

УДК 537.612.2

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ОПИСАНИЯ НУЛЕВЫХ ТОЧЕК ПОТЕНЦИАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ 2-ГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

А.Т. Лукашенко¹, И.С. Веселовский^{1,2}

¹Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына МГУ, Москва

²Институт космических исследований РАН, Москва

a_lu@mail.ru, veselov@decl.sinp.msu.ru

Поступила в редакцию 09.02.2015 г.

После доработки 30.03.2015 г.

Сформулированы общие принципы описания нулевых точек 2-го и высших порядков потенциального магнитного поля. Потенциал вблизи нуля 2-го порядка общего вида можно задать линейной комбинацией из четырёх базисных функций, список которых приводится. Вблизи нулей порядка 2-го и выше уравнения силовых линий зачастую не удаётся проинтегрировать аналитически, однако в ряде случаев возможно дать качественное описание геометрии окрестностей нуля за счёт рассмотрения поведения силовых линий вблизи исходящих из нуля лучей, на которых поле радиально или же равно нулю.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение нулевых точек магнитного поля важно, поскольку именно в них часто зарождается процесс магнитного пересоединения. Представляющие наибольший интерес с этой точки зрения нулевые точки 1-го порядка в пространстве рассматривались ранее в литературе многократно, например в [Parnell et al., 1996] и [Priest and Titov, 1996]. Однако в некоторых случаях, например, при описании возникновения новых нулевых точек (в частности, при рассмотрении топологического триггера [Горбачёв и др., 1988]), интерес вызывают и нелинейные эффекты. Также высказывалось предположение о влиянии таких эффектов на процессы пересоединения [Galsgaard and Pontin, 2011]. Вопросы классификации и описания нулей 2-го и высших порядков, однако, до сих пор почти не были изучены. Краткий обзор их свойств для потенциального поля был проведён в [Жугжда, 1966].

Цель настоящей публикации состоит в установлении методов упрощения описания нулей 2-го и высших порядков потенциального магнитного поля и предоставлении

соответствующего математического аппарата.

Согласно уравнениям Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Если, кроме того, плотность тока $\mathbf{j} = 0$ (источники магнитного поля локализованы за пределами рассматриваемой области), то магнитное поле можно представить как градиент скалярного потенциала

$$\mathbf{B} = \nabla U, \quad (1)$$

удовлетворяющего уравнению Лапласа $\Delta U = 0$. Силовыми линиями поля называются линии, в каждой точке которых поле направлено касательно к ним. Их дифференциальные уравнения в декартовой системе координат

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{ds}{|\mathbf{B}|}, \quad (2)$$

где ds — элемент длины линии. Если поле в точке конечно, непрерывно и в нуль не обращается, то через такую точку можно провести силовую линию и при том единственную. В нулевой точке единственность может нарушаться, при этом в ней могут оканчиваться как одномерные многообразия (изолированные силовые линии, называемые γ -линиями [Cowley, 1973]), так и двумерные (образуемые силовыми линиями поверхности, называемые Σ -поверхностями), однако, по причине равенства нулю дивергенции, не может оканчиваться никакая трубка с конечным магнитным потоком.

2. ВВЕДЕНИЕ В БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ

Нулевые точки могут быть классифицированы по их порядку. Поместим начало системы координат в такую точку. В её окрестности i -ю компоненту вектора магнитного поля можно разложить в виде:

$$B_i = \left. \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{R}=0} x_j + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{\mathbf{R}=0} x_j x_k + \dots, \quad (3)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус вектор, обозначено $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, а по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование. Нулём 1-го порядка будем называть такую нулевую точку, в которой по крайней мере одна из производных 1-го порядка, входящая в разложение

(3) по крайней мере для одной из компонент вектора поля, отлична от нуля. Если же в точке все производные 1-го порядка равны нулю, но ненулевой является какая-либо из производных второго порядка по крайней мере для одной из компонент вектора $\mathbf{B}$, то назовём такой нуль нулём 2-го порядка, и т.д. В случае потенциального поля в окрестности нулевой точки удобно разлагать в ряд не компоненты вектора поля, как в (3), а потенциал:

$$U = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \bigg|_{\mathbf{R}=0} x_i x_j x_k + \dots \quad (4)$$

Согласно определению, гармоническим полиномом называется полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа [Тихонов и Самарский, 1977]. Любой гармонический полином представим в виде суммы однородных гармонических полиномов (ОГП). В двумерном случае для каждого порядка n существует ровно два линейно независимых ОГП. В качестве них можно взять действительные и мнимые части разложения произвольной аналитической функции $\Phi(z)$, где $z = x + iy$, в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_n z^n = c_0 + c_1 (x + iy) + \frac{1}{2} c_2 (x + iy)^2 + \frac{1}{6} c_3 (x + iy)^3 + \dots = \\ &= c_0 + c_1 (x + iy) + c_2 \left[\frac{1}{2} (x^2 - y^2) + ixy \right] + c_3 \left[\left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} xy^2 \right) + i \left(\frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{6} y^3 \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Каждый из потенциалов 2-го порядка $V^{2,1} = \frac{x^2 - y^2}{2}$ и $V^{2,2} = xy$ задаёт на плоскости нулевую точку типа “седло” (т.н. X -точку) с прямыми углами между асимптотами, различие между ними лишь в повороте системы силовых линий. Аналогично, потенциалы 3-го порядка $V^{3,1} = \frac{1}{6} (x^3 - 3xy^2)$ и $V^{3,2} = \frac{1}{6} (3x^2 y - y^3)$ задают различающиеся лишь поворотом нулевые точки 2-го порядка с шестью разделёнными равными углами асимптотами, и т.д.

В пространстве число базисных функций (под которыми мы подразумеваем ОГП или шаровые функции) порядка n равно уже $2n + 1$ [Тихонов и Самарский, 1977]. Однако рассмотрение можно упростить. Следствием из так называемой “теоремы о причёсывании ежа” является то, что у поля, заданного в окрестности нулевой точки базисными функциями

одинакового порядка, существует как минимум одна проходящая через эту точку прямая, на которой поле радиально или же обращается в нуль. Удобно перейти к такой системе координат, в которой ось z изначально предполагается направленной вдоль такой прямой. В дальнейшем будем называть те исходящие из нулевой точки лучи, на которых поле радиально или же равно нулю, *реперами*. Изучение поведения силовых линий вблизи реперов даёт возможность составить представление о геометрии окрестностей нуля и тогда, когда уравнения (2) не интегрируются аналитически.

Из соображений удобства мы далее воспользуемся приведёнными ОГП на основе шаровых функций. Каждая шаровая функция пропорциональна выражению

$$r^n P_n^{(m)}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} = r^m \sin^m \theta \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \cdot r^{n-m} \frac{d^m}{d \cos^m \theta} P_n(\cos \theta), \quad (6)$$

где $P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ — присоединённые функции Лежандра. В согласии с произведённым выбором системы координат, когда $B_x|_{x=y=0} = B_y|_{x=y=0} \equiv 0$, нужно взять такие гармоники, у которых $m \neq 1$. Будем называть, как и ранее, n порядком базисной функции $U_n^{i,j}$; число $i = m - 1$ назовём её родом; полиномы на основе шаровых функций, включающих в качестве сомножителя $\cos m\varphi$, назовём базисными функциями 1-го вида ($j = 1$), а включающих $\sin m\varphi$ — 2-го ($j = 2$). Аксиально-симметричную функцию порядка n обозначим как U_n^0 . Список базисных функций приведён в табл. 1 (пояснения по нормировке даны далее). Поворотом системы координат вокруг оси z при рассмотрении нуля наиболее общего вида можно сократить число необходимых базисных функций ещё на единицу за счёт какой-либо из функций с $i \geq 1$ (например, $U_3^{1,1}$ для нуля 3-го порядка). Наконец, можно подобрать масштабный фактор. Таким образом, при исследовании нулей порядка $p = n - 1$ нам фактически достаточно рассматривать линейную комбинацию не $2n + 1$, а $2n - 2$ функций с $2n - 3$ произвольными коэффициентами.

Для перехода к системе координат, в которой ось z имеет произвольно заданное

направление, можно воспользоваться кватернионами [Вильямс, 1977] или аналогичным преобразованием через матрицу поворота. Новые координаты точки (штрихованные) выражаются через старые координаты той же точки (нештрихованные) путём умножения последних на матрицу поворота Q :

$$\mathbf{R}' = Q\mathbf{R}, \quad (7)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\psi}{2} + (u^2 - v^2 - w^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} & 2 \left[uv \sin^2 \frac{\psi}{2} - w \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right] & 2 \left[wu \sin^2 \frac{\psi}{2} + v \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right] \\ 2 \left[uv \sin^2 \frac{\psi}{2} + w \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right] & \cos^2 \frac{\psi}{2} + (v^2 - u^2 - w^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} & 2 \left[vw \sin^2 \frac{\psi}{2} - u \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right] \\ 2 \left[wu \sin^2 \frac{\psi}{2} - v \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right] & 2 \left[vw \sin^2 \frac{\psi}{2} + u \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right] & \cos^2 \frac{\psi}{2} + (w^2 - u^2 - v^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Здесь единичный вектор $\mathbf{n} = (u \ v \ w)^T$, задаёт ось, вокруг которой производится поворот системы координат по часовой стрелке на угол ψ . Преобразование, обратное (7), даётся изменением знака перед ψ .

Классификацию нулей 1-го порядка производят по совокупности собственных значений (СЗ) матрицы вторых производных потенциала (см., например, [Parnell et al., 1996]), которая является симметричной с нулевым следом. Возможны следующие варианты: все СЗ различны и отличны от нуля (невыврожденный, т.е. устойчивый к малым возмущениям нуль), два СЗ равны (аксиальная симметрия), одно СЗ нулевое. В последнем случае имеется X -точка с прямыми углами между асимптотами на перпендикулярной ей нулевой (в 1-м порядке разложения) прямой. Однако поле на этой прямой в общем случае не равно нулю тождественно. В простейшем варианте оно квадратично и направлено к прямой под произвольным углом, так что возникает необходимость учёта наложения эффектов от 1-го и 2-го порядков. В первых же двух случаях из перечисленных имеется Σ -поверхность в виде плоскости, названной Priest and Titov [1996] “веерной плоскостью”, и перпендикулярная ей γ -линия, названная ими же “шипом”. Мы, рассматривая нулевые точки произвольного порядка,

при описании тех оканчивающихся в нуле силовых линий, которые являются асимптотами всех других линий, проходящих вблизи них в перпендикулярном им сечении (т.е. образующих при проецировании на это сечение точку типа “узел”, устойчивую либо неустойчивую), будем применять термин “полушип” (half-spine). Два дополняющих друг друга полушипа дают “шип”. γ -линией же будем называть такую линию, которая приходит в нулевую точку изолированно. Для нулей 1-го порядка эти понятия совпадают, но во 2-м порядке и выше возможны γ -линии, не являющиеся шипами, и шипы, не являющиеся γ -линиями.

3. НУЛИ 2-ГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вклад в поле на оси z могут давать только аксиально-симметричные базисные функции [Жугжда, 1966]. Совокупность силовых линий с концом в нуле, описываемых каждой из них, состоит из направленного по оси z шипа и Σ -поверхностей в виде конусов в количестве $2[p/2]$, где p — порядок нуля, а квадратные скобки обозначают взятие целой части. К ним у нулей нечётного порядка добавляется веерная плоскость xOy . Так, в случае потенциала U_3^0 уравнения силовых линий легко интегрируются и в цилиндрической системе

координат даются выражением $z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + \frac{C}{\rho^2}}$ (рис. 1), а два “веерных” конуса лежат

при $z = \pm \frac{\rho}{2}$. Базисные функции 3-го порядка 1-го рода задают нулевые точки (рис. 2) с

восемью одинаковыми, с точностью до направления вектора поля на них, полушипами, лежащие на пересечении трёх взаимно перпендикулярных нулевых линий (такая геометрия получится если поместить нуль в центр соответствующим образом повёрнутого куба, нулевые реперы направить к центрам граней, а ненулевые — в стороны вершин). Потенциалами 3-го порядка 2-го рода задаются двумерные нулевые точки 2-го порядка, лежащие на нулевой прямой (ср. с (5), см. рис. 3).

У нуля 1-го порядка число реперов в неосесимметричном случае равно шести (и у невырожденного нуля они ненулевые — “6-хвостая точка” [Dumin and Somov, 2015]), так что

даже с учётом произведённых нами упрощений возможно несколько эквивалентных записей одного и того же потенциала. Аналогичные ситуации возникают и в случае нулей 2-го порядка. Эквивалентность здесь понимается как идентичность систем силовых линий с точностью до поворота в пространстве.

Поясним рассмотрение нулей 2-го порядка подробнее на примере одной из не задействованных нами присоединённых функций Лежандра с $m = 1$ (рис. 4):

$$W = r^3 P_3^{(1)}(\cos \theta) \cdot \cos \varphi = \frac{3}{2} r^3 \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \cdot \cos \varphi = 6xz^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}xy^2. \quad (9)$$

Можно показать, что в данном случае имеется четыре нулевых репера, а именно лучи, составляющие прямые

$$x = 0, \quad y = \pm 2z, \quad (10)$$

и шесть ненулевых — полуоси оси x и лучи прямых

$$y = 0, \quad x = \pm \frac{2}{\sqrt{11}} z. \quad (11)$$

Направляя ось z' новой системы координат вдоль положительного направления оси x или же вдоль лучей с $z > 0$ прямых, заданных уравнениями (10) и (11) при выборе знака “+”, можно получить, используя (7), соответственно следующие эквивалентные потенциалы:

$$W_1 = \frac{9}{2} \left(U_3^0 + \frac{5}{3} U_3^{1,2} \right), \quad (12)$$

$$W_2 = -6 \left(U_3^{1,2} + \frac{3}{2} U_3^{2,1} \right), \quad (13)$$

$$W_3 = -\frac{24}{\sqrt{15}} \left[U_3^0 + \frac{3}{4} U_3^{1,2} + \frac{\sqrt{11}}{8\sqrt{2}} (U_3^{2,1} - U_3^{2,2}) \right]. \quad (14)$$

Рассмотрим (12). Уравнения силовых линий частично интегрируются: в проекции на плоскость xOy при этом $|y \pm x| = C(y \mp x)^4$, C — константа. В плоскостях $x = y$ и $x = -y$ силовые линии плоские, а их уравнения также можно проинтегрировать. Вернёмся к исходной записи (9). Ось x является γ -линией, но не шипом, а прямые (11) — шипы, что

следует из рассмотрения проекций на плоскость xOy линий, задаваемых W_3 . Σ -поверхностей в данном случае нет.

В заключение укажем, что нормировка в табл. 1 подобрана так, что сумма $U_2^0 + U_2^{1,1}$ эквивалентна $2U_2^{1,1}$, сумма $U_3^0 + U_3^{1,2} \propto 2U_3^{2,1}$, а сумма $U_3^0 + U_3^{2,1} + U_3^{2,2} \propto U_3^{1,2}$.

4. ВЫВОДЫ

В настоящей статье даны общие принципы описания нулевых точек 2-го и высших порядков потенциального магнитного поля в пространстве, главный акцент при этом сделан на рассмотрении нулей 2-го порядка. Показано, что всегда существуют как минимум два исходящих из нуля противоположно направленных луча (репера), на которых поле радиально или же равно нулю. Потенциал вблизи нуля порядка n общего вида можно задать как сумму $2n-2$ однородных гармонических полиномов, список которых для низших порядков дан в табл. 1. Нахождение реперов и исследование поведения силовых линий вблизи них (за счёт поворотов системы координат) даёт дополнительный метод характеристики топологии и геометрии поля вблизи нулевых точек. Результаты работы имеют достаточно общий теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по магнитному пересоединению в космической плазме ([Рунов и Пудовкин, 1996], [Galsgaard and Pontin, 2011], [Кропоткин, 2014]).

Авторы благодарны Ю.В. Думину и В.С. Титову за полезное обсуждение. Работа частично поддержана грантом РФФИ 13-02-00461, программой П-9 РАН и Министерством образования и науки РФ (контракт RFMEFI60414X0049).

Табл. 1. Базисные функции 1–3-го порядков. Запись через приведённые ОГП, соответствующие им выражения в цилиндрической системе координат и шаровые функции.

Обозн.	Декартовы координаты	Цилиндрич. координаты (ρ, φ, z)	Выражение через присоед. функции Лежандра в сферич. системе координат (r, θ, φ)
--------	-------------------------	---	--

U_1^0	z	z	$r \cos \theta$
U_2^0	$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$	$\frac{1}{2}(\rho^2 - 2z^2)$	$-r^2 P_2^{(0)}(\cos \theta)$
$U_2^{1,1}$	$\frac{x^2 - y^2}{2}$	$\frac{\rho^2}{2} \cos 2\varphi$	$\frac{r^2}{6} P_2^{(2)}(\cos \theta) \cdot \cos 2\varphi$
$U_2^{1,2}$	xy	$\frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi$	$\frac{r^2}{6} P_2^{(2)}(\cos \theta) \cdot \sin 2\varphi$
U_3^0	$\frac{1}{6}[3z(x^2 + y^2) - 2z^3]$	$\frac{1}{6}(3\rho^2 z - 2z^3)$	$-\frac{r^3}{3} P_3^{(0)}(\cos \theta)$
$U_3^{1,1}$	$z \frac{x^2 - y^2}{2}$	$\frac{\rho^2 z}{2} \cos 2\varphi$	$\frac{r^3}{30} P_3^{(2)}(\cos \theta) \cdot \cos 2\varphi$
$U_3^{1,2}$	xyz	$\frac{\rho^2 z}{2} \sin 2\varphi$	$\frac{r^3}{30} P_3^{(2)}(\cos \theta) \cdot \sin 2\varphi$
$U_3^{2,1}$	$\frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2)$	$\frac{1}{6}\rho^3 \cos 3\varphi$	$\frac{1}{90} r^3 P_3^{(3)}(\cos \theta) \cdot \cos 3\varphi$
$U_3^{2,2}$	$\frac{1}{6}(3x^2 y - y^3)$	$\frac{1}{6}\rho^3 \sin 3\varphi$	$\frac{1}{90} r^3 P_3^{(3)}(\cos \theta) \cdot \sin 3\varphi$

Рис. 1. Силовые линии вблизи нулевой точки, заданной потенциалом U_3^0 .

Рис. 2. Силовые линии вблизи нулевой точки, заданной одним из потенциалов 1-го рода $U_3^{1,2}$.

Рис. 3. Силовые линии вблизи нулей, заданных потенциалами 2-го рода, в плоскостях, параллельных плоскости xOy : а) $U_3^{2,1}$, б) $U_3^{2,2}$.

Рис. 4. Силовые линии вблизи нулевой точки, заданной потенциалом W_1 (см. (12)).

Штриховыми линиями показаны направления нулевых реперов (лежат в плоскости xOy).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Вильямс Н.Н.* Кватернион // Математическая энциклопедия (в 5-ти томах) / Ред. И.М. Виноградов, т. 2. М.: Советская энциклопедия, 1104 с. 1979.
- *Горбачёв В.С., Кельнер С.Р., Сомов Б.В., Шварц А.С.* Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек // *Астрономический журнал*. Т. 65. С. 601–612. 1988.
- *Жугжда Ю.Д.* Нейтральные (нулевые) точки магнитных полей // *Геомагнетизм и аэрномия*. Т. 6. № 3. С. 506–511. 1966.
- *Кропоткин А.П.* Конверсия энергии и магнитное пересоединение в космической плазме: роль нелинейных кинетических процессов и структур // *Геомагнетизм и аэрномия*. Т. 54. № 4. С. 435–443. 2014.
- *Рунов А.В., Пудовкин М.И.* Двумерная МГД модель магнитного пересоединения в токовом слое конечной толщины // *Геомагнетизм и аэрномия*. Т. 36. № 3. С. 13–20. 1996.
- *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики (7-е изд.). М.: Изд-во МГУ; Наука, 798 с. 2004.
- *Cowley S.W.H.* A qualitative study of the reconnection between the Earth's magnetic field and an interplanetary field of arbitrary orientation // *Radio Science*. V. 8. P. 903–913. 1973.
- *Dumin Yu.V., Somov B.V.* What is generic structure of the 3D null-point magnetic reconnection? // *arXiv:1407.6039v2 [physics.plasm-ph]*. 2015.
- *Galsgaard K., Pontin D.I.* Current accumulation at an asymmetric 3D null point caused by generic shearing motions // *Astronomy & Astrophysics*. V. 534. A2. 2011.
- *Parnell C.E., Smith J.M., Neukirch T., Priest E.R.* The structure of three-dimensional magnetic neutral points // *Phys. Plasmas*. V. 3. № 3. P. 759–770. 1996.
- *Priest E.R., Titov V.S.* Magnetic reconnection at three-dimensional null points // *Phil. Trans. Royal Soc. A*. V. 354. № 1721. P. 2951–2992. 1996.

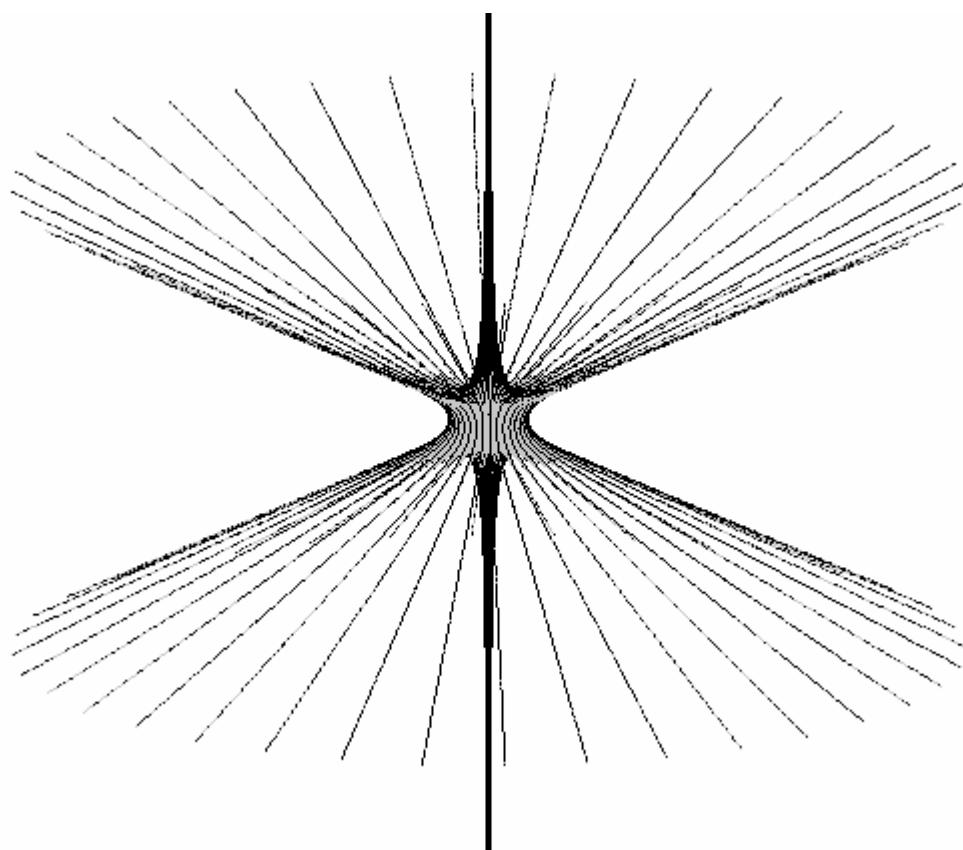


Рис. 1.

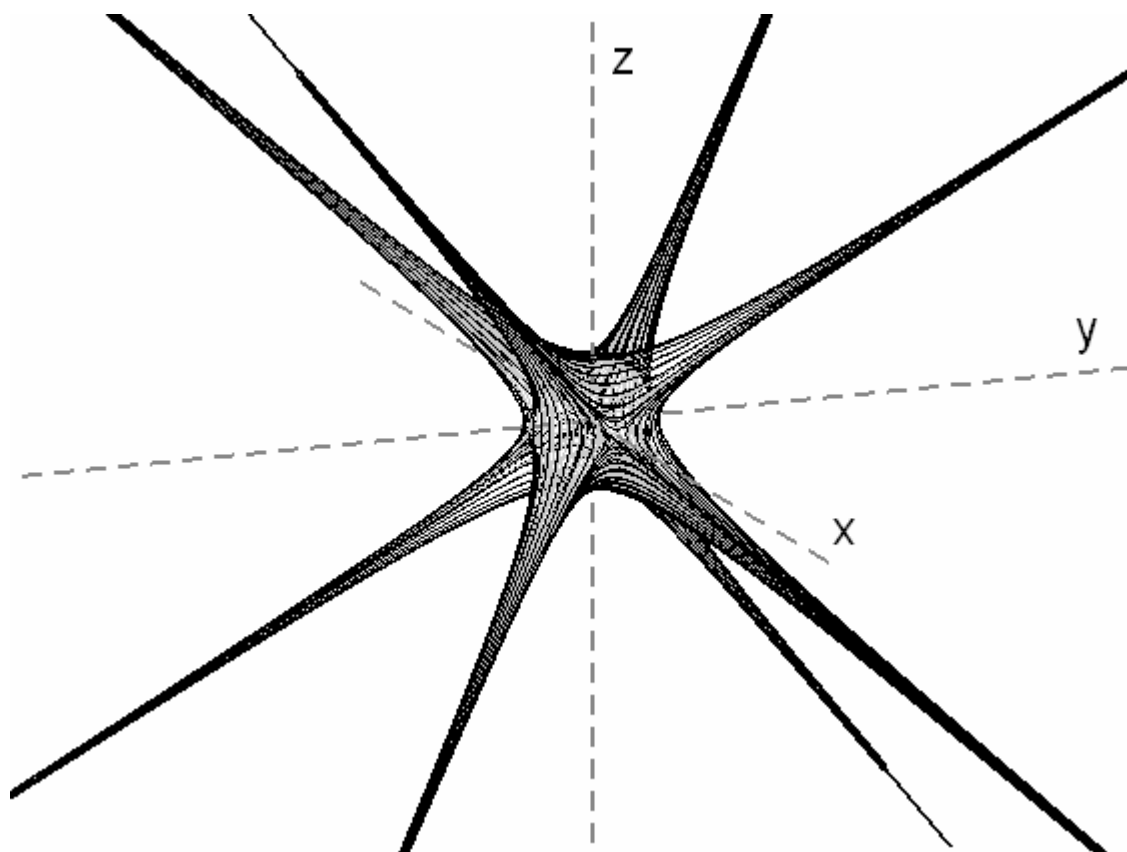


Рис. 2.

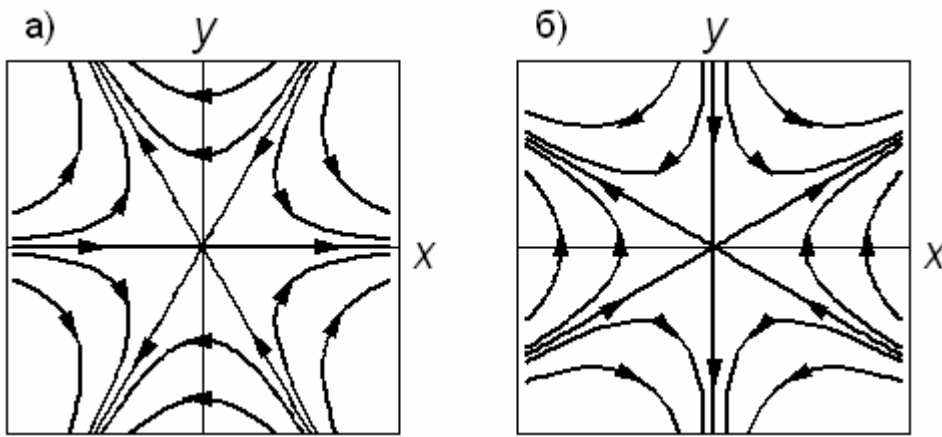


Рис. 3.

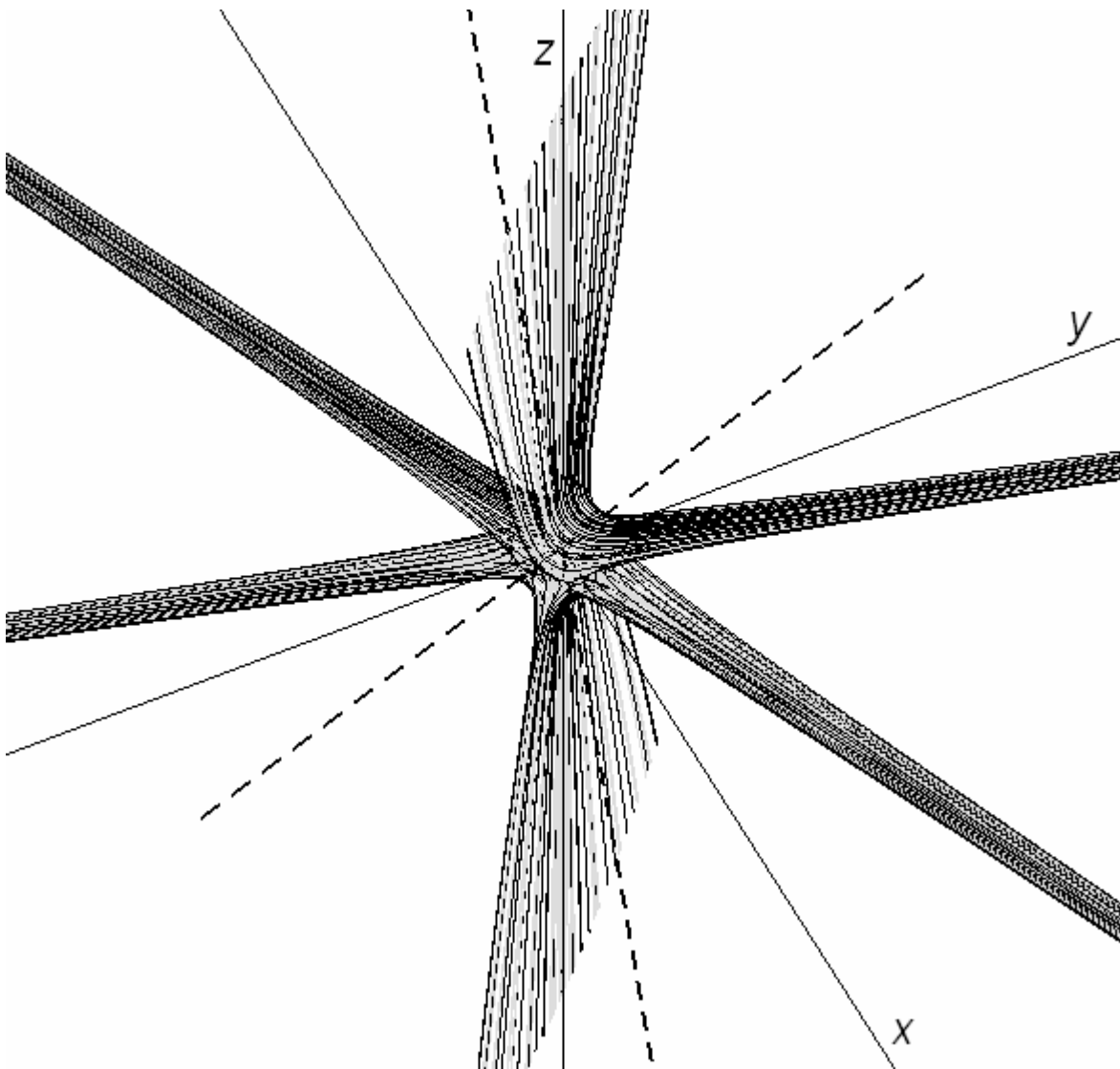


Рис. 4.