

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*



**Абакумов Михаил Владимирович**

Методика моделирования течений вязкого газа в  
ортогональных криволинейных координатах

05.13.18 – математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва – 2020

Работа выполнена на кафедре вычислительных методов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный консультант: д.ф.-м.н., доцент  
**Мухин Сергей Иванович.**

Официальные оппоненты: **Галактионов Владимир Александрович,**  
д.ф.-м.н., профессор,  
Институт прикладной математики имени  
М. В. Келдыша РАН, главный научный сотрудник;

**Колдоба Александр Васильевич,**  
д.ф.-м.н., старший научный сотрудник,  
Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет), кафедра моделирования и технологий  
разработки нефтяных месторождений, заведующий кафедрой;

**Сушинов Александр Иванович,**  
д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН,  
Донской государственный технический университет, кафедра математики и информатики,  
заведующий кафедрой.

Защита диссертации состоится 24 марта 2021 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, строение 52, факультет ВМК, аудитория 685.

E-mail: [ilgova@cs.msu.ru](mailto:ilgova@cs.msu.ru).

Диссертация находится на хранении в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27). Со сведениями о регистрации участия в защите в удаленном интерактивном режиме и с диссертацией в электронном виде также можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»:

<https://istina.msu.ru/dissertations/338453531/>

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН



Ильин А. В.

## Общая характеристика работы

**Предмет исследования.** Диссертационная работа направлена на создание нового подхода к построению явных консервативных разностных схем для расчета течений вязкого газа в ортогональных криволинейных координатах. Верификация предложенного подхода проводится на основе практического применения построенных разностных схем для численного решения модельных задач. Апробация разработанных методов осуществляется в ходе численного решения ряда актуальных прикладных задач физики Земли и астрофизики. Для обеспечения полного цикла проводимых математических экспериментов рассматривается задача визуализации и анимации результатов нестационарных газодинамических расчетов. Разработаны новые и модифицированы существующие методы эффективного решения этой задачи. Предлагается общая идеология визуализации данных, заданных координатами в пространстве, применяемая в том числе и для отображения результатов гидродинамических расчетов на пространственных графах. В частности, показана ее эффективность для гемодинамических расчетов на трехмерных графах сосудов.

Решение перечисленных задач приводит к необходимости построения новых математических моделей, численных методов, алгоритмов, а также комплекса вычислительных программ и программных средств визуализации.

**Актуальность.** Многие практически значимые задачи описываются газодинамическими математическими моделями. Поэтому появилось и продолжает появляться огромное количество научных работ, посвященных вычислительным методам газовой динамики. Такое многообразие работ, с одной стороны, обусловлено тем, что эффективность того или иного численного метода относительна и наряду с общими объективными сложностями приближенного решения возникающих систем уравнений во многом определяется конкретной решаемой задачей. С другой стороны, совершенствование вычислительной техники сделало возможным математическое моделирование многомерных течений газа на достаточно подробных сетках, позволяющее отражать влияющие друг на друга процессы различных масштабов. Это требует адаптации существующих численных методов, которые обычно детально разработаны и исследованы для одномерного случая декартовых координат. Такая адаптация часто требует значительных усилий, особенно, если необходимо проводить расчеты газодинамических течений в криволинейных координатах. Построение методов численного решения задач в таких координатах имеет свою специфику. Используются подходы (см., например, [1–5]), зачастую предполагающие кардинальные изменения декартовых алгоритмов, а в некоторых случаях схемы фактически строятся заново. Как правило, требуется предпринимать дополнительные усилия

для обеспечения консервативности [6–8] модифицированных разностных схем. Модификации влекут за собой необходимость коренной переработки программного кода декартовых схем и его последующей отладки. Таким образом, развитие общих подходов к разработке эффективных методик численных расчетов в криволинейных координатах по-прежнему представляет интерес.

Методы расчетов газодинамических течений в криволинейных координатах востребованы во многих фундаментальных и прикладных задачах, в которых натурные эксперименты или аналитические методы исследования затруднены либо невозможны. К таковым, например, относится изучение процессов в жидком ядре Земли. Поскольку данные о внутреннем строении Земли имеют косвенный характер [9], математическое моделирование зачастую оказывается единственным способом объяснения наблюдаемых проявлений процессов в земных недрах. К таким проявлениям можно, в частности, отнести зафиксированные историческими [10] и спутниковыми [11] наблюдениями магнитные аномалии, активно проявляющиеся в том числе в окрестности северного полюса Земли [12, 13]. Эти аномалии могут объясняться наличием вихревых потоков в жидком ядре Земли [14], условия возникновения которых до конца не ясны. Важно также отметить, что и математические модели жидкого ядра Земли остаются предметом дискуссий. Важным параметром этих моделей является характер вращения вещества. Некоторые наблюдения [15] свидетельствуют о наличии дифференциального (отличного от твердотельного) вращения в жидком ядре. Другие данные позволяют сделать вывод, что сверхвращение твердого ядра Земли относительно мантии пренебрежимо мало [16]. При этом эксперименты, имитирующие земные условия, показывают, что дифференциальное вращение является значимым фактором, влияющим на структуру конвективных течений [17]. Не менее существенное влияние на результаты моделирования также оказывает выбор различных вариантов условий на границах жидкого ядра с мантией и твердым ядром.

С изучением процессов в жидком ядре Земли тесно связана ставшая уже классической задача исследования течений Тейлора-Куэтта в цилиндрических и, в первую очередь, сферических слоях. В подобных течениях проявляются многие фундаментальные эффекты, характерные для движения вращающихся вязких жидкостей и газов. Следует также отметить [18] и практическую значимость исследований течений Тейлора-Куэтта для развития перспективных технологий, используемых в системах охлаждения, при бурении углеводородов (подшипники на газовой смазке [19]), в установках для получения однородных ультрадисперсных частиц (применяются в медицине, электронике, при производстве порошковой смазки). Ввиду сложности математических постановок задач, описывающих такие течения, аналитические методы исследования здесь применимы лишь в некоторых

предельных случаях, поэтому используются в основном экспериментальные и численные методы. В полной мере многообразие возможных режимов возникающих устойчивых и неустойчивых вихревых течений не изучено до сих пор. Связано это в том числе и с тем, что численное решение полной трехмерной системы уравнений Навье-Стокса, лежащей в основе математического описания течений, по-прежнему остается трудной задачей, которая еще более усложняется необходимостью использования криволинейных координат. Поэтому не теряет актуальность совершенствование и развитие методов расчета подобных задач.

Вихревые воздушные течения, в том числе обусловленные различного рода неустойчивостью, также являются неотъемлемой частью атмосферных процессов различных масштабов. Возможные разрушительные последствия подобных явлений диктуют необходимость их всестороннего изучения. К таковым, в частности, относится новороссийская бора (*бора́* — сильный холодный порывистый местный ветер). Бора наблюдается на берегах морей, отделенных от континента горными хребтами, в частности, на побережьях Адриатического моря, Хорватии, Новой Земли, Чукотки, в Геленджикской бухте и на берегах Байкала (сарма). В новороссийской бухте и в самом городе ураганные порывы ветра при боре нередко приводят к катастрофическим последствиям. Общие закономерности возникновения явлений, подобных боре, до конца не выяснены, что вызывает необходимость моделирования сопутствующих атмосферных процессов. В настоящее время для моделирования, как правило, применяются [20–23] программные комплексы, реализующие различные NWP (Numerical Weather Prediction) мезомасштабные [24] модели. При этом используются вложенные сетки, минимальный шаг которых составляет несколько сотен метров. Такое пространственное разрешение позволяет воспроизвести крупномасштабные явления, однако недостаточно для моделирования локальных вихревых атмосферных течений. В этой связи значимыми являются альтернативные подходы к моделированию, позволяющие воспроизводить воздушные течения меньших масштабов.

Многомерные газодинамические расчеты, в том числе в ортогональных криволинейных координатах, являются основным инструментом исследований и во многих задачах астрофизики. В качестве одной из таких задач можно выделить изучение роли аккреционных дисков в эволюции двойных звездных систем (*аккреция* — приращение массы небесного тела путем поглощения вещества из окружающего пространства). Отметим, что накопленные к настоящему моменту данные свидетельствуют о том, что двойными являются более двух третей всех известных звезд. Поэтому выявление физических механизмов, определяющих темпы аккреции вещества дисков в таких системах, остается важной задачей, не решенной в полной мере до сих пор [25]. Процесс аккреции невозможен без механиз-

мов потери веществом аккреционного диска углового момента, нарушающих баланс между гравитацией звезды-аккретора и центробежной силой. В качестве таких механизмов, обеспечивающих достаточную эффективную вязкость [26, 27], исследовались различные физические процессы (см., например, обзоры [25, 28, 29]). В частности, отмечалось влияние на перераспределение углового момента возникающих в диске спиральных ударных волн [30], возможность образования которых отмечалась в работах многих авторов и подтверждается наблюдениями. Однако степень этого влияния остается предметом обсуждения.

Эффективность проведения математических экспериментов напрямую зависит от качества интерпретации их результатов. При этом использование для этих целей готовых программных комплексов визуализации (см., например, [31–34]) не всегда является оптимальным вариантом. Универсальность подобных комплексов зачастую приводит к снижению производительности, особенно при многократном выполнении даже относительно простых однотипных операций визуализации. Кроме того, их функционал может оказаться недостаточным для решения возникающих задач, выходящих за рамки стандартных. Поэтому не теряющей значимости сопутствующей математическим экспериментам задачей является развитие методов визуализации результатов расчетов. Так, с неуклонным ростом производительности вычислительной техники стало возможным проведение нестационарных многомерных газодинамических расчетов на достаточно подробных сетках. Это диктует необходимость доработки существующих методов визуализации, в частности, с целью обеспечения их эффективности для анимации результатов подобных расчетов, позволяющей отследить динамику моделируемых процессов. Кроме того, развиваются новые отрасли вычислительной газовой динамики, а вместе с ними возникают задачи визуализации, для которых отсутствуют готовые методы решений. Одним из таких примеров является визуализация результатов гидродинамических расчетов на пространственных графах. Подобная задача возникает, в частности, при анализе гемодинамических расчетов [35] на графе сосудов.

**Цели и задачи.** Основными целями диссертации являлись создание новых методов построения численных алгоритмов расчета течений вязкого газа в ортогональных криволинейных координатах, развитие существующих и разработка новых методов визуализации данных нестационарных расчетов, реализация разработанных методов и алгоритмов в виде комплекса программ.

С применением разработанных методик и комплекса программ планировалось проведение и анализ результатов серии вычислительных экспериментов для ряда актуальных прикладных задач.

Для достижения указанных целей в работе были поставлены следующие задачи.

1. Разработать метод построения явных консервативных разностных схем для расчета течений вязкого газа в криволинейных ортогональных координатах на основе произвольной разностной схемы годуновского типа, построенной для декартовых координат.

2. Реализовать в виде комплекса параллельных вычислительных программ и провести верификацию разностных схем для цилиндрических и сферических координат.

3. Исследовать возможности моделирования течений Тейлора-Куэтта между коаксиально вращающимися цилиндрами и концентрическими сферами в рамках модели вязкого газа с использованием явных разностных схем годуновского типа. Изучить влияния на моделируемые течения фактора сжимаемости и числа Маха.

4. Разработать математическую модель жидкого ядра Земли на основе уравнений Навье-Стокса для вязкого газа. Исследовать возможность возникновения конвективных процессов, приводящих к возникновению вихревых течений в приполюсных областях.

5. Провести математическое моделирование локальных атмосферных процессов, характерных, в частности, для новороссийской боры. Изучить влияние различных факторов на возможные катастрофические последствия подобных явлений.

6. Осуществить математическое моделирование процессов в аккреционном диске двойной звездной системы. Исследовать условия возникновения спиральных ударных волн и их влияние на перераспределение углового момента, роль вязкости (схемной и «физической») в процессах обмена массой между аккреционными дисками компонент системы.

7. Разработать и реализовать программное средство визуализации и анимации результатов многомерных нестационарных расчетов на неравномерных ортогональных структурированных сетках, обеспечивающее показатели быстродействия реального времени при генерации полноформатного видео по расчетным данным.

8. Разработать методы интерактивного управления гидродинамическими расчетами на пространственных графах с параллельной визуализацией их результатов. Обеспечить возможность сборки сложных трехмерных каркасных моделей графов из фрагментов, создаваемых независимо, а также автоматическую генерацию объемной модели графа по данным каркасной. Применить методы в ходе разработки интерфейсного модуля программного комплекса CVSS (Cardio-Vascular Simulation System).

**Научная новизна.** В диссертации разработан новый метод построения явных консервативных разностных схем для расчетов течений вязкого газа в произвольных ортогональных криволинейных координатах, позволяющий оставить неизменными алгоритмы вычисления сеточных потоков взятой за основу потоковой декартовой схемы. Метод технологичен в том смысле, что адаптация вычислительной программы для криволинейных ортогональных координат сводится лишь к замене обычно небольшой части программного кода. Построено семейство разностных схем для цилиндрических и сферических координат, записанное через разностные потоки произвольной декартовой схемы гоуновского типа.

Впервые проведено моделирование известных и неизвестных режимов течений Тейлора-Куэтта между коаксиально вращающимися бесконечными цилиндрами и концентрическими сферами в рамках модели вязкого газа с использованием построенных явных разностных схем. Продемонстрирована эффективность разработанной расчетной методики для исследования подобных течений.

Проведены расчеты в рамках новой математической модели жидкого ядра Земли, основанной на уравнениях динамики вязкого газа. Показано, что при отсутствии дифференциального вращения жидкого ядра и связанных с его наличием эффектов, а также при использовании условий прилипания возможно ярко выраженное конвективное движение, приводящее к отклонениям от нулевых значений гидродинамической спиральности течения [36]. Наибольшие отклонения при этом зафиксированы в приполюсной области.

Предложена новая двумерная математическая модель, позволяющая проводить расчеты локальных вихревых атмосферных течений, характерных, в частности, для новороссийской боры. Проведенные математические эксперименты выявили определяющую роль сдвиговой неустойчивости в процессе формирования ураганных порывов ветра в прибрежной полосе.

Рассмотрены новые постановки задачи моделирования процессов в аккреционном диске двойной звездной системы. В качестве начального состояния диска выбиралась равновесная в гравитационном поле одной из компонент системы газовая конфигурация. Сравнились результаты расчетов в двумерном и трехмерном приближении. Проведены расчеты в расширенной области, содержащей полости Роша обеих компонент. Исследовано влияние возникающих спиральных ударных волн, а также вязкости (схемной и «физической»).

Разработан новый метод «сдвоенного окна» для визуализации данных, привязанных к координатам в пространстве. Модификации метода квадродеревьев построения линий уровня функций двух переменных существенно повысили его эффективность и позволили решить задачу идентификации отдельных связанных кривых. Предложены методы и подходы, позволяющие

максимально эффективно осуществлять генерацию полноформатного видео по результатам нестационарных двумерных и трехмерных расчетов на ортогональных неравномерных сетках.

Впервые предложено комплексное решение задачи подготовки данных трехмерного графа, организации проведения на нем нестационарных расчетов и параллельной визуализации их результатов. Разработаны уникальные методы: слияния каркасных моделей графа, позволяющий «собирать» сложные модели из более простых, и генерации реалистичной объемной модели по данным каркасной. Разработанные методы реализованы в интерфейсном модуле программного комплекса CVSS, осуществляющего гемодинамические расчеты на пространственных графах сосудов.

**Теоретическая и практическая значимость.** Предложенный в работе метод построения консервативных разностных схем для расчета течений вязкого газа в ортогональных криволинейных координатах применим для построения численных методов в других областях динамики сплошной среды, в частности, в магнитной гидродинамике.

Построенное в работе семейство разностных схем может быть использовано при численном решении многомерных прикладных задач газовой динамики, в которых целесообразен переход к цилиндрическим или сферическим координатам.

Элементы предложенных в работе математических моделей могут применяться при решении различных прикладных задач физики звезд и планет. Полученные результаты вносят вклад в изучение моделируемых в работе явлений.

Разработанные методы визуализации, подходы к их эффективному применению для сеточных данных, способы отображения таких данных на сложных пространственных структурах, таких, как трехмерные графы, могут быть использованы для создания других программных комплексов обработки результатов нестационарных расчетов. Предложенные методы допускают обобщения на более сложные типы сеток, включая неструктурированные.

Разработанное программное средство визуализации и анимации результатов многомерных нестационарных расчетов на неравномерных ортогональных сетках ClcView может использоваться (и уже используется) другими исследователями при анализе расчетных данных и подготовке научных публикаций.

Разработанный интерфейсный модуль CVSSCtrl включен в состав программного комплекса CVSS (версия 12), осуществляющего расчеты нестационарных гемодинамических течений на графе сосудов, и активно используется при решении практически значимых прикладных задач исследования кровеносной системы человека.

**Методология.** Основным методом исследований в работе является математическое моделирование. Рассматриваемые модели основаны на уравнениях Навье-Стокса, описывающих динамику вязкого газа в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Для численного решения возникающих систем уравнений используются явные консервативные разностные схемы годуновского типа. При построении разностных схем для ортогональных криволинейных координат применяется комбинация методов конечных разностей и конечных объемов. Для реализации разностных схем в вычислительных программах используется язык программирования FORTRAN [37] с поддержкой технологии распараллеливания OpenMP.

Разработка программных средств визуализации осуществляется с использованием объектно-ориентированного языка программирования Delphi (Object Pascal) [38]. Для рендеринга (прорисовки) примитивов в оконных координатах применяется встроенная библиотека OpenGL [39], сторонние библиотеки не используются. Таким образом, все алгоритмы, включая многопоточную реализацию отдельных процессов, реализуются стандартными средствами языка программирования.

**Положения, выносимые на защиту.** Приведем основные положения и результаты, выносимые на защиту (в более развернутом виде они приведены в заключении).

1. Метод построения консервативных разностных схем для расчета течений вязкого газа в криволинейных ортогональных координатах.

2. Разработка и верификация семейства схем для цилиндрических и сферических координат, их реализация в виде пакета прикладных программ.

3. Математическое моделирование течений Тейлора-Куэтта между коаксиально вращающимися цилиндрами и концентрическими сферами в рамках модели вязкого газа с использованием явных разностных схем годуновского типа.

4. Результаты моделирования конвективных процессов в жидком ядре Земли.

5. Результаты численного исследования локальных атмосферных процессов, наблюдаемых при новороссийской боре.

6. Исследование влияния спиральных ударных волн, а также вязкости (схемной и «физической») на газодинамические процессы в аккреционном диске двойной звездной системы.

7. Методы и подходы к эффективной визуализации и анимации результатов многомерных нестационарных расчетов на неравномерных ортогональных сетках и их реализация в виде прикладной программы.

8. Методы формирования каркасной модели трехмерного графа сердечно-сосудистой системы, построение на ее основе реалистичной объемной (3D) модели, организации параллельного выполнения гемодинамического расчета и визуализации его результатов. Реализация методов в виде управляющего модуля программного комплекса CVSS.

**Степень достоверности.** Достоверность полученных в работе результатов обеспечивается использованием классических математических моделей, описывающих течения вязкого газа. Для численного решения рассматриваемых систем уравнений применяются явные консервативные разностные схемы гоудоновского типа, в которых для вычисления разностных потоков используются хорошо зарекомендовавшие себя TVD-алгоритмы повышенного порядка точности. Для верификации построенных разностных схем проведены многочисленные двумерные и трехмерные расчеты модельных задач. Их результаты сравниваются с известными теоретическими и экспериментальными данными. Результаты моделирования прикладных задач сопоставляются с известными данными наблюдений, а также с расчетами других авторов, проводимыми по иным численным алгоритмам.

**Апробация.** Результаты диссертации представлялись на международных и российских конференциях, а также на семинарах: Joint European and National Astronomical Meeting «JENAM-2000» (Москва, 2000), семинар «Вычислительные методы и математическое моделирование» под руководством член-корр. РАН Ю.П.Попова и проф. М.П.Галанина (Москва, ИПМ РАН, 2004, 2013, 2015), Ломоносовские чтения (Москва, МГУ, 2006, 2018), 2-я конференция «Математические модели и численные методы в биоматематике» (Москва, ИВМ РАН, Россия, 2011), 3rd European Networking Event «Successful R&D in Europe» (Dusseldorf, 2011), международный междисциплинарный семинар ВМК МГУ совместно с Университетом Люксембурга и Центром Систем Биомедицины (Москва, ВМК МГУ, 2012), междисциплинарный семинар «Высокопроизводительные вычисления в науках о живом» (Москва, МГУ, 2012), 5-я Всероссийская с международным участием школа-конференция по физиологии кровообращения (Москва, ФФМ МГУ, 2012), 4-я конференция «Математические модели и численные методы в биоматематике» (Москва, ИВМ РАН, Россия, 2012), international conference «Instabilities and Control of Excitable Networks: From Macro to Nano-Systems» (Долгопрудный, ФизТех, 2012), международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А.Самарского в связи с 95-летием со дня его рождения (Москва, МГУ, 2014), British-Russian Workshop «Mathematical and Computational Modelling in Cardiovascular Problems» (Москва, 2014), Тихоновские чтения (Москва, МГУ, 2015), 7th Workshop on Mathematical Models and Numerical Methods in Biology and Medicine (Москва, ИВМ РАН, Россия, 2015), международная научная

конференция «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики», посвященная 110-летию академика А.Н. Тихонова (Москва, МГУ, 2016), международная научная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А.Самарского в связи со 100-летием со дня его рождения (Москва, МГУ, 2019).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 40 печатных работах. Из них 18 статей в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и РИНЦ [A1–A18], 13 препринтов (из них 8 препринтов ИПМ имени М.В.Келдыша РАН) [B1–B13], 9 тезисов докладов на конференциях [B14–B22].

**Личный вклад автора.** В диссертацию включены только те результаты, которые получены либо лично автором, либо при его определяющем участии. Все описываемые в работе расчеты проведены самостоятельно с применением авторских вычислительных программ. Программы для визуализации расчетных данных, используемые, в частности, для анализа результатов расчетов и подготовки всех иллюстрирующих их рисунков в тексте диссертации также разработаны и реализованы автором. Во введении к диссертации автор постарался подробно описать используемые и альтернативные идеи, методы и подходы к решению рассматриваемых задач с указанием их первоисточников.

В публикациях, написанных в соавторстве с академиком А.М.Липановым, д.ф.-м.н. С.И.Мухиным, чл.-корр. РАН Ю.П.Поповым, проф. А.П.Фаворским, проф. В.М.Чечеткиным и д.ф.-м.н. С.Л.Шалимовым, автору в равной степени принадлежит математическое описание поставленных задач, выбор методов их решения и анализ результатов. В этих работах необходимые расчеты проводились автором лично.

В работах [A2, A4] вклад автора состоит в предложенной им каркасной модели описания графа сердечно-сосудистой системы. В работе [A5] автором получены все численные результаты. В работе [A8] автор осуществлял постановку задачи и анализ результатов расчетов. В работе [A9] автором проведено сравнение различных разностных схем на основе одномерных численных расчетов. В работе [A10] визуализация всех представляемых результатов выполнена с использованием программного средства ClcView, разработанного автором. В работе [A13] автором проведены двумерные расчеты течения в канале с разрывом сечения.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Объем диссертации составляет 348 страниц, работа содержит 104 рисунка и 4 таблицы. Библиография насчитывает 398 наименований.

## Основное содержание работы

Во **введении** к диссертации описывается предмет исследования, обосновывается актуальность темы диссертации, дается обзор литературы и обсуждается степень разработанности рассматриваемых проблем. Определяются цели и задачи работы, приводится ее краткое содержание. Обосновывается научная новизна и практическая значимость диссертации, формулируются основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** описывается новый метод построения консервативных разностных схем для расчета течений вязкого газа в ортогональных криволинейных координатах. За основу берется произвольная декартова схема годуновского типа (базовая схема), аппроксимирующая систему уравнений Эйлера. Предлагаемый метод позволяет оставить неизменными алгоритмы вычисления разностных потоков базовой схемы. Это позволяет реализовать разностную схему для криволинейных координат путем расширения программного кода декартовой схемы.

В п.1.1 для удобства читателя приводятся минимальные сведения тензорного анализа, достаточные для вывода уравнений Навье-Стокса для вязкого газа в криволинейных координатах. Выводятся уравнения для произвольной ортогональной системы координат. Выписываются системы уравнений в цилиндрических и сферических координатах.

В п.1.2 приводится разностная схема Роу-Эйнфельдта-Ошера [40–42], используемая в качестве основной базовой декартовой схемы во всех проводимых в работе расчетах. Описывается новый метод построения схем для произвольной ортогональной криволинейной системы координат. Коротко остановимся на основных идеях предлагаемого метода.

В ортогональных криволинейных координатах  $(x_1, x_2, x_3)$  уравнения Навье-Стокса [43], описывающие динамику сжимаемых жидкостей и газов, можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_3} &= \mathbf{R} + \mathbf{R}_\sigma, \\
 \mathbf{q} &= (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \rho E)^T, \\
 \mathbf{F} &= (\rho v_1, \rho v_1^2 + p, \rho v_1 v_2, \rho v_1 v_3, \rho v_1 H)^T, \\
 \mathbf{G} &= (\rho v_2, \rho v_2 v_1, \rho v_2^2 + p, \rho v_2 v_3, \rho v_2 H)^T, \\
 \mathbf{H} &= (\rho v_3, \rho v_3 v_1, \rho v_3 v_2, \rho v_3^2 + p, \rho v_3 H)^T, \\
 \mathbf{R}_\sigma &= (0, (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_1, (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_2, (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_3, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}))^T, \\
 p &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad E = \varepsilon + \mathbf{v}^2/2, \quad H = E + p/\rho, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $t$  – время,  $\rho$  – плотность газа,  $p$  – давление,  $\varepsilon$  – удельная (массовая) внутренняя энергия,  $E$  – полная удельная энергия,  $H$  (без индексов) –

полная удельная энтальпия,  $\mathbf{v}$  – скорость газа,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор вязких напряжений,  $H_k$  – коэффициента Ламэ. В общем случае  $\mathbf{R}$  – ненулевой вектор, наличие которого в правой части векторного уравнения обусловлено криволинейностью координатной системы. Компоненты вектора  $\mathbf{R}$  зависят от газодинамических функций, коэффициентов Ламэ и производных коэффициентов Ламэ. Наличие этих (недивергентных) слагаемых необходимо учитывать при аппроксимации системы (1), обеспечивающей консервативность разностной схемы.

Рассматривается вспомогательная система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_3} = 0.$$

Предполагается, что для ее решения используется какая-либо явная декартова схема годуновского типа

$$\frac{\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_+ - \mathbf{F}_-}{h_1} + \frac{\mathbf{G}_+ - \mathbf{G}_-}{h_2} + \frac{\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-}{h_3} = 0.$$

Здесь используются безындексные обозначения  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_{ijk}^{n+1}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{ijk}^n$ ,  $\mathbf{F}_\pm = \mathbf{F}_{i\pm 1/2jk}^n$ ,  $\mathbf{G}_\pm = \mathbf{G}_{ij\pm 1/2k}^n$ ,  $\mathbf{H}_\pm = \mathbf{H}_{ijk\pm 1/2}^n$ ,  $h_1, h_2, h_3$  – шаги равномерной сетки по переменным  $x_1, x_2$  и  $x_3$  соответственно,  $\tau$  – шаг по времени,  $i, j, k$  – индекс разностной ячейки,  $n$  – номер временного слоя. Сеточные потоки  $\mathbf{F}_\pm, \mathbf{G}_\pm, \mathbf{H}_\pm$  относятся к центрам соответствующих граней пока что прямоугольной разностной ячейки, а векторы  $\mathbf{q}$  – к центру ячейки. Конкретный метод вычисления сеточных потоков в приведенной (декартовой) схеме не является существенным. Однако следует учитывать специфику потоковых схем и считать известными лишь компоненты векторов сеточных потоков, а не определяющие их сеточные функции по отдельности.

Для учета криволинейности координатной системы  $(x_1, x_2, x_3)$  аппроксимируются интегральные соотношения баланса массы, импульса и энергии по объему криволинейной ячейки. Векторы  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  по-прежнему считаются известными в центрах криволинейных граней ячейки. Предполагается, что компоненты  $(v_1, v_2, v_3)$  вектора скорости  $\mathbf{v}$ , входящие в выражения для сеточных потоков, соответствуют ортонормированному локальному базису в этих центрах.

Вводится произвольная декартова система координат  $(y_1, y_2, y_3)$ , орты  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$  которой образуют базис, далее называемый опорным. Предполагается, что в выбранной системе координат криволинейная грань  $\tilde{\Sigma}$  разностной ячейки задана параметрически:

$$y_k = y_k(\alpha, \beta); \quad k = 1, 2, 3; \quad (\alpha, \beta) \in \Omega_{\alpha\beta}.$$

При аппроксимации поверхностных интегралов в соотношениях баланса вектор скорости  $\mathbf{v}$  и скалярные функции  $\rho, p, H$  считаются постоянными

вдоль криволинейной грани  $\tilde{\Sigma}$ . Предполагается, что найдены координаты  $(v_1, v_2, v_3)$  скорости  $\mathbf{v}$  в опорном базисе. Для этого необходимо преобразовать компоненты  $(v_1, v_2, v_3)$  в локальном базисе центра криволинейной грани. Тогда интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Sigma}} \rho(\mathbf{v}, \mathbf{n}) d\Sigma &= \int_{\tilde{\Sigma}} \rho(v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3) d\Sigma \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^3 \rho v_k \int_{\tilde{\Sigma}} n_k d\Sigma = \pm \sum_{k=1}^3 \rho v_k \int_{\Omega_{\alpha\beta}} \tilde{n}_k(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \pm \rho \sum_{k=1}^3 v_k \eta_k. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_1 &= \frac{\partial(y_2, y_3)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad \tilde{n}_2 = \frac{\partial(y_3, y_1)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad \tilde{n}_3 = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(\alpha, \beta)}; \\ \eta_k &= \int_{\Omega_{\alpha\beta}} \tilde{n}_k(\alpha, \beta) d\alpha d\beta; \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Получим приближенные выражения для потоков массы, импульса и энергии через грань  $\tilde{\Sigma}$ :

$$\begin{aligned} W_{\tilde{\Sigma}}^M &= \rho(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) = \pm \rho \sum_{k=1}^3 v_k \eta_k \approx \int_{\tilde{\Sigma}} \rho(\mathbf{v}, \mathbf{n}) d\Sigma, \\ W_{\tilde{\Sigma}}^E &= W_{\tilde{\Sigma}}^M H \approx \int_{\tilde{\Sigma}} \rho(\mathbf{v}, \mathbf{n}) H d\Sigma, \\ \mathbf{W}_{\tilde{\Sigma}}^I &= W_{\tilde{\Sigma}}^M \mathbf{v} + p \boldsymbol{\eta} \approx \int_{\tilde{\Sigma}} [\rho(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \mathbf{v} + p \mathbf{n}] d\Sigma. \end{aligned}$$

Здесь  $\boldsymbol{\eta} = \pm(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  в опорном базисе, где знак определяется выбором внешней нормали к грани  $\tilde{\Sigma}$ .

Приходим к следующим равенствам (консервативной разностной схеме), аппроксимирующим уравнения баланса, где в качестве  $m$  выступает номер криволинейной грани:

$$\begin{aligned} \rho_t \Delta V + \sum_{m=1}^6 W_m^M &= 0, \quad (\rho \mathbf{v})_t \Delta V + \sum_{m=1}^6 \mathbf{W}_m^I = 0, \\ (\rho E)_t \Delta V + \sum_{m=1}^6 W_m^E &= 0. \end{aligned}$$

Здесь индекс  $t$  обозначает первую разностную производную вперед по времени,  $\Delta V$  – объем разностной ячейки. Важно отметить, что вектор  $\mathbf{v}$  во втором разностном уравнении предполагается заданным координатами в локальном базисе центра разностной ячейки, поэтому для покомпонентной записи этого уравнения необходимо найти координаты всех векторов  $\mathbf{W}_m^I$  в этом базисе по известным координатам в опорном базисе.

Показано, что выражения для потоков  $W_{\Sigma}^M$ ,  $\mathbf{W}_{\Sigma}^I$  и  $W_{\Sigma}^E$  выражаются (точно или приближенно) через разностные потоки  $\mathbf{F}_{\pm}$ ,  $\mathbf{G}_{\pm}$ ,  $\mathbf{H}_{\pm}$  базовой декартовой схемы. Продемонстрирована возможность аппроксимации «вязких» слагаемых (компонент вектора  $\mathbf{R}_{\sigma}$ ) в уравнении (1) путем введения соответствующих разностных добавок к декартовым сеточным потокам.

Далее в этом пункте выводятся расчетные формулы, выраженные через декартовы потоки, для случаев цилиндрических и сферических координат. Приводится выражение для разностных добавок к декартовым потокам, обеспечивающих аппроксимацию «вязких» слагаемых. Построенные семейства разностных схем для расчета нестационарных течений вязкого газа имеют второй порядок аппроксимации при условии, что со вторым или более высоким порядком вычисляются разностные потоки в базовой декартовой схеме.

В п.1.3 рассматриваются некоторые особенности использования построенных разностных схем. Обсуждаются способы аппроксимации граничных условий, выбора шага по времени и применения неравномерных разностных сеток.

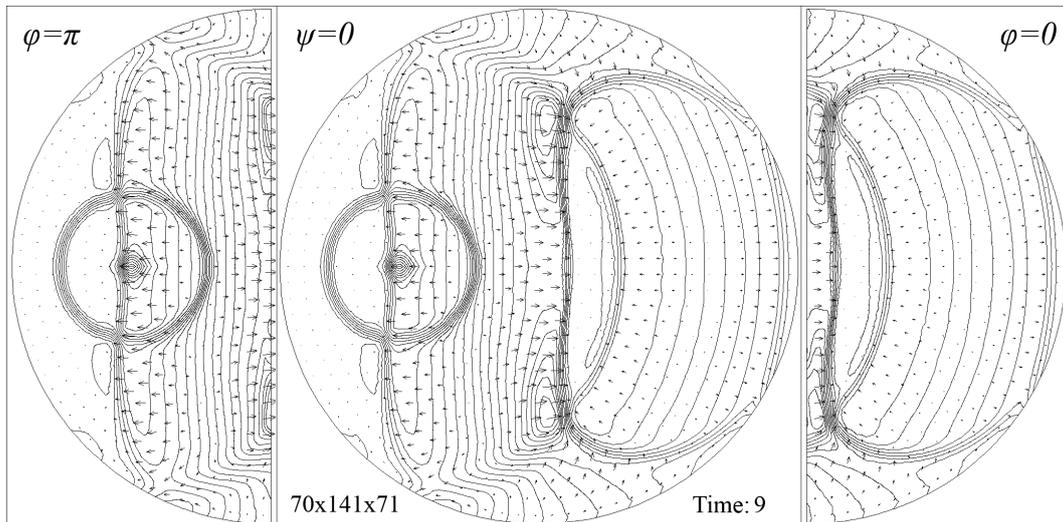


Рис. 1. Расчет распада сферического разрыва

В п.1.4 путем проведения двумерных и трехмерных тестовых расчетов осуществляется верификация построенных разностных схем для сферических и цилиндрических координат. На примерах расчетов задач о распаде цилиндрических и сферических (см. рис.1) разрывов демонстрируется

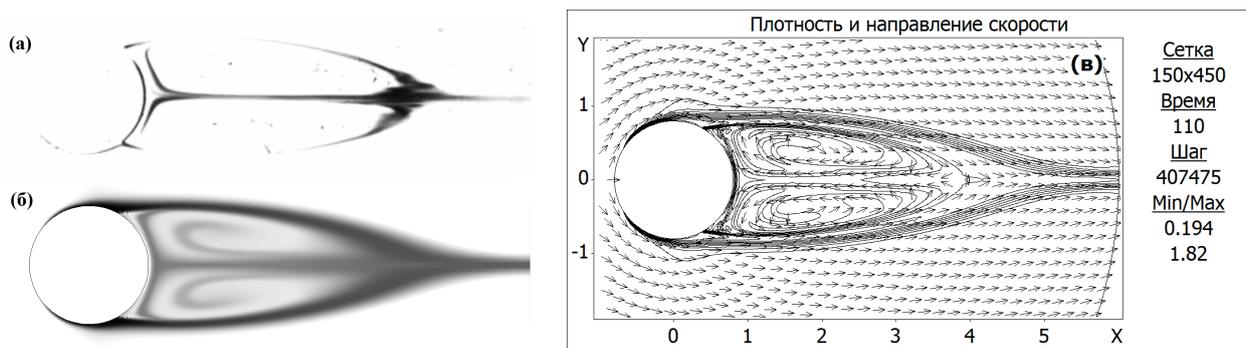


Рис. 2. Обтекание цилиндра при  $Re = 41$ :  
 (а) эксперимент в воде (Taneda S.), (б),(в) расчет

способность построенных схем воспроизводить прохождение возникающих волн через ось вырождения системы координат без искажения формы их фронтов. Сопоставление результатов проведенных расчетов задачи о двумерном разрыве в декартовых, цилиндрических и сферических координатах с результатами других авторов подтверждает второй порядок точности построенных схем. Проводится математическое моделирование обтекания параллельным потоком газа цилиндра и шара как без учета, так и с учетом влияния тензора вязких напряжений. Сравнение с данными экспериментов (см. рис.2) демонстрирует адекватность результатов численных расчетов, полученных по построенным схемам, реально наблюдаемым газодинамическим и гидродинамическим течениям при различных значениях числа Рейнольдса. Исследуется влияние выбора варианта граничных условий на характерные особенности моделируемых течений.

Во **второй главе** приводятся результаты математического моделирования ряда прикладных задач. Рассматриваются как классические задачи о течении в пространстве между двумя коаксиально вращающимися цилиндрами и концентрическими сферами, где решающую роль играют неустойчивости (см. выше), связанные с вращением, так и задачи физики звезд и планет.

В п.2.1 ставится задача о течении вязкого газа в пространстве между коаксиально вращающимися бесконечными цилиндрами и концентрическими сферами. Демонстрируется, что известное решение системы уравнений Навье-Стокса, обладающее осевой симметрией, описывающее основное течение несжимаемой жидкости между цилиндрами, в рассматриваемом сжимаемом случае является стационарным лишь для твердотельного вращения. Для случая сфер также отсутствуют стационарные решения с осевой симметрией, отличные от твердотельного вращения, без меридиональной циркуляции. По этой причине во всех проводимых расчетах в качестве начального состояния задаются постоянные параметры покоящегося газа. Газ

приводился в движение за счет вязкого трения о границы вращающихся цилиндров и сфер.

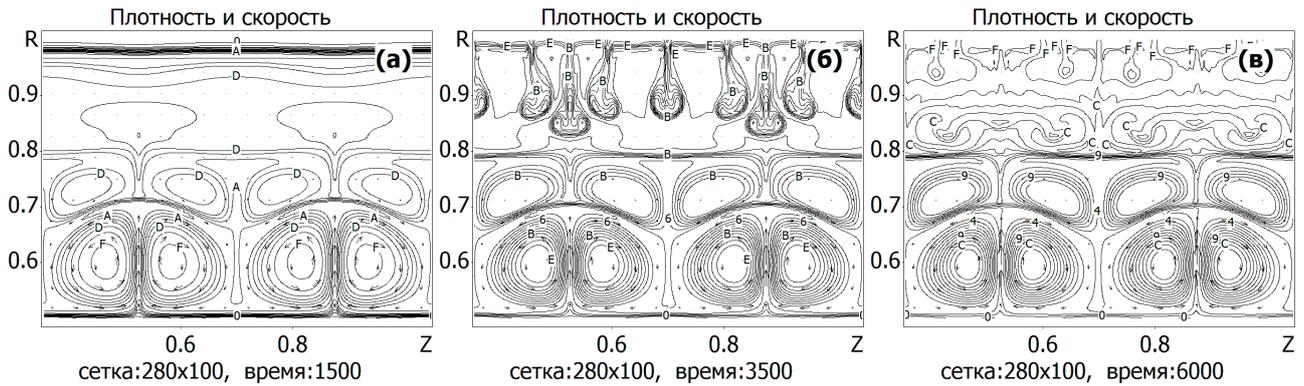


Рис. 3. Течение между цилиндрами при  $\Omega_2 = -1.5\Omega_1$ ,  $Re = 400$ ,  $M = 0.05$

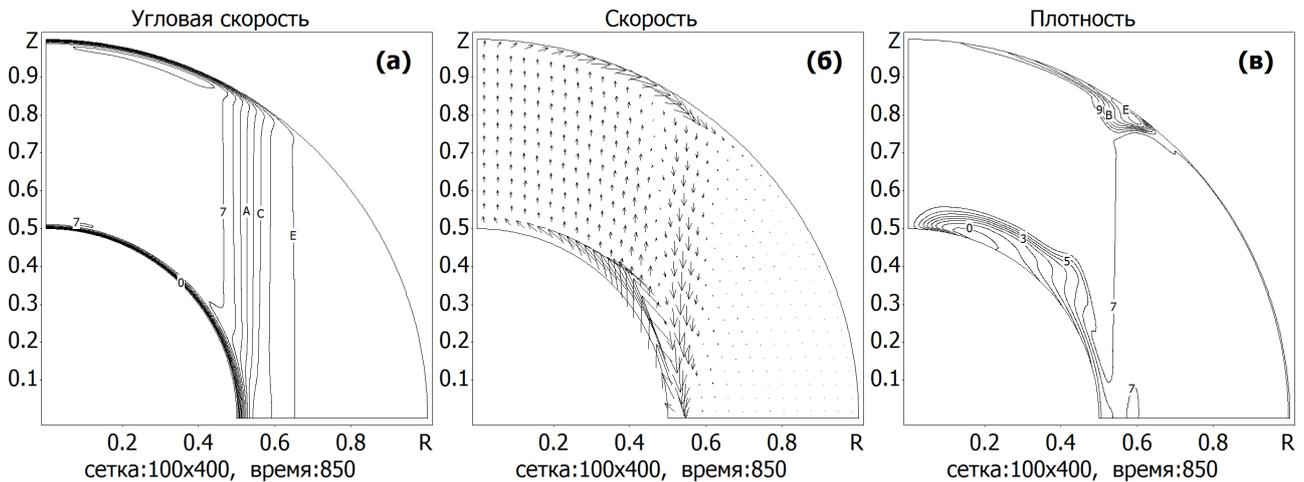


Рис. 4. Течение Стюартсона-Праудмэна между сферами при  $\Omega_1 = 0.9\Omega_2$ ,  $Re = 3400$ ,  $M = 0.1$

Для случая цилиндров моделируется неустойчивость первичного течения, приводящая к возникновению периодических по высоте цилиндров вторичных течений, содержащих тейлоровские вихри. Показано, что при сонаправленном вращении цилиндров также, как и в несжимаемом случае, при нарушении известного критерия устойчивости основного течения характерно возникновение одного ряда разнонаправленных вихрей. При разнонаправленном вращении цилиндров возникают существенно более сложные по структуре квазистационарные течения, содержащие два и более (см. рис.3) ряда вихрей различной интенсивности. Исследована зависимость характерных особенностей течения от соотношения угловых скоростей вращения цилиндров, значений числа Маха и числа Рейнольдса. В случае сфер моделируются устойчивые и неустойчивые первичные течения

различных типов. Показано, что при небольших (порядка 0.1) значениях числа Маха хорошо воспроизводятся основные течения, известные из экспериментов и аналитических исследований, включая течение Стюартсона-Праудмэна [44–46] в предельном случае почти твердотельного вращения (см. рис.4). Полученные результаты подтверждают эффективность построенных в работе схем гоудуновского типа для ортогональных криволинейных координат применительно к рассматриваемым задачам.

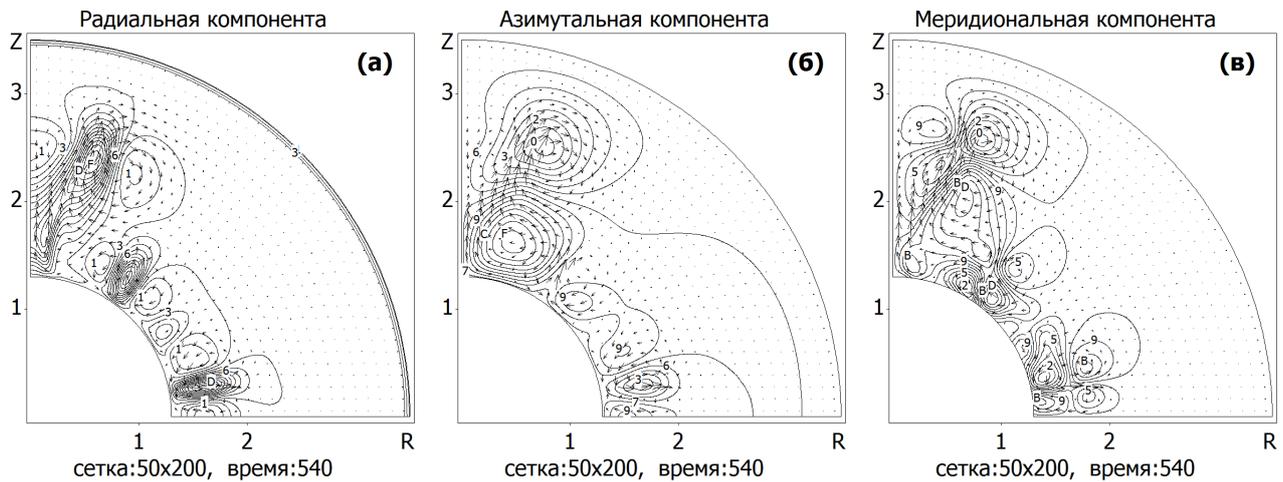


Рис. 5. Конвективное движение. Компоненты скорости: (а) радиальная, (б) азимутальная, (в) меридиональная

В п.2.2 приводятся результаты математического моделирования конвективных процессов в жидком ядре Земли. В предлагаемой модели задается равновесная (в предположении, что ускорение свободного падения линейно возрастает с увеличением радиуса) политропная газовая конфигурация, твердотельно вращающаяся в пространстве между концентрическими непротекаемыми сферами. Сферы соответствуют границам жидкое – твердое ядро и жидкое ядро – мантия. Помимо условий непротекания на сферических границах также задаются условия прилипания. Радиусы сфер, а также скорость вращения системы координат, в которой обе сферы и исходная конфигурация вязкого газа неподвижны, соответствуют земным параметрам. Параметры равновесной конфигурации подбираются таким образом, чтобы на границах жидкого ядра получались известные оценочные значения температуры, плотности и давления.

Проведены двумерные и трехмерные расчеты, моделирующие процессы в исходной равновесной конфигурации. Показано, что, несмотря на отсутствие дифференциального вращения, возникает интенсивная конвекция (см. рис.5), которая проявляется в виде характерных джетов, интенсивность которых выше у оси вращения. Возникновение джетов порождает ненулевую гидродинамическую спиральность [36], которая указывает на наличие

винтового движения. Характер моделируемого течения в приполюсной области хорошо согласуется с результатами наблюдений (см. выше).

В п.2.3 предлагается математическая модель новороссийской боры, основанная на двумерных нестационарных уравнениях газовой динамики с учетом гравитации, описывающая вихревые течения воздушных масс в атмосфере. Моделируется движение воздушного фронта через прибрежный хребет с последующим возникновением турбулентного течения над морской поверхностью (см. рис.6). Изучается влияние температуры, эпюры и величины скорости потока, втекающего в рассматриваемую область. Выявляются причины, приводящие к ураганным порывам ветра на поверхности моря, с которыми связаны возможные катастрофические последствия в прибрежной полосе.

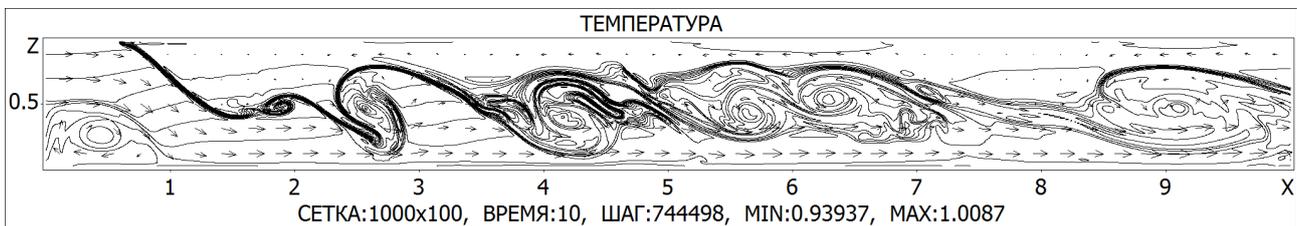


Рис. 6. Вихревое течение при боре

Полученная в расчетах картина нестационарного вихревого течения, развивающаяся вблизи поверхности моря, адекватна реально наблюдаемым явлениям, сопровождающим бору. Результаты серии вычислительных экспериментов позволяют предложить механизм возникновения и развития изучаемого атмосферного явления. Причина его — сдвиговая неустойчивость, возникающая на границе втекающего потока газа и неподвижной в начальный момент атмосферы. Активно развиваясь, эта неустойчивость порождает процесс преобразования кинетической и потенциальной (гравитационной) энергии поступающих воздушных масс в энергию развивающегося у поверхности моря резко нестационарного вихревого течения.

В п.2.4 формулируется постановка задачи о газодинамическом течении в аккреционном диске двойной звездной системы в двумерном и трехмерном приближениях. Ключевым элементом рассматриваемой математической модели является выбор в качестве начального состояния аккреционного диска равновесной в отсутствие вторичной компоненты и вращения системы торообразной газовой конфигурации. Приводятся основные результаты исследований подобных конфигураций, проведенных автором ранее. Проводятся двумерные расчеты в области, содержащей полость Роша первичной компоненты, в которой задается начальная конфигурация диска. Исследуется влияние на течение в диске сложного силового поля, обусловленного гравитацией обеих компонент двойной системы и вращением системы координат, в которой обе компоненты покоятся.

Показано, что в широком диапазоне параметров задачи сложное силовое поле приводит к образованию в аккреционном диске спиральных ударных волн, которые влияют на перераспределение углового момента вращающихся слоев газа. Вдоль линий их фронтов отмечается разрывная смена знака радиальной составляющей скорости. Такие спиральные образования сохраняются в течение длительного расчетного времени (порядка десятков оборотов двойной системы). Проведены исследования влияния соотношения масс компонент двойной системы, параметров начальной равновесной конфигурации и направления ее вращения, значения постоянной адиабаты в уравнении состояния газа и вариантов постановки граничных условий на характерные особенности спиральной структуры течения.

Для обеспечения большей достоверности расчеты в двумерном приближении проводились с использованием разностной схемы для цилиндрических координат, построенной в работе, где декартовы потоки (см. выше) вычислялись различными методами. Кроме этого проведено сравнение результатов аналогичных расчетов в двумерном и трехмерном приближении. В рамках рассматриваемой задачи обоснована адекватность двумерного подхода к моделированию процессов в диске.

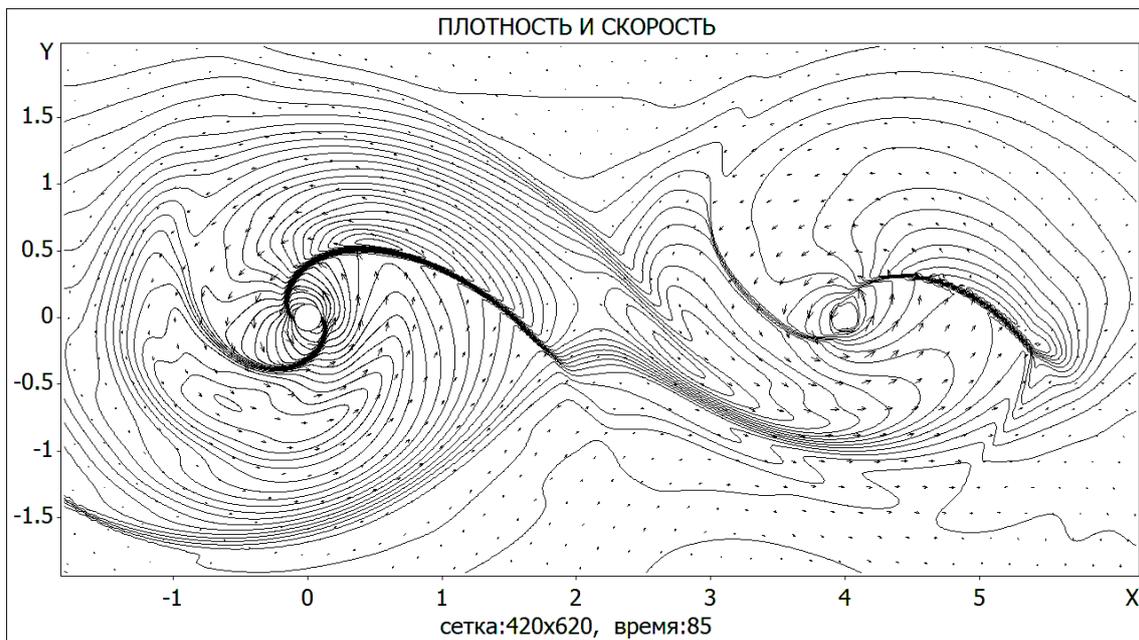


Рис. 7. Расчет в расширенной области. Спиральные ударные волны

Проведена серия расчетов в расширенной расчетной области, содержащей полости Роша обеих компонент двойной звездной системы (см. рис.7). В окрестности первичной компоненты по-прежнему задавалась та же начальная конфигурация диска. Аккреционный диск вторичной формировался за счет перетекания газа между компонентами. Показано, что при определенных условиях в ходе такого перераспределения массы может сформиро-

ваться практически одинаковая структура дисков обеих компонент, содержащая спиральные ударные волны.

Расчеты проводились как по схемам первого, так и второго порядка аппроксимации. Исследовано влияние на моделируемые процессы «физической» вязкости газа и аппроксимационной вязкости [8, 47–49] разностных схем. Показано, что влияние спиральных ударных волн на перераспределение масс дисков и темпы аккреции может оказаться существенно меньшим по сравнению с влиянием схемной диссипации, которая может приводить не только к локальным (таким, как «размазывание» фронтов ударных волн), но и к глобальным изменениям получаемых численных решений.

В **третьей главе** описываются основные методы и подходы, лежащие в основе разработанного автором программного средства визуализации и анимации результатов многомерных нестационарных расчетов на неравномерных ортогональных сетках ClcView (Calculated Data Viewer), а также интерфейсной части CVSSCtrl программного комплекса CVSS (Cardio-Vascular Simulation System, версия 12), осуществляющего расчеты нестационарных гемодинамических течений на графе кровеносных сосудов.



Рис. 8. Идентификация линий уровня

В п.3.1 предлагается модифицированный метод построения линий уровня функции двух переменных. Модификации позволяют существенно повысить эффективность и быстродействие базового алгоритма «квадродереьев» [50], а также осуществить идентификацию (см. рис.8) отдельных несвязных кривых, составляющих картину линий уровня. Отметим, что вопросы идентификации линий уровня при построении базового алгоритма не

рассматривались. Отображение картины линий уровня сводится к более общей задаче визуализации в окне устройства проекции на плоскость набора примитивов, заданных «физическими» координатами вершин в пространстве и связями между ними. Для решения этой задачи предлагается метод «сдвоенного окна», который позволяет формализовать такие операции над изображением, как масштабирование, прокрутка (скроллинг), копирование на другое устройство и др.

Рассматриваются вопросы, связанные с эффективностью применения к сеточным функциям метода построения линий уровня, а также цветовой «заливки». Описываются способы реализации цветовой «заливки» в операционных системах семейства Microsoft Windows, обеспечивающие высокое быстродействие. Предлагается достаточно универсальная структура файла данных трехмерного расчета на структурированной сетке, применимая как для возобновления расчета, так и для визуализации его результатов. Обсуждается реализация высокоскоростного доступа к таким файлам. Описывается методика генерации видео в формате MPEG4 [51] в операционных системах семейства Windows. Приводятся результаты тестирования разработанной программы, демонстрирующие возможность генерации полноформатного видео по данным расчета с производительностью реального времени (около 25 кадров в секунду) на достаточно подробных сетках.

В п.3.2 описана структура данных каркасной модели графа сердечно-сосудистой системы, содержащей трехмерные координаты узлов и список отрезков, соединяющих узлы, представляющих сосуды. К каждому узлу и отрезку дополнительно приписывается набор данных, необходимых для описания физиологических параметров узлов ветвления, тканей, сосудов и др. Предложен метод слияния каркасных моделей, позволяющий формировать сложные модели графов из простых фрагментов, создание которых может осуществляться различными пользователями. В каркасных моделях фиксируется дата и время последних изменений наборов данных, приписанных к узлам и сосудам (отрезкам). Это позволяет в процессе слияния моделей выбрать более поздние данные для совпадающих узлов и сосудов. Описываются подходы к реализации групповых операций изменения данных узлов и сосудов, в частности, изменения координат подмножества узлов, соответствующих изменениям положения тела.

Создание каркасных моделей требует ввода минимального набора данных, достаточного для последующих вычислений солвером CVSS. Однако визуальное восприятие проекции на плоскость представленного таким образом трехмерного графа может оказаться весьма затруднительным, особенно в случае сложных моделей. Столь же плохо воспринимаемым оказывается отображение результатов расчетов, например, путем цветовой индикации сеточных функций на отрезках, соединяющих узлы. В диссертации разра-

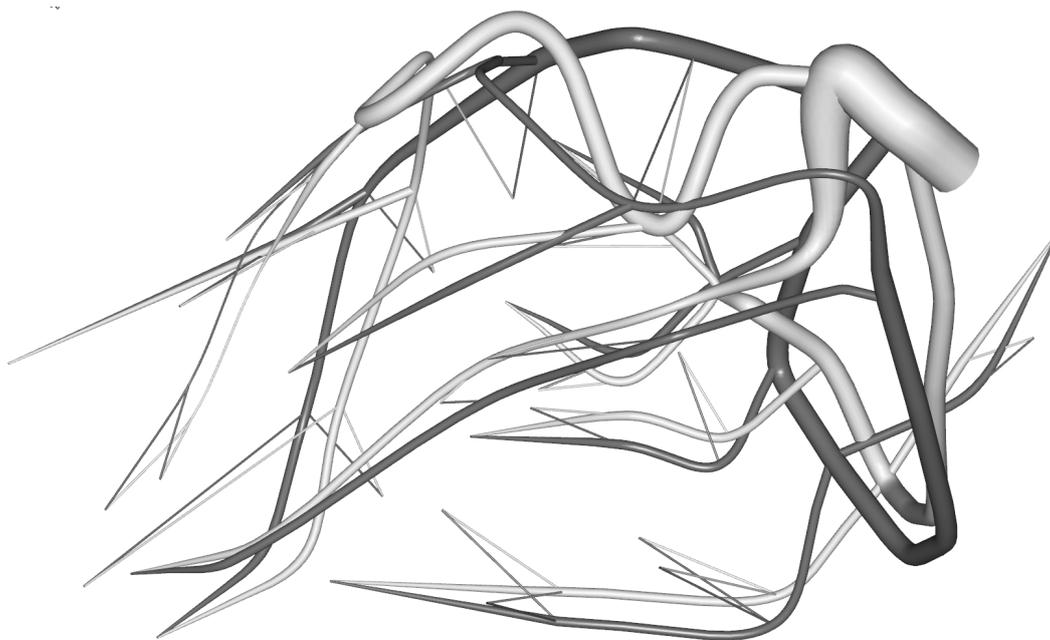


Рис. 9. Объемная модель CVSSCtrl

ботан уникальный метод построения реалистичной объемной (3D) модели (см. рис.9) на основе каркасной модели, не требующий вмешательства пользователя и ввода дополнительных данных. Основная идея метода состоит в том, что отрезки каркасной модели заменяются гладкими кривыми. В узлах осуществляется гладкое сопряжение кривых, соответствующих двум сосудам наибольшей толщины, если в узле сходится более двух сосудов. Далее строятся цилиндрические оболочки кривых, переменные диаметры которых соответствуют заданным размерам сечения сосудов и обеспечивают гладкое сопряжение оболочек. При построении оболочек путем анализа кривизны кривых минимизируется количество примитивов, достаточное для комфортного визуального восприятия объемной модели.

Солвер CVSS (версия 12) и управляющая программа CVSSCtrl являются отдельными программными единицами. Солвер представляет собой динамически загружаемую библиотеку, написанную на языке FORTRAN [37]. В библиотеке описаны структуры данных графа сосудов, математические модели тканей и органов, сопоставляемых некоторым вершинам графа, и процедура, реализующая один шаг по времени гемодинамического расчета на графе. Никаких операций ввода-вывода в солвере не предусмотрено, поэтому он в минимальной степени привязан к используемой операционной системе. Управляющий модуль написан на объектно-ориентированном языке высокого уровня и в максимальной степени задействует возможности операционных систем семейства Windows. Он позволяет конструировать каркасные модели графов сосудистой системы с визуальным контролем их корректности. Для отображения каркасных и объемных моделей также применяется метод «сдвоенного окна», разработанный в диссертации.

На основе сформированной каркасной модели заполняются структуры данных солвера, а дальнейшие вычисления осуществляются с использованием механизма многопоточности. Процесс вычислений запускается в отдельном вычислительном потоке в виде цикла по временным шагам солвера. В основном потоке параллельно осуществляется управление расчетом и визуализация его результатов, в частности, путем цветовой индикации сеточных функций на сосудах объемной модели. Указанный подход к взаимодействию управляющей программы и солвера предложен и реализован в ходе работы над диссертацией. В ней также описаны различные аспекты практической реализации описанных функций управляющей программы.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы, выносимые на защиту.

## Основные результаты работы

Таким образом, в работе получены следующие основные результаты.

1. Разработан метод построения консервативных разностных схем для расчета течений вязкого газа в криволинейных ортогональных координатах, позволяющий взять за основу произвольную декартову схему годуновского типа, аппроксимирующую уравнения Эйлера, и модифицировать ее без изменений алгоритма вычисления разностных потоков.

2. С помощью разработанного метода построены и реализованы в виде пакета вычислительных программ схемы для цилиндрических и сферических координат. Проведена верификация схем на основе сравнения результатов численного решения задач о распадах разрывов и обтекания параллельным потоком газа (вязкого и невязкого) цилиндров и сфер с данными экспериментов и расчетами других авторов.

3. Проведено математическое моделирование течений Тейлора-Куэтта между коаксиально вращающимися цилиндрами и концентрическими сферами с использованием явных разностных схем годуновского типа для расчета течений вязкого газа, построенных в работе. Результаты, в частности, демонстрируют, что при небольших значениях числа Маха (порядка 0.1) численные решения хорошо воспроизводят вихревые течения, наблюдаемые в экспериментах для несжимаемой жидкости при тех же значениях числа Рейнольдса, в том числе в предельном случае почти твердотельного вращения. Тем самым проведенные расчеты показывают возможность моделирования подобных течений без использования неявных разностных схем для численного решения уравнений Навье-Стокса, описывающих динамику несжимаемой жидкости.

4. В рамках оригинальной математической постановки задачи проведено моделирование течения вещества в жидком ядре Земли. Вещество жидкого ядра представлялось равновесной конфигурацией вязкого газа, задаваемой в сферическом слое, на границах которого ставились условия прилипания. Исходная конфигурация и ее непротекаемые сферические границы твердоительно вращались вокруг оси, проходящей через общий центр. Размеры сферического слоя, скорость вращения и начальные данные соответствовали известным земным параметрам. Показано, что, несмотря на отсутствие дифференциального вращения (мантия – твердое ядро), возникают ярко выраженные конвективные процессы, порождающие ненулевую спиральность вблизи оси вращения. При этом характер течения в приполюсной области согласуется с результатами наблюдений. Таким образом, продемонстрировано, что наличие дифференциального вращения не является необходимым условием интенсивных конвективных течений.

5. Проведено математическое моделирование атмосферных процессов, наблюдаемых при новороссийской буре. Выявлена совокупность факторов, приводящих к порывом ветра ураганной силы. Показано, что ключевым механизмом развития резко нестационарного вихревого течения у поверхности моря является сдвиговая неустойчивость.

6. Проведена серия двумерных и трехмерных расчетов, моделирующих газодинамические процессы в аккреционном диске двойной звездной системы, начальное состояние которого равновесно в гравитационном поле одной из компонент. Показано, что в широком диапазоне параметров системы под действием сложного силового поля в диске возникают спиральные ударные волны, оказывающие влияние на перераспределение углового момента вращающегося газа. Исследовано влияние вязкости (схемной и «физической») на процессы обмена массой между дисками двух компонент системы.

7. Разработаны: модифицированный метод построения и идентификации линий уровня сеточных функций двух переменных, метод «сдвоенного окна» отображения данных, привязанных к координатам в пространстве, методика эффективной генерации полноформатного видео для анимации результатов нестационарных расчетов. Указанные разработки реализованы в виде программного средства визуализации и анимации результатов многомерных нестационарных расчетов на неравномерных ортогональных сетках.

8. Предложены методы поэлементного конструирования трехмерных каркасных моделей графа сердечно-сосудистой системы и построения на их основе реалистичных объемных (3D) моделей графа. Эти методы в совокупности с общей концепцией «сдвоенного окна» визуализации данных в операционных системах с оконным интерфейсом легли в основу разработанного управляющего модуля программного комплекса CVSS (версия 12). Модуль осуществляет формирование данных трехмерного графа сердечно-

сосудистой системы с визуальным контролем их корректности, управление гемодинамическим расчетом и визуализацию его результатов. Параллельное с расчетом выполнение процедур визуализации и управления реализовано на основе механизма многопоточности.

### **Публикации автора по теме диссертации в изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и РИНЦ**

- A1. Стационарные дисковые структуры около гравитирующих компактных объектов / М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, В. М. Чечеткин // *Астрономический журнал* (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.21). — 1996. — Т. 73, № 3. — С. 407–418. — Перевод: *Studies of equilibrium configurations for a gaseous cloud near a gravitating center* / M. V. Abakumov, S. I. Mukhin, Yu P. Popov, V. M. Chechetkin // *Astronomy Reports* (IF WoS: 1.16; Scopus SJR: 0.47). — 1996. — Vol. 40, no. 3. — P. 366–377.
- A2. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы / М. В. Абакумов, К. В. Гаврилюк, Н. Б. Есикова и др. // *Дифференциальные уравнения* (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.01). — 1997. — Т. 33, № 7. — С. 892–898. — Перевод: *Mathematical model of the hemodynamics of the cardio-vascular system* / M. V. Abakumov, K. V. Gavriilyuk, N. B. Esikova et al. // *Differential Equations* (IF WoS: 0.68; Scopus SJR: 0.46). — 1997. — Vol. 33, no. 7. — P. 895–901.
- A3. Газодинамические процессы в аккреционном диске двойной звездной системы / М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, В. М. Чечеткин // *Математическое моделирование* (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.91). — 1998. — Т. 10, № 5. — С. 35–46.
- A4. Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы / М. В. Абакумов, И. В. Ашметков, Н. Б. Есикова и др. // *Математическое моделирование* (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.91). — 2000. — Т. 12, № 2. — С. 106–117.
- A5. Абакумов М. В., Мухин С. И., Попов Ю. П. О некоторых задачах гравитационной газовой динамики // *Математическое моделирование* (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.91). — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 110–120.
- A6. Математическое моделирование структуры аккреционных дисков в двойных звездных системах / М. В. Абакумов, С. И. Мухин,

- Ю. П. Попов, В. М. Чечеткин // *Астрономический журнал* (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.21). — 2001. — Т. 78, № 6. — С. 505–513. — Перевод: *Mathematical modeling of the structure of an accretion disk in a stellar binary system* / M. V. Abakumov, S. I. Mukhin, Yu P. Popov, V. M. Chechetkin // *Astronomy Reports* (IF WoS: 1.16; Scopus SJR: 0.47). — 2001. — Vol. 45, no. 6. — P. 434–441.
- A7. Сравнение результатов математического моделирования структуры аккреционного диска двойной звездной системы в двумерном и трехмерном приближении / М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, В. М. Чечеткин // *Астрономический журнал* (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.21). — 2003. — Т. 80, № 1. — С. 14–22. — Перевод: *Comparison between two- and three-dimensional modeling of the structure of an accretion disk in a binary system* / M. V. Abakumov, S. I. Mukhin, Yu P. Popov, V. M. Chechetkin // *Astronomy Reports* (IF WoS: 1.16; Scopus SJR: 0.47). — 2003. — Vol. 47, no. 1. — P. 11–19.
- A8. Ударные волны разрежения в численных решениях задач газовой динамики / М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, Д. В. Рогожкин // *Математическое моделирование* (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.91). — 2008. — Т. 20, № 1. — С. 48–60. — Перевод: *Expansion shock waves in numerical solutions of gasdynamic problems* / M. V. Abakumov, S. I. Mukhin, Yu P. Popov, D. V. Rogozhkin // *Mathematical Models and Computer Simulations* (Scopus SJR: 0.42). — 2009. — Vol. 1, no. 1. — P. 21–30.
- A9. Квазиакустическая схема для уравнений эйлера газовой динамики / М. В. Абакумов, А. М. Галанина, В. А. Исаков и др. // *Дифференциальные уравнения* (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.01). — 2011. — Т. 47, № 8. — С. 1092–1098. — Перевод: *Quasi-acoustic scheme for the euler equations of gas dynamics* / M. V. Abakumov, A. M. Galanina, V. A. Isakov et al. // *Differential Equations* (IF WoS: 0.68; Scopus SJR: 0.46). — 2011. — Vol. 47, no. 8. — P. 1103–1109.
- A10. Луговский А., Абакумов М., Чечеткин В. Математическое моделирование и визуализация течений вещества в аккреционных звездных дисках // *Научная визуализация* (ИФ РИНЦ: 0.67; Scopus SJR: 0.27). — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 21–33. — Перевод: *Lugovsky A., Abakumov M., Chechetkin V. Mathematical modeling and visualization of matter flows in accretion stellar disks* // *Scientific Visualization* (Scopus SJR: 0.27). — 2014. — Vol. 6, no. 2. — P. 21–33.
- A11. Абакумов М. В., Луговский А. Ю. О методах визуализации сеточных данных и их реализации в прикладной программе ClcView // *Научная*

визуализация (ИФ РИНЦ: 0.67; Scopus SJR: 0.27). — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 58–95.

- A12. Абакумов М. В. Метод построения разностных схем годуновского типа в криволинейных координатах и его применение для цилиндрических координат // Прикладная математика и информатика: Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики. — Т. 43. — М. : МАКС Пресс, 2013. — С. 25–44. — Перевод: Abakumov M. V. Method for the construction of godunov-type difference schemes in curvilinear coordinates and its application to cylindrical coordinates // Computational Mathematics and Modeling (Scopus SJR: 0.24). — 2014. — Vol. 25, no. 3. — P. 315–333.
- A13. Абакумов М. В., Попов Ю. П., Родионов П. В. Распад произвольного газодинамического разрыва в квазиодномерном приближении // Журнал вычислительной математики и математической физики (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.17). — 2015. — Т. 55, № 8. — С. 1391–1404. — Перевод: Abakumov M. V., Popov Y. P., Rodionov P. V. The riemann problem in the quasi-one-dimensional approximation // Computational Mathematics and Mathematical Physics (IF WoS: 0.57; Scopus SJR: 0.51). — 2015. — Vol. 55, no. 8. — P. 1356–1369.
- A14. Абакумов М. В. Метод построения разностных схем годуновского типа в криволинейных координатах и его применение для сферических координат // Прикладная математика и информатика: Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики. — Т. 45. — М. : МАКС Пресс, 2014. — С. 63–83. — Перевод: Abakumov M. V. Construction of godunov-type difference schemes in curvilinear coordinates and an application to spherical coordinates // Computational Mathematics and Modeling (Scopus SJR: 0.24). — 2015. — Vol. 26, no. 2. — P. 184–203.
- A15. Абакумов М. В., Попов Ю. П. Влияние аппроксимационной вязкости на численное решение задачи об аккреционном диске двойной звёздной системы // Дифференциальные уравнения (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.01). — 2016. — Т. 52, № 7. — С. 866–877. — Перевод: Abakumov M. V., Popov Y. P. Influence of the approximation viscosity on the numerical solution of the problem on the accretion disk in a binary star system // Differential Equations (IF WoS: 0.68; Scopus SJR: 0.46). — 2016. — Vol. 52, no. 7. — P. 824–835.
- A16. Абакумов М. В., Липанов А. М., Попов Ю. П. Математическое моделирование газодинамических течений, сопровождающих ветры бора // Математическое моделирование (RSCI; ИФ РИНЦ: 0.91). — 2016. —

Т. 28, № 6. — С. 3–17. — Перевод: Abakumov M. V., Lipanov A. M., Popov Y. P. Mathematical simulation of gas dynamic flows accompanying the bora winds // *Mathematical Models and Computer Simulations* (Scopus SJR: 0.42). — 2017. — Vol. 9, no. 1. — P. 1–11.

- A17. Абакумов М. В., Чечеткин В. М., Шалимов С. Л. Математическое моделирование конвективных процессов в жидком ядре земли и его следствия для интерпретации вариаций геомагнитного поля в полярных широтах // *Физика Земли* (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.59). — 2018. — № 3. — С. 84–91. — Перевод: Abakumov M. V., Chechetkin V. M., Shalimov S. L. Mathematical simulation of convective processes in the liquid core of the earth and implications for the interpretation of geomagnetic field variations in polar latitudes // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth* (IF WoS: 0.80; Scopus SJR: 0.41). — 2018. — Vol. 54, no. 3. — P. 466–473.
- A18. Абакумов М. В. Математическое моделирование течений вязкого газа в пространстве между двумя коаксиально вращающимися концентрическими цилиндрами и сфера // *Журнал вычислительной математики и математической физики* (RSCI; ИФ РИНЦ: 1.17). — 2019. — Т. 59, № 3. — С. 409–428. — Перевод: Abakumov M. V. Mathematical simulation of viscous gas flows between two coaxially rotating concentric cylinders and spheres // *Computational Mathematics and Mathematical Physics* (IF WoS: 0.57; Scopus SJR: 0.51). — 2019. — Vol. 59, no. 3. — P. 384–401.

### **Прочие публикации автора по теме диссертации**

- B1. Исследование равновесных конфигураций газового облака вблизи гравитирующего центра / М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, В. М. Чечеткин. — М., 1995. — 26 с. — (Препр. / ИПМ РАН №33 (ИФ РИНЦ 2014: 0.66)).
- B2. Математическое моделирование процессов в аккреционном диске двойной звездной системы / М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, В. М. Чечеткин. — М., 1996. — 34 с. — (Препр. / ИПМ РАН №82 (ИФ РИНЦ 2014: 0.66)).
- B3. Абакумов М. В. Исследование и модификация разностных схем метода крупных частиц. — М., 1996. — 33 с. — (Препр. / ИПМ РАН №47 (ИФ РИНЦ 2014: 0.66)).

- В4. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы / М. В. Абакумов, К. В. Гаврилюк, Н. Б. Есикова и др. — М., 1996. — 25 с. — (Препр. / ИПМ РАН №104 (ИФ РИНЦ 2014: 0.66)).
- В5. Особенности схемы Рунге при расчете задач обтекания / М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, С. Б. Попов. — М., 1996. — 30 с. — (Препр. / ИПМ РАН №46 (ИФ РИНЦ 2014: 0.66)).
- В6. Разностная схема решения задач гемодинамики на графе / М. В. Абакумов, Н. Б. Есикова, С. И. Мухин и др. — М. : Диалог-МГУ, 1998. — 16 с. — (Препр. / ВМК МГУ).
- В7. Аккреционные диски в двойной звездной системе с переменным расстоянием между компонентами. Математическое моделирование / М. В. Абакумов, А. А. Жданов, С. И. Мухин и др. — М., 2003. — 37 с. — (Препр. / ИПМ РАН №65 (ИФ РИНЦ 2014: 0.66)).
- В8. Абакумов М. В. О некоторых методах визуализации сеточных данных. — М., 2004. — 40 с. — (Препр. / ИПМ РАН №72 (ИФ РИНЦ 2014: 0.66)).
- В9. Абакумов М. В. Об особенностях использования газодинамических схем с потоками в полярных координатах. — М. : МАКС Пресс, 2006. — 24 с. — (Препр. / ВМК МГУ).
- В10. Об ударных волнах разрежения в вычислительной газовой динамике / М. В. Абакумов, С. И. Мухин, Ю. П. Попов, Д. В. Рогожкин. — М., 2006. — 28 с. — (Препр. / ИПМ РАН №3 (ИФ РИНЦ 2014: 0.66)).
- В11. Абакумов М. В. Построение потоковых разностных схем для расчета течений вязкого сжимаемого газа в цилиндрических координатах. — М. : МАКС Пресс, 2010. — 44 с. — (Препр. / ВМК МГУ).
- В12. Абакумов М. В., Фаворский А. П., Хруленко А. Б. Представление уравнений Навье-Стокса в криволинейных координатах. — М. : МАКС Пресс, 2011. — 28 с. — (Препр. / ВМК МГУ).
- В13. Абакумов М. В. Построение потоковых разностных схем и их применение при расчетах течений газа в аккреционном диске. — М. : МАКС Пресс, 2012. — 48 с. — (Препр. / ВМК МГУ).
- В14. Gas dynamic processes in the accretion disk of the binary star system / M. V. Abakumov, S. I. Mukhin, Ju P. Popov, V. M. Chechetkin // Proceedings of 9th European and 5th Euro-Asian Astronomical Society Conference (JENAM-2000). — Moscow, 2000. — P. 70–70.

- В15. Программный комплекс для моделирования гемодинамики на пространственном графе сердечно-сосудистой системы / М. В. Абакумов, В. Б. Кошелев, С. И. Мухин и др. // Тезисы докл. V Всеросс. конф. «Физиология кровообращения». — М. : МАКС Пресс, 2012. — С. 15–15.
- В16. Математическое моделирование гемодинамики / М. В. Абакумов, А. Г. Борзов, А. Я. Буничева и др. // Тезисы докл. Междунар. конф. «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики». — М. : МАКС Пресс, 2014. — С. 66–67.
- В17. Абакумов М. В., Липанов А. М., Попов Ю. П. Математическое моделирование газодинамических течений, сопровождающих ветры бора // Тезисы докл. Междунар. конф. «Тихоновские чтения». — М. : МАКС Пресс, 2015. — С. 33–33.
- В18. Application of hemodynamic modeling for solution of related physiological problems / S. Mukhin, M. Abakumov, A. Borzov et al. // Proceedings 4th International Conference on Computational & Mathematical Biomedical Engineering. — Swansea, United Kingdom : CMBE Zeta Computational Resources Ltd, 2015. — P. 52–53.
- В19. Абакумов М. В., Попов Ю. П. Математическое моделирование неустойчивости течений вязкого газа между вращающимися соосными цилиндрами и сферами // Тезисы докл. Междунар. конф. «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики». — М. : МАКС Пресс, 2016. — С. 82–83.
- В20. Абакумов М. В., Мельчукова А. Д. О методах построения картины линий тока двумерных векторных полей // Тезисы докл. Междунар. конф. «Ломоносовские чтения». — М. : МАКС Пресс, 2018. — С. 15–15.
- В21. Математическое моделирование гемодинамики человека в примерах / М. В. Абакумов, А. Я. Буничева, С. И. Мухин и др. // Тезисы докл. Междунар. конф. «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» памяти академика А.А.Самарского. — М. : МаксПресс, 2019. — С. 140–141.
- В22. Абакумов М. В. О построении и применении разностных схем годовского типа для расчетов течений вязкого газа в криволинейных координатах // Тезисы докл. Междунар. конф. «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» памяти академика А.А.Самарского. — М. : МаксПресс, 2019. — С. 138–139.

## Литература

1. Vinokur M. Conservation equations of gasdynamics in curvilinear coordinate systems // *Journal of Computational Physics*. — 1974. — Vol. 14, no. 2. — P. 105–125.
2. Yee H. C., Harten A. Implicit TVD schemes for hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates // *AIAA Journal*. — 1987. — Vol. 25, no. 2. — P. 266–274.
3. Sun Z., Ren Y.-X. A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving the navier-stokes equations on curvilinear coordinates // *Computational Fluid Dynamics 2008*. — Springer Berlin Heidelberg, 2009. — P. 437–442.
4. Коробицын В. А. Ковариантные преобразования базисных дифференциально-разностных схем на плоскости // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2011. — Т. 51, № 11. — С. 2033–2041.
5. Mignone A. High-order conservative reconstruction schemes for finite volume methods in cylindrical and spherical coordinates // *Journal of Computational Physics*. — 2014. — Vol. 270. — P. 784–814.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов // *Доклады Академии наук СССР*. — 1959. — Т. 124, № 3. — С. 529–532.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. — 3-е испр. изд. — М. : Наука, 1989. — 616 с.
8. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики: Учеб. пособие; Для вузов. — 3-е доп. изд. — М. : Наука, 1992. — 424 с.
9. Жарков В. Н. Внутреннее строение Земли и планет. Элементарное введение в планетную и спутниковую геофизику. — М. : Наука и образование, 2013. — 414 с.
10. Bloxham J., Gubbins D. The secular variation of Earth's magnetic field // *Nature*. — 1985. — Vol. 317, no. 6040. — P. 777–781.
11. Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data / G. Hulot, C. Eymin, B. Langlais et al. // *Nature*. — 2002. — Vol. 416, no. 6881. — P. 620–623.

12. Olson P., Aurnou J. A polar vortex in the Earth's core // *Nature*. — 1999. — Vol. 402, no. 6758. — P. 170–173.
13. Livermore P. W., Hollerbach R., Finlay C. C. An accelerating high-latitude jet in Earth's core // *Nature Geoscience*. — 2016. — Vol. 10, no. 1. — P. 62–68.
14. Holme R. Large-scale flow in the Core // *Core Dynamics (Treatise on Geophysics)* / Ed. by P. Olson, G. Schubert. — Amsterdam : Elsevier, 2007. — Vol. 8. — P. 107–130.
15. Song X., Richards P. G. Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core // *Nature*. — 1996. — Vol. 382, no. 6588. — P. 221–224.
16. Laske G., Masters G. Limits on differential rotation of the inner core from an analysis of the Earth's free oscillations // *Nature*. — 1999. — Vol. 402, no. 6757. — P. 66–69.
17. Experiments on convection in Earth's core tangent cylinder / J. Aurnou, S. Andreadis, L. Zhu, P. Olson // *Earth and Planetary Science Letters*. — 2003. — Vol. 212, no. 1-2. — P. 119–134.
18. Taylor-Couette flow control using inner cylinder cross-section variation strategy / M. Khirennas, H. Oualli, M. Mekadem et al. // *SSRN Electronic Journal*. — 2018. — P. 1–10.
19. Волков-Музылёв В. В., Борисов Ю. А., Калашников Д. А. Исследование характеристик течения Куэтта-Тейлора в современных газодинамических подшипниках // *Наукоград*. — 2017. — № 2(12). — С. 63–65.
20. Grisogono B., Belušić D. A review of recent advances in understanding the meso- and microscale properties of the severe bora wind // *Tellus*. — 2009. — Vol. 61, no. 1. — P. 1–16.
21. Ефимов В. В., Барабанов В. С. Моделирование черноморской боры // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 688–698.
22. Торопов П. А., Мысленков С. А., Самсонов Т. Е. Численное моделирование новороссийской боры и связанного с ней ветрового волнения // *Вестник Московского университета. География*. — 2013. — № 2. — С. 38–46.

23. Гавриков А. В., Иванов А. Ю. Аномально сильная бора на черном море: наблюдение из космоса и численное моделирование // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2015. — Т. 51, № 5. — С. 615–626.
24. Вельтищев Н. Ф., Степаненко В. М. Мезометеорологические процессы. — М. : МГУ, 2006. — 101 с.
25. Бисикало Д. В., Жилкин А. Г., Боярчук А. А. Газодинамика тесных двойных звезд. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 632 с.
26. Шакура Н. И. Дискковая модель аккреции газа релятивистской звездой в тесной двойной системе // Астрономический журнал. — 1972. — Т. 49, № 10. — С. 921–929.
27. Shakura N. I., Sunyaev R. A. Black holes in binary systems. Observational appearance // Astronomy and Astrophysics. — 1973. — Vol. 24. — P. 337–355.
28. Papaloizou J. C. B., Lin D. N. C. Theory of accretion disks I: Angular momentum transport processes // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 1995. — Vol. 33, no. 1. — P. 505–540.
29. Balbus S. A. Enhanced angular momentum transport in accretion disks // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 2003. — Vol. 41, no. 1. — P. 555–597.
30. Sawada K., Matsuda T., Hachisu I. Spiral shocks on a roche lobe overflow in a semi-detached binary system // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1986. — Vol. 219, no. 1. — P. 75–88.
31. ParaView. — 2019. — Access mode: <https://www.paraview.org/> (online; accessed: 2019-12-09).
32. Gnuplot. — 2019. — Access mode: <http://www.gnuplot.info> (online; accessed: 2019-12-11).
33. Tecplot (CFD Visualization & Analysis Software). — 2019. — Access mode: <https://www.tecplot.com> (online; accessed: 2019-12-11).
34. IDL (the Interactive Data Language). — 2019. — Access mode: <https://www.harrisgeospatial.com/Software-Technology/IDL> (online; accessed: 2019-12-11).
35. Математические модели квази-одномерной гемодинамики: Методическое пособие / В. Б. Кошелев, С. И. Мухин, Н. В. Соснин, А. П. Фаворский. — М. : МАКС Пресс, 2010. — 114 с.

36. Моффат Т. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М. : Мир, 1980. — 339 с.
37. Бартенъев О. В. Современный Фортран. — М. : Диалог МИФИ, 2005. — 560 с.
38. Тейксейра С., Пачеко К. Delphi 5. Руководство разработчика. — М. : Вильямс, 2000. — 832 с.
39. OpenGL. Руководство по программированию. Библиотека программиста. 4-е издание / М. Ву, Т. Девис, Дж. Нейдер, Д. Шрайнер. — СПб. : Питер, 2006. — 624 с.
40. Roe P. L. Characteristic-based schemes for the Euler equations // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1986. — Vol. 18, no. 1. — P. 337–365.
41. Einfeldt B. On Godunov-type methods for gas dynamics // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1988. — Vol. 25, no. 2. — P. 294–318.
42. Chakravarthy S. R., Osher S. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // 23rd Aerospace Sciences Meeting. — American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1985. — P. 1–11.
43. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Часть 2. — 4-е, перераб. и дополн. изд. — М. : Физматлит, 1963. — 728 с.
44. Proudman I. The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres // Journal of Fluid Mechanics. — 1956. — Vol. 1, no. 05. — P. 505–516.
45. Stewartson K. On almost rigid rotations // Journal of Fluid Mechanics. — 1957. — Vol. 3, no. 1. — P. 17–26.
46. Stewartson K. On almost rigid rotations. part 2 // Journal of Fluid Mechanics. — 1966. — Vol. 26, no. 01. — P. 131–144.
47. Давыдов Ю. М., Скотников В. П. Дифференциальные приближения разностных схем. — М. : Изд-во ВЦ АН СССР, 1978. — 72 с.
48. Холодов А. С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1978. — Т. 18, № 6. — С. 1476–1492.
49. Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. — Новосибирск : Наука, 1985. — 364 с.

50. Suffern K. G. Quadtree algorithms for contouring functions of two variables // The Computer Journal. — 1990. — Vol. 33, no. 5. — P. 402–407.
51. MPEG (the Moving Picture Experts Group). — 2019. — Access mode: <https://mpeg.chiariglione.org> (online; accessed: 2019-12-09).