_{cf}^2)(\alpha - \alpha_{2\zeta})}, \\
L^- &= \beta_\zeta^-, \beta_\zeta^- = \sqrt{\alpha - \alpha_{1\zeta}}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Затем, подстановка выражения (2.17) в уравнение (2.16) приводит к:

$$\begin{aligned}
\frac{h^+}{L^+} + E &= -L^- p^-, \\
E &= 2L^- P_i(\alpha, 0, \zeta).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Конечным шагом является представление функции E в виде

$$E = E^+ + E^-, \tag{2.19}$$

где члены выражения (2.19) представляются в виде Коши интегралов [46]

$$\begin{aligned}
E^+ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{E(\xi, \zeta)}{\xi - \alpha} d\xi, \\
E^- &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{E(\xi, \zeta)}{\xi - \alpha} d\xi,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

где контуры C_+ и C_- лежат в полосе $R_+ \cap R_-$ так, что контур C_+ лежит ближе к нижней границе данной полосы, а C_- – ближе к верхней границе полосы. Выражение (2.18), в этом случае, может быть переписано как

$$\frac{h^+}{L^+} + E^+ = -L^- p^- - E^-, \tag{2.21}$$

где теперь уравнение (2.21) определяет аналитическую во всей α -плоскости функцию, которая тождественна равна нулю в соответствии с обобщенной теоремой Лиувилля, принимая во внимание поведение функций L^+, L^-, E^+, E^- при $\alpha \rightarrow \infty$, и применяя условие Чаплыгина-Жуковского-Кутта на задней кромке (более подробно данная процедура описана в 1 главе).

Затем, итоговое выражение для пульсаций давления над и под пластиной может быть записано как

$$\begin{aligned}
 p_I &= \frac{\rho\omega^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \frac{L^+ E^+}{\beta_\zeta} \exp(-\beta_\zeta y - i\alpha x - i\zeta z) d\alpha d\zeta, & y > 0, \\
 p_{II} &= -\frac{\rho\omega^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \frac{L^+ E^+}{\beta_\zeta} \exp(\beta_\zeta y - i\alpha x - i\zeta z) d\alpha d\zeta + p_r + p_i, & y < 0,
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

где p_I представляет собой комбинацию падающего поля, прошедшего из области II в область I , а также поле рассеяния на кромке начального возмущения, а p_{II} вместе с p_r представляет собой поле рассеяния на кромке и отраженное от нижней поверхности жесткой полуплоскости начальное возмущение.

2.4 Анализ полученного решения

Для начала анализ решения (2.22) будет произведен в сферической системе координат (рисунок 2.3):

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \psi, \\ y = R \sin \theta, \\ z = R \cos \theta \sin \psi. \end{cases}$$

В таком случае интегральные члены в выражении (2.22) могут быть оценены в дальнем поле $kR = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg 1$ с помощью метода перевала для кратных интегралов [48].

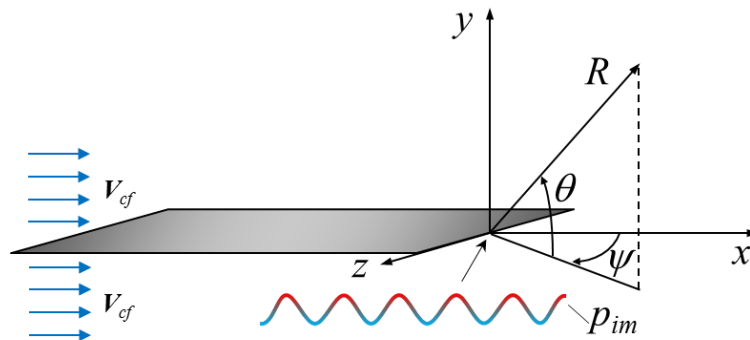


Рисунок 2.3 — Сферическая система координат, связанная с кромкой пластины.

Координаты седловой точки (α_s, ζ_s) определяются системой уравнений

$$\frac{\partial f(\alpha_s, \zeta_s)}{\partial \alpha} = \frac{\partial f(\alpha_s, \zeta_s)}{\partial \zeta} = 0, \text{ где } f(\alpha, \zeta) = -\beta_\zeta \frac{|y|}{R} - i\alpha \frac{x}{R} - i\zeta \frac{z}{R} = 0. \text{ Таким образом}$$

$$\begin{aligned} \alpha_s &= -\frac{k}{(1-M_{cf}^2)} \frac{\cos\theta \cos\psi}{\sqrt{(1-M_{cf}^2)(1-\cos^2\theta \cos^2\psi)}} + \frac{M_{cf}k}{1-M_{cf}^2}, \\ \zeta_s &= -k \frac{\cos\theta \sin\psi}{\sqrt{(1-M_{cf}^2)(1-\cos^2\theta \cos^2\psi)}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Если как и в первой главе уделить внимание лишь полю рассеяния, то приближение в дальнем поле приводит к тому, что выражения для возмущений давления в областях *I* (над пластиной) и *II* (под пластиной) могут быть представлены как

$$\begin{aligned} p_{Id} &\approx -\frac{\rho\omega^2}{2\pi R} w_s^2 \frac{(L^+ E^-)_s}{\beta_{\zeta_s}} \frac{e^{-i\pi/2}}{|\det \mathbf{Q}|_s^{1/2}} e^{-\beta_{\zeta_s} y - i\alpha_s x - i\zeta_s z}, \\ p_{IId} &\approx -\frac{\rho\omega^2}{2\pi R} w_s^2 \frac{(L^+ E^-)_s}{\beta_{\zeta_s}} \frac{e^{i\pi/2}}{|\det \mathbf{Q}|_s^{1/2}} e^{\beta_{\zeta_s} y - i\alpha_s x - i\zeta_s z}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где нижний индекс *d* означает, что из всего поля был оставлен лишь член, связанный с дифракцией начального возмущения на кромке, нижний индекс *s* обозначает то, что соответствующая функция вычисляется в седловой точке, а матрица \mathbf{Q} определяется как

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \zeta} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \end{bmatrix}.$$

При этом в определении функции E^+ (2.20) содержится также часть, связанная с прошедшим полем начального возмущения. Для того чтобы исключить из рассмотрения данную часть необходимо вычесть вклад вычета в точке α_s :

$$E^+(\alpha_s, \zeta_s) \rightarrow E^+(\alpha_s, \zeta_s) - E(\alpha_s, \zeta_s) = -E^-(\alpha_s, \zeta_s)$$

Далее после ряда математических преобразований выражение (2.24) может быть записано в более удобной форме:

$$\begin{aligned} P_{Id} &\approx -\frac{\rho\omega^2}{2\pi R} w_s^2 \frac{(L^+ E^-)_s}{\beta_{\zeta_s}} \frac{k \sin \theta}{1 - M_{cf}^2 (1 - C_{\theta\psi}^2)} e^{-i\pi/2} e^{ikRS_s}, \\ P_{Ид} &\approx \frac{\rho\omega^2}{2\pi R} w_s^2 \frac{(L^+ E^-)_s}{\beta_{\zeta_s}} \frac{k \sin \theta}{1 - M_{cf}^2 (1 - C_{\theta\psi}^2)} e^{i\pi/2} e^{ikRS_s}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$S_s = \frac{1}{\sqrt{(1 - M_{cf}^2 (1 - C_{\theta\psi}^2))}} \left(1 + \frac{M_{cf} C_{\theta\psi}}{1 - M_{cf}^2} \left(M_{cf} C_{\theta\psi} - \sqrt{(1 - M_{cf}^2 (1 - C_{\theta\psi}^2))} \right) \right),$$

$$C_{\theta\psi} = \cos \theta \cos \psi.$$

Таким образом (2.25) представляет собой во всем дальнем поле решение поставленной задачи о рассеянии заданного ближнего поля осесимметричной моды $m = 0$ (2.3) с произвольными параметрами.

Если же волновой пакет достаточно широк, так что $k\delta \gg 1$, то выражение E^- (2.20), входящее в итоговое решение можно асимптотически вычислить, как и ранее, методом перевала:

$$E^-(\alpha_s, \zeta_s) \approx \frac{i}{\delta_0 \sqrt{\pi}} \frac{E(\xi_s, \zeta_s)}{\xi_s - \alpha_s}$$

$$\xi_s = -\frac{k}{M_{c0}} + i \frac{2(x_{00} - d)}{\delta_0^2}.$$

Подставляя результат вычисления интеграла в (2.25) и используя определения (2.14, 2.17, 2.18) можно получить следующее:

$$\begin{aligned}
P_{Id} &\approx -\frac{A_0}{2R} \frac{e^{ikrS_s - i\frac{k}{M_{c0}}(x_{00}-d)}}{\beta_{\zeta}^-(\alpha_s, \zeta_s)\beta_{\zeta}^+(\xi_s, \zeta_s)} \frac{e^{-\beta_{\zeta}(\xi_s, \zeta_s)h - \frac{(x_{00}-d)^2}{\delta_0^2}}}{K_0(\beta(\xi_s)r_0)} \frac{1}{\xi_s - \alpha_s} \frac{k \sin \theta}{1 - M_{cf}^2(1 - C_{\theta\psi}^2)}, \\
P_{IId} &\approx -\frac{A_0}{2R} \frac{e^{ikrS_s - i\frac{k}{M_{c0}}(x_{00}-d)}}{\beta_{\zeta}^-(\alpha_s, \zeta_s)\beta_{\zeta}^+(\xi_s, \zeta_s)} \frac{e^{-\beta_{\zeta}(\xi_s, \zeta_s)h - \frac{(x_{00}-d)^2}{\delta_0^2}}}{K_0(\beta(\xi_s)r_0)} \frac{1}{\xi_s - \alpha_s} \frac{k \sin \theta}{1 - M_{cf}^2(1 - C_{\theta\psi}^2)}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Выражение (2.26) все еще сложно анализировать, но в ряде специальных случаев можно продолжить его упрощение. Например, при рассмотрении результатов на перпендикулярной к пластине плоскости, проходящей через начало координат так, что $\psi = 0$ (так называемая полярная направленность, рисунок 2.3), а также в случае отсутствия спутного потока ($M_{cf} = 0$) можно получить:

$$\begin{aligned}
P_{Id} &\approx \frac{\tilde{A}_0 \sin(\theta/2)}{\xi_s/k + \cos \theta}; P_{IId} \approx \frac{\tilde{A}_0 \sin(\theta/2)}{\xi_s/k + \cos \theta}; \\
\tilde{A}_0 &= i \frac{A_0}{\sqrt{2kR}} e^{-\frac{(x_{00}-d)^2}{\delta_0^2}} \frac{e^{-\beta_{\zeta}(\xi_s, 0)h}}{\beta_{\zeta}^+(\xi_s, 0)K_0(\beta(\xi_s)r_0)} e^{ikR - i\frac{k}{M_{c0}}(x_{00}-d)}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Из полученного выражения можно видеть, что направленность поля рассеяния имеет дипольный характер (поле над и под пластиной находятся в противофазе), кроме того форма направленности имеет вид кардиоиды $\sin(\theta/2)$ с множителем, отвечающим за конвективное растяжение $(\xi_s/k + \cos \theta)^{-1}$, что, в случае обнуления второго члена в определении ξ_s , совпадает, с полученным результатом в работе [25]. Что касается зависимости решения от геометрии задачи, то полученное выражение демонстрирует экспоненциальную $e^{-\beta_{\zeta}(\xi_s, \zeta_s)h}$ зависимость от параметра h , отвечающего за расстояние между осью струи и пластиной, что соотносится с результатом, полученным в первой главе, и связано с экспоненциальным затуханием ближнего поля струи в радиальном направлении. Если же граничное условие (2.1) задается на цилиндрической поверхности

радиуса, совпадающего с расстоянием от оси струи до полуплоскости ($r_0 = h$), то используя представление функции Макдональда в виде ряда можно получить:

$$\tilde{A}_0 = i \frac{A_0 \sqrt{\beta(\xi_s) h}}{\sqrt{\pi k R}} e^{-\frac{(x_{00}-d)^2}{\delta_0^2}} \frac{1}{\beta_{\zeta}^+(\xi_s, 0) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{((2l-1)!!)^2}{l! (-8\beta(\xi_s) h)^l}} e^{ikR - i \frac{k}{M_{c0}} (x_{00}-d)}. \quad (2.28)$$

Таким образом, экспоненциальный множитель $e^{-\beta_{\zeta}(\xi_s, \zeta_s) h}$ в числителе сокращается с множителем из определения функции Макдональда в знаменателе, так как задание граничного условия на уровне полуплоскости влечет за собой учет затухания начального возмущения. Но при этом зависимость от геометрического параметра h не пропадает, а остается в основном в виде множителя \sqrt{h} , что демонстрирует, в случае фиксирования амплитуды A_0 , тем более эффективное рассеяние рассматриваемого возмущения, чем дальше располагается полуплоскость от оси струи.

Кроме того линейный подход к моделированию эффекта усиления шума струи вблизи крыла приводит к линейной зависимости амплитуды шума взаимодействия от амплитуды рассеиваемого поля, что приводит к тому же выводу, что был представлен в главе 1, об усилении шума взаимодействия при внедрении кромки пластины в область доминирования волн неустойчивости.

Рассеяние азимутальных мод старшего порядка также было рассмотрено в рамках поставленной задачи. Так в случае учета рассеяния первых пяти мод итоговое решение (2.26) может быть записано уже в следующем виде:

$$p_{Id} \approx -\frac{1}{R} \frac{k \sin \theta}{1 - M_{cf}^2 (1 - C_{\theta\psi}^2)} \frac{e^{ikRS_s}}{\beta_{\zeta-}(\alpha_s, \zeta_s)} \sum_{m=-2}^2 \frac{e^{-\beta_{\zeta}(\xi_s, \zeta_s) h}}{\xi_s - \alpha_s} \frac{\tilde{A}_m I_m(\xi_s, \zeta_s)}{\beta_{\zeta+}(\xi_s, \zeta_s)},$$

$$p_{IId} \approx -\frac{1}{R} \frac{k \sin \theta}{1 - M_{cf}^2 (1 - C_{\theta\psi}^2)} \frac{e^{ikRS_s}}{\beta_{\zeta-}(\alpha_s, \zeta_s)} \sum_{m=-2}^2 \frac{e^{-\beta_{\zeta}(\xi_s, \zeta_s) h}}{\xi_s - \alpha_s} \frac{\tilde{A}_m I_m(\xi_s, \zeta_s)}{\beta_{\zeta+}(\xi_s, \zeta_s)}, \quad (2.29)$$

$$\tilde{A}_m = \frac{1}{2} \frac{A_m}{K_m(\beta_{cf}(\xi_s) r_0)} e^{-\frac{(x_{0m}-d)^2}{\delta_m^2} - i \frac{k}{M_m} (x_{0m}-l)},$$

$$I_0 = 1, I_{\pm 1} = \frac{\beta_{\zeta}}{\beta_{cf}} \left(1 \mp \frac{\zeta}{\beta_{\zeta}} \right), I_{\pm 2} = \frac{\beta_{\zeta}}{\beta_{cf}^2} \left(\frac{\beta_{\zeta}^2 + \zeta^2}{\beta_{\zeta}} \mp 2\zeta \right),$$

которое, в свою очередь, может быть переписано для упрощенного случая $\psi = 0$, $M_{cf} = 0$ как

$$\begin{aligned}
 P_{Id} &\approx \frac{\sin(\theta/2)}{\xi_s/k + \cos\theta} \sum_{m=-2}^2 \tilde{A}_m; P_{IId} \approx \frac{\sin(\theta/2)}{\xi_s/k + \cos\theta} \sum_{m=-2}^2 \tilde{A}_m; \\
 \tilde{A}_m &= i \frac{A_m}{\sqrt{2kR}} e^{-\frac{(x_{0m}-d)^2}{\delta_m^2}} \frac{e^{-\beta_\zeta(\xi_s, 0)h}}{\beta_\zeta^+(\xi_s, 0) K_m(\beta(\xi_s)r_0)} e^{ikR - i\frac{k}{M_{cm}}(x_{0m}-d)}.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Таким образом, в случае статики ($M_{cf} = 0$) и полярной направленности ($\psi = 0$) передаточная функция между ближним полем струи и дальнем полем шума взаимодействия для различных азимутальных мод m оказывается принципиально схожей. Однако можно отметить в знаменателе функцию Макдональда K_m различного порядка, что свидетельствует о том, что при прочих равных условиях, вклад в шум взаимодействия рассеяния старших азимутальных мод ближнего поля становится меньшим с ростом модального числа. Тем не менее, данная разница становится менее заметной при увеличении аргумента упомянутой функции Бесселя.

Необходимо отметить, что в рамках данной задачи можно было воспользоваться подходом Амиета [63] (что было сделано в работе [26]) и рассмотреть начальное возмущение (2.1) в виде суперпозиции бесконечно широких волновых пакетов или бегущих волн с однородной огибающей:

$$p_i(x', r', \varphi') \Big|_{r'=r'_0} = \sum_{m=-2}^2 \hat{A}_m e^{i\omega \frac{x'}{V_{cm}}} e^{im\varphi'}, \tag{2.31}$$

для которого в случае каждой азимутальной моды необходимо подобрать лишь два параметра в виде амплитуды и конвективной скорости, измеренные в области линейных гидродинамических возмущений в точке под кромкой пластины. Кроме меньшего количества необходимой информации для моделирования возмущения в данном виде отметим также простоту аналитического решения. Так, вычисление интегралов типа Коши в (2.20) тривиально в виду того, что функция P_i содержит

дельта функцию Дирака $\delta\left(\alpha + \frac{k}{M_{cm}}\right)$. Таким образом, результат (2.30) для

данного случая можно записать в следующем виде:

$$P_{Id} \approx -\frac{\sin(\theta/2)}{1-M_{cm}\cos\theta} \sum_{m=-2}^2 \tilde{A}_m; P_{IId} \approx -\frac{\sin(\theta/2)}{1-M_{cm}\cos\theta} \sum_{m=-2}^2 \tilde{A}_m; \quad (2.32)$$

$$\tilde{A}_m = i \frac{\hat{A}_m}{\sqrt{2kR}} \frac{M_{cm}^{3/2} e^{\frac{k}{M_{cm}} \sqrt{(1-M_{cm}^2)}h}}{\sqrt{(1-M_{cm})} K_m \left(\frac{k}{M_{cm}} \sqrt{(1-M_{cm}^2)} r_0 \right)} e^{ikR + i \frac{k}{M_{cm}} d}.$$

Анализируя выражения (2.30) и (2.32) можно сказать, что они приведут к одному результату в том случае, если, во-первых, при подстановке в выражение (2.30) будет учтен лишь первый член ξ_s (что подразумевает либо расположение максимума пакета вблизи рассеивающей кромки, либо существенную ширину волнового пакета). Во-вторых, в выражении (2.30) по сравнению с (2.32) оказывается дополнительный множитель, который диктует для полного совпадения решений необходимость в выполнении следующего соотношения $\hat{A}_m = A_m e^{\frac{(x_{0m}-d)^2}{\delta_m^2}}$. То есть амплитуда однородной бегущей волны должна совпадать с амплитудой волнового пакета под рассеивающей кромкой полуплоскости.

Однако стоит отметить, что решение, полученное в рамках данной работы для пакетов конечной ширины, хоть и имеет более сложный для анализа вид, но позволяет проследить изменения в поле рассеяния для различных ширины и положения рассеиваемых волновых пакетов. Так на рисунке 2.4а показана постепенная эволюция полярной направленности шума рассеяния при расширении пакета с максимумом под рассеиваемой кромкой. Можно видеть, что результат достаточно быстро сходится к результату для бесконечно широкого пакета (фиолетовая кривая перекрывает черную кривую). При этом сначала узкость пакета приводит к существенному меньшему шуму рассеяния, в то время как увеличение ширины пакета сначала приводит к большему шуму рассеяния с постепенным снижением уровней шума до результатов в приближении

бесконечно широких волновых пакетов. То есть отличие ширины пакета от бесконечно широкого приближения может привести как к существенному перепредсказанию шума рассеяния, так и к его умеренному недопредсказанию. В свою очередь умеренное различие результатов для пакета конечной и бесконечной ширины (например для $1.5D$ и $5D$) может претерпеть дальнейшее изменение если максимум пакета будет смещен относительно продольного положения рассеиваемой кромки. При этом это будет происходить даже в случае фиксирования амплитуды пакета под кромкой, и будет выражаться в еще большем различии от случая бесконечно широкого пакета в особенности для передней полусферы, что продемонстрировано на рисунке 2.4б.

Далее для анализа азимутального состава полученного решения полезной может оказаться запись итогового решения (2.29) в цилиндрической системе координат (x, r, φ) (рисунок 2.1), которая для условия статики и при рассмотрении волновых пакетов с однородной огибающей выглядит следующим образом:

$$p_{dm}(x, r, \varphi) \approx \frac{e^{-kh \sqrt{\frac{1}{M_{cm}^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{1+x_r^2} - 1}}}{kr \left(\sqrt{1+x_r^2} - M_{cm} x_r \right)} \cdot \frac{\tilde{A}_m I_m(x, r, \varphi) M_{cm}^{3/2} \cos \varphi}{\sqrt{\left(x_r + \sqrt{\cos^2 \varphi + x_r^2} \right) \sqrt{\left(\sqrt{1+x_r^2} - M_{cm} \sqrt{\cos^2 \varphi + x_r^2} \right)}}, \quad (2.33)$$

$$I_0(x, r, \varphi) = 1, I_{\pm 1}(x, r, \varphi) = \left(\sqrt{1+T^2} \pm T \right), I_{\pm 2}(x, r, \varphi) = \left((1+2T^2) \pm 2T \sqrt{1+T^2} \right),$$

$$\tilde{A}_m = \frac{0.5 A_m}{K_m \left(\frac{k}{M_{cm}} \sqrt{1-M_{cm}^2} r_0 \right)}, T(x, r, \varphi) = \frac{M_{cm} \sin \varphi}{\sqrt{(1+x_r^2)(1-M_{cm}^2)}}, x_r = x/r,$$

где $p_{dm}(x, r, \varphi)$ - вклад рассеяния на кромке полуплоскости вращающейся моды m ближнего поля струи в дальнее акустическое поле.

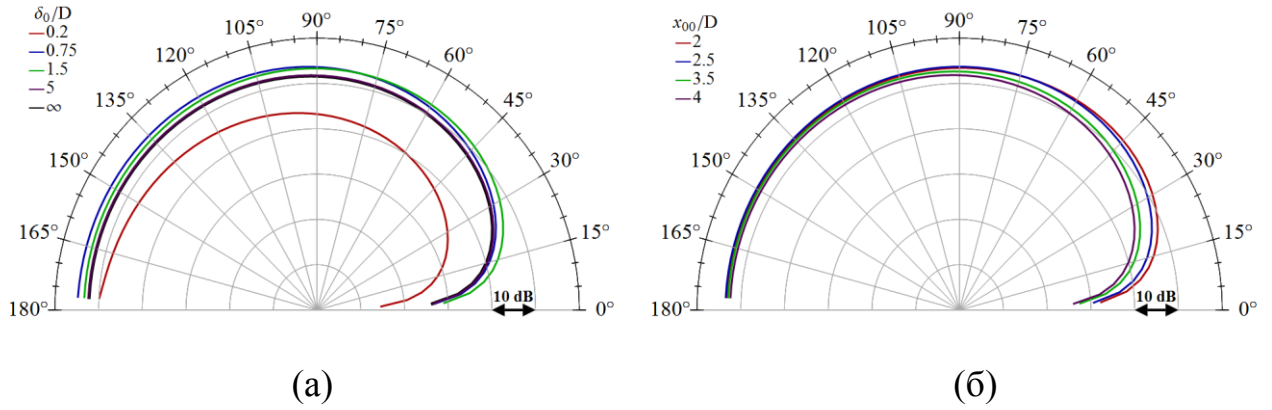


Рисунок 2.4 — Зависимость полярных ($\psi = 0$) направленностей в дальней зоне ($R = 20D$) поля рассеяния осесимметричной моды ($m = 0$) для геометрических параметров $d = 3D$, $h = D$ и для струи с числом Маха $M_j = 0.53$ в условиях статики $M_{cf} = 0$. Граничные условия считались известными для $r'_0 = D$. Параметры волнового пакета: $St = 0.3$, $M_{c0} = 0.6M_j$. а) Вариация ширины волнового пакета $\delta_0/D = 0.2 \dots 5$, для $x_{00} = 3D$; б) вариация положения максимума волнового пакета $x_0/D = 2 \dots 4$ с фиксированием амплитуды пакета при $x_0/D = a$, для $\delta_0 = 1.5D$.

Выражение (2.33) выглядит достаточно громоздким, однако из него можно сделать некоторые дополнительные выводы, если рассматривать ближнее поле не в виде ограниченной суммы некоррелированных вращающихся мод, а в виде суперпозиции косинус- и синус-мод:

$$p_i(x', r', \varphi', t) \approx A_0(x', r', t) + \sum_{m=1}^2 (A_m(x', r', t) \cos m\varphi' + B_m(x', r', t) \sin m\varphi'),$$

что в свою очередь подразумевает суперпозицию рассеяний коррелированных вращающихся мод одного порядка в виде следующего множителя в числителе $0.5(I_m(x, r, \varphi) \pm I_{-m}(x, r, \varphi))$, где сумма описывает рассеяние косинус-мод, а разность синус-мод. Если же еще раз обратиться к выражению (2.33) то можно отметить, что в основном множителе, описывающие азимутальное поведение поля рассеяния, содержат квадраты тригонометрических функций, что означает, что поле рассеяния связанное лишь с этими членами будет симметричным относительно полуплоскости моделирующей крыло и плоскости ей

перпендикулярной. Таким образом, модальный состав поля рассеяния будет определяться множителями $0.5(I_m(x, r, \varphi) \pm I_{-m}(x, r, \varphi)) \cos \varphi$, которые в обоих случаях суммы и разности будут определять поле антисимметричное относительно плоскости, проходящей через жесткую полуплоскость, однако в случае суммы поле рассеяния будет симметричным относительно плоскости перпендикулярной плоскости «крыла», а в случае разности асимметричной относительно такой плоскости. Иными словами описанное поле рассеяния косинус-мод ближнего поля в дальнем поле будет состоять из нечетных косинус-мод, а описанное поле рассеяния синус-мод ближнего поля будет состоять из четных синус-мод.

Качественное объяснение эффекта рассеяния мод ближнего поля струи в различные азимутальные моды дальнего поля представлено на рисунке 2.5. Серым цветом обозначены распределения амплитуды пульсаций на кромке пластины, вызванные различными модами ближнего поля. Итоговая направленность рассеянного поля над и под пластиной обозначена пунктирной линией разного цвета, что сигнализирует, что поля находятся в противофазе. Можно видеть, что возмущения на кромке пластины вызванные осесимметричной и первой косинус-модой приводят к такому распределению пульсаций, что поле в дальней зоне определяется в главном приближении дипольным членом ($\cos \varphi$), с некоторыми поправками в виде косинус-мод старшего порядка. В тоже время рассеяние первой синус-моды приводит к тому, что дальнее поле в главном приближении определяется второй синус-модой (квадрупольная направленность). Связано это с тем, что распределение пульсаций на кромке пластины в этом случае имеет не один, а два максимума, которые находятся друг к другу в противофазе.

Здесь стоит обратить внимание на то, что ближнее поле струи можно было бы рассматривать не в виде суперпозиции коррелированных вращающихся мод формирующих стоячие косинус- и синус-моды, но в виде некоррелированных вращающихся мод, а итоговое выражение записывать именно для рассеяния таких вращающихся мод. Однако путем аккуратного выписывания соответствующих результатов можно показать, что это два эквивалентных способа рассмотрения

задачи, и они оба приводят к одинаковым результатам, как это и следовало ожидать.

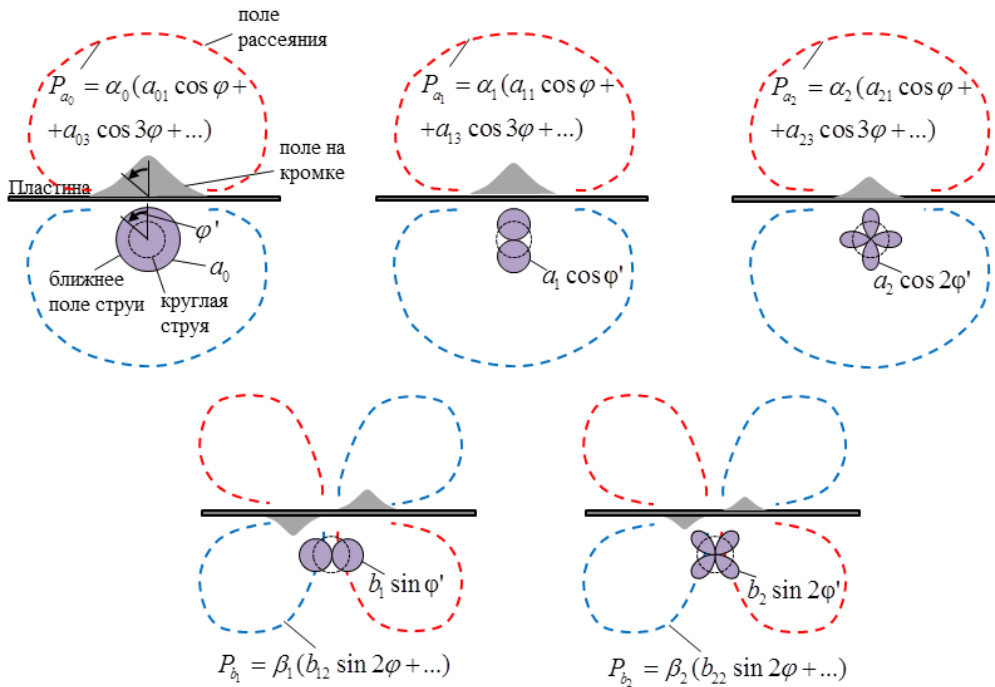


Рисунок 2.5 — Качественное представление рассеяния основных азимутальных мод ближнего поля струи в различные наборы азимутальных мод дальнего поля.

Также стоит обратить внимание на то, что раз рассеяние одной моды приводит к такому полю рассеяния, которое может быть разложено по специальной комбинации азимутальных мод, то в случае наличия пластины вблизи струи можно ожидать наличие существенной когерентности, например между первой и третьей косинус-модами дальнего поля. В тоже время в случае изолированной струи наблюдается другая картина, и когерентность между различными азимутальными модами в одном сечении отсутствует [64].

Далее если при выводе выражения (2.33) вместо упрощающего случая статики ($M_{cf} = 0$) рассматривать случай цилиндрической направленности, например под полуплоскостью $\varphi = \pi$, то можно получить следующее выражение позволяющее оценить влияние спутного потока на шум взаимодействия:

$$p_{dm}(x, R, \pi, \omega) = \frac{\tilde{A}_m M_{cm}^{3/2} \exp\left(-\frac{kh}{M_{cm}} \sqrt{1 - (M_{cm} - M_{cf})^2}\right)}{kr \left((1 + M_{cf}(M_{cm} - M_{cf})) \sqrt{1 + x_r^2} - x_r \cdot M_{cm} \right) \beta}, \quad (2.34)$$

где $\tilde{A}_m = A_m / K_m \left(kr_0 \sqrt{1 - (M_{cm} - M_{cf})^2} / M_{cm} \right)$, $x_r = x / r$,

$\beta = \sqrt{1 + x_r^2} + x_r \sqrt{1 + x_r^2} \sqrt{1 - M_{cm}(1 - M_{cf})}$, а также считалось, что $M_{cf}^2 \ll 1$.

Последнее предположение достаточно справедливо для скоростей полета современных гражданских самолетов.

Таким образом, из приведенного выражения следует, что для близких значений M_{cf} и M_{cm} зависимость поля рассеяния различных азимутальных мод ближнего поля на задней кромке полуплоскости от наличия спутного потока будет определяться в основном не изменениями в передаточной функции, а изменением параметров A_m и M_{cm} , определяющих ближнее поле. То есть при наличии спутного потока не очень большой скорости процесс рассеяния не слишком изменяется в отличие от тех изменений, что можно ожидать в самих рассеивающихся структурах ближнего поля при наличии спутного потока (например, из-за ослабленная неустойчивости Кельвина-Гельмгольца).

Здесь стоит обратить внимание на то, что ближнее поле струи можно было бы рассматривать не в виде суперпозиции коррелированных вращающихся мод формирующих стоячие косинус- и синус-моды, но в виде некоррелированных вращающихся мод, а итоговое выражение записывать именно для рассеяния таких вращающихся мод. Однако путем аккуратного выписывания соответствующих результатов можно показать, что это два эквивалентных способа рассмотрения задачи, и они оба приводят к одинаковым результатам, как это и следовало ожидать.

2.5 Верификация полученного решения

Для верификации полученного решения в условиях статики используется альтернативный подход к решению задачи о рассеянии когерентных структур ближнего поля струи на задней кромке полуплоскости. В рамках подхода происходит сшивка известной функции Грина [8,35] для полуплоскости с распределенными на оси точечными источниками в однородном поле продольной скорости с числом Маха M_{cf} , моделирующими поле когерентных структур. Для моделирования осесимметричной моды ближнего поля точечные источники рассматриваются в виде монополей с неизвестной плотностью распределения $f(x')$:

$$\nabla_{3D}^2 p + k^2 p = \frac{\delta(r')}{2\pi r'} f(x'). \quad (2.35)$$

где ∇_{3D}^2 - конвективный оператор Лапласа в трехмерном пространстве.

После Фурье преобразования по продольной координате x' можно получить:

$$\nabla_{2D}^2 P - \beta^2 P = \frac{\delta(r')}{2\pi r'} F(\alpha), \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - (k + M_{cf}\alpha)^2}, \quad (2.36)$$

где $P, F(\alpha)$ - образы соответственно пульсаций давления и плотности распределения источников, ∇_{2D}^2 - двумерный оператор Лапласа. При этом (2.36) представляет собой двумерное уравнение Гельмгольца с источником амплитуды $F(\alpha)$ в правой части, и в котором k^2 заменено на $-\beta^2$. Зная функцию Грина для двумерного уравнения Гельмгольца несложно получить решение в виде уходящих волн, удовлетворяющее уравнению (2.36)

$$P(\alpha, r) = -\frac{K_0(\beta r')}{2\pi} F(\alpha); \quad (2.37)$$

Решение же для (2.35) записывает как обратное преобразование Фурье от (2.37)

$$p(x, r') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha) K_0(\beta r')}{2\pi} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.38)$$

Если приравнять результаты (2.38) и (2.8), то можно получить условие на плотность распределения источников, приводящее к одинаковому решению волнового уравнения с распределенными по оси источниками (2.35) и задачи с граничными условиями (2.3)-(2.4):

$$f(x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = -A_0 \delta_0 \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x - \alpha x_{00}) - \frac{\delta_0^2}{4M_{c0}^2} (k + M_{c0}\alpha)^2}}{K_0(\beta r_0)} d\alpha \quad (2.39)$$

По примеру выражения (2.9) интеграл в определении функции точечных источников можно асимптотически оценить при $k\delta \gg 1$

$$f(x') = -2\pi A_0 \frac{e^{-\frac{(x_{00}-x)^2}{\delta_0^2} + i\frac{k}{M_{c0}}(x-x_{00})}}{K_0(\beta(\alpha_s)r_0)}, \quad \alpha_s = \frac{2i(x_{00}-x)}{\delta_0^2} - \frac{k}{M_{c0}}; \quad (2.40)$$

Таким образом, была получена функция распределения коррелированных точечных источников на оси струи, суммарное поле которых совпадает с полем задачи с граничным условием (2.3)-(2.4).

Далее, чтобы верифицировать решение, полученное ранее методом Винера-Хопфа, проводится сравнение с решением, состоящим в свертке с функцией Грина для уравнения (2.35) и граничным условием в виде жесткой полуплоскости, с распределенными по формуле (2.39) на оси струи монополями источниками. При этом для получения количественного результата непрерывное распределение источников заменяется дискретным равномерным и симметричным по отношению к максимуму волнового пакета x_0 распределением 100 точечных монополей в области шириной $12\delta_0$.

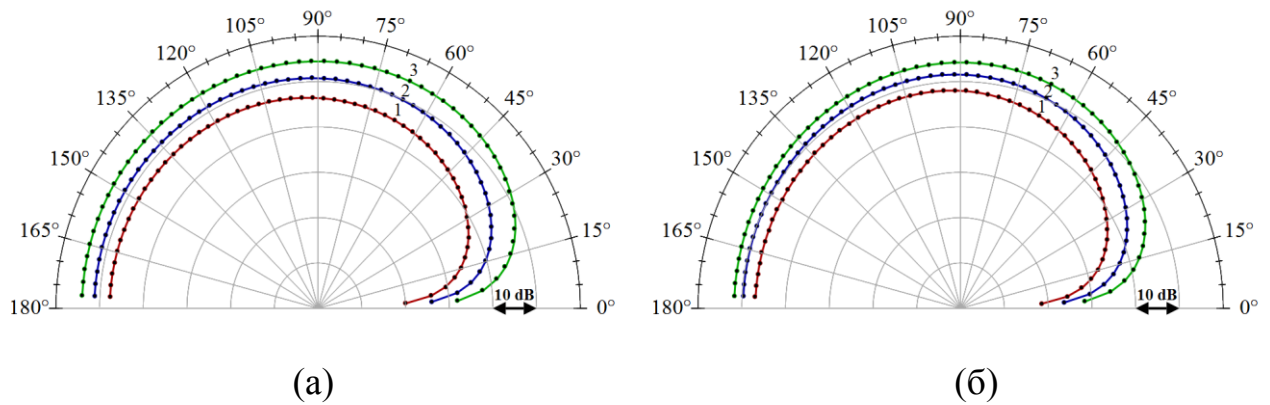


Рисунок 2.6 — Сравнение полярных ($\psi = 0$) направленностей в дальней зоне ($R = 20D$) поля рассеяния осесимметричной моды ($m = 0$), полученных методом Винера-Хопфа (сплошные линии) и с помощью свертки распределенных источников с соответствующей функцией Грина (маркеры) для геометрических параметров $d = 3D$, $h = D$ и для струи с числом Маха $M_j = 0.53$. Граничные условия считались известными для $r'_0 = D$. Параметры волнового пакета: $St = 0.4$, $x_{00} = 3D$, $\delta_0 = 2D$. 1) $M_{c0} = 0.4M_j$; 2) $0.6M_j$; 3) $0.8M_j$. а) $M_{cf} = 0$; б) 0.6 .

На рисунке 2.6 представлено сравнение результатов для поля рассеяния осесимметричной моды полученных двумя приведенными выше методами в случае статики ($M_{cf} = 0$) и полета ($M_{cf} = 0.6$). Можно видеть, что в обоих случаях результаты двух решений полностью совпадают. При этом функция Грина для статического случая, например взятая из работы [35], для применения в случае полета была модифицирована при помощи преобразования Прандтля-Глауэрта [65]. Кроме совпадения результатов также стоит отметить, что при прочих равных пакет большей конвективной скорости рассеивается эффективнее, а при сравнении результатов для случая статики и полета можно увидеть подтверждение вышесказанного о том, что включение спутного потока умеренной скорости само по себе при сохранении параметров пакета слабо влияет на рассеяние волновых пакетов.

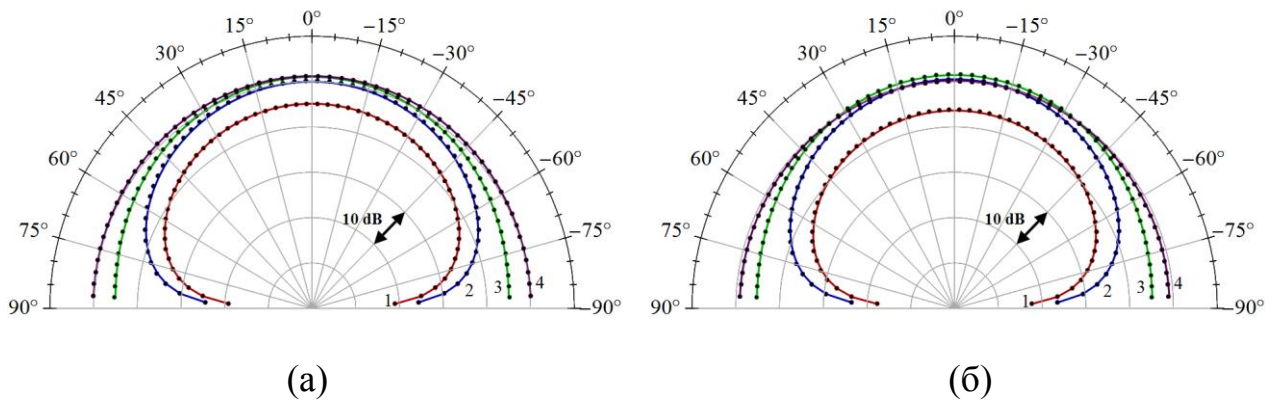


Рисунок 2.7 — Сравнение азимутальных (r, φ) направленностей в дальней зоне ($R = 20D$) поля рассеяния осесимметричной моды ($m = 0$), полученных методом Винера-Хопфа (сплошные линии) и с помощью свертки распределенных источников с соответствующей функцией Грина (маркеры) для геометрических параметров $d = 3D$, $h = D$ и для струи с числом Маха $M_j = 0.53$. Граничные условия считались известными для $r'_0 = D$. Параметры волнового пакета: $St = 0.4$, $M_{c0} = 0.6M_j$, $x_{00} = 3D$, $\delta = 2D$. Сравнение представлено для различных значений полярного угла, определяющего положение и радиус поверхности, на которой исследуются результаты ($x = R\cos\theta$, $r = R\sin\theta$) 1) $\theta = 30^\circ$; 2) 70° ; 3) 110° ; 4) 150° . а) $M_{cf} = 0$; б) 0.6 .

На рисунке 2.7 проведено сравнение результатов уже для случая азимутальной направленности $((r, \varphi)$, см. рисунок 2.1). Как и в случае полярной направленности из анализа рисунка можно сделать аналогичные выводы о совпадении результатов различных подходов. Однако построение азимутальной направленности для различных полярных углов позволяет продемонстрировать особенности в изменении направленности при переходе через кромку полуплоскости, что обусловлено различными граничными условиями. Также можно отметить, что включение спутного потока приводит к такой особенности как переход максимума полярной направленности с расположения на пластине к расположению в боковом направлении, что можно было ожидать из особенности преобразования Прандтля-Глауэрта, приводящего к изменению функции Грина лишь в направлениях, отличных от бокового.

Здесь стоит отметить, что получение решения различными способами не отменяют, а лишь дополняют друг друга. В случае решения, полученного методом Винера-Хопфа решение, итоговое выражение позволяет, например, достаточно просто в явном виде выписать форму полярной направленности рассеянного поля. В тоже время решение при помощи свертки распределенных источников с функцией Грина представляет собой двойную работу, в которой необходимо дополнительно найти распределение источников, удовлетворяющее граничному условию. К тому же данное распределение не имеет физического смысла, поскольку заданное граничное условие в задаче Винера-Хопфа не создается на самом деле точечными источниками на оси струи, а является полем пакетов неустойчивости, распространяющихся в слое смещения. Тем не менее, переход от статических условий к условиям полета в некоторых аспектах проще анализировать на примере преобразования Прандтля-Глаурта для функции Грина.

Таким образом, верификацию полученного решения можно считать завершенной.

2.6 Выводы по Главе 2

- Сформулирована и решена методом Винера-Хопфа трехмерная модельная задача о моделировании ближнего гидродинамического поля струи в виде суперпозиции азимутальных гармоник с неоднородной огибающей и его последующего рассеяния на задней кромке полуплоскости.
- Проведена верификация полученного решения для случая рассеяния осесимметричной моды ближнего поля в статических и полетных условиях на примере свертки найденного эквивалентного распределения монополярных источников с соответствующей функцией Грина.
- Показано, что разработанная модель, основанная на решении поставленной трехмерной задачи, описывает основные тенденции в поведении

шума взаимодействия: направленность типа кардиоиды, экспоненциальная зависимость уровней шума от расстояния между пластиной и струей, изменение азимутального состава шума в дальнем поле. Также в случае не очень больших скоростей полета продемонстрировано слабый отклик полученных передаточных функций на наличие спутного потока.

Глава 3. Экспериментальное исследование шума взаимодействия струи и крыла для различных конфигураций³

3.1 Экспериментальное исследование полярной направленности шума взаимодействия струи и крыла самолета для упрощенной конфигурации

В рамках диссертационной работы первые экспериментальные работы по исследованию шума взаимодействия установленной вблизи крыла турбулентной струи были направлены в основном на исследование полярной диаграммы направленности в случае упрощенной конфигурации струя-пластина (рисунок 3.1) [22,60].

В ходе данных экспериментов рассматривалась холодная струя, истекающая с различной скоростью из одиночного круглого сопла диаметра $D = 0.04$ м. Кромка плоской алюминиевой пластины с размахом 1.2 м, шириной 0.35 м и толщиной 0.003 м располагалась в области доминирования линейных гидродинамических пульсаций ближнего поля струи, так что $h = D$, $d = 3.2D$.

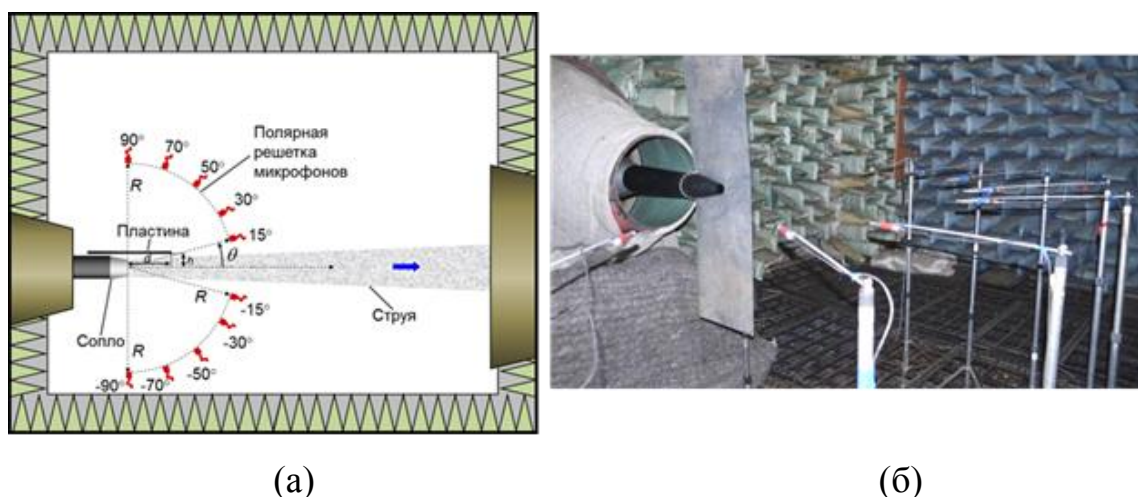


Рисунок 3.1 — Экспериментальное исследование шума взаимодействия струи и пластины в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ. а) схема эксперимента (вид сверху); б) фотография установленной конфигурации.

³ Результаты данного раздела опубликованы в работах [22,60,69,70]

Измерительная система (рисунок 3.1б) представляла собой полярную микрофонную решетку, состоящую из 10-ти $\frac{1}{2}$ ” микрофонов Briel&Kjaer (тип 4189) с предусилителями модели 2669 (диапазон частот 40 – 25600 Гц, чувствительность 50 мВ/Па). Микрофоны центрировались на середину среза сопла и располагались на окружности радиуса $R=22.5D$ в плоскости, проходящей через ось струи и перпендикулярной к пластине (рисунок 3.1а), попарно в симметричных относительно сопла точках. Перед измерениями проводилась калибровка микрофонов с помощью пистонфона Briel&Kjaer типа 4228.

В ходе измерений исследовалась струя различной скорости истечения, начиная от 137 м/с до 302 м/с. Список исследуемых режимов представлен в Табл. 3.1 в виде чисел Маха M_j , основанных на скорости истечения струи V_j и скорости звука окружающего пространства c .

Таблица 3.1 – Режимы истечения струи.

Режим	1	2	3	4	5
Акустическое число Маха струи M_j	0.4	0.53	0.7	0.82	0.88

При этом для минимальной скорости истечения маломасштабной струи число Рейнольдса, основанное на диаметре сопла и скорости истечения струи, достигало величины $Re \sim 3.6 \cdot 10^5$, что обеспечивает возможность масштабирования полученных данных по шуму струи в связи с автомодельностью режима.

Сравнение результатов измерения в случае изолированной и установленной струи продемонстрировало существенное усиление шума при установке вблизи струи пластины, что можно объяснить наличием дополнительного источника шума, связанного с взаимодействием струи и пластины (рисунок 3.2).

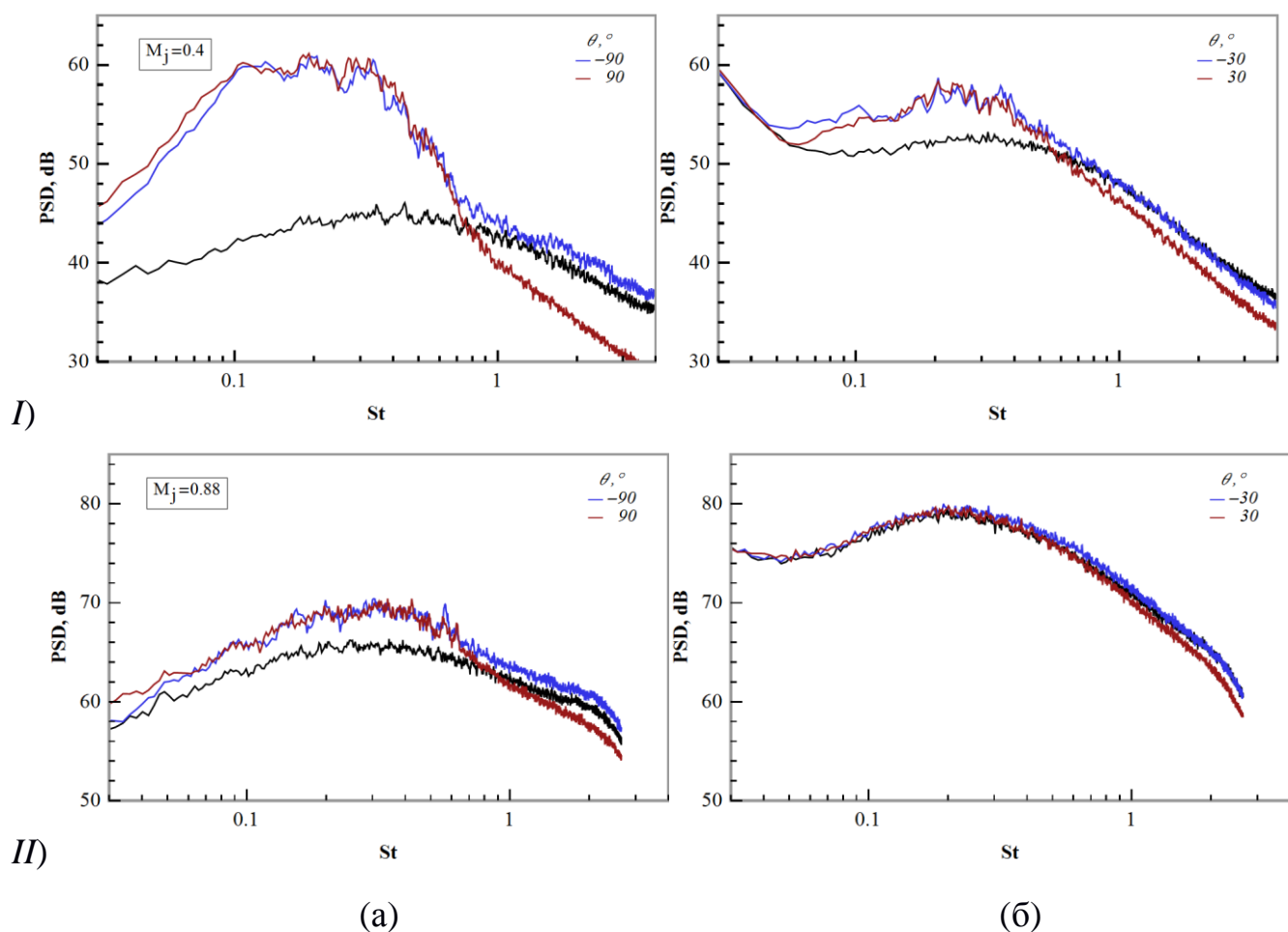


Рисунок 3.2. Спектр шума для изолированной струи (черные кривые) и струи с пластиной (цветные кривые). Красный цвет – микрофон «в тени», синий цвет – микрофон «на свету». а) $\theta = \pm 30^\circ$; б) $\theta = \pm 90^\circ$. I) $M_j=0.4$; II) $M_j=0.88$.

На фоне шума изолированной струи малых скоростей (рисунок 3.2 верхний ряд) шум взаимодействия преобладал практически для всех значений полярного угла θ (до 15 дБ превышения в боковом направлении для струи $M_j=0.4$). Что касается высокоскоростных струй, то выделение шума взаимодействия могло быть произведено лишь в боковых направлениях, т.к. при малых полярных углах эффект взаимодействия на фоне шума струи практически не проявлялся (рисунок 3.2 нижний ряд). При этом разделение шума струи и шума взаимодействия можно производить в предположении об их некоррелированности друг с другом следующим образом:

$$P_{inst} = 10 \lg \left(10^{P_{tot}/10} - 10^{P_{jet}/10} \right), \quad (3.1)$$

где P_{tot} - полный шум струи вблизи пластины (измеренный в дБ), P_{jet} представляет шум изолированной струи, а P_{inst} - шум взаимодействия струи и пластины. Пример выделения спектра шума взаимодействия P_{inst} из полного сигнала P_{tot} представлен на рисунке 3.3.

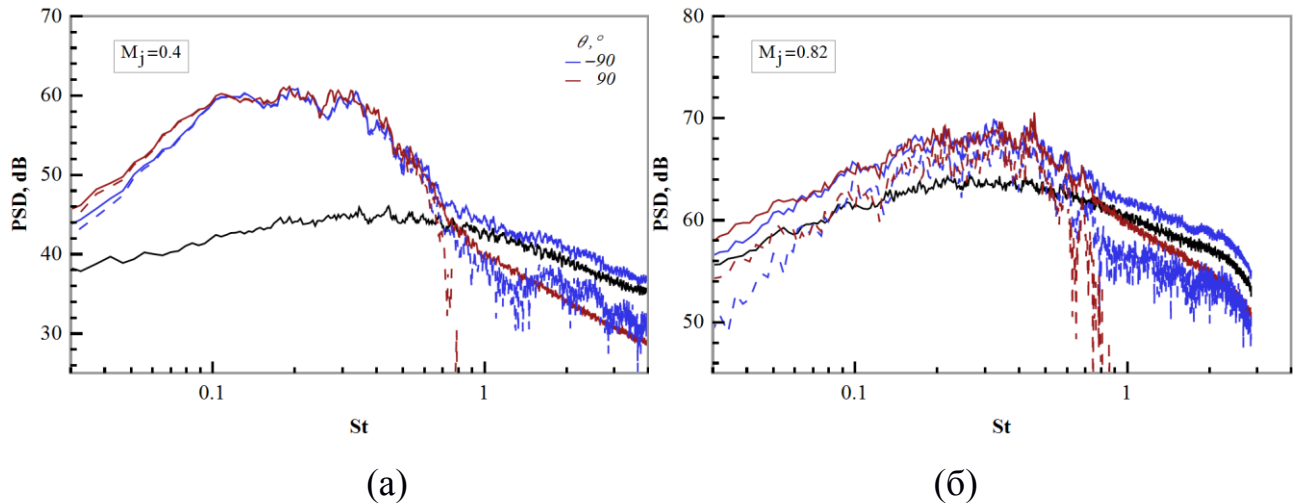


Рисунок 3.3. Спектр шума для изолированной струи (черные кривые), струи с пластиной (цветные сплошные кривые) и выделенного шума взаимодействия (цветные пунктирные кривые). а) $M_j=0.4$; б) $M_j=0.82$.

Из представленных на рисунке 3.3 результатов для боковой точки ($\theta = \pm 90^\circ$) можно видеть, что в области низких частот выделенный шум взаимодействия носит симметричный характер (совпадение спектров для противоположных микрофонов), а для более высоких частот наблюдаемое различие в спектрах можно объяснить эффектом отражения шума, излучаемого струей, от поверхности пластины для микрофона при $\theta = -90^\circ$ (синие кривые) и затенением пластиной микрофона при $\theta = 90^\circ$ (красные кривые). Также стоит отметить уменьшение относительного вклада шума взаимодействия в полный шум при увеличении скорости истечения струи, что можно связать с масштабированием шума самой струи, согласно теории Лайтхилла [4], по закону M_j^8 , в то время как масштабирование рассеянного шума, согласно модели Фокса-Вильямса и Холла [35], определяется законом M_j^5 .

На рисунке 3.4 представлены графики полярных направленностей шума взаимодействия для режимов $M_j = 0.4, 0.53$ при которых шум установленного сопла доминировал над шумом изолированной струи, в том числе, при малых углах обзора. Стоит отметить симметричный относительно плоскости пластины характер направленности и ослабление излучения при приближении наблюдателя к оси струи, что качественно соответствует типичной картине рассеяния турбулентных пульсаций на задней кромке [35, 66]. При этом на примере направленности для высокого числа Струхала вблизи плоскости пластины (зеленые кривые) можно видеть отсутствие выделенной информации о шуме взаимодействия или выбивающегося из общей картины результата. Это связано с точностью определения данных путем энергетического вычитания, которая становится тем меньше, чем сильнее различаются амплитуды компонент шума, а в случае шума струи и шума взаимодействия направленность для малых углов имеет максимум в одном случае и минимум в другом, соответственно.

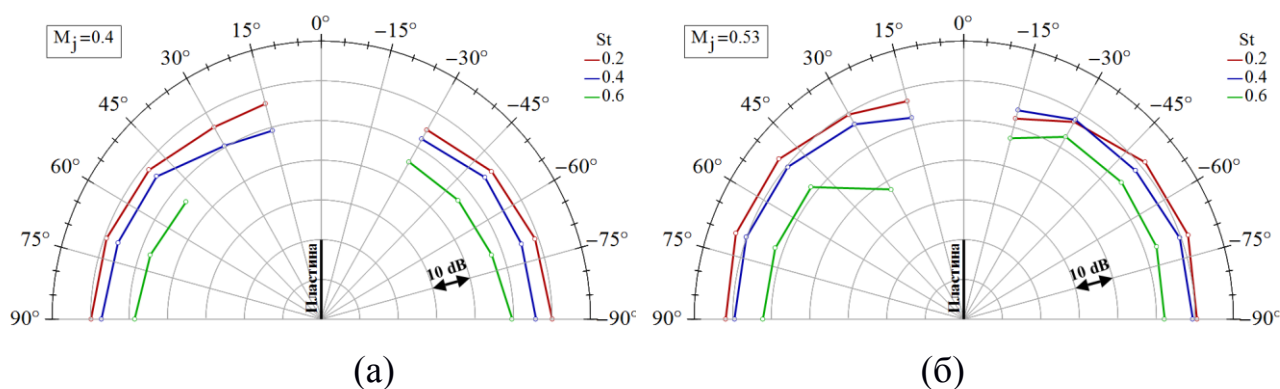


Рисунок 3.4. Диаграмма направленности вычисленного при помощи выражения (3.1) шума взаимодействия струи и крыла для различных чисел Струхала. а) режим истечения струи $M_j = 0.4$; б) $M_j = 0.53$.

Таким образом, экспериментально были исследованы основные особенности шума взаимодействия для случая упрощенной конфигурации струя-пластина и полярной направленности. Следующий раздел будет посвящен уже применению Метода Азимутальной Декомпозиции (МАД), который, как будет показано, позволяет получать не только более подробную информацию о шуме

для изолированной и установленной конфигурации измерялись шестью полудюймовыми микрофонами Bruel & Kjaer (тип 4189) с В&К предусилителями типа 2669 (частотный диапазон 40 - 25600 Гц, чувствительность 50 мВ/Па), расположенными равномерно в азимутальной решетке радиуса $R = 0.8$ м (рисунок 3.5а). Перед проведением измерений микрофоны были откалиброваны с помощью В&К пистонфона типа 4228.

Цель эксперимента состояла в том, чтобы использовать метод азимутальной декомпозиции (МАД) для измерения азимутальных компонентов изолированной и установленной конфигурации и определить физические особенности шума взаимодействия. Подробное описание стандартных экспериментов с применением МАД в АК-2 ЦАГИ можно найти в работе [67], а в работе [68] ее модифицированную версию. Дополнительные же сведения о возможных ошибках, связанных с центрированием микрофонов на необходимую ось, и о необходимых модификациях измерительной системе, а также о важности правильной центровки микрофонов при исследовании доминирующего источника шума представлены в работе [69,70].

Так было показано, что решетка из шести микрофонов способна измерять первые 3 азимутальные косинус- и синус-моды и давать оценку четвертой косинус-моды. Таким образом, сигнал $p(x, r, \varphi, t)$, созданный неизвестным источником звука может быть представлен в следующем виде:

$$p(x, r, \varphi, t) \approx A_0(x, r, t) + \sum_{m=1}^2 (A_m(x, r, t) \cos m\varphi + B_m(x, r, t) \sin m\varphi) + A_3(x, r, t) \cos 3\varphi \quad (3.2)$$

где амплитуды $A_m(x, r, t)$ и $B_m(x, r, t)$ определяются из обработанных данных методом МАД, (x, r, φ) – цилиндрическая система координат, связанная с пластиной (рисунки 2.1, 3.5б).

Кроме того, для получения направленностей шума на цилиндрической поверхности (цилиндрическая направленность) решетка микрофонов могла перемещаться, как вдоль оси струи O' , так вдоль оси O , проходящей через

пластину параллельно оси струи, в диапазоне от $x = -0.5$ м до $x = 2.5$ м ($x/D = -12.5 \dots 62.5$) (рисунок 3.5б).

Стандартные направленности азимутальных мод, полученные перемещающейся вдоль оси O (в работе [70] было показано, что измерения азимутального состава шума изолированной струи вдоль оси O' и O изменяются для исследуемой конфигурации слабо) решеткой в случае изолированной струи, представлены на рисунке 3.6а. Видно, что в этом случае первые три косинус-/синус- азимутальные моды вносят основной вклад в шум дальнего поля [67,71,72]. Кроме того, полученные результаты демонстрируют статистическую симметричность струи, что отражается в равенстве синус- и косинус-мод соответствующих порядков $a_m = b_m$, где a_m, b_m - Фурье образы соответствующих временных реализаций $A_m(t), B_m(t)$.

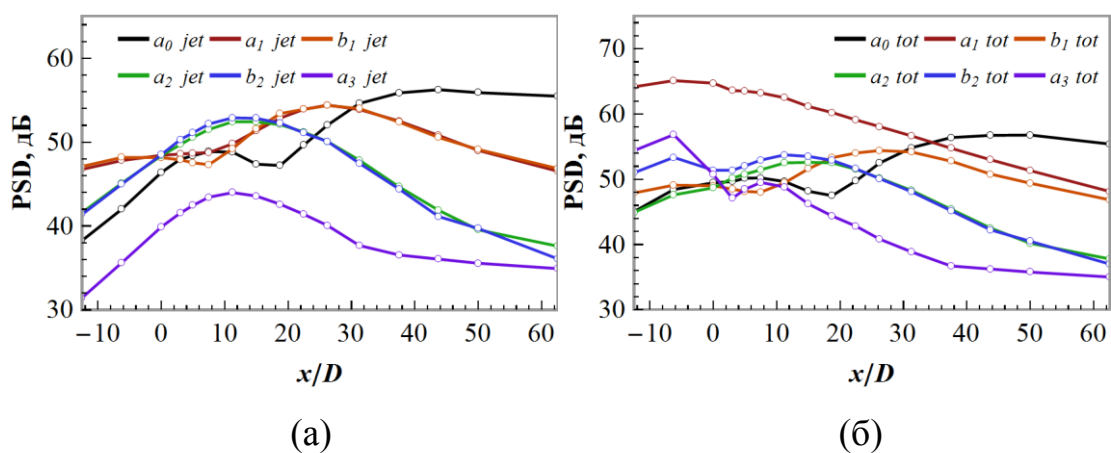


Рисунок 3.6. Цилиндрические направленности азимутальных мод, полученных вдоль оси O . а) шум изолированной струи (jet); б) полный шум установленной вблизи пластины струи (tot, сокращенно от total). $St = 0.2, M_j = 0.6$.

Результаты для установленной конфигурации, полученные перемещающейся вдоль оси O решеткой, представлены на рисунке 3.6б. Заметным эффектом установки вблизи струи пластины является значительное увеличение амплитуд мод a_1 и a_3 , а также изменение амплитуды b_2 . При этом качественно увеличение амплитуды моды a_1 можно связать с дипольной природой шума взаимодействия.

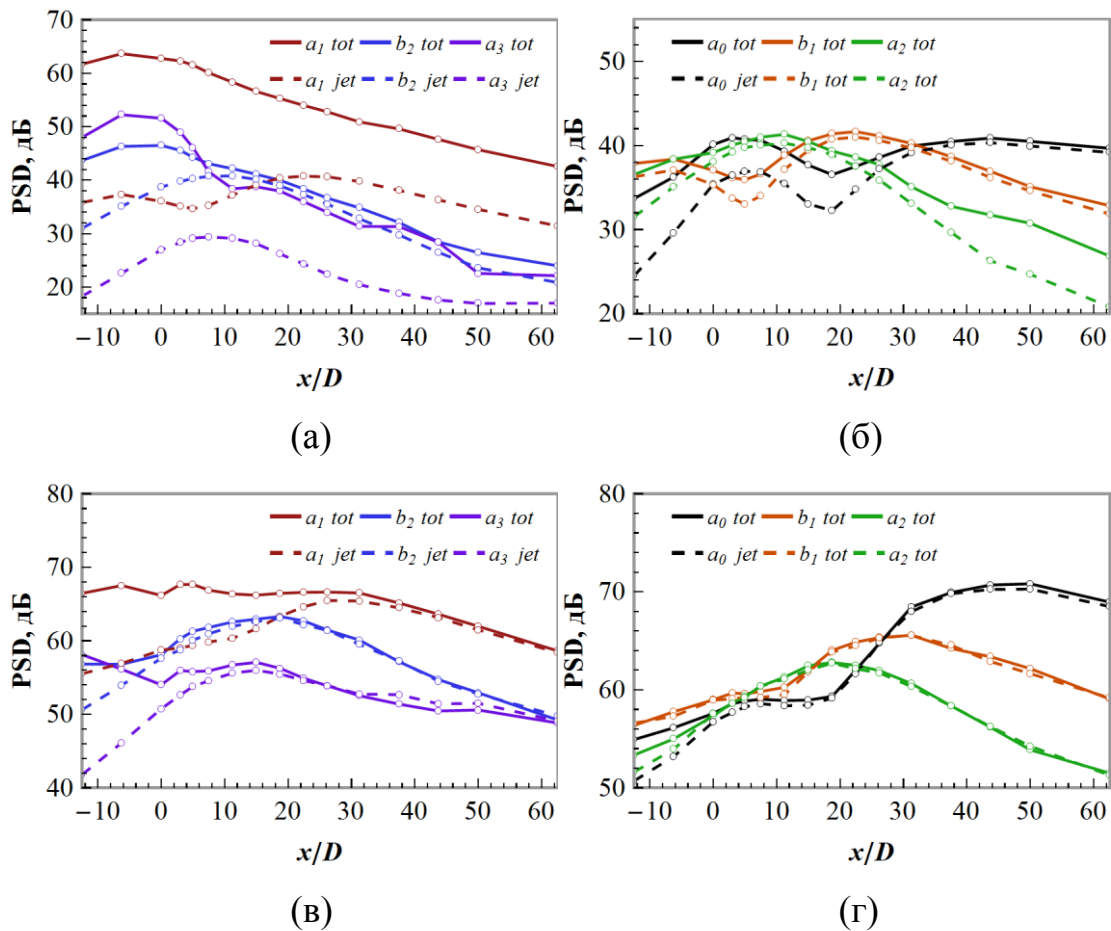


Рисунок 3.7. Направленности азимутальных мод u , полученных вдоль оси O' . Рисунки сверху - $M_j=0.4$, снизу - $M_j=0.82$. Рисунки слева – моды подверженные изменению при установке пластины (a_1, b_2, a_3), неизменяющиеся моды (a_0, b_1, a_2). $St = 0.2$.

На рисунке 3.7 для удобства сравнения представлены с наложением направленности азимутальных мод изолированной и установленной струй для оставшихся режимов истечения струи. Как можно видеть, моды a_0, b_1 и a_2 остаются неизменными (в работе [70] было показано, что наблюдаемые расхождения в направленностях можно связать с точностью измерений), что отчасти подтверждает гипотезу о неизменности собственного поля изолированной струи при установке вблизи нее пластины, а все изменения связаны с рассеянием поля волновых пакетов на кромке пластины. Именно этот эффект был предсказан в разработанной в главе 2 модели (рисунок 2.5). При этом неизменность обозначенных мод дальнего поля можно считать опосредованным

подтверждением использованной гипотезы о неизменности ближнего поля изолированной струи при расположении вблизи нее рассеивающей поверхности.

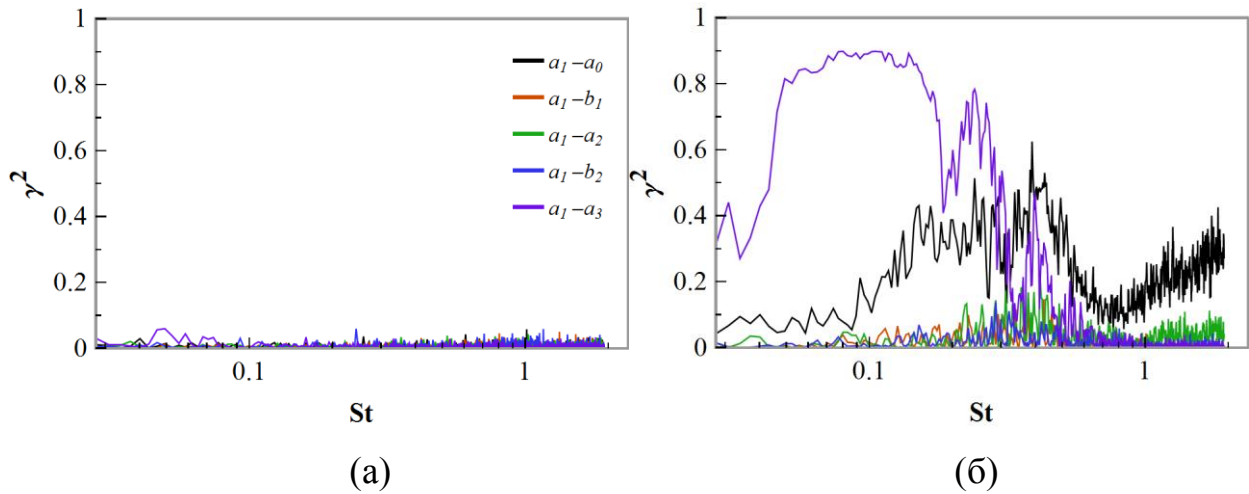


Рисунок 3.8. Функция когерентности между модой a_1 и оставшимися модами. а) изолированная струя (ось O'); б) установленная струя (ось O). Измерения решеткой в боковом направлении $x'/D = 3$. $M_j = 0.6$.

Далее интересным было рассмотреть корреляционные свойства азимутальных мод в изолированной и установленной конфигурациях. В качестве удобного индикатора коррелированности различных мод далее будет рассмотрена функция когерентности $\gamma^2(St)$ (рис. 3.8). Как это и ожидалось [64,73] азимутальные моды изолированной струи оставались некоррелированными, в то время как для установленной струи наблюдалась существенная корреляция между модами a_1 и a_3 в области $St < 1$, что было предсказано в результатах анализа разработанной аналитической модели в Главе 2. При этом наличие ненулевой когерентности между модами a_1 и a_0 можно объяснить ошибкой центровки микрофонов, так как в работе [70] было показано, что в этом случае происходит ошибочный переход «реальных» мод в соседние моды. Также стоит обратить внимание на отсутствие корреляции между модами a_1^2 и b_2^2 , хотя моду b_2^2 тоже связывается с шумом взаимодействия. Этот нетривиальный факт можно объяснить так, как это было сделано в главе 2, а именно за счет того, что вклад в четные синус-моды и нечетные косинус-моды дальнего поля шума

взаимодействия вносит рассеяние некоррелированных между собой мод ближнего поля струи.

В предыдущем разделе на базе данных, полученных полярной решеткой микрофонов, шум взаимодействия выделялся при помощи энергетического вычитания (3.1), что сопряжено с рядом проблем, в том числе с необходимостью повторения измерений для случаев с изолированной и установленной струями. Однако в работе [70] было подробно показано, что исходя из свойств азимутального состава статистически симметричной изолированной струи и шума взаимодействия необходимую информацию можно получить следующим образом

$$L_{inst}(x, r, \varphi, St) \approx (a_{1tot}^2 - b_{1tot}^2) \cos^2 \varphi + 2\gamma \sqrt{a_{1tot}^2 - b_{1tot}^2} \sqrt{a_{3tot}^2} \cos \xi \cos \varphi \cos 3\varphi \quad (3.3)$$

где ξ - фаза кросспектра между косинус-модами a_{1tot} и a_{3tot} полного поля. Так на рисунке 3.8б $\gamma^2(St)$ представляет собой отношение квадрата кросспектра к перемножению соответствующих автоспектров. Использование формулы (3.3) подразумевает использование более сложной измерительной системы по сравнению с полярной решеткой микрофонов, а именно азимутальной решетки, однако преимуществом в данном случае является то, что шум взаимодействия можно выделить на базе лишь одного измерения в случае установленной конфигурации. Причем данное преимущество связано не столько с уменьшением количества необходимых измерений, сколько с устранением ошибки выделения информации связанной с повторяемостью режимов истечения струи при различных пусках.

Сравнение результатов выделения информации при помощи подходов (3.1) и (3.3) представлено на рисунке 3.9. Можно отметить, что для низкоскоростной струи (верхний ряд) разница в результатах практически отсутствует, что связано с тем, что для данного режима шум взаимодействия доминировал во всех исследуемых направлениях, однако для малых углов к струе все же наблюдается некоторое различие. Тем не менее для Маха струи 0.82 это различие более различимо, в особенности для области $x/D > 20$. В этом случае шум взаимодействия составлял лишь малую часть от полного шума, измеренного

микрофонами, и ошибка повторяемости измерений в данном случае играла очень большую роль. Однако и в случае использования азимутальной решетки существует проблема точности определения данных, связанная уже с точностью центровки решетки микрофонов и поэтому даже в случае применения подхода (3.3) не всегда удастся определение набора данных о шуме взаимодействия, когда он существенно слабее остальных источников шума.

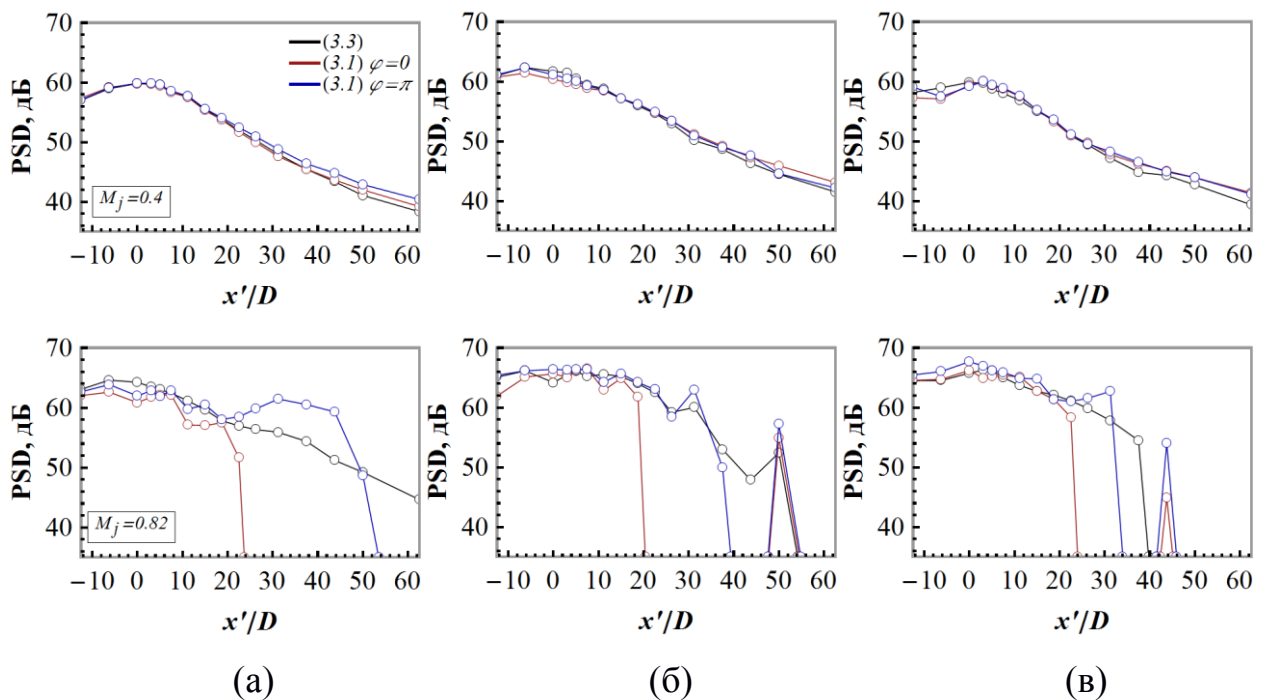


Рисунок 3.9. Результаты определения информации о цилиндрической направленности шума взаимодействия для $\varphi = 0, \pi$. Верхний ряд - $M_j = 0.4$, нижний ряд - $M_j = 0.82$. а) $St = 0.1$; б) 0.2 ; в) 0.3 .

Также в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ были произведены исследования с применением МАД решетки в случае наличия спутного потока небольшой скорости $V_{cf} = 30$ м/с [74]. Рассматриваемая в эксперименте конфигурация (рисунок 3.10) совпадала с описанной ранее, а измерительная система соответствовала системе, рассмотренной выше. При этом эффект полета моделировался большой струей, выходящей из сопла диаметром $D_f = 400$ мм.

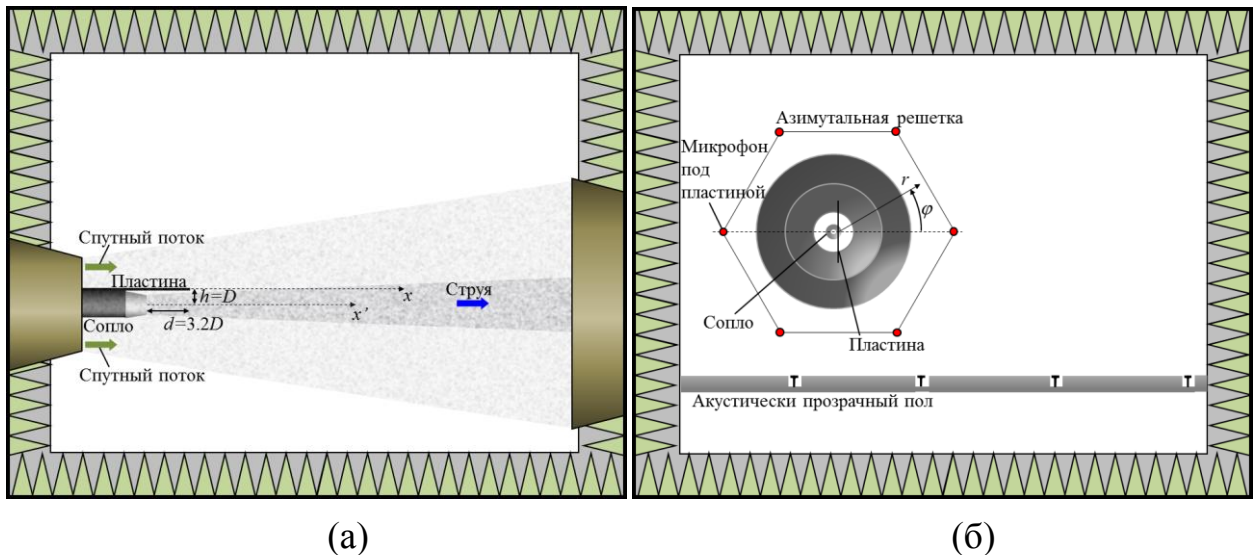


Рисунок 3.10. Схема конфигурации струя-пластина в спутном потоке: (а) – вид сверху; (б) – вид спереди.

В отличие от случая статики, при котором достаточно измерить шум изолированной струи (L_{jet}) и полный шум установленной струи (L_{tot}), в условиях полета возникают дополнительные источники шума, что приводит к потребности проводить большее количество измерений с целью разделения составных компонент шума. Таким образом, были выполнены измерения следующих источников шума:

- шум только спутного потока (без основной струи, пластина убрана) – L_{cf} ;
- шум струи в спутном потоке (с основной струей, пластина убрана) – $L_1 = L_{cf} + L_{jet}$;
- шум обтекания пластины спутным потоком (без основной струи, пластина установлена) – $L_2 = L_{cf} + L_{plate}$;
- общий шум L_{tot} полной конфигурации (с основной струей, пластина установлена) – $L_{tot} = L_{jet} + L_{inst} + L_{cf} + L_{plate}$, где L_{inst} - шум взаимодействия, который необходимо вычлениить из эксперимента.

Исходя из такого набора измерений, шум взаимодействия можно оценить как

$$L_{inst} = L_{total} - L_1 - L_2 + L_{cf}. \quad (3.4)$$

Стоит отметить, что ранее для рассмотренного статического случая формула (3.4) сводилась к $L_{inst} = L_{total} - L_{jet}$. В связи с тем, что в настоящем исследовании приходилось иметь дело с довольно низкоскоростными струями, шум взаимодействия оказывался достаточно сильным и упрощенная декомпозиция (3.4) должна проявлять себя достаточно хорошо (см. рисунок 3.9 верхний ряд), хотя как это указывалось выше можно было бы применить метод МАД, позволяющий более точно определить информацию о шуме взаимодействия в случае рассмотрения больших скоростей истечения струи и малых углов к оси струи. Результаты, представленные ниже, являются результатом анализа данных, полученных микрофоном, расположенным под пластиной, как показано на рисунке 3.10б.

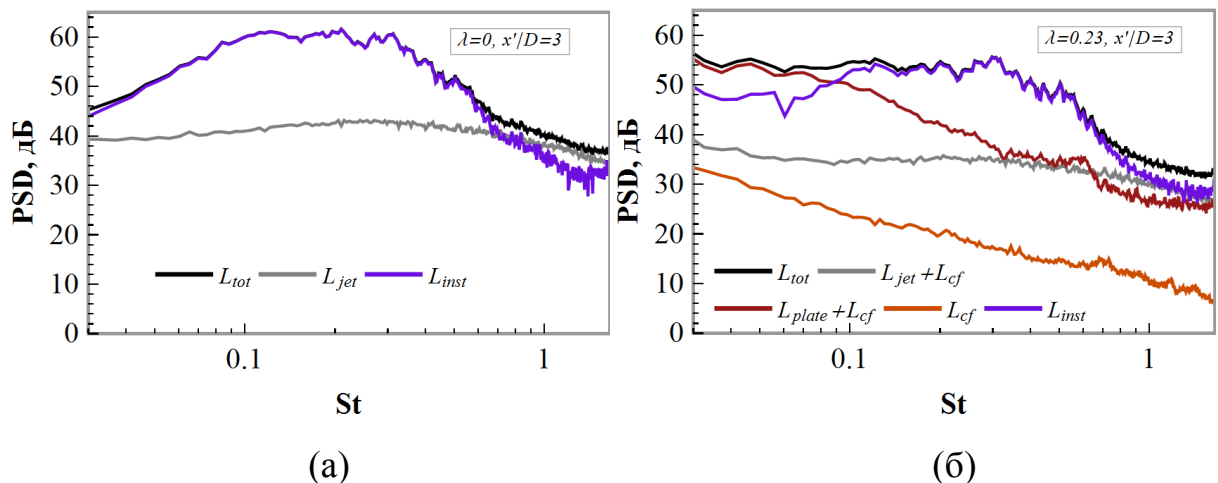


Рисунок 3.11. Спектры составляющих полного шума в дальней зоне в боковом направлении. (а) – условия статики ($\lambda = V_{cf}/V_j = 0$); (б) – условия полета ($\lambda = 0.23$). Положение решетки $x'/D = 3.2$. $M_j = 0.4$. Микрофон под крылом $\varphi = \pi$.

Типичные спектры различных компонент шума для статических и летных условий в боковом направлении ($x'/D = 3.2$) показаны на рисунке 3.11. Числа Струхала во всех случаях основаны на диаметре сопла и скорости струи. Видно,

что в рассматриваемых полетных условиях спектр шума установки имеет форму, аналогичную спектру в статических условиях с некоторым смещением его максимума в сторону более высоких частот, при этом уровни шума существенно снижаются.

На рисунке 3.12 представлены направленности, измеренные на цилиндрической поверхности, компонент шума дальнего поля на линии для $St = 0,3$ (соответствующего максимуму спектра) для условий статики и полета. Видно, что наличие спутного потока не влияет существенным образом на форму направленности, при этом приводя к существенному снижению общих уровней шума, что ранее в главе 2 обсуждалось при анализе влияния спутного потока на характеристики шума взаимодействия.

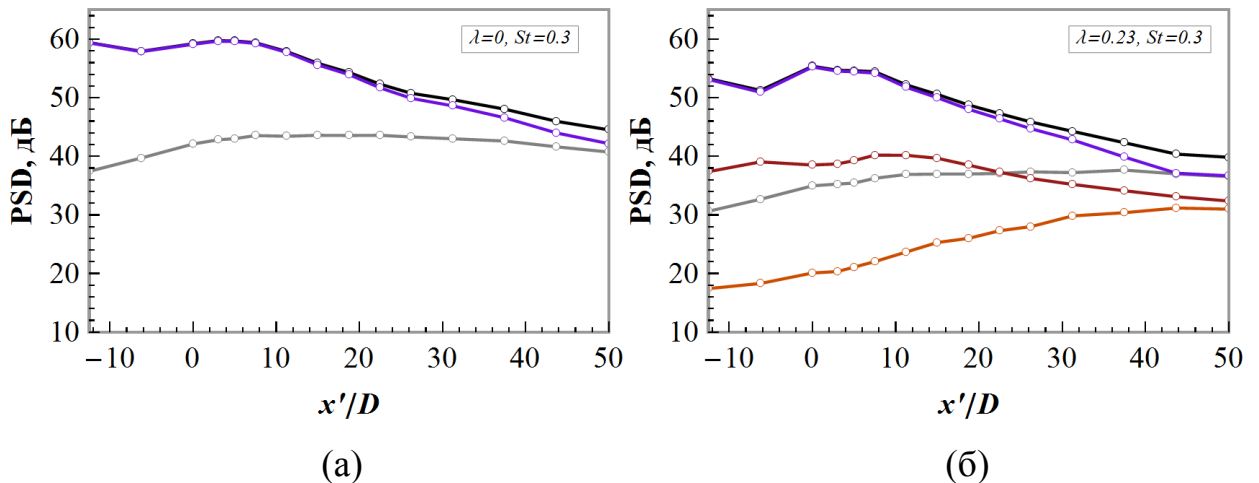


Рисунок 3.12. Направленности различных составляющих полного шума. (а) – условия статики ($\lambda = 0$); (б) – условия полета ($\lambda = 0.23$). $St = 0.3$. $M_j = 0.4$. Микрофон под крылом $\varphi = \pi$. Обозначения кривых представлены на рисунке 3.11.

Прямое сравнение спектров и направленности выделенного шума взаимодействия L_{inst} для статических и летных условий показано на рисунке 3.13. При этом спектры приведены для бокового направления (где шум взаимодействия довольно сильный), а направленности построены для $St = 0.3$. Видно, что наличие спутного потока приводит к снижению уровня шума взаимодействия на величину, достигающую в области максимума спектра порядка 6 дБ. При этом сам спектральный пик сдвигается к более высоким частотам. Следует отметить, что

число Струхала, основанное на скорости струи, может не отражать должным образом масштабирующие эффекты для условий полета, что, однако, требует дополнительных исследований и не входило в задачи настоящей работы.

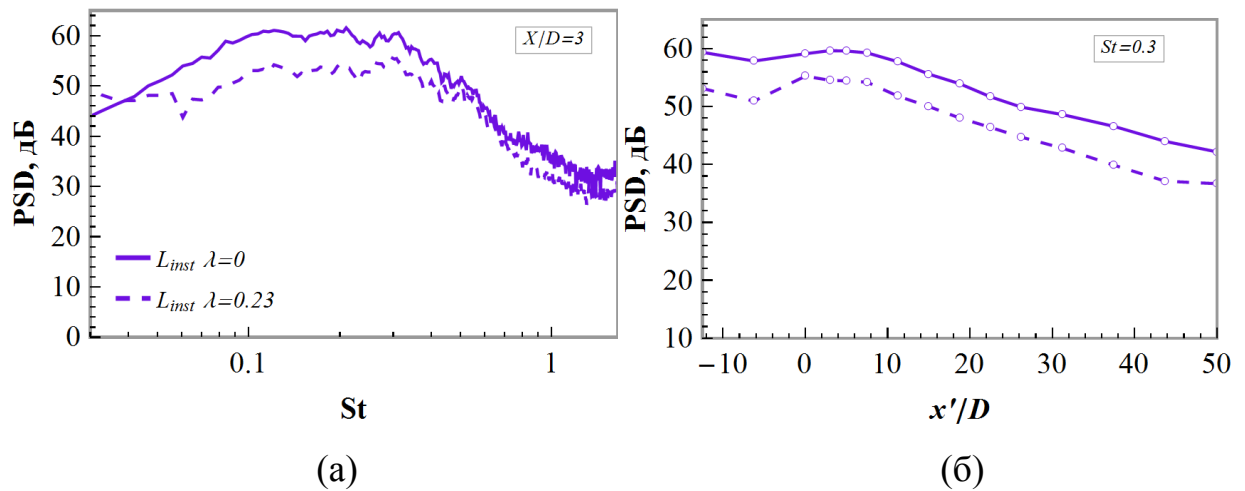


Рисунок 3.13. Характеристики шума взаимодействия в условиях статики (сплошные линии) и в условиях полета (пунктирные линии). (а) – спектры для $x'/D = 3$; (б) – направленности для $St = 0.3$. $M_j = 0.4$. Микрофон под крылом.

Таким образом, экспериментально был исследован азимутальный состав дальнего поля шума изолированной и установленной струи, что позволило получить более подробную информацию о шуме взаимодействия струи и пластины. Показано, что установка вблизи струи пластины приводит к изменению лишь нечетных косинус-мод и четных синус-мод, что согласуется с основными выводами анализа разработанной в Главе 2 аналитической модели. Постоянство оставшихся мод согласуется с гипотезой о неизменности поля самой изолированной струи при не слишком близком расположении вблизи нее пластины (данная гипотеза позволила в Главе 2 получить приближенное решение поставленной задачи). Интересным результатом также оказалось наличие существенной корреляции между нечетными косинус-модами в случае установленной струи, что опять же хорошо согласуется с разработанной моделью. Также показано, что наличие спутного потока небольшой скорости приводит скорее к существенному снижению уровней шума взаимодействия, чем, например, к изменению формы направленности, что также описывалось при

анализе влияния спутного потока в Главе 2. Однако данный вопрос требует дополнительного исследования, поскольку было показано, что характеристики шума взаимодействия слабо зависят от скорости спутного потока напрямую, однако спутный поток сам по себе влияет и на входные параметры задачи исследуемой в Главе 2, а именно на амплитуду и конвективную скорость волновых пакетов.

3.3 Экспериментальное исследование влияния отклонения закрылка на шум взаимодействия струи и крыла самолета для маломасштабной модели реалистичной конфигурации

Для исследования особенностей шума установленной струи в случае реалистичной конфигурации в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ исследовалась маломасштабная модель (1:25) скользящего крыла, установленного вблизи двухконтурной струи (рисунок 3.14б) со степенью двухконтурности 6.3 [59]. При этом модель крыла позволяла рассматривать различные положения отклоненного закрылка.

Измерения шума в дальнем поле производились системой микрофонов, скомбинированных в полярную решетку, состоящую из 10-ти $\frac{1}{2}$ ” микрофонов Briel&Kjaer (тип 4189) с предусилителями модели 2669 (диапазон частот 40 – 25600 Гц, чувствительность 50 мВ/Па). Микрофоны располагались в области под крылом на полуокружности радиуса $R = 2$ м с центром в середине среза сопла внешнего контура, в плоскости, проходящей через ось струи и перпендикулярной к крылу (рисунок 3.14а). Микрофоны охватывали область полярных углов $\theta = -30^\circ \dots -120^\circ$ с шагом в 10° . Перед измерениями проводилась калибровка микрофонов с помощью пистонфона Briel&Kjaer типа 4228.

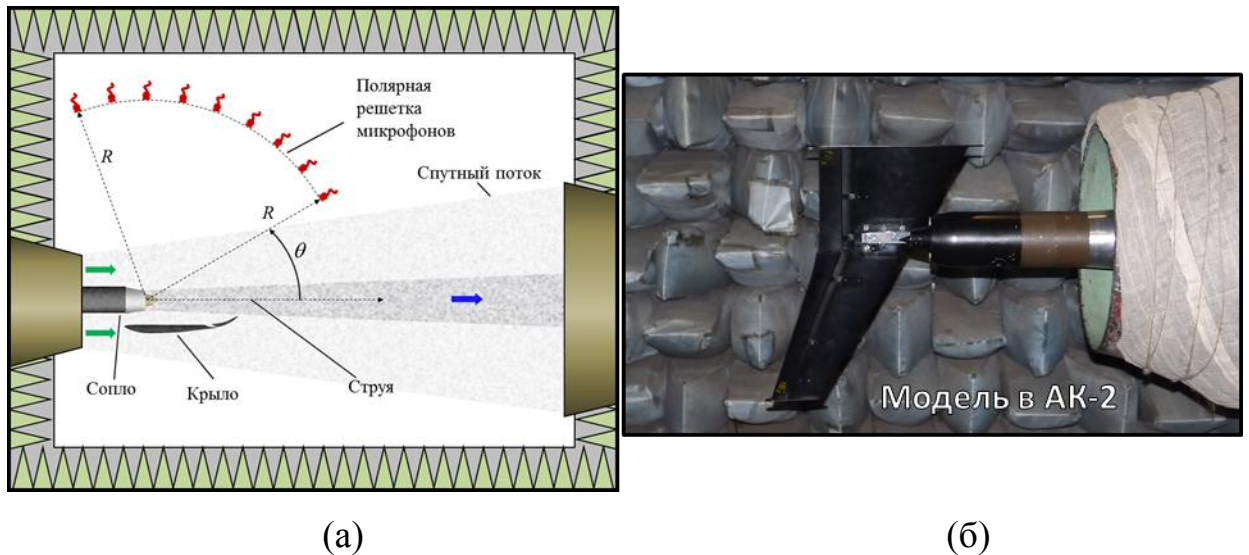


Рисунок 3.14. Экспериментальные исследования реалистичной конфигурации двухконтурной струи вблизи модели крыла с отклоняемой механизацией в акустической камере АК-2 ЦАГИ. а) схема эксперимента по исследованию шума взаимодействия в дальнем поле (вид сверху); б) фотография модели в камере.

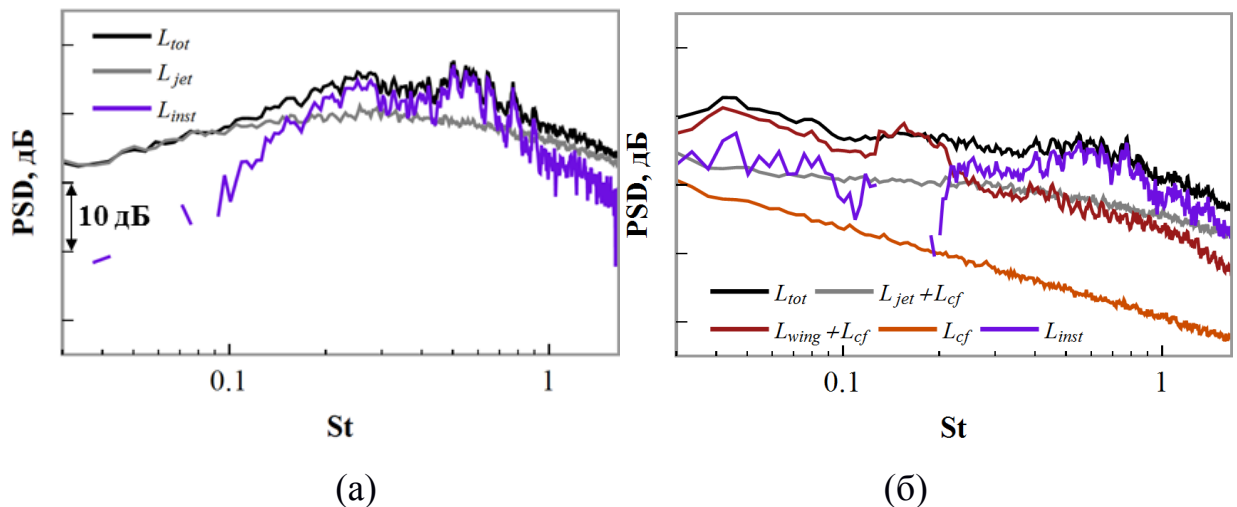


Рисунок 3.15. Спектры составляющих полного шума в дальней зоне в боковом направлении ($\theta = -90^\circ$). (а) – условия статики; (б) – условия полета.

В качестве основных результатов далее на рисунке 3.15 (аналогично с результатами, приведенными на рисунке 3.10) представлены типичные спектры различных компонент шума для статических и летных условий в боковом направлении ($\theta = -90^\circ$), угол отклонения закрылка 18° . Как и в случае упрощенной конфигурации струя-пластина (рисунок 3.11) можно отметить, что

и в условиях более сложной, приближенной к реальной конфигурации наличие спутного потока приводит к смещению максимума спектра в высокочастотную область, а уровни общего шума при этом существенно снижаются.

Таким образом, результаты по исследованию маломасштабной модели реальной конфигурации позволили проследить схожие особенности шума взаимодействия, наблюдаемые ранее для упрощенной конфигурации струя-пластина. Кроме того, накопленные данные о шуме в дальней зоне позволят в следующей главе исследовать возможности разработанной в главе 2 аналитической модели шума взаимодействия струи и крыла предсказывать с удовлетворительной точностью эффект усиления шума двухконтурной струи вблизи модели крыла, при этом не учитывая, например, такие дополнительные факторы как конечность толщины кромки закрылка, эффект стреловидности, конечность хорды крыла.

3.4 Выводы по Главе 3

- Проведено экспериментальное исследование дальнего акустического поля изолированной струи и струи при наличии вблизи нее плоской пластины, имитирующей крыло самолета. Показано, что наличие пластины приводит к существенному усилению низкочастотного шума изолированной струи с симметричным относительно плоскости пластины характером.

- При помощи Метода Азимутальной Декомпозиции проведено экспериментальное исследование азимутального состава в дальнем поле шума изолированной и установленной вблизи пластины струи. Непосредственно продемонстрирована неизменность шума изолированной струи в дальнем поле для исследуемой конфигурации не очень близкого расположения пластины вблизи слоя смещения струи. Изменение азимутального состава шума струи при

установке вблизи нее пластины было отмечено в нечетных косинус- и четных синус-модах.

- По сравнению со случаем изолированной струи, в случае установленной вблизи струи пластины отмечено и объяснено наличие существенной когерентности между нечетными косинус-модами.

- Проведено разделение общего уровня шума исследуемой конфигурации «струя-пластина» на различные источники, как в статических, так и полетных условиях, позволяющее экспериментально выделить шум взаимодействия струи и крыла. Предложен способ более точного выделения шума взаимодействия из общего шума на основе результатов азимутального разложения.

- Исследовано влияние полетных условий на шум взаимодействия, продемонстрировавшее существенное снижение уровней шума при наличии спутного потока ненулевой скорости.

- Экспериментально исследованы основные характеристики шума взаимодействия для случая приближенной к реалистичной конфигурации «механизированное крыло вблизи двухконтурной струи».

Глава 4. Валидация разработанной аналитической модели шума взаимодействия струи и крыла⁴

4.1 Экспериментальное исследование структуры ближнего поля изолированной струи в статических условиях

В предыдущей главе были представлены основные особенности шума взаимодействия струи и крыла, наблюдаемые в экспериментах с различными конфигурациями. Кроме того, был накоплен большой массив данных, позволяющий далее провести валидацию модели для различных условий и конфигураций.

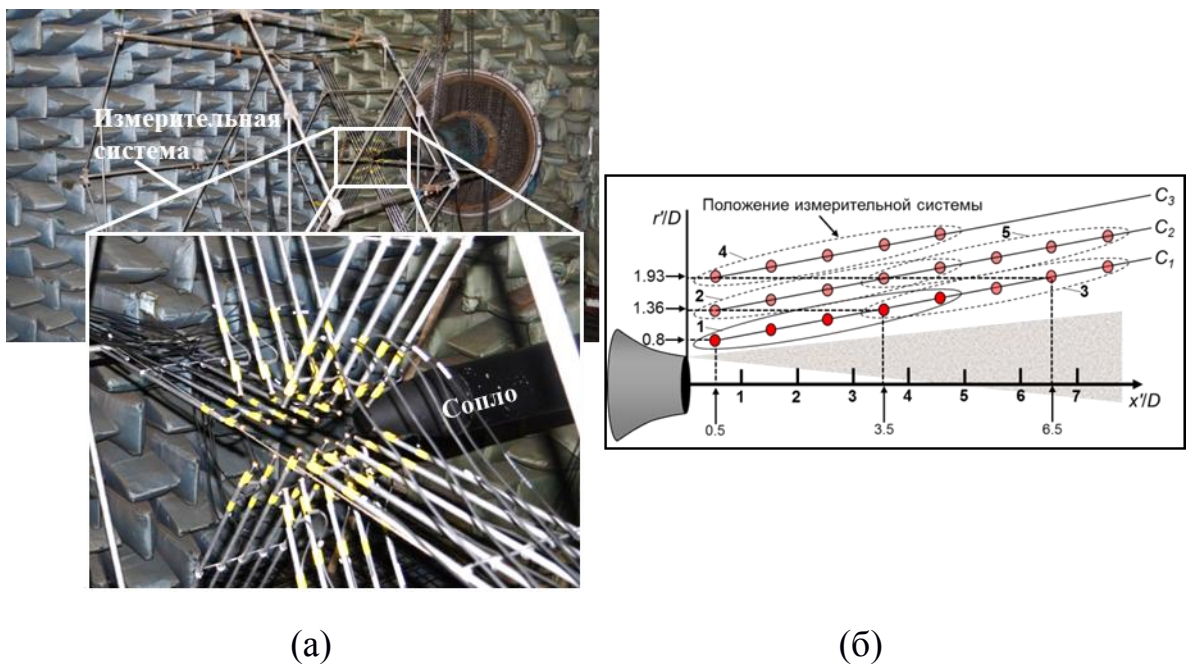


Рисунок 4.1. Исследование ближнего поля струи в АК-2 ЦАГИ. а) фотография измерительной системы; б) схема расположения измерительной системы относительно среза сопла, точками отмечены положения микрофонов, каждая из пяти конфигураций колец отмечена соответствующим номером.

⁴ Результаты данного раздела опубликованы в работах [22,60,74,75,78,79,80].

При этом в главе 2 было показано, что за усиление шума струи вблизи пластины/крыла отвечает рассеяние на задней кромке крыла (пластины) линейных гидродинамических возмущений ближнего поля струи. Однако для проведения прямой проверки данного предположения необходимой является информация о характеристиках (амплитуда и фазовая скорость) доминирующих в ближнем поле изолированной струи азимутальных мод. Для определения необходимой информации были проведены измерения пульсаций давления в ближнем поле изолированной струи, результаты которых затем использовались в аналитической модели для предсказания усиления шума при помещении пластины/крыла вблизи струи.

Измерительная система представляла собой 30 микрофонов, расположенных равномерно по пяти азимутальным кольцам, отстоящих друг от друга на расстоянии D (Рисунок 4.1а) [69, 70,75]. При этом кольца формировали собой расширяющуюся коническую поверхность с углом полураствора $\sim 10.5^\circ$, что обеспечивало непопадание микрофонов в зону слоя смешения струи (Рисунок 4.1б). При этом все микрофоны находились в области ближнего поля струи, что обеспечивалось выбранным радиусом колец [27]. Таким образом, каждое микрофонное кольцо включало в себя 6 микрофонов, что обеспечивало возможность определения доминирующих азимутальных косинус- и синус-мод $m = 0, 1, 2$ методом азимутальной декомпозиции:

$$p_i(x', r', \varphi', t) \approx A_0(x', r', t) + \sum_{m=1}^2 (A_m(x', r', t) \cos m\varphi' + B_m(x', r', t) \sin m\varphi'), \quad (4.1)$$

где во избежание путаницы с азимутальным составом дальнего поля (рисунок 3.6) Фурье образы соответствующих временных реализаций $A_m(t)$, $B_m(t)$ будут обозначаться как \hat{a}_m , \hat{b}_m .

Для получения более подробной пространственной информации о ближнем поле струи существовала возможность перемещения всей измерительной системы вдоль расположенных на полу акустической камеры рельс. Таким образом измерения проводились для пяти конфигураций расположения измерительной системы, заметая три конические поверхности C_1 , C_2 , C_3 (рисунок 4.1б).

При этом использовались 1/4” микрофоны Briel&Kjaer (тип 4957, частотный диапазон 50–10000 Гц). При этом скорости истечения исследованных струй совпадали с исследуемыми режимами в главе 3 (таблица 3.1).

На рисунке 4.2 изображены типичные спектры пульсаций давления ближнего поля, как для случая полного поля, так и его азимутальных компонент. Можно видеть, что для $Sh < 0.8$ доминирующими являются осесимметричная и первые косинус- и синус-мода. Формы же полученных спектров имели схожую форму с теми, что были получены в работах по исследованию ближнего поля струи [27,76].

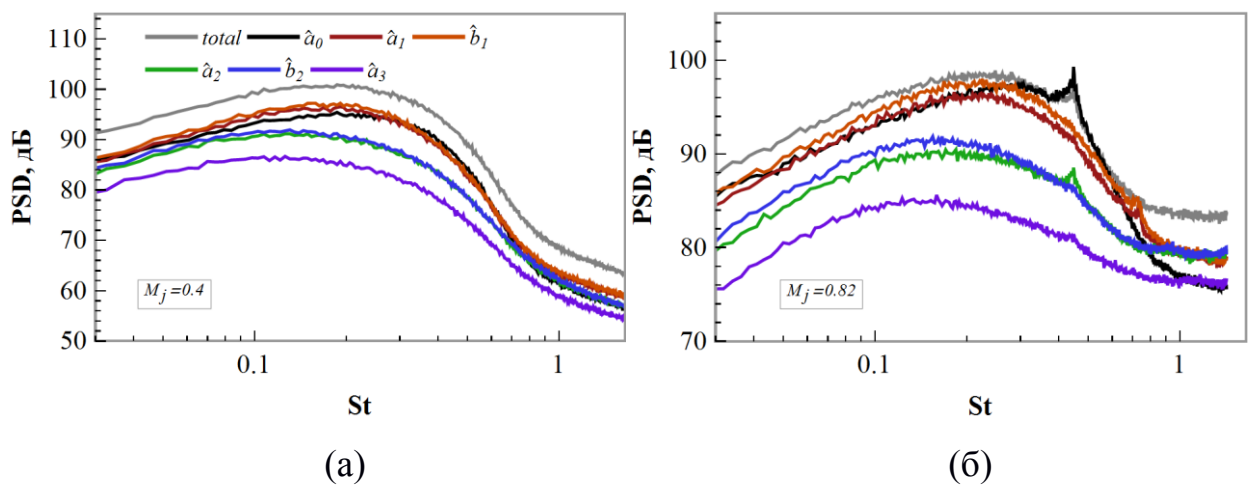


Рисунок 4.2. Спектры полного шума (*total*) и его азимутальных составляющих (a_i , b_i). Результаты для кольца микрофонов, расположенного при $x'/D = 3.5$, контур C_1 . (а) – режим струи $M_j = 0.4$, (б) – $M_j = 0.82$.

Измеренные спектры позволяли определить информацию об амплитуде пульсаций рассеивающихся азимутальных мод $\hat{a}_m = 0.5(A_m + A_{-m})$, $\hat{b}_m = -0.5i(A_m - A_{-m})$ (2.1) ближнего поля струи, в том числе и в области, характеризующей дальнейшее расположение кромки пластины.

Однако для моделирования структуры ближнего поля также важна информация и о конвективной скорости возмущений V_c . Для данного числа St относительная скорость конвекции определялась следующим образом

$$\frac{V_c}{V_j} \approx \frac{2\pi \cdot St}{\Delta},$$

где Δ – разность фаз между сигналами (разложенными уже по азимутальным компонентам), измеренными в соседних сечениях, и определяемая из функции когерентности γ .

Экспериментальные данные о конвективной скорости для первых двух доминирующих в ближнем поле мод представлены на рисунке 4.3. Можно видеть, что конвективная скорость возмущений, отнесенная к скорости струи, посчитанная по данным с кольцевых решеток $x' = 2.5D$ и $x' = 3.5D$ (поверхность C_I) для различных режимов струи имеет универсальную зависимость от числа Струхала (достаточно нетривиальный факт), что может быть удобно с точки зрения их аппроксимации эмпирическими зависимостями.

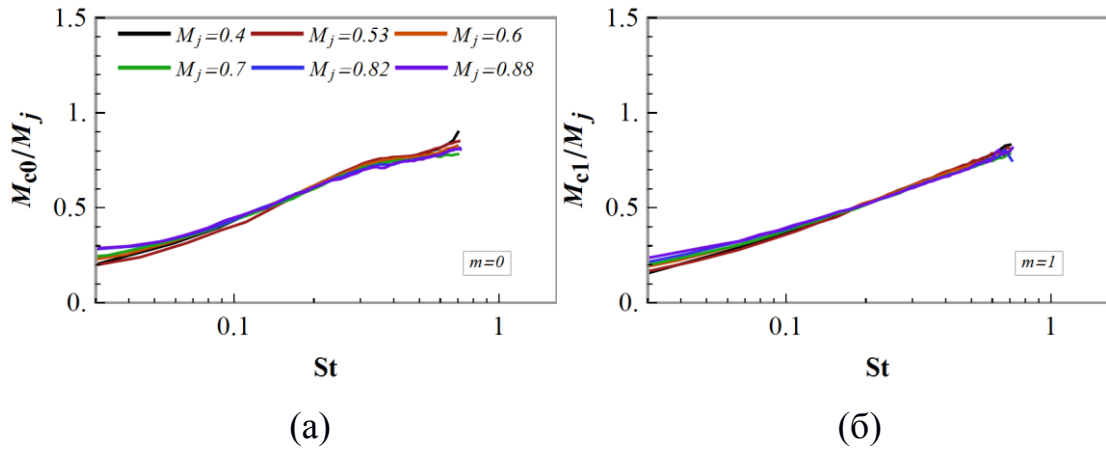


Рисунок 4.3. Зависимость относительной конвективной скорости возмущений от числа Струхала при различных режимах истечения струи. а) результат для \hat{a}_0 ; б) для \hat{a}_1 . На основе данных с кольцевых решеток $x' = 2.5D$ и $3.5D$, поверхность C_I .

Кроме того, измерения на разных конических поверхностях C_1 - C_3 (рисунок 4.1б) позволили исследовать эволюцию ближнего гидродинамического поля струи в радиальном направлении (рисунок 4.4а). Согласно полученному выражению (2.7) и в приближении широких волновых пакетов ($k_{cf}\delta_m \gg 1$) радиальная зависимость ближнего гидродинамического поля может быть описана в виде:

$$p_i(r) \sim K_m \left(\frac{k}{M_{cm}} \sqrt{(1 - M_{cm}^2)} r \right). \quad (4.2)$$

Непосредственная экспериментальная проверка данной зависимости при помощи приведения данных к одному радиусу позволила продемонстрировать, что описание эволюции низкочастотной части спектра действительно можно описать в рамках конвективного волнового уравнения (рисунок 4.4б).

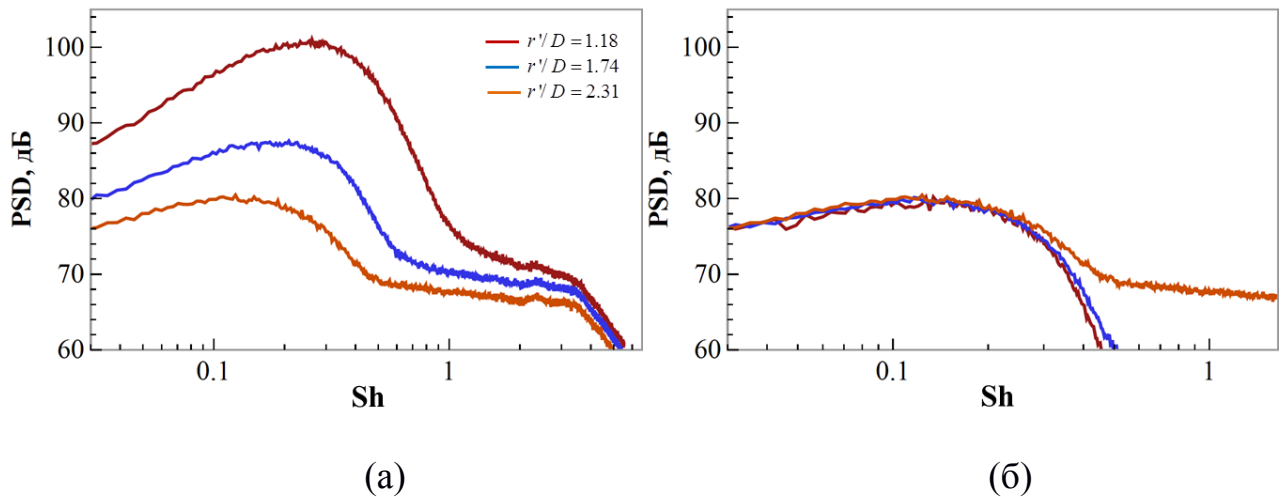


Рисунок 4.4. Исследование радиальной зависимости ближнего поля турбулентной струи в фиксированном сечении $x' = 2.5D$. а) результаты измерений для трех расположений микрофонов C_1 - C_3 ; б) результат пересчета спектров с поверхностей C_1 и C_2 на C_3 при помощи выражения (4.2).

Возможность достаточно простого учета радиальной зависимости (4.2) оказывается особенно полезной при использовании известных данных на конической поверхности и их пересчете на цилиндрическую поверхность с целью моделирования ближнего гидродинамического поля выражениями (2.3) или (2.31).

Более подробную информацию о результатах исследования ближнего поля струи можно найти в работе [60]. Однако представленных выше данных уже достаточно для применения разработанной в главе 2 модели шума взаимодействия струи и пластины.

4.2 Валидация аналитической модели для упрощенной конфигурации «струя-пластина» в статических условиях

Для начала далее будут представлены результаты моделирования шума взаимодействия струи и пластины на основе полученного решения (2.32) и данных из предыдущего раздела о ближнем поле изолированной струи и произведем сравнение с результатами эксперимента для конфигурации струя-пластина (раздел 3.1) [22,60].

На рисунке 4.5 показано сравнение результатов предсказания модели и экспериментальных данных о шуме взаимодействия струи для бокового направления $\theta = -90^\circ$ в терминах спектральной плотности. Для оценки влияния рассеяния старших азимутальных мод на рисунке представлены результаты предсказания при учете вклада рассеяния лишь осесимметричной моды (\hat{a}_0), первых двух косинус-мод ($\hat{a}_0 + \hat{a}_1$) и первых трех косинус-мод ($\hat{a}_0 + \hat{a}_1 + \hat{a}_2$) (рассеяние синус-мод \hat{b}_m , как было отмечено в главе 2, не приводит к излучению в полярной плоскости). Видно, что учет вклада уже третьей моды (a_2) не вносит существенного изменения в суммарный предсказанный спектр шума взаимодействия. Таким образом, для данной конфигурации при дальнейших расчетах возможно использование упрощенной процедуры, включающей рассеяние на кромке лишь осесимметричной и первой моды ближнего поля струи. Стоит отметить, что существенный пик в результатах моделирования для $M_j = 0.82$ может скорее всего быть связан с ошибкой проекции известных данных о пульсациях ближнего поля струи с поверхности C_1 на цилиндрическую поверхность $r' = h$. При этой операции ошибочно захватывается, так называемая структура “trapped wave” [77], проецирование которой необходимо совершать по другому закону, нежели проецирование поля пакетов волн неустойчивости. Другими словами данные структуры затухают гораздо быстрее в радиальном направлении, чем поле волн неустойчивости.

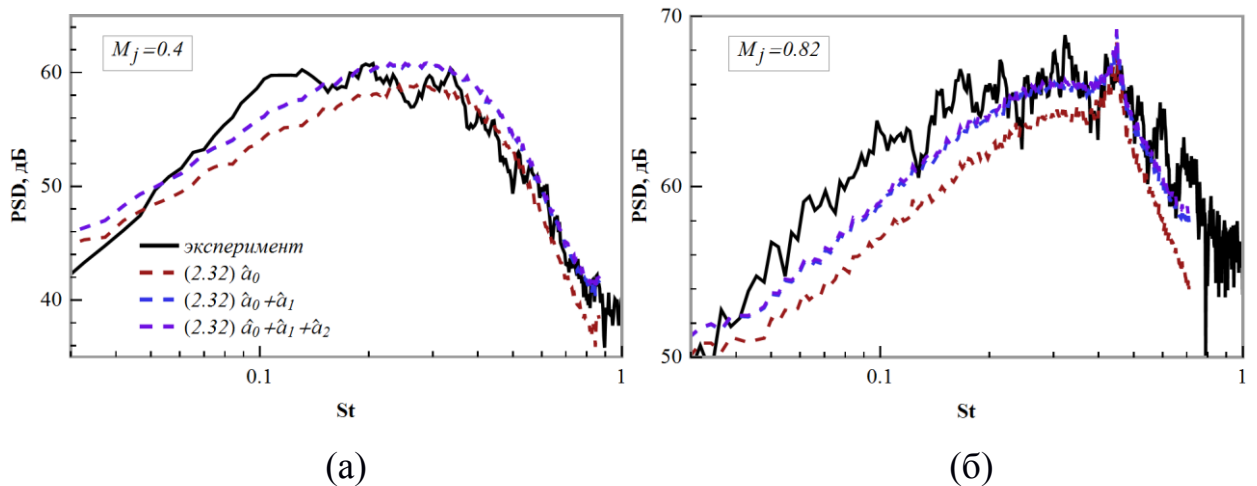


Рисунок 4.5. Сравнение модельных (учет вклада рассеяния различных мод (2.32)) и экспериментальных спектров шума взаимодействия под углом $\theta = -90^\circ$ для (а) $M_j = 0.4$, (б) $M_j = 0.82$. Сплошные кривые – эксперимент (рисунок 3.3), пунктирные кривые – результаты моделирования.

Из рисунка 4.5 видно хорошее согласие между модельными и экспериментальными спектрами: верно описывается форма спектра и ее изменение с ростом скорости истечения струи, положение и уровень максимума. Заметные отличия можно наблюдать на низких частотах ($Sh < 0.2$), что может быть связано с несколькими факторами: для низких частот все менее справедлива замена пластины конечных размеров полуплоскостью (влияние конечности хорды).

На рисунке 4.6 показаны нормированные диаграммы направленности для чисел Струхала 0.2, 0.4, 0.6 соответствующих рассматриваемой низкочастотной области усиления шума струи. Поскольку при больших скоростях струи шум взаимодействия быстро теряется на фоне шума струи при уменьшении полярного угла, что не позволяет построить его направленность в значимом диапазоне углов, на рисунке 4.6 приведены результаты только для сравнительно медленных струй. Из-за достаточно хорошего совпадения (~ 2 дБ расхождения для не выбивающихся в эксперименте точек) модельных результатов и эксперимента можно отметить, что экспериментальная направленность с хорошей точностью описывается простым членом $\sin(\theta/2)/(1 - M_{cm} \cos \theta)$ (см. (2.32)). При использовании модели

учитывалось, что микрофоны в эксперименте центрированы на выходное сечение сопла, а результаты решения модельной задачи выписаны для системы координат, связанной с кромкой пластины.

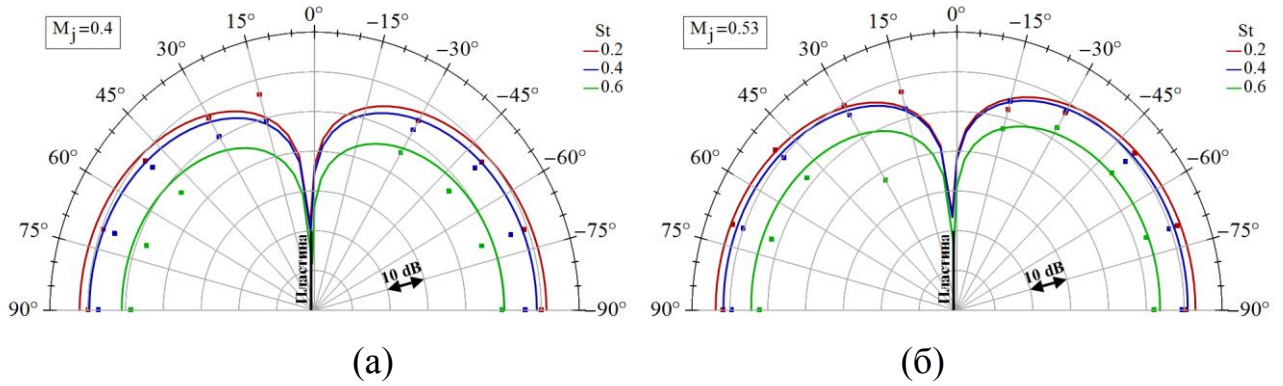


Рисунок 4.6. Диаграммы направленности шума взаимодействия струи и пластины для различных чисел Струхала. Линии – результаты моделирования, точки – экспериментальные данные. а) $M_j=0.4$, б) $M_j=0.53$. В модели учитывался вклад рассеяния мод \hat{a}_0 и \hat{a}_1 .

Кроме того наличие данных об азимутальном составе дальнего поля упрощенной конфигурации позволяет провести более тонкую валидацию модели [78]. Но прежде для более понятного представления обсуждаемых ниже связей азимутальных составов ближнего поля изолированной струи и дальнего поля шума взаимодействия представим результирующее выражение (2.33) в следующем упрощенном виде:

$$P_{a_m}(x, r, \varphi, \omega) \approx \alpha_m(\omega) \left(a_{m1}(x, r, \omega) \cos \varphi + a_{m3}(x, r, \omega) \cos 3\varphi + \dots \right) \quad (4.3)$$

$$P_{b_m}(x, r, \varphi, \omega) \approx \beta_m(\omega) \left(b_{m2}(x, r, \omega) \sin 2\varphi + b_{m4}(x, r, \omega) \sin 4\varphi + \dots \right) \quad (4.4)$$

где a_{mn} , b_{mn} – передаточные функции между соответственно модами \hat{a}_m и \hat{b}_m ближнего поля изолированной струи (рисунок 4.2а) и модами a_n ($n=1,3,5\dots$) и b_n ($n=2,4,6\dots$) дальнего поля шума взаимодействия (рисунок 3.6), α_m и β_m – амплитуды пульсаций мод ближнего поля \hat{a}_m , \hat{b}_m на контрольной поверхности. Таким образом, выражения (4.3-4.4) наглядно демонстрируют связь азимутального состава ближнего поля струи, рассеиваемого на задней кромке

рассеивающей поверхности и с азимутальным составом шума взаимодействия в дальнем поле.

На рисунке 4.7 для рассчитанных спектров и направленностей показан вклад различных мод ближнего поля. Как видно, основной вклад в дальнее поле дают моды ближнего поля \hat{a}_0 , \hat{a}_1 и \hat{b}_1 , в то время как вкладом мод \hat{a}_2 и \hat{b}_2 практически везде можно пренебречь, что соответствует проведенному выше анализу решения модельной задачи и результатов измерения ближнего поля струи (рисунок 4.2).

Сравнение измеренных и рассчитанных спектров и направленностей мод шума взаимодействия представлено на рисунке 4.8. Как видно, количественно предсказываются главные члены азимутального разложения шума взаимодействия – моды a_1 и b_2 . Расхождения, наблюдаемые для моды b_2 при малых углах наблюдения ($x/d > 40$), могут быть связаны с низкой точностью восстановления данной моды из эксперимента в связи с малостью ее амплитуды (на 20 дБ ниже основного сигнала). Характеристики моды a_3 , являющейся поправкой к главному члену разложения a_1 , приемлемо предсказываются только для области ее максимума ($x/d < 0$), а расхождение с экспериментом при $x/d > 0$ может быть связано с тем, что в модели не учитывается конечность хорды пластины. Кроме того, как это указывается в работе [78], на расхождение результатов модели и эксперимента могут повлиять как фактор неопределенности геометрических параметров конфигурации, так и точность определения пульсаций давления вблизи кромки пластины.

Приведенные на рисунке 4.8 результаты расчетов шума взаимодействия на основе измеренных характеристик пульсаций ближнего поля демонстрируют, что аналитическая модель помимо вполне удовлетворительного предсказания характеристик суммарного шума взаимодействия (рисунки 4.5-4.6), который в значительной степени определяется дипольным членом $\propto \cos \varphi$, позволяет также объяснить и описать структуру азимутального состава шума взаимодействия, а также ее взаимосвязь с азимутальной структурой пульсаций ближнего поля струи.

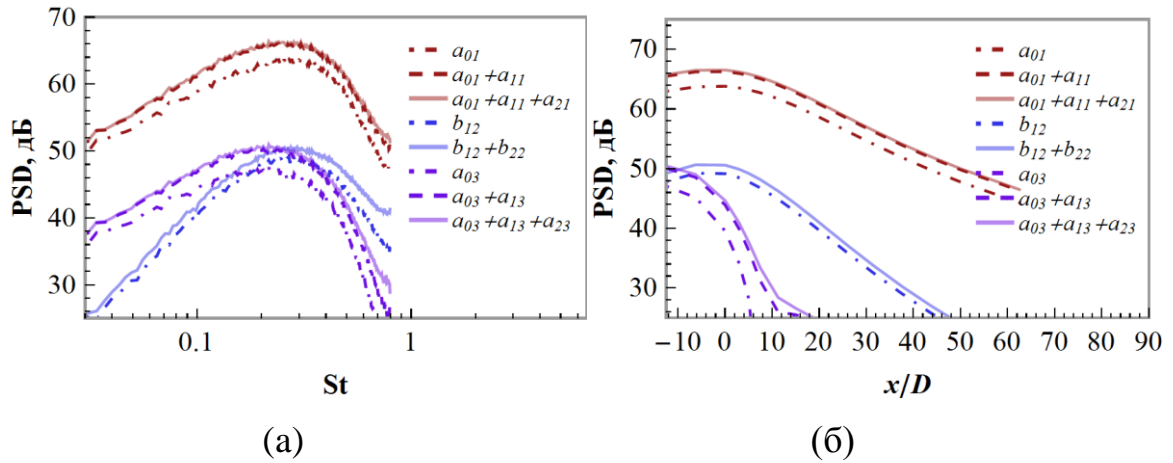


Рисунок 4.7. Вклад рассеяния различных мод ближнего поля в моды дальнего поля: а) спектры для $x/D = -15.5$, б) цилиндрические направленности для $St = 0.2$.

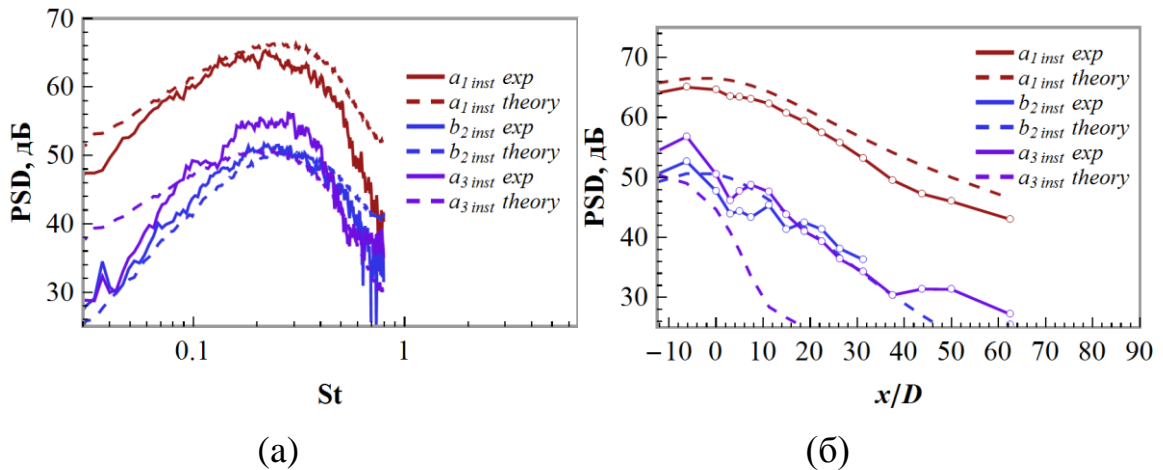


Рисунок 4.8. Сравнение результатов моделирования (9) и эксперимента: а) спектры азимутальных мод для $x/D = -15.5$, б) направленности для $St = 0.2$. Сплошные линии – эксперимент, пунктир – модель.

Анализ полученной в модели связи между пульсациями ближнего поля и шумом в дальнем поле (2.33) и исследование ближнего поля струи (рисунок 4.2) показывает, что шум взаимодействия в основном определяется рассеянием мод ближнего поля \hat{a}_0 и \hat{a}_1 , при этом вклад каждой моды примерно одинаков (об этом говорит разница около 3 дБ в диапазоне St от 0.1 до 0.6 между результатами для рассеяния \hat{a}_0 и $\hat{a}_0 + \hat{a}_1$, рисунок 4.7). В свою очередь, это связано с тем, что передаточные функции между ближним и дальним полем a_{01} и a_{11} , а также a_{03} и

a_{13} оказываются попарно близкими, и выражения (4.3-4.4) можно приближенно переписать в следующем виде

$$P(x, r, \varphi, \omega) \approx (\alpha_0 + \alpha_1)(a_{01} \cos \varphi + a_{03} \cos 3\varphi) \quad (4.5)$$

а спектр шума взаимодействия в дальнем поле будет определяться как

$$S(x, r, \varphi, \omega) \approx S_0 \left(|a_{01}|^2 \cos^2 \varphi + 2 \operatorname{Re}[a_{01} a_{03}^*] \cos \varphi \cos 3\varphi \right), \quad (4.6)$$

где $S_0(\omega) \approx \overline{\alpha_0 \alpha_0^*} + \overline{\alpha_1 \alpha_1^*}$ – спектр пульсаций в области кромки пластины. Смысл упрощения (4.5-4.6) заключается в том, что характеристики шума взаимодействия, можно определить, зная суммарные пульсации в ближнем поле струи, т.е. без разложения ближнего поля на азимутальные моды. На рисунке 4.9 представлено сравнение результатов моделирования для выражений (4.3)-(4.4) и упрощенного выражения (4.5), для которого конвективная скорость возмущений рассчитывалась при помощи пары микрофонов, расположенных в упомянутых на рисунке 4.3 сечениях при $\varphi = 0$.

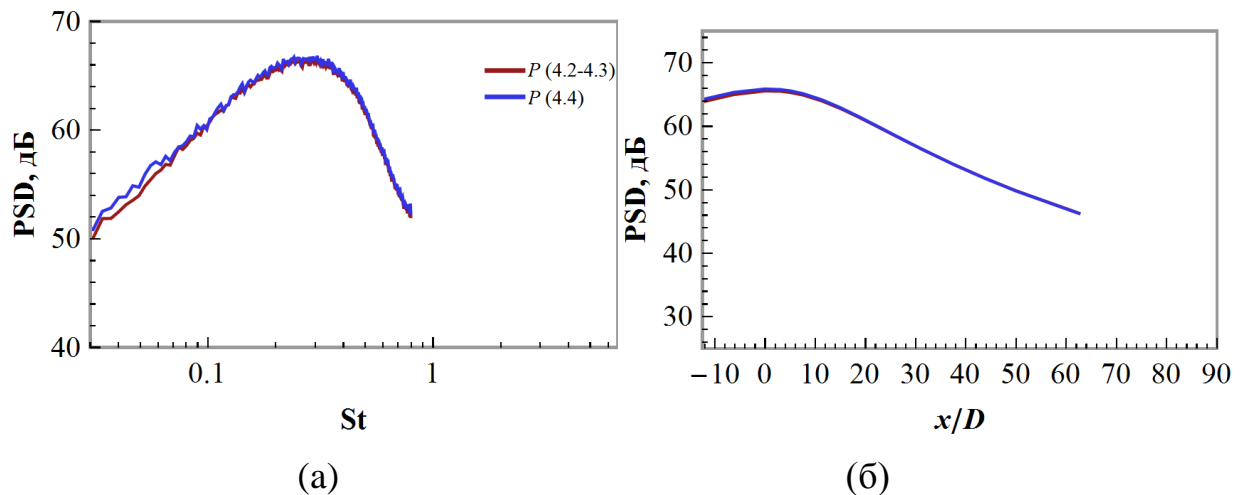


Рисунок 4.9. Сравнение результатов моделирования полного шума взаимодействия по формулам (4.3-4.4) и (4.5). а) сравнение спектров для $x/d = 0$, $\varphi = 0$; б) сравнение направленностей для $St = 0.2$.

Хорошее совпадение результатов моделирования по формулам (4.3)-(4.4) и по упрощенной формуле (4.5) для рассматриваемой конфигурации позволяет предложить следующие варианты измерений ближнего поля для предсказания

шума взаимодействия струи и крыла: измерения парой микрофонов в отсутствие крыла в области предполагаемого расположения задней кромки (рисунок 4.10а), либо измерения парой датчиков, установленных непосредственно на поверхности крыла вблизи кромки (рисунок 4.10б, при этом для учета эффекта отражения потребуется коррекция сигнала в 6 дБ). Использование пары микрофонов объясняется необходимостью измерения фазовых скоростей пульсаций. Данные варианты существенно проще измерений кольцевыми решетками, кроме того, второй вариант с установкой датчиков на поверхности позволяет избавиться от обсуждавшихся в работе [70,78] погрешностей, связанных с неточной установкой микрофонов или крыла. Необходимо отметить, что в отличие от измерений микрофонами в свободном поле, измерение пульсаций специальными датчиками, размещенными на поверхности крыла, можно проводить при наличии спутного потока, что будет использовано и продемонстрировано далее.

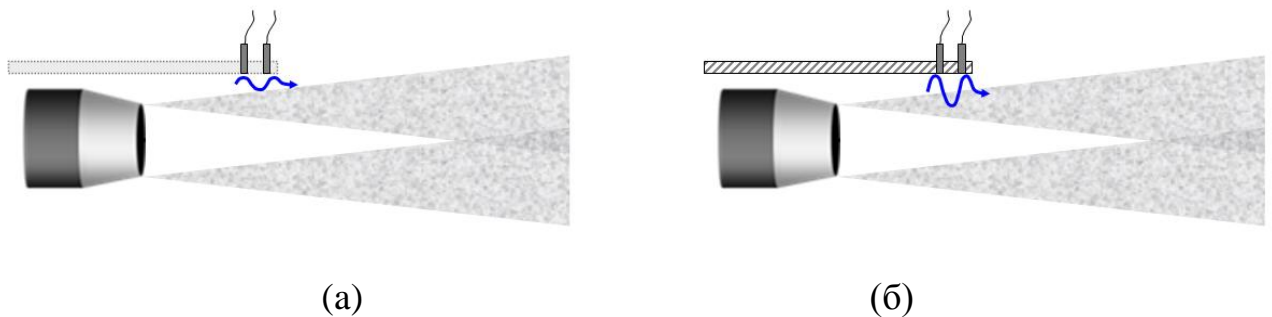


Рисунок 4.10. Варианты измерения пульсаций ближнего поля для расчетной оценки шума взаимодействия струи и крыла. а) измерения в свободном поле без пластины; б) измерения при наличии пластины.

В работе [79] для дальнейшей валидации упрощенной двухточечной модели методом LES проводилось численное моделирование шума струи вблизи прямоугольной пластины, имитирующей крыло самолета. Было показано, что модифицированная модель, имеющая простой набор входных параметров, позволяет с приемлемой точностью предсказывать основные характеристики шума взаимодействия струи и крыла, в том числе в условиях наличия спутного потока, характерных для взлета и посадки самолета.

4.3 Экспериментальное исследование структуры ближнего поля изолированной струи в условиях полета

В разделах 4.1,4.2 для применения разработанной модели шума взаимодействия струи и рассеивающей поверхности исследовалось ближнее поле струи при помощи многомикрофонной системы, что было возможно в условиях отсутствия спутного потока. Однако наличие спутного потока не только усложняет математические выкладки при решении модельной задачи, оно также усложняет и проведение эксперимента по исследованию ближнего поля изолированной струи. В этом случае использованная микрофонная решетка оказывается в поле ненулевой скорости и в этом случае необходимо существенно модифицировать конфигурацию измерительной системы. Так можно было бы использовать специальные противоветровые накладки или предусмотренные для данного случая микрофоны «пулевого» типа. Однако в работе [74] был применен менее затратный способ реконструкции данных о пульсациях давления в ближнем поле струи, основанный на термоанемометрических измерениях среднего и пульсационного полей продольной скорости струи. Так было показано, что на основе среднего поля скорости можно использовать численное решение параболических уравнений устойчивости (PSE). Данный подход вкупе с известными экспериментальными данными о пульсациях на оси струи позволял восстановить необходимые данные о пульсациях осесимметричной моды в ближнем поле струи. В условиях статики было показано, что реконструкция с использованием данного метода хорошо согласуется с экспериментальными данными, приведенными в разделе 4.1, что позволило затем применить данный метод и в более сложных условиях при наличии спутного потока. Также в работе [80] в обход применения PSE-подхода для получения поперечного профиля давления было предложено использование решения уравнения типа Рэлея в локально параллельном приближении. При этом происходил не поиск собственного решения уравнения, а поиск действительного решения,

соответствующего известной конвективной скорости возмущений. Отдельно была затронута проблема пересчета измеренных пульсаций скорости на оси в пульсации давления и необходимость учета градиента скорости.

Тем не менее, безотносительно использованного метода восстановления данных в ближнем поле струи уже из анализа пульсаций продольной скорости, измеренной на оси струи термоанемометром, можно отметить какие изменения отмечаются при включении спутного потока. Так на рисунке 4.11 представлены пульсационные характеристики в виде измеренных на оси струи при $x'/D = 3.2$ спектров и продольных распределений пульсаций для $St = 0.4$, где для разделения режимов был использован коэффициент спутности $\lambda = V_{cf} / V_j$. Можно отметить, что пульсации скорости на оси в максимуме и в области низких частот для случая статики являются большими, чем в случае полета. Кроме того, разница в уровнях пульсаций для выбранного числа Струхала на протяжении всего потенциального ядра для случая статики и полета составляет примерно 3-4 дБ.

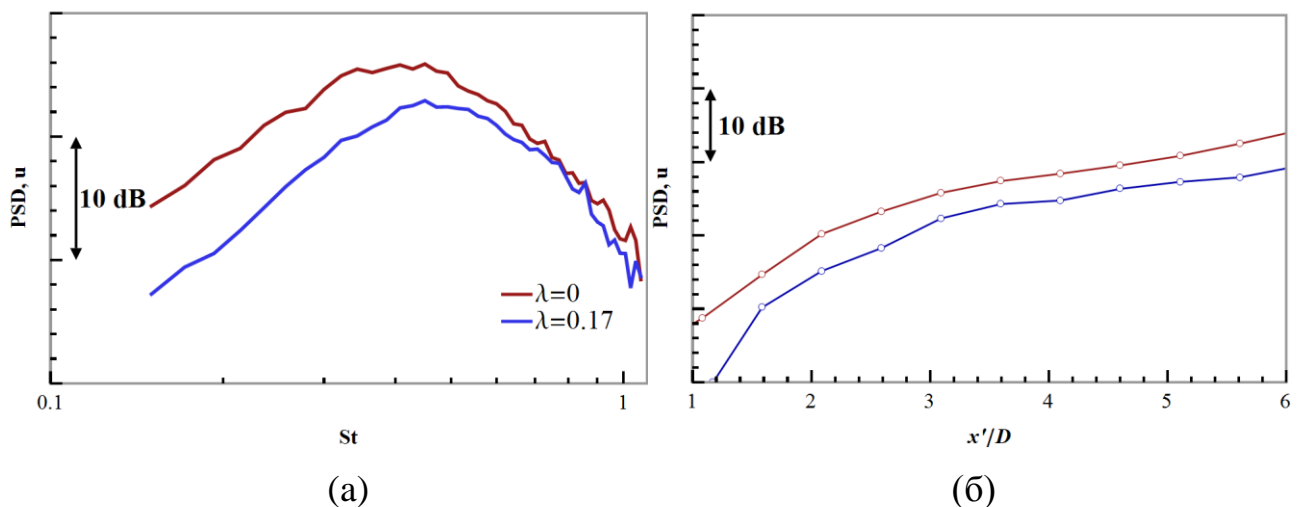


Рисунок 4.11. Измеренные пульсационные характеристики изолированной турбулентной струи $V_j = 181$ м/с. а) спектр пульсаций продольной скорости на оси для $x'/D = 3.2$; б) огибающая для возмущений скорости, $St = 0.4$. Красная кривая: $V_{cf} = 0$ м/с; синяя кривая: $V_{cf} = 30$ м/с.

Также путем анализа результатов PSE-моделирования исследовалось влияние спутного потока на конвективную скорость возмущений [74] и было показано, что конвективная скорость как осесимметричной моды, так и первой косинус-моды

оказывается выше в условиях полета, нежели чем она была в условиях статики. При этом конвективную скорость в случае наличия потока также можно было определять экспериментально при наличии не одного, а двух термоанемометров, как это было проделано в работе [81].

Таким образом, путем реконструкции данных из пульсаций продольной скорости, измеренных на оси струи, были восстановлены все необходимые данные для применения разработанной модели (2.34), позволяющей предсказать характеристика шума взаимодействия и в условии спутного потока.

4.4 Валидация аналитической модели для упрощенной конфигурации «струя-пластина» в условиях полета

Для более наглядной демонстрации результатов типичные спектры и направленности шума взаимодействия будут представляться для случая полета в сравнении со случаем статики. На рисунке 4.12 экспериментальные данные и результаты моделирования сравниваются для случая бокового направления. Для модельных спектров исследовался как вклад осесимметричной моды, так и суммарный вклад осесимметричной и первой косинус-моды. Стоит отметить, что путем реконструкции входные параметры в виде пульсаций давления для первой косинус-моды восстановить не представляется возможным ввиду того, что одиночным термоанемометром невозможно выделить пульсации скорости данной моды из всего поля пульсаций. Однако опыт анализа результатов для случая статики позволяет говорить о том, что амплитуды пульсаций давления первых двух доминирующих азимутальных мод оказываются одного порядка вблизи типичного расположения рассеивающей кромки. Таким образом, можно видеть, что модель достаточно хорошо отражает форму спектра шума взаимодействия для области $0,2 < St < 0,8$, где абсолютные значения прогнозируются с точностью около 2-4 дБ (принимая во внимание довольно большой доверительный интервал

экспериментальных данных). При этом наблюдается существенное недопредсказание в области низких частот, причины которого обсуждались в работе [74] и связывались с тем, что результаты PSE не соответствуют экспериментальным данным для таких низких частот ($St \leq 0,2$) и, следовательно, точность восстановления поля давления являлась довольно низкой. Для более высоких частот ($St \geq 0,8$) в шуме взаимодействия начинает преобладать рассеяние уже акустических колебаний ближнего поля струи.

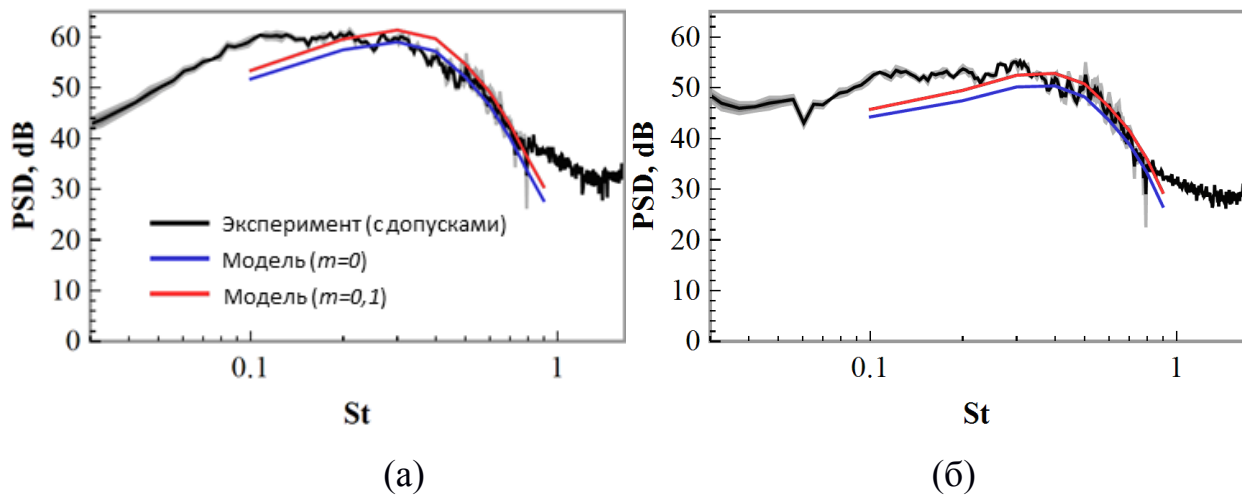


Рисунок 4.12. Сравнение измеренных и предсказанных спектров шума взаимодействия струи и пластины в боковом направлении ($x'/D = 3$). (а) - статические условия ($V_{cf} = 0$ м/с); (б) - условия полета ($V_{cf} = 30$ м/с). Серые области на экспериментальных спектрах соответствуют доверительным интервалам, оцененным в работе [74]. $V_j = 137$ м/с.

Также для сравнения экспериментальных данных и предсказанных исследовались азимутальные направленности (см. рисунок 2.7). На рисунке 4.13 представлены результаты для пары выбранных чисел Струхала: 0.4 и 0.6. Можно отметить, что результаты предсказания азимутальных направленностей достаточно хорошо согласуются с экспериментальными наблюдениями, а ошибка не превышает 3 дБ в случае статики и 2 дБ в случае полета. При этом нельзя уверенно сказать, с чем связана повышенная точность модели при наличии спутного потока.

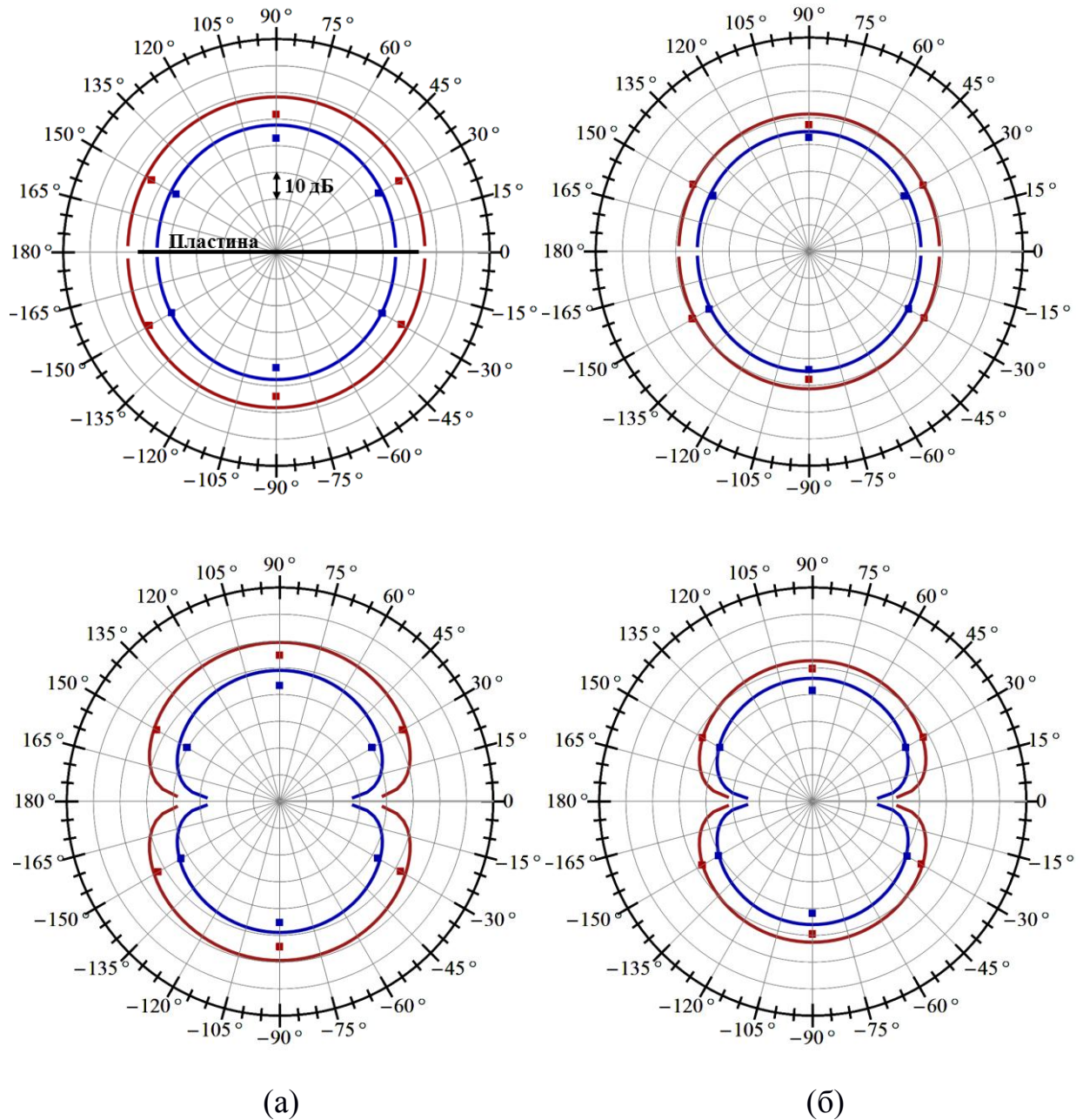
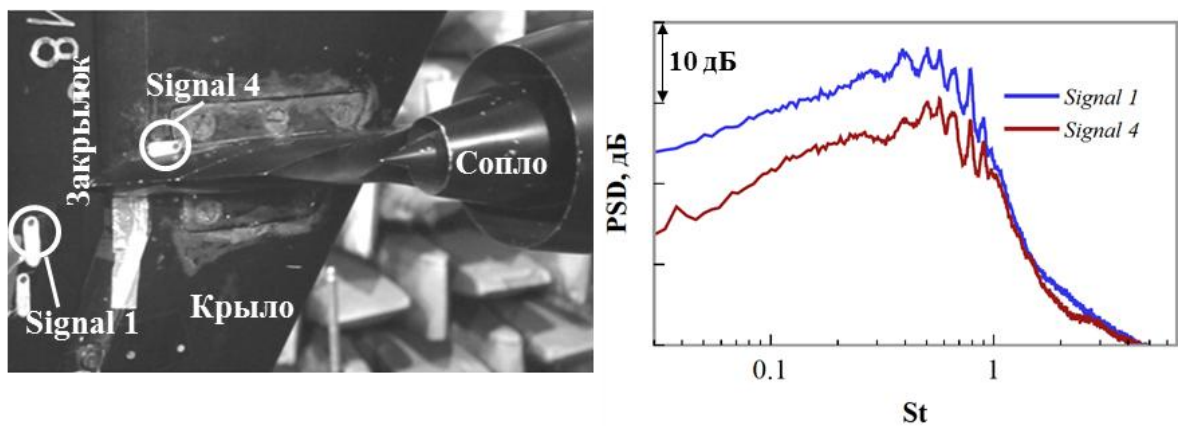


Рисунок 4.13. Сравнение измеренных и предсказанных азимутальных направленностей шума взаимодействия струи и пластины. (а) - статические условия ($V_{cf} = 0$ м/с); (б) - условия полета ($V_{cf} = 30$ м/с). Сплошные кривые – модель, маркеры - эксперимент. Верхняя пара – $x/D = -12.7$, нижняя - $x/D = 5$. Красные кривые – $St = 0.4$, синие – $St = 0.6$. $V_j = 137$ м/с.

4.5 Определение информации о рассеивающемся поле на задней кромке закрылка в случае приближенной к реальной конфигурации

В предыдущем разделе было показано, что разработанная модель достаточно хорошо предсказывает характеристики шума взаимодействия, в том числе и в случае наличия спутного потока. Однако интересным остается испытание робастности модели и в условия более реалистичной конфигурации, описанной в разделе 3.3. По аналогии с конфигурацией струя-пластина для данной конфигурации существовал также доступ и к данным о рассеивающемся на кромке закрылка ближнем гидродинамическом поле струи. Однако, в отличие от эксперимента со струей и пластиной, данные о ближнем поле струи были сильно ограничены, в связи с тем, что эксперимент не был изначально предназначен для описанных в данной работе целей.



(a)

(б)

Рисунок 4.14. Исследование ближнего поля струи, рассеивающегося на задней кромке закрылка. а) расположение датчиков для исследования пульсаций ближнего поля струи на нижней поверхности крыла (3.13 б); б) пример спектров пульсаций ближнего поля струи, измеренные датчиками (режим истечения струи: внутренний контур -280 м/с, внешний контур – 245 м/с).

На рисунке 4.14а изображены установленные заподлицо на нижней поверхности крыла датчики (датчики Kulite, тип LQ-47), измерения которых использовались для моделирования ближнего поля струи. При этом на рисунке 4.14б изображены измеренные датчиками спектры.

Как указывалось выше, информация о ближнем поле струи для данной конфигурации оказывается серьезно ограниченной. Однако опыт предыдущих исследований позволяет ввести следующие предположения:

1) Ближнее поле двухконтурной струи в данной конфигурации определяется в основном параметрами внешнего контура, т.к. скорости истечения струй из обоих контуров отличаются не очень сильно (280 м/с и 245 м/с), и внутренний слой смешения достаточно слаб, что позволяет использовать разработанную модель без изменений;

2) Приведенные выше результаты исследования ближнего поля одноконтурной струи позволяют говорить о том, что для рассматриваемого положения закрылка основной вклад в рассеянное поле (полярная плоскость) будут вносить осесимметричная и первая косинус-мода, что было отражено в выражениях (4.5)-(4.6).

3) Основываясь на предыдущем опыте можно сказать, что передаточные функции между ближним гидродинамическим полем изолированной струи и дальним акустическим полем шума взаимодействия оказываются достаточно схожими, что существенно уменьшает количество необходимых данных:

$$P_{ld}^{total} = \tilde{A}_{total} \frac{\sin(\theta/2)}{1 - M_c \cos \theta}$$

где \tilde{A}_{total} - амплитуда из (2.32), основанная уже на пульсациях полного (без разложения на азимутальные составляющие) рассеивающегося поля (данные из Signal 1 (рисунок 4.14а)), M_c - конвективная скорость полного поля, посчитанная по двум датчикам Signal 1 и Signal 4. При этом стоит отметить, что для датчиков установленных заподлицо будет присутствовать эффект отражения, который будет скомпенсирован путем вычитания 6 дБ из полученных спектров.

Таким образом, выдвинутые предположения позволяют произвести предсказание шума взаимодействия, используя данные всего лишь 2 датчиков, как это и было предложено в разделе 4.2.

4.6 Валидация разработанной модели для конфигурации «скользящее крыло-закрылок-двухконтурная струя»

В предыдущем разделе на основе выводов раздела 4.2 было показано, что двух датчиков, расположенных друг за другом на некотором расстоянии вдоль оси струи, так, что один из датчиков располагается вблизи рассеивающей кромки, может быть достаточно для получения оценки шума взаимодействия.

Для демонстрации работоспособности такого подхода и самой модели в условиях крайне ограниченного количества данных и приближенной к реальной конфигурации далее на рисунке 4.15 представлены сравнения предсказанных и выделенных на основании измерений (см. рисунок 3.15) в дальнем поле спектров шума взаимодействия.

Из анализа представленных результатов можно сделать достаточно обнадеживающий вывод, что упрощенная модель предсказания шума взаимодействия позволяет производить достаточно точную оценку эффекта усиления шума (как минимум в области максимума и в широком диапазоне полярных углов) не только в условиях сильно ограниченной информации для определения входных данных, но и в условиях приближенной к реальной конфигурации модели крыла с отклоненным закрылком вблизи двухконтурной струи. При этом при разработке модели не брались в расчет множество факторов, таких как конечность хорды крыла, стреловидность крыла, конечная ширина задней кромки. По всей видимости, данные факторы либо уравнивали друг друга, либо оказались в данном случае не так существенны.

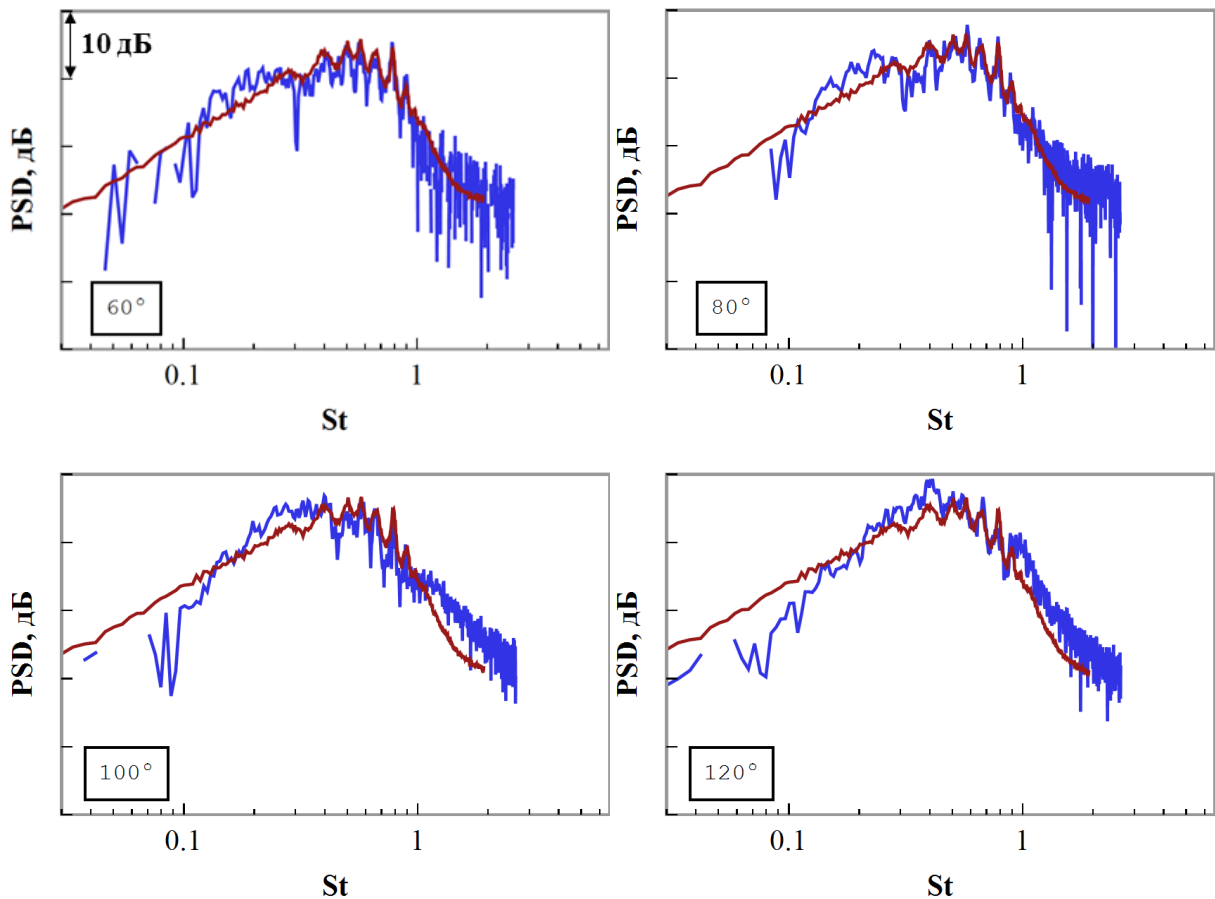


Рисунок 4.15. Сравнение измеренных и предсказанных спектров шума взаимодействия струи и крыла с отклоненным закрылком для различных полярных углов θ (см. рисунок 3.14а). Синие линии – эксперимент, красные линии - предсказание. Условие статики ($V_{cf} = 0$ м/с).

Также, опираясь на положительный опыт использования модели в условиях спутного потока для конфигурации струя-пластина, интересным в данном случае оставалась проверка модели в условиях спутного потока для усложненной конфигурации. На рисунке 4.16 продемонстрировано сравнение предсказанных и измеренных спектров шума взаимодействия. Можно видеть, что модельные данные достаточно хорошо улавливают как форму спектра, так и абсолютные значения уровней пульсаций давления в дальнем поле. При этом наблюдается существенное расхождение двух кривых в области низких частот, что может быть связано с ошибкой процедуры определения данных о шуме взаимодействия в условиях наличия спутного потока, так как форма выделенного спектра (3.4)

очень сильно напоминает доминирующий в данном диапазоне частот источник шума, связанный с обтеканием крыла (см. Рисунок 3.15б, красная кривая).

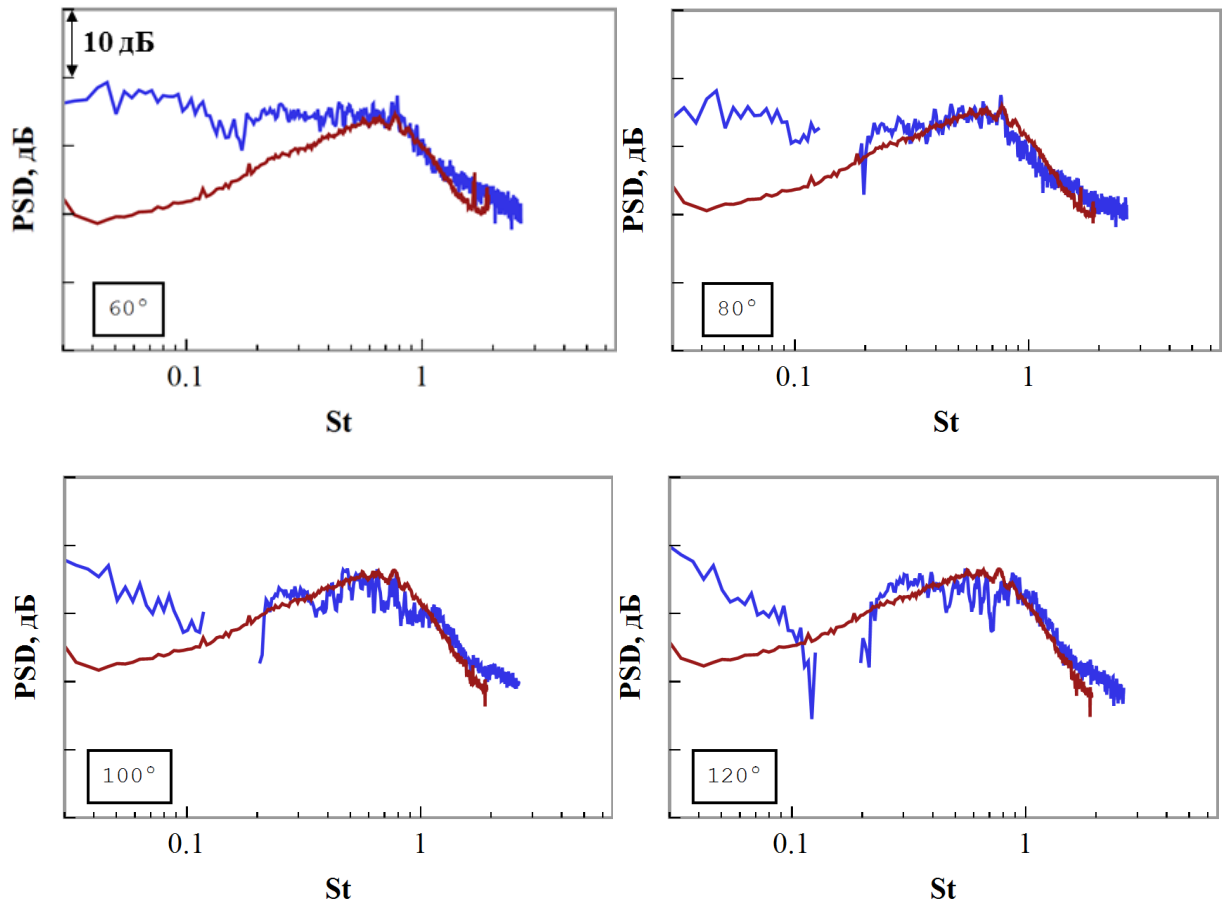


Рисунок 4.16. Сравнение измеренных и предсказанных спектров шума взаимодействия струи и крыла с отклоненным закрылком для различных полярных углов θ . Синие линии – эксперимент, красные линии - предсказание. Условие полета ($V_{cf} = 80$ м/с).

Представленные результаты в сумме демонстрируют хорошую точность и надежность разработанной модели, учитывающей лишь ограниченное количество факторов, главным образом определяющих рассматриваемый физический эффект. В тоже время, работоспособность модели в условиях наличия информации лишь с двух датчиков позволяет существенно упростить процедуру сбора необходимой входной информации, при этом получая достаточно точные оценки эффекта усиления шума струи вблизи крыла.

4.7 Выводы по Главе 4

- Проведено экспериментальное исследование ближнего поля изолированной турбулентной струи в статических условиях. Показано, что в области низких частот значимыми являются первые две азимутальные косинус-моды и первая синус-мода. Для доминирующих азимутальных мод продемонстрирована универсальность зависимости от числа Струхала относительной конвективной скорости возмущений ближнего поля струи при различных скоростях истечения струи. Непосредственно продемонстрирована возможность описания радиальной эволюции ближнего гидродинамического поля турбулентной струи в рамках конвективного волнового уравнения.

- Выполнена валидация модели на серии экспериментальных данных для упрощенной конфигурации «струя-пластина». Для статических условий показано, что модель позволяет предсказать спектральные характеристики, а также полярную и азимутальную направленности шума взаимодействия, основываясь на данных об азимутальных модах ближнего поля изолированной струи.

- Предложен упрощенный вариант модели, основанный на использовании двух датчиков давления, расположенных друг за другом на поверхности рассеивающей поверхности у кромки. Достоинством данного метода является возможность его применения при измерениях в незаглушенных помещениях, при исследовании сложных геометрий, а также в случае наличия спутного потока.

- Для полетных условий предложен метод сбора необходимых в модели входных данных, основанный на термоанемометрических измерениях среднего и пульсационного поля продольной скорости струи и дальнейшей реконструкции ближнего поля струи при помощи решения уравнений типа Рэлея.

- Проведена валидация модели в условиях наличия спутного потока, моделирующего эффект полета самолета. Этот результат имеет важное

практическое значение, т.к. обосновывает возможность использования разработанной модели при проведении расчетных оценок шума самолетов на местности.

- Показано, что разработанная модель позволяет корректно предсказывать характеристики шума взаимодействия и в случае реальной конфигурации «механизированное крыло вблизи двухконтурного сопла».

- На основе разработанной модели и анализе полученных экспериментальных данных написано программное обеспечение для оценки характеристик низкочастотного шума взаимодействия струи и крыла самолета в статических условиях [82].

Заключение

1. Получено аналитическое решение поставленной двумерной модельной задачи с помощью метода Винера-Хопфа, позволяющее проследить механизм усиления шума струи вблизи крыла. Показано, что рассеяние на кромке крыла гидродинамического поля от волны неустойчивости приводит к излучению звуковых волн, амплитуда которых (в силу линейной постановки задачи) пропорциональна амплитуде падающей на кромку крыла волны неустойчивости. Таким образом объясняется экспоненциальное возрастание шума в дальнем поле при уменьшении расстояния между слоем смещения и крылом.

2. Получено аналитическое решение поставленной трехмерной модельной задачи с помощью метода Винера-Хопфа, позволяющее построить простую модель шума взаимодействия струи и крыла самолета. Показано, что разработанная модель описывает основные тенденции в поведении шума взаимодействия: направленность типа кардиоиды с конвективным растяжением $\sin(\theta/2) / (1 - M_c \cos \theta)$, экспоненциальная зависимость уровней шума от расстояния между пластиной и струей $e^{-\frac{k}{M_{cm}} \sqrt{(1 - M_{cm}^2)} h}$.

3. При анализе полученного решения модельной задачи продемонстрирована связь азимутальных мод ближнего поля струи в азимутальные моды дальнего поля шума взаимодействия. Дано объяснение наличию четных синус-мод в модальном составе шума взаимодействия, а также появлению корреляции нечетных синус-мод. Также используемый подход позволил учесть влияние наличия спутного потока на спектр и направленность шума взаимодействия.

4. Для конфигураций «сопло-пластина» и «двухконтурное сопло - крыло» получены экспериментальные данные об основных характеристиках шума взаимодействия: спектры, полярная и азимутальная направленности.

5. Экспериментально исследованы основные характеристики ближнего поля струи в диапазоне чисел Маха 0.4-0.88: спектры, распределение амплитуд и конвективных скоростей. На основе полученных данных выполнен расчет основных характеристик шума взаимодействия в дальнем поле в рамках разработанной модели.

6. При сравнении результатов экспериментального исследования и моделирования шума взаимодействия продемонстрирована достаточно хорошая точность совпадения, как в терминах спектральных характеристик, так и в терминах направленности ($\sim 2-3$ дБ различия в области максимума эффекта).

Список литературы

1. Приложение 16. Охрана окружающей среды. Том I. Авиационный шум. Издание 8. © ICAO 2017.
2. Кузнецов В.М. Проблемы снижения шума пассажирских самолетов // Акустический журнал. 2003. Т. 49, № 3. С. 293–317.
3. Peak N. Modern Challenges Facing Turbomachinery Aeroacoustics // Annual Review of Fluid Mechanics. 2012. Vol. 44. P. 227-248.
4. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General theory // Proceedings of the Royal Society. 1952. A 211. P. 564–587.
5. Way D.J., Turner B.A. Model tests demonstrating under-wing installation effects on engine exhaust noise // AIAA Aeroacoustics Conference. 1980. AIAA-80-1048.
6. Mead C.J., Strange P.J.R. Under-wing installation effects on jet noise at sideline // 4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 1998. AIAA-1998-2207.
7. Kopiev V.F., Faranosov G.A., Zaytsev M.Yu., Vlasov E.V., Karavosov R.K., Belyaev I.V., Ostrikov N.N. Intensification and suppression of jet noise sources in the vicinity of lifting surfaces // 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2013. AIAA-2013-2284.
8. Cavalieri A.V.G., Jordan P., Wolf. W.R. Gervais Y. Scattering of wavepackets by a flat plate in the vicinity of a turbulent jet. // Journal of Sound and Vibration. 2014. V. 333. P. 6516-6531.
9. Wiart L., Atinault O., Paluch B., Hue D., and Grenon R. Development of NOVA Aircraft Configurations for Large Engine Integration Studies // 33rd AIAA Applied Aerodynamics Conference. 2015. AIAA-2015-2254.
10. Redonnet S., Desquensnes C., Manoha E., and Parzani C. Numerical Study of Acoustic Installation Effects with a Computational Aeroacoustics Method // AIAA Journal. 2010. Vol. 48, no. 5. P. 929–937.

11. Perrino M. An Experimental Study into Pylon, Wing, and Flap Installation Effects on Jet Noise Generated by Commercial Aircraft // Ph.D. Thesis, Univ. of Cincinnati, Cincinnati, OH, 2014.
12. Lawrence J. Aeroacoustic Interactions of Installed Subsonic Round Jets // Ph.D. Thesis, Univ. of Southampton, Southampton, England, U.K., 2014.
13. Heffernon T.J. Aircraft Noise Installation Effects // Ph.D. Thesis, Univ. of Southampton, Southampton, England, U.K., 2017.
14. Dorsch R.G., Kreim W.J., and Olsen W.A. Externally-Blown-Flap Noise // 10th Aerospace Sciences Meeting. 1972. AIAA-1972-0129.
15. Fink M.R., and Olsen W.A. Comparison of Predictions and Under-the-Wing EBF Noise Data // 3rd Aeroacoustics Conference. 1976. AIAA-1976-501.
16. Mengle V.G. The Effect of Nozzle-to-Wing Gulley Height on Jet Flow Attachment to the Wing and Jet-Flap Interaction Noise // 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2011. AIAA-2011-2705.
17. Kopiev V.F., Semiletov V.A., Yakovlev P.G., Karabasov S.A., and Faranosov G.A. Jet and Jet–Wing Noise Modelling Based on the CABARET MILES Flow Solver and the Ffowcs Williams–Hawkings Method // International Journal of Aeroacoustics. 2016. Vol. 15, no. 6–7. P. 631–645.
18. Беляев И.В., Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Фараносов Г.А. Исследование влияния угла отклонения закрылка на шум взаимодействия двухконтурной струи и стреловидного крыла в спутном потоке // Акустический журнал. 2017. Т. 63, №. 1. С. 14–25.
19. Крашенинников С.Ю., Миронов А.К. Экспериментальное исследование влияния экранирующих поверхностей на шум струи // Третья всероссийская открытая конференция по аэроакустике. 2013. С. 44–45.
20. Brown C.A. Developing an Empirical Model for Jet–Surface Interaction Noise // 52nd Aerospace Sciences Meeting. 2014. AIAA-2014-0878.
21. Piantanida S., Jaunet V., Huber J., Wolf W., Jordan P., and Cavalieri A.V.G. Scattering of Turbulent-Jet Wavepackets by a Swept Trailing Edge // 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2015. AIAA-2015-2998.

22. Bychkov O.P., Faranosov G.A., Denisov S.L., and Ostrikov N.N. Theoretical Modeling of the Excess Noise Due to Jet–Wing Interaction // 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2016. AIAA Paper 2016-2932.
23. Lawrence J.L.T., Azarpeyvand M., and Self R.H. Interaction between a Flat Plate and a Circular Subsonic Jet // 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2011. AIAA-2011-2745.
24. Lyubimov D., Maslov V., Mironov A., Secundov A., Zakharov D. Experimental and numerical investigation of jet flap interaction effects // International Journal of Aeroacoustics. 2014. Vol. 13, no. 3-4. P. 275-302.
25. Vera J., Lawrence J., Self R.H., and Kinganz M.J. The Prediction of the Radiated Pressure Spectrum Produced by Jet–Wing Interaction. // 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2015. AIAA-2015-2216.
26. Lyu B., Dowling A.P., and Naqavi I. Prediction of Installed Jet Noise // Journal of Fluid Mechanics. 2017. Vol. 811. P. 234–268.
27. Suzuki T., Colonius T. Instability waves in a subsonic round jet detected using a near-field phased microphone array // Journal of Fluid Mechanics. 2006. V. 565. P. 197–226.
28. Jordan P., Colonius T. Wave packets and turbulent jet noise // Annual Review of Fluid Mechanics. 2013. V. 45. P. 173–195.
29. Proenca A.R., Lawrence J.L.T., and Self R.H. A Survey of the Turbulence Statistics of a Model-Scale Installed Jet at Low and Moderate Mach Numbers // 23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2017. AIAA-2017-3705.
30. B. Lyu, A.P. Dowling. Prediction of installed jet noise due to swept wings // 24th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2018. AIAA-2018-2980.
31. Бычков О.П., Фараносов Г.А. О возможном механизме усиления шума струи вблизи крыла // Акустический Журнал. 2014. Т.60. №.6. С.596-609.
32. Faranosov G.A., Bychkov O.P. Two-Dimensional Model of the Interaction of a Plane Acoustic Wave with Nozzle Edge and Wing Trailing Edge // Journal of the Acoustical Society of America. 2017. V. 141, no. 1. P. 289–299.

33. Curle N. The Influence of Solid Boundaries on Aerodynamic Sound // Proc. R. Soc., London. 1955. V. A **321**. P. 505-514.
34. Powell A. Aerodynamic Noise and the Plane Boundary // Journal of the Acoustical Society of America. 1960. V 32. P. 982-990.
35. Ffowcs Williams J.E., Hall L.H. Aerodynamic Sound Generated by Turbulent Flow in the Vicinity of a Scattering Half Plane // Journal of Fluid Mechanics. 1970. V. 40. P. 657-670.
36. Jones D.S. Aerodynamic sound due to a source near a half-plane // Journal of the Institute of Mathematics and its Applications. 1972. V. **9**. P. 114-122.
37. Rienstra S.W. A small Strouhal analysis for acoustic wave–jet flow–pipe interaction // Journal of Sound and Vibration. 1983. V. 86. P. 539–556.
38. Munt R.M. The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe // Journal of Fluid Mechanics. 1977. V. 83, no. 4. P. 609–640.
39. Gabard G., Astley R.J. Theoretical model for sound radiation from annular jet pipes: far- and near-field solutions // Journal of Fluid Mechanics. 2006. V. 549. P. 315–341.
40. Фараносов Г.А. Теоретическое исследование эффективности внешнего возбуждения волн неустойчивости в двумерной модели кромки сопла // Акустический журнал. 2012. Т. 58. № 4. С. 549–555.
41. Veitch B., Peake N. Acoustic propagation and scattering in the exhaust flow from coaxial cylinders // Journal of Fluid Mechanics. 2008. V. 613. P. 275–307.
42. Копьев В.Ф., Фараносов Г.А. Управление волной неустойчивости в двумерной задаче о кромке сопла // Акустический журнал. 2008. Т. 54, № 3. С. 371–379.
43. Беляев И.В., Зайцев М.Ю., Копьев В.А., Копьев В.Ф., Фараносов Г.А. Акустическое управление волнами неустойчивости в турбулентной струе // Акустический журнал. 2013. Т. 59, № 1 С. 19–30.
44. Taylor M.V., Crighton D.G., Cargill A.M. The low frequency aeroacoustics of buried nozzle systems // Journal of Sound and Vibration. 1993. V. 163, № 3. P. 493–526.

45. Briggs R.J. Electron stream interaction with plasmas // MIT Press. 1964. P. 187.
46. Noble B. Methods based on the Wiener-Hopf technique // Pergamon Press, London. 1958.
47. Crighthton D.G. The Kutta condition in unsteady flow // Annual Review of Fluid Mechanics. 1985. V. 17. P. 411–445.
48. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн // Т. I. М.: Мир. 1977. 552 с.
49. Abrahams I.D. The application of Padé approximants to Wiener-Hopf factorization. Journal of Applied Mathematics. 2000. V. 65. P. 257-281.
50. Abrahams I.D., Wickham G.R. On the scattering of sound by two semi-infinite parallel staggered plates. I. Explicit matrix Wiener–Hopf factorization // Proceedings of the Royal Society of London A. 1988. V. 420. P. 131–156.
51. Abrahams I.D., Wickham G.R. The scattering of sound by two semi-infinite parallel staggered plates. II. Evaluation of the velocity potential for an incident plane wave and an incident duct mode // Proceedings of the Royal Society of London A. 1990. V. 427. P. 139–171.
52. Jones D.S., Morgan J.D. The instability of a vortex sheet on a subsonic stream under acoustic radiation // Proceedings of Cambridge Philosophical Society. 1972. V. 72. P. 465-488.
53. Morgan J.D. The interaction of sound with a semi-infinite vortex sheet // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1974. V 27. P. 465-487.
54. Gudmundsson K., Colonius T. Instability wave models for the near-field fluctuations of turbulent jets // Journal of Fluid Mechanics. 2011. V. 689. P. 97–128.
55. Broadbent E.G. Noise Shielding for Aircraft // Progress in Aerospace Sciences. 1977. V. 17. P. 231-268.
56. Huang C., Papamoschou D. Numerical Study of Noise Shielding by Airframe Structures // 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2008. AIAA-2008-2999.
57. Papamoschou D. Prediction of Jet Noise Shielding // 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2010. AIAA-2010-653.

58. Mayoral S., Papamoschou D. Prediction of Jet Noise Shielding with Forward Flight Effects // 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2013. AIAA-2013-0010.
59. Belyaev I., Faranosov G., Ostrikov N., Paranin G. A parametric experimental study of jet-flap interaction noise for a realistic small-scale swept wing model // 21st AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2015. AIAA-2015-2690.
60. Бычков О.П., Фараносов Г.А. Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование шума взаимодействия струи и крыла самолета. // Акустический Журнал. 2018. Т.64. №.4. стр. 437–453.
61. Abramovits M., Stigan I. (eds.) Handbook on Special Functions, Dover, 1964.
62. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. Table in Integrals, Series and Products, Academic Press, New York, 1980.
63. Amiet R.K. Acoustic radiation from an airfoil in a turbulent stream // Journal of Sound and Vibration. 1975. V. 41, no. 4. P. 407–420.
64. Kopiev, V., Zaitsev, M., Velichko, S., Kotova, A., and Belyaev, I. Cross-Correlations of Far Field Azimuthal Modes in Subsonic Jet Noise. // 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2008. AIAA-2008-288.
65. Glauert H. The effect of compressibility on the Lift of an Aerofoil // Proceedings of the Royal Society A. 1928. V 118. P. 113-119.
66. Красильникова Т.Н. О рассеянии аэродинамического шума твердыми и мягкими поверхностями // Акустический журнал. 1976. Т. 22, №. 6. С. 892-898.
67. Kopiev V.F. Azimuthal decomposition of turbulent jet noise and its role for diagnostic of noise sources // VKI Lecture Series 2003-04 “Advances in Aeroacoustics and Applications”, 2003.
68. Faranosov G., Belyaev I., Kopiev V., Zaytsev M., Aleksentsev A., Bersenev Y., Chursin V., Viskova T., Adaptation of the Azimuthal Decomposition Technique to Jet Noise Measurements in Full-Scale Tests // AIAA Journal. 2017. V. 55, no. 2. P. 572-584.
69. Faranosov G.A., Kopiev V.F., Belyaev I.V., Bychkov O.P., and Chernyshev S.A. On the Azimuthal Structure of Installed Jet Noise // 23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2017. AIAA-2017-3527.

70. Faranosov G.A., Belyaev I.V., Kopiev V.F., Bychkov O.P. Azimuthal Structure of Low-Frequency Noise of Installed Jet // *AIAA Journal*. 2019. V. 57, no. 5. P. 1885–1898.
71. Juve D., Sunyach M., Comte-Bellot G. Filtered Azimuthal Correlations in the Acoustic Far Field of a Subsonic Jet // *AIAA Journal*. 1979. V. 17, no.1. P. 112–114.
72. Cavalieri A.V.G., Jordan P., Colonius T., Gervais Y. Axisymmetric superdirectivity in subsonic jets // *Journal of Fluid Mechanics*. 2012. V. 704. P. 388–420.
73. Vold H., Shah P., Morris P., Du Y., Papamoschou D. Axisymmetry and Azimuthal Modes in Jet Noise // 18th AIAA/ CEAS Aeroacoustics Conference. 2012. AIAA-2012-2214.
74. Bychkov O.P., Faranosov G.A., Kopiev V.F., Soares L.F.M., Cavalieri A.V.G. The Modelling of Jet-Plate Interaction Noise in the Presence of Co-Flow // 25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2019. AIAA-2019-2492.
75. Беляев И.В., Бычков О.П., Зайцев М.Ю., Копьев В.А., Копьев В.Ф., Остриков Н.Н., Фараносов Г.А., Чернышев С.А. Разработка стратегии активного управления волнами неустойчивости в невозбужденных турбулентных струях // *Известия российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2018. №3. С. 14-27.
76. Arndt R.E.A., Long D.F., Glauser M.N. The proper orthogonal decomposition of pressure fluctuations surrounding a turbulent jet // *Journal of Fluid Mechanics*. 1997. V. 340. P. 1–33.
77. Schmidt O.T., Towne A., Colonius T., Cavalier A.V.G., Jordan P., Bres G.A. Wavepackets and trapped acoustic modes in a turbulent jet: coherent structure eduction and global stability // *Journal of Fluid Mechanics*. 2017. V. 825. P. 1153-1181.
78. Бычков О.П., Фараносов Г.А. Анализ взаимной связи модовой структуры пульсаций ближнего поля струи и шума взаимодействия струи и крыла. // *Акустический Журнал*. 2020. Т.66. №1. стр.34-45.

79. Бычков О.П., Копьев В.Ф., Фараносов Г.А. Валидация двухточечной модели предсказания низкочастотного усиления шума струи вблизи крыла. // Ученые записки физического факультета московского университета. 2020. №.1. 2010801.
80. Бычков О.П., Фараносов Г.А. Разработка нового метода определения характеристик осесимметричной моды пульсаций давления в ближнем поле турбулентной струи для предсказания шума взаимодействия струи и крыла // Акустика Среды Обитания. 2020.
81. Крашенинников С.Ю., Миронов А.К. Попытка определения положения источников звука в турбулентной струе по результатам измерений акустического поля и корреляций пульсаций скорости // Известия российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2010. № 3. С. 69-82.
82. Бычков О.П., Фараносов Г.А., Программное обеспечение для оценки характеристик низкочастотного шума взаимодействия струи и крыла самолета в статических условиях на основе данных о структуре ближнего поля свободной турбулентной струи. Свидетельство о регистрации программы, RU 2019663664// Бюл. №11 от 22.10.2019.