



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Житная, Моделирование оптимальных сетей с помощью шарнирных механизмов, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2019, том 22, выпуск 6, 95–122

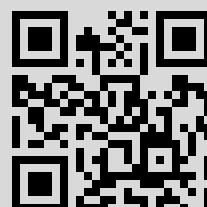
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 85.89.127.34

21 февраля 2021 г., 02:10:06



Моделирование оптимальных сетей с помощью шарнирных механизмов

М. Ю. ЖИТНАЯ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: g-ferra@mail.ru

УДК 591.178+514.8+514.1

Ключевые слова: проблема Штейнера, минимальные сети, шарнирный механизм, минимальное дерево Штейнера, локально минимальное дерево.

Аннотация

Основным результатом данной работы является описание построения шарнирного механизма, строящего кратчайшую сеть для множества из n точек на плоскости.

Abstract

M. Yu. Zhitnaya, Modeling of optimal networks by means of linkages, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 22 (2019), no. 6, pp. 95–122.

The main result of this paper is the description of the construction of the linkage that constructs the shortest network for a set of n points on the Euclidean plane.

Введение

Настоящая работа посвящена моделированию оптимальных геометрических графов с помощью шарнирных механизмов.

Под шарнирными механизмами будем понимать конструкции, состоящие из твёрдых тел, связанных между собой так, что некоторые из них могут свободно вращаться вокруг некоторых общих точек. Шарнирные механизмы часто встречаются в повседневной жизни. К ним относятся многие предметы обихода, начиная с простых, таких, как ножницы, дверные петли, настольная лампа, и заканчивая сложными конструкциями, составляющими части поездов, автомобилей или подвижных роботов. Самый близкий нам пример шарнирного механизма — это, пожалуй, скелет человека: твёрдые кости соединены между собой суставами, что позволяет человеку двигаться [7, 8, 10, 11]. В настоящей работе мы будем рассматривать частный случай шарнирных механизмов, выбирая в качестве твёрдых тел прямые стержни.

Основное внимание уделяется построению при помощи шарнирных механизмов кратчайшей сети для граничного множества из n точек евклидовой плоскости. Известно, что эта сеть будет деревом, которое, помимо границы,

может содержать ещё и дополнительные вершины, и степень любой из вершин не превосходит 3. В ходе работы были описаны конструкции элементарных механизмов, использованные для сборки основного пространственного механизма, позволяющего двигать вершины рассматриваемых сетей по плоскому диску так, что кратчайшие сети оказываются в заранее заданной плоскости. Граничные вершины исходного множества могут двигаться независимо друг от друга, и для каждого их расположения механизм реализует минимальное дерево Штейнера. Таким образом, построенный механизм реализует минимальные деревья Штейнера для всех классов подобия граничных вершин, т. е. фактически даёт полное решение проблемы Штейнера в терминах шарнирных механизмов.

Отметим, что при рассмотрении проблемы Штейнера на других нормированных плоскостях структура кратчайшей сети может оказаться гораздо сложнее, чем в случае евклидовой плоскости (см., например, [3–6]). Кроме того, автору пока не известно, существуют ли для нормированных плоскостей, отличных от евклидовой плоскости, алгоритмы построения кратчайших сетей, аналогичные алгоритму Мелзака. Ю. В. Акашева в своей дипломной работе построила прямой ход алгоритма Мелзака для 3-нормированной плоскости. Однако при обратном ходе возникают трудности, связанные с тем, что пару точек на 3-нормированной плоскости соединяет, вообще говоря, бесконечно много кратчайших.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А. А. Тужилина за постановку задачи, постоянное внимание к работе, критические замечания и ценные советы, а также профессора А. О. Иванова за наставничество и помощь.

Работа поддержана Программой Президента РФ поддержки Ведущих научных школ Российской Федерации, проект НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867.

1. Основные определения и предварительные результаты

В настоящей работе мы будем рассматривать простые конечные графы $G = (V, E)$, где V — множество вершин, а E — множество рёбер [1].

Приведём основные понятия, необходимые для формулировки проблемы Штейнера (см., например, [2, 15, 17]). *Границей ∂G графа $G = (V, E)$* будем называть некоторое подмножество в V , содержащее все вершины степени 1 и 2. Вершины, входящие в ∂G , называются *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины графа G — *внутренними* или *подвижными*. *Деревом Штейнера* называется каждое дерево (с границей), степени вершин которого не превосходят 3.

Пусть $\varphi: \partial G \mapsto \mathbb{R}^d$ — произвольное отображение. *Обобщённой сетью типа (G, φ)* назовём каждое отображение $\Gamma: V \mapsto \mathbb{R}^d$, ограничение которого на ∂G совпадает с φ . Ограничения отображения Γ на вершины и рёбра графа G

называются соответственно *вершинами* и *рёбрами обобщённой сети* Γ . Длиной ребра $\Gamma: vw \mapsto \mathbb{R}^d$, соединяющего вершины $\Gamma: v \mapsto \mathbb{R}^d$ и $\Gamma: w \mapsto \mathbb{R}^d$, назовём расстояние $|\Gamma(v)\Gamma(w)|$ между точками $\Gamma(v)$ и $\Gamma(w)$ пространства $\mathbb{R}^d$, а длиной $\ell(\Gamma)$ обобщённой сети Γ — сумму длин её рёбер. Рёбра нулевой длины называются *вырожденными*, все остальные рёбра — *невыврожденными*. Сеть, не содержащая вырожденных рёбер, называется *невыврожденной*. Рассматривая смежные рёбра как отрезки в $\mathbb{R}^d$, мы можем определить *углы* между такими рёбрами, положив их равными углам между соответствующими отрезками. Если граф G связный, то обобщённую сеть Γ назовём просто *сетью*.

Рассмотрим всевозможные деревья Штейнера, множества вершин которых являются начальными отрезками натурального ряда, а числа от 1 до n — граничными вершинами. Два таких дерева назовём *эквивалентными*, если между ними существует изоморфизм, неподвижный на границе $\{1, \dots, n\}$. Выберем в каждом классе эквивалентности по одному (любому) элементу и множество выбранных деревьев Штейнера обозначим через $\mathcal{T}_n$. Отметим, что множество $\mathcal{T}_n$ конечно.

Для данного непустого конечного множества $M \subset \mathbb{R}^d$ и числа $n \geq \#M$ обозначим через $\mathcal{B}_n(M)$ семейство всевозможных сюръективных отображений $\varphi: \{1, \dots, n\} \mapsto M$. Для каждого $G \in \mathcal{T}_n$ и $\varphi \in \mathcal{B}_n(M)$ рассмотрим множество $[G, \varphi]$ сетей типа (G, φ) в пространстве $\mathbb{R}^d$. Так как каждая сеть из $[G, \varphi]$ однозначно задаётся положениями своих внутренних вершин, множество $[G, \varphi]$ естественным образом отождествляется с пространством $\mathbb{R}^{dk}$, где k — количество внутренних вершин дерева G . Это отождествление задаёт структуру линейного пространства на $[G, \varphi]$ и тем самым позволяет говорить о непрерывности, выпуклости и т. д. функций, определённых на $[G, \varphi]$.

На множестве $[G, \varphi]$ определён функционал длины $l: [G, \varphi] \mapsto \mathbb{R}$, ставящий в соответствие каждой сети $\Gamma \in [G, \varphi]$ её длину $\ell(\Gamma)$. Так как он непрерывный, выпуклый и при стремлении вершин к бесконечности его значение стремится к бесконечности, а пространство $\mathbb{R}^{dk}$ является ограниченно компактным, то функционал l принимает наименьшее значение $l_{G, \varphi}$, причём множество его минимумов — выпуклое компактное подмножество $\mathbb{R}^{dk}$, которое мы обозначим через $[G, \varphi]_{\min}$.

Положим

$$\text{smt}(M) = \min\{[G, \varphi]_{\min} : G \in \mathcal{T}_n, \varphi \in \mathcal{B}_n(M)\}.$$

Величина $\text{smt}(M)$ равна длине минимального дерева Штейнера, соединяющего $M \subset \mathbb{R}^d$ (см. [2]). Каждая сеть Γ с границей из $\mathcal{B}_n(M)$, для которой $\ell(\Gamma) = \text{smt}(M)$, называется *минимальной сетью Штейнера* или *кратчайшей сетью*. Из сказанного выше мгновенно вытекает, что в $\mathbb{R}^d$ минимальные сети Штейнера существуют для любых конечных подмножеств M . Кроме того, среди всех минимальных сетей Штейнера с данной границей всегда имеются невырожденные сети, причём в них углы между любыми смежными рёбрами не меньше 120° (назовём это *свойством 120°*). Отметим также, что сеть

из $[G, \varphi]_{\min}$ может удовлетворять свойству 120° , но не быть при этом минимальным деревом Штейнера. Невырожденные сети из всевозможных $[G, \varphi]_{\min}$, удовлетворяющие свойству 120° , будем называть *локально минимальными* и обозначать через $\Gamma_{G, \varphi}$.

1.1. Алгоритм Мелзака

Будем называть дерево Штейнера *полным*, если оно не содержит граничных вершин степени больше 1. Каждый максимальный по включению подграф дерева Штейнера, который является полным деревом Штейнера, называется *полной компонентой дерева Штейнера*. Алгоритм Мелзака [17] проверяет для данного полного дерева Штейнера G и инъективной границы φ , будет ли для него существовать локально минимальное дерево $\Gamma_{G, \varphi}$, и, если да, строит положение внутренних вершин дерева $\Gamma_{G, \varphi}$. Если граф G не является полным, то *результатом действия алгоритма Мелзака* будем называть результат его применения ко всем полным компонентам.

Пара $\{e_1, e_2\}$ смежных рёбер, имеющих общую внутреннюю вершину S и выходящих из граничных вершин P_1 и P_2 полного дерева Штейнера G или соответствующей сети Γ , называется *усами*, а пара $\{P_1, P_2\}$ — *вершинами усов* $\{e_1, e_2\}$. Если в полном дереве Штейнера (соответствующей сети) больше двух вершин, то имеется по крайней мере двое усов. Классический алгоритм Мелзака состоит из двух частей: прямого и обратного ходов. Прямой ход последовательно перестраивает исходное дерево, выбирая произвольные усы, отрезая их и относя общую вершину рёбер-усов к граничной вершине результирующего дерева. Также прямой ход перестраивает граничное множество, заменяя пару вершин, в которую должны приходить усы, на третью вершину одного из двух правильных треугольников, построенных на этих вершинах. При этом общая вершина усов ставится в соответствии этой третьей вершине. Прямой ход останавливается, когда перестроенное дерево превращается в однорёберное и, значит, граничное отображение продолжено на все вершины исходного дерева, т. е. построена некоторая сеть Γ_1 . Обратный ход последовательно возвращает на место отрезанные усы, изменяя специальным образом отображение Γ_1 на общей вершине рассматриваемых усов [17]. При этом во время обратного хода могут возникать ситуации, которые алгоритм Мелзака рассматривает как ошибочные и останавливается.

Мы модифицируем алгоритм Мелзака так, чтобы в случае ошибки он продолжал работу и в результате строил некоторое дерево с той же границей. Так как мы интересуемся кратчайшими деревьями, такая модификация допустима. Описание модификации алгоритма Мелзака удобно проделать на языке скобочных структур, который, кроме всего прочего, будет полезен нам и в реализации кратчайших сетей с помощью шарнирных механизмов.

Итак, нам дано конечное множество $M \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из m точек, множество $\mathcal{T}_n$ деревьев Штейнера, $n \geq m$, и некоторое отображение $\varphi \in \mathcal{B}_n(M)$. Выберем произвольное $G \in \mathcal{T}_n$ и определим для него скобочную структуру.

Пусть $F_1, \dots, F_k$ — полные компоненты дерева G . Ниже мы определим скобочные структуры для полных компонент, а скобочную структуру произвольного дерева Штейнера G положим равной объединению скобочных структур его полных компонент.

Пусть $G \in \mathcal{T}_n$ — полное дерево Штейнера. Построим по G последовательность $G_0, G_1, \dots, G_{n-2}$ полных деревьев Штейнера, таких что граница дерева G_i состоит из $n - i$ вершин. Для этого положим $G_0 = G$, и если для $i < n - 2$ определено дерево G_i , то дерево G_{i+1} построим следующим образом. Выберем в дереве G_i произвольные усы, и пусть пара $\{u, v\}$ — вершины усов, а w — общая вершина усов. Дерево G_{i+1} получим из дерева G_i отрезанием выбранных усов, заменой элемента w на пару $\{u, v\}$ и отнесением вершины $\{u, v\}$ к граничным вершинам дерева G_{i+1} . Пусть $\{a, b\}$ — множество вершин дерева G_{n-2} . *Неориентированной скобочной структурой полного дерева G* назовём множество

$$\omega(G) = \left(\bigcup_{i=0}^{n-2} \partial G_i \right) \cup \{[a, b]\},$$

а его подмножество $\partial G_0 = \partial G$ — *границей* $\omega(G)$, которую будем обозначать через $\partial \omega(G)$. Элемент $[a, b] \in \omega(G)$ назовём *рёберным*, а все остальные элементы из $\omega(G)$ — *вершинными*. Как мы уже отмечали, если G — дерево Штейнера общего вида с полными компонентами $F_1, \dots, F_k$, то *неориентированной скобочной структурой дерева G* назовём множество

$$\omega(G) = \bigcup_{j=1}^k \omega(F_j).$$

Определим *границу* $\partial \omega(G)$, положив

$$\partial \omega(G) = \bigcup_{j=1}^k \partial \omega(F_j).$$

Множество всех вершинных элементов из $\omega(G)$ обозначим через $\omega_v(G)$, а множество всех рёберных элементов из $\omega(G)$ — через $\omega_e(G)$.

По построению существует естественное взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин дерева G и множеством $\omega_v(G)$: напомним, что на каждом шаге построения неориентированной скобочной структуры мы фактически переименовывали очередную внутреннюю вершину дерева G в слово, составленное из фигурных скобок, запятых и некоторых граничных вершин. Полученная кодировка также может быть использована для восстановления структуры дерева G . А именно, два вершинных элемента x и y скобочной структуры $\omega(G)$ соединим ребром, если и только если или $[x, y] \in \omega(G)$, или $x \in y$, или $y \in x$. Легко убедиться, что между деревом G и полученным графом имеется изоморфизм, неподвижный на ∂G . Отметим, что, зная скобочную структуру, можно однозначно восстановить дерево G , но одному и тому же G может соответствовать несколько неупорядоченных скобочных структур ω ,

так как выбирать усы при построении последовательности G_i можно разными способами.

Таким образом, вместо деревьев $G \in \mathcal{T}_n$ можно рассматривать неориентированные скобочные структуры $\omega(G)$, выбрав для каждого G любую одну такую структуру. Множество таких неориентированных скобочных структур обозначим через $\mathcal{W}_n$.

Пример 1.1. На рис. 1 показан пример дерева Штейнера и соответствующей ему неориентированной скобочной структуры, а также соответствие всех рёберных и вершинных элементов скобочной структуры рёбрам и вершинам дерева.

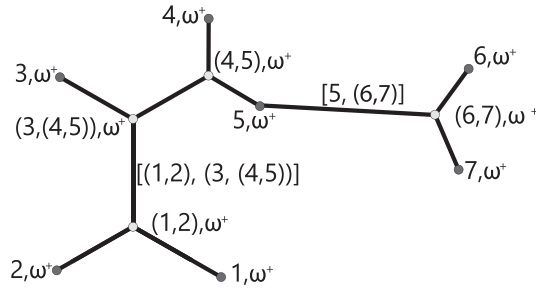


Рис. 1. $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{3, \{4, 5\}\}, [\{1, 2\}, \{3, \{4, 5\}\}], \{6, 7\}, [5, \{6, 7\}]\}$

Определим теперь *ориентированную скобочную структуру дерева Штейнера* $G \in \mathcal{T}_n$, соответствующую неориентированной скобочной структуре $\omega(G)$. Для этого заменим каждый вершинный элемент $\{u, v\} \in \omega(G)$ на (u, v) или на (v, u) и полученную упорядоченную пару по-прежнему будем относить к вершинным элементам. Таким образом, данной неориентированной скобочной структуре соответствует, вообще говоря, много ориентированных скобочных структур. Пусть $\omega^+(G)$ — одна из них, $\omega_v^+(G)$ — множество её вершинных элементов, $\omega_e^+(G)$ — множество её рёберных элементов и $\partial\omega^+(G)$ — её граница. Построим по этой скобочной структуре прямой ход алгоритма Мелзака следующим образом.

Для всех вершинных элементов $w \in \omega_v^+(G)$ введём характеристику $h(w)$, которую назовём *высотой элемента* w . Определим её индуктивно. У всех элементов $1, \dots, n$ высота 0. Каждый w , отличный от $1, \dots, n$, имеет вид (w_1, w_2) , и мы положим $h(w) = \max\{h(w_1), h(w_2)\} + 1$. Для всех возможных k определим множества H_k , каждое из которых будет состоять из всех элементов высоты k . Таким образом, получим, что $\omega^+(G) = \bigsqcup H_k \cup \omega_e^+(G)$. Зададим нумерацию на множестве $\omega^+(G)$. Отметим, что $H_0 = \{1, \dots, n\} = \partial\omega^+(G)$ занумеровано, и мы сохраним этот порядок. Далее будем произвольным образом нумеровать элементы из последовательных H_i , $i \geq 1$. Закончив нумеровать H_i , продолжим нумерацию на все рёберные элементы. Пусть $w_1, \dots, w_p$ — последователь-

ные вершинные элементы в только что заданной нумерации, а $w_{p+1}, \dots, w_{p+q}$ — оставшиеся рёберные элементы.

Построим отображение F всех вершинных элементов множества $\omega^+(G)$ на плоскость. Ограничение F на $H_0 = \partial\omega^+(G) = \partial G$ положим равным φ . Пусть для первых $s \leq k$ элементов, включая H_0 , отображение F построено и $F(w_s) = P_s$. Определим F для w_{k+1} . Элемент w_{k+1} — это некоторая пара (w_i, w_j) , $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$. Если $P_i = P_j$, то положим $F(w_{k+1}) = P_i$. В противном случае построим на отрезке $[P_i, P_j]$ правильный треугольник $P_{i,j}P_iP_j$ так, чтобы базис $P_{i,j}P_i, P_{i,j}P_j$ был ориентирован положительно (относительно канонической ориентации плоскости $\mathbb{R}^2$), и положим $F(w_{k+1}) = P_{i,j}$. Полученное в результате отображение F полностью определяет прямой ход алгоритма Мелзака.

Опишем теперь обратный ход алгоритма Мелзака, соответствующий прямому ходу F ; цель обратного хода — переопределить отображение F . Для каждого $w_i \in \omega_v^+(G)$ положим $P_i = F(w_i)$. Согласно нумерации, введённой на множестве $\omega^+(G)$, начиная с последнего элемента будем двигаться в обратном порядке и проделывать следующее. Обозначим через w_k рассматриваемый элемент из $\omega^+(G)$.

Пусть $h(w_k) = 0$ и $k > 1$, тогда переходим к рассмотрению w_{k-1} .

Пусть w_k — рёберный элемент вида $[w_i, w_j]$, $w_i, w_j \in \omega_v^+(G)$, тогда $k > 1$, и мы поступим так. Если $\max\{h(w_i), h(w_j)\} = 0$, то переходим к рассмотрению w_{k-1} . Иначе возьмём тот элемент из w_i, w_j , у которого высота больше нуля. Пусть это w_i (если оба элемента имеют высоту больше нуля, то рассмотрим сначала один, а потом другой).

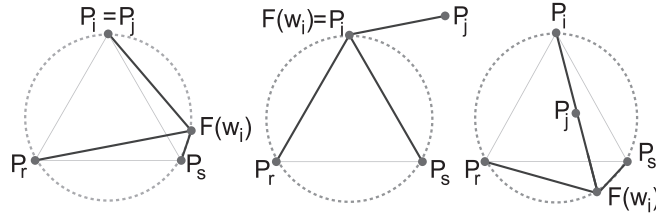
Элемент w_i имеет вид (w_r, w_s) . Переопределим точку $F(w_i)$.

1. Если $P_r = P_s$, то по определению отображения F имеем $P_r = P_s = P_i = F(w_i)$, и мы не будем менять значение отображения F на w_i .
2. Если $P_r \neq P_s$, то P_r, P_s, P_i — вершины невырожденного правильного треугольника, и пусть C — описанная вокруг этого треугольника окружность. Имеется два варианта.
 - (а) Если $P_i = P_j$, то в качестве $F(w_i)$ берём произвольную точку из C .
 - (б) Если $P_i \neq P_j$, то однозначно определён луч ℓ , выходящий из P_i и проходящий через P_j . Если луч ℓ пересекает окружность C только по точке P_i , то по-прежнему полагаем $F(w_i) = P_i$. Иначе $\ell \cap C$ состоит из двух точек, одна из которых — точка P_i , а другую точку мы и возьмём в качестве $F(w_i)$.

Пусть w_k — вершинный элемент вида (w_i, w_j) , $w_i, w_j \in \omega_v^+(G)$. Поступим с ним так же, как и с рёберным элементом $[w_i, w_j]$, заменив в описанных выше построениях точку P_j на точку P_k .

На рис. 2 проиллюстрированы различные способы переопределения точки $F(w_i)$.

Перестроенное в результате обратного хода алгоритма Мелзака отображение $F = F(\omega^+(G), \varphi)$ задаёт некоторую сеть $F: \omega_v^+(G) \mapsto \mathbb{R}^2$ типа (G, φ) . Как

Рис. 2. Различные способы переопределения точки $F(w_i)$

было описано выше, при построении этой сети имеется неопределённость, поэтому, чтобы подчеркнуть сделанный выбор, мы вместо F будем писать $F_\alpha = F_\alpha(\omega^+(G), \varphi)$, где α пробегает некоторое множество индексов, зависящее от $\omega^+(G)$ и φ . Множество всех F_α при фиксированных $\omega^+(G)$ и φ обозначим через $[F_\alpha] = [F_\alpha(\omega^+(G), \varphi)]$. Отметим, что эта неопределённость не влияет на результат, так как если множество $[G, \varphi]$ содержит некоторую локально минимальную сеть, то для одной из ориентаций $\omega^+(G)$ произвольной неориентированной скобочной структуры $\omega(G)$ сеть F_α определена однозначно и совпадает с локально минимальной сетью $\Gamma_{G, \varphi}$: $[F_\alpha] = \{\Gamma_{G, \varphi}\}$. В частности, при подходящем выборе дерева $G \in \mathcal{T}_n$ и ориентированной скобочной структуры $\omega^+(G)$ соответствующая сеть $F_\alpha = \Gamma_{G, \varphi}$ будет кратчайшей.

Итак, для построения кратчайшей сети, соединяющей множество $M \subset \mathbb{R}^2$, можно поступить следующим образом. Фиксируем произвольное $\varphi \in \mathcal{B}_n(M)$. По каждой неориентированной скобочной структуре $\omega \in \mathcal{W}_n$ построим всевозможные ориентированные скобочные структуры ω^+ и множество всех так полученных ω^+ обозначим через $\mathcal{W}_n^+$. Для каждой $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ и φ построим некоторую сеть $F_\alpha(\omega^+, \varphi)$ и вычислим её длину, которую обозначим через $\ell_\alpha(\omega^+, \varphi)$. Остаётся выбрать ω^+ , для которого $\ell_\alpha(\omega^+, \varphi)$ наименьшее возможное. Отметим, что таких ω^+ может быть много.

В дальнейшем мы используем ориентированные скобочные структуры для построения шарнирного механизма, строящего кратчайшей сети на множестве M .

1.2. Формализация шарнирных механизмов

Пусть $G = (V, E)$ — простой конечный граф, $\ell: E \mapsto \mathbb{R}$ — положительная функция, $W \subset V$ и $\psi: W \mapsto \mathbb{R}^d$. Набор $L = (G, \ell, \psi) = ((V, E), \ell, \psi)$ будем называть *шарнирным механизмом в $\mathbb{R}^d$* . При этом элементы множества V назовём *шарнирами*, элементы множества E — *стержнями*, шарниры из W — *граничными* или *неподвижными*, шарниры из $V \setminus W$ — *внутренними* или *подвижными*; множество W будем также обозначать через ∂L и называть *границей шарнирного механизма L* , а отображение ψ — *граничным отображением механизма L* .

Про каждый граничный шарнир w также будем говорить, что он *закреплён в точке* $\psi(w)$. Значение функции ℓ на стержне e назовём *длиной стержня* e .

Пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Отображение $C: V \mapsto \mathbb{R}^d$, $C(v_i) = p_i$, назовём *согласованным с ψ* , если выполнено $C|_W = \psi$; *согласованным с ℓ* , если для любого ребра $v_i v_j \in E$ выполнено $\ell(v_i v_j) = |p_i p_j|$. Отображение C , согласованное одновременно с ℓ и ψ , будем называть *конфигурацией* или *реализацией шарнирного механизма* $L = (G, \ell, \psi)$, а образы шарниров при этом отображении — их *положениями*. Множество всех конфигураций механизма $L = (G, \ell, \psi)$ обозначим через $\mathcal{C}_L$ и назовём *конфигурационным пространством* этого шарнирного механизма.

Важное замечание. Для описания шарнирного механизма с непустым конфигурационным пространством достаточно описать произвольную его конфигурацию или алгоритм реализации этой конфигурации.

Пусть $\mathcal{A} \subset V$ — некоторое множество шарниров. Тогда семейство отображений $\mathcal{C}_L(\mathcal{A}) = \{C|_{\mathcal{A}}: C \in \mathcal{C}_L\}$ назовём *конфигурационным пространством множества шарниров $\mathcal{A}$* . Отображение $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$ назовём *допустимым*, если $\varphi \in \mathcal{C}_L(\mathcal{A})$. Для каждого допустимого φ положим $\mathcal{C}_L(\varphi) = \{C \in \mathcal{C}_L: C|_{\mathcal{A}} = \varphi\}$.

Для краткости на рисунках далее будем подписывать положение каждого шарнира названием самого шарнира, которому оно соответствует.

Напомним, что в данной работе мы рассматриваем только шарнирные механизмы, имеющие реализацию в $\mathbb{R}^d$. Опишем операцию скрепления двух механизмов. Рассмотрим механизмы L_1 и L_2 с множествами шарниров соответственно V_1 и V_2 . Предположим, что существуют $\mathcal{A}_1 \subset V_1$, $\mathcal{A}_2 \subset V_2$ и некоторая биекция $\nu: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$, такие что для некоторых конфигураций $C_1 \in \mathcal{C}_{L_1}$, $C_2 \in \mathcal{C}_{L_2}$ выполняется $C_1|_{\mathcal{A}_1} = C_2|_{\mathcal{A}_2} \circ \nu$. Биекция ν позволяет отождествить $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, поэтому можно считать, что множества V_i , вместо $\mathcal{A}_i$, содержат одно и то же множество шарниров, которое мы обозначим через $\mathcal{A}$. Тогда *скреплением механизмов L_1 и L_2 по биекции ν* назовём шарнирный механизм, граф которого равен объединению графов механизмов L_i , а все остальные отображения являются ограничениями соответствующих отображений этих механизмов. Отметим, что конфигурационное пространство скрепления механизмов L_1 и L_2 не пусто. Кроме того, для удобства изложения вместо описания биекции ν будем говорить, какой шарнир $v \in \mathcal{A}_1$ с каким шарниром $\nu(v) \in \mathcal{A}_2$ мы скрепляем.

В дальнейшем мы будем строить сложные механизмы, последовательно прикрепляя к уже построенному механизму некоторые другие. При этом нам будет требоваться, чтобы прикрепляемый механизм L не ограничивал возможные положения в $\mathbb{R}^d$ некоторого набора $\mathcal{A}$ шарниров имеющегося механизма $\bar{L}$, к которому L прикрепляется. В случае, когда существует $r > 0$, для которого в каждой конфигурации механизма $\bar{L}$ расстояния между положениями любых двух шарниров из семейства $\mathcal{A}$ не превосходят r , этого можно добиться следующим образом. Мы будем требовать выполнения следующего условия: для каждого отображения $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$, при котором расстояния между f -образами любых двух шарниров не превосходят r , существует $C \in \mathcal{C}_L$, такое что ограниче-

ние C на $\mathcal{A}$ совпадает с f . Если теперь L — произвольный механизм и $\mathcal{A}$ — некоторое подмножество его шарниров, для которого при некотором $r > 0$ выполняется описанное выше условие на отображение f , то будем говорить, что механизм L не ограничивает положения шарниров семейства $\mathcal{A}$. При этом во всех рассматриваемых нами случаях если требуется увеличить r , то мы будем модифицировать механизм L , увеличивая длины всех стержней в одно и то же число раз, т. е. умножая весовую функцию L на одно и то же число.

Нам также потребуется обобщение понятия «не ограничивает положения шарниров». Во введенных выше обозначениях пусть $\mathcal{P}$ — некоторое свойство, задающее ряд ограничений на возможные положения шарниров $A \in \mathcal{A}$ механизма L (свойство $\mathcal{P}$ может быть тождественным и не вносить никаких ограничений). Будем говорить, что механизм L точно реализует свойство $\mathcal{P}$, если при некотором $r > 0$ для каждого отображения $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^d$, удовлетворяющего свойству $\mathcal{P}$ и такого, что расстояния между f -образами любых двух шарниров не превосходят r , существует $C \in C_L$, такое что ограничение C на $\mathcal{A}$ совпадает с f . Отметим, что если свойство $\mathcal{P}$ тождественно, то точная реализация механизма L — это реализация, не ограничивающая положений шарниров семейства $\mathcal{A}$.

2. Классические шарнирные механизмы

В этом разделе будут описаны простейшие известные шарнирные механизмы.

Механизм 1 (жёсткие конструкции). Будем называть *жёсткими конструкциями* механизмы, у которых любые две конфигурации переводятся друг в друга движением объемлющего пространства. Примером могут служить механизмы, у которых все шарниры попарно соединены стержнями.

Жёсткий прямоугольник — это механизм, у которого имеются четыре шарнира, попарно соединённые стержнями и являющиеся вершинами прямоугольника (рис. 3).

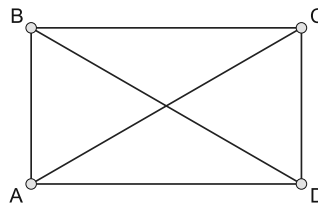


Рис. 3. Жёсткий прямоугольник

Жёсткий треугольник — это механизм, реализованный как три шарнира, попарно соединённые стержнями.

Механизм 2 (параллелограмм и антипараллелограмм, их укрепление [9]). Дан механизм L , являющийся замкнутой четырёхзвенной ломаной, вершины которой — шарниры A, B, C, D , а рёбра — стержни, у которых длины нечётных рёбер и длины чётных рёбер равны между собой. У такого механизма в любой его конфигурации вершины образуют либо параллелограмм, либо *антипараллелограмм*, который получается из параллелограмма отражением одного из треугольников, на которые делит параллелограмм диагональ, относительно этой диагонали. Требуется сделать так, чтобы для любой конфигурации механизма положения точек A, B, C, D образовывали либо только параллелограмм (вырожденный или невырожденный), либо только антипараллелограмм (вырожденный или невырожденный). Чтобы этого добиться, шарнирный четырёхугольник $ABCD$ необходимо укрепить.

Если к параллелограмму $ABCD$ добавить ещё один стержень, совпадающий с его средней линией, то конфигурационное пространство точек A, B, C, D такого шарнирного механизма совпадёт в точности с множеством конфигураций, отвечающих настоящему (возможно, вырожденным) параллелограммам (рис. 4).

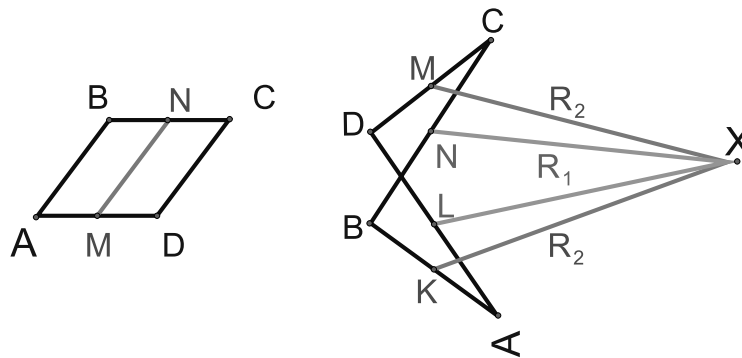


Рис. 4. Укрепление параллелограмма и антипараллелограмма

Укрепить антипараллелограмм несколько сложнее. Чтобы это сделать, к серединам его сторон нужно прикрепить достаточно длинные стержни [12], как на рис. 4, и тогда будут реализованы только все те его конфигурации, которые являются антипараллелограммами.

Во всех последующих механизмах использованные параллелограммы и антипараллелограммы будут по умолчанию укреплены, если не сказано иного.

Механизм 3 (реверсор Кемпе [16]). Требуется построить механизм L , содержащий три стержня OA, OC и OZ с общим концом O , у которого для любой конфигурации OC — биссектриса угла AOZ .

Рассмотрим два подобных антипараллелограмма $OABC$ и $OCWZ$. Прикрепим их друг к другу, как показано на рис. 5. Из соображений подобия вытекает, что $\angle COA$ и $\angle ZOC$ равны между собой. Если менять $\angle COA$, то отрезки OA

и OZ будут образовывать угол, в два раза больший. Описанный механизм называется *реверсором Кемпе*. Он позволяет удваивать нужный угол или делить его пополам, так как OC — всегда биссектриса угла AOZ (рис. 5). При движении реверсора возможно его «выворачивание», т. е. переход через вырожденные конфигурации (рис. 6), когда $\angle AOC$ принимает значения, кратные π . Так как $\angle AOC$ — угол укрепленного антипараллелограмма, то он может принимать любые значения, и соотношение между углами будет оставаться корректным.

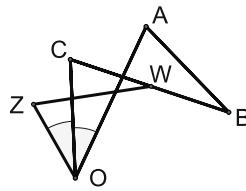
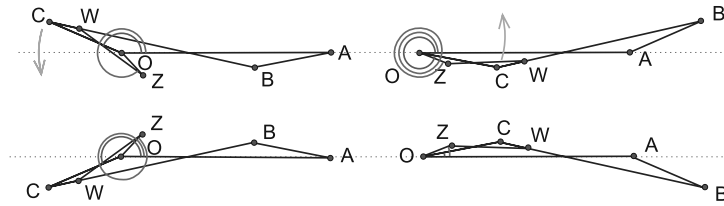


Рис. 5. Реверсор Кемпе

Рис. 6. Переход через вырожденные состояния реверсора Кемпе ($\angle AOZ = 2\angle AOC$)

Механизм 4 (сумматор Кемпе [16]). Даны четыре стержня OA , OB , OC и OZ , скрепленных в точке O . Требуется построить механизм L , у которого для любой конфигурации $P \in \mathcal{C}_L$ выполнено: $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle AOZ = \alpha + \beta$.

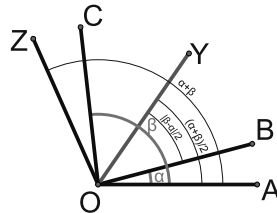


Рис. 7. Сумматор Кемпе

Сначала при помощи реверсора Кемпе построим биссектрису OY угла BOC . Тогда $\angle BOC = |\beta - \alpha|$, $\angle BOY = |\beta - \alpha|/2$, поэтому $\angle AOY = (\beta + \alpha)/2$, и, значит, удвоив $\angle AOY$, получим угол, равный $\alpha + \beta$ (рис. 7). Так как реверсор применим для любых углов, то и сумматор может складывать любые углы.

Механизм 5 (классический и модифицированный инверсор Поселье).

Требуется построить механизм, переводящий движение по окружности в движение по прямой.

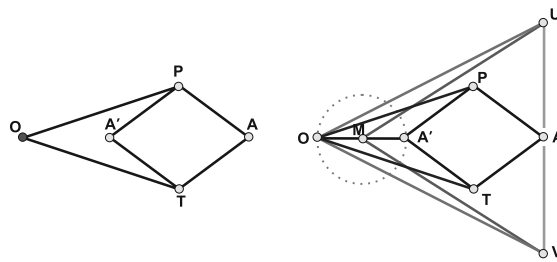


Рис. 8. Классический и модифицированный инверсоры Поселье

Механизм L , реализация которого изображена на рис. 8 справа, — *модифицированный инверсор Поселье*, $OP = PT$, $A'P = PA = AT = TA'$, $OM = MA'$, $OU = OV = OP + PA$, $MU = MV$. Шарниры O, M, U, V попарно соединены стержнями, поэтому часть механизма, содержащая только эти шарниры и стержни, будет жёсткой. В механизме L точка A' всегда находится на окружности с центром в M , а точка A — образ точки A' при инверсии относительно некоторой окружности, а значит, при движении точки A' по окружности A будет двигаться по прямой UV , а именно, так как выполнено равенство $OU = OV = OP + PA$, конфигурационное пространство точки A при фиксированном положении точек U и V , будет отрезком UV .

Классический инверсор Поселье (рис. 8 слева) отличается от модифицированного тем, что в нём нет шарниров U, V, M и всех выходящих из них стержней. Шарниры U, V и M нужны для того, чтобы для каждого положения шарниров U, O, V конфигурационное пространство точки A' совпадало с дугой окружности, являющейся инверсией прямой UV .

2.1. Вспомогательные шарнирные механизмы

Кроме хорошо известных механизмов из предыдущего раздела, нам понадобятся ещё ряд механизмов; эти механизмы будут описаны ниже.

Механизм 6 (закрепление шарнира на стержне). Дан стержень AB . Требуется зафиксировать на нём шарнир C на расстоянии a от A .

Поместим шарнир C на стержне AB на расстоянии a от A и соединим его стержнями AC и BC с точками A и B .

Механизм 7 (ограничение конфигурационного пространства m шарниров из $\mathbb{R}^3$ плоским диском). Для данного $r > 0$ требуется построить шарнирный механизм L в $\mathbb{R}^3$, содержащий множество шарниров $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, а также соединённые стержнем шарниры O и N , удовлетворяющий следующему условию: для каждого допустимого $\varphi: \{O, N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ множество $\{C|_{\mathcal{A}}: C \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ совпадает с семейством всех отображений из $\mathcal{A}$ в 2-мерный диск $D \subset \mathbb{R}^3$ радиуса r с центром в $\varphi(O)$, перпендикулярный $\varphi(O)\varphi(N)$.

Для каждого $i = 1, \dots, m$ обозначим через ONC^iD^i и $C^iD^iA^iB^i$ равные жёсткие прямоугольники (если у разных прямоугольников шарниры обозначены одинаково, то в собираемом механизме они скреплены) (рис. 9).

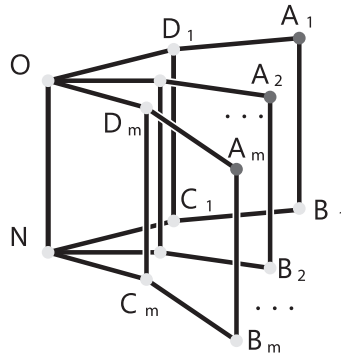


Рис. 9. Точки $A_1, \dots, A_m$ могут двигаться независимо друг от друга внутри диска с центром в O , перпендикулярного ON

Все последующие механизмы, если не уточняется иного, будут плоскими. Чтобы это оставалось верным для всех конфигураций, механизмы можно укрепить с помощью механизма 7.

Механизм 8 (движение точек по прямой). Требуется построить шарнирный механизм L в $\mathbb{R}^2$, содержащий множество шарниров $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, а также соединённые стержнем шарниры U и V , удовлетворяющий следующему условию: для каждого допустимого $\varphi: \{U, V\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ множество $\{C|_{\mathcal{A}}: C \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ совпадает с семейством всех отображений из $\mathcal{A}$ в отрезок $[\varphi(U), \varphi(V)]$.

Иными словами, требуется построить механизм, у которого в любой конфигурации шарниры множества $\mathcal{A}$ лежат на одном отрезке, положение которого может меняться произвольным образом, но длина постоянна.

Пусть есть набор модифицированных инверсоров Поселье: $OMVA'_iP_1A_iT_1$, $1 \leq i \leq m$, у которых соответственные стержни равны и шарниры, обозначенные одинаковыми буквами, скреплены. Все инверсии, построенные таким механизмом, будут относительно одной и той же окружности.

На рис. 10 изображён пример такого механизма для двух инверсоров.

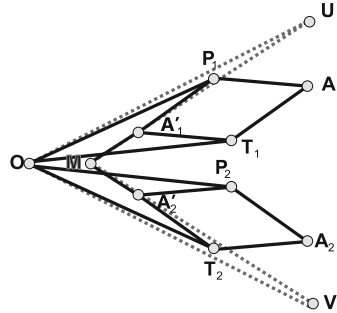


Рис. 10. Инверсия двух точек

Все точки A_i — образы инверсии точек A'_i , принадлежащих одной окружности, значит, они все будут лежать на одной прямой.

Механизм 9 (построение точки пересечения прямых). Требуется построить механизм L на плоскости $\mathbb{R}^2$, содержащий шарниры A, B, C, D, O , не ограничивающий положения шарниров A, B, C, D и такой, что для каждого $P \in \mathcal{C}_L$, при котором $P(A) \neq P(B)$, $P(C) \neq P(D)$ и прямые $P(A)P(B)$ и $P(C)P(D)$ пересекаются по одной точке, $P(O)$ совпадает с точкой пересечения этих прямых.

При помощи механизма 8 соединим шарниры A, B, O так, чтобы они были на одной прямой. Аналогично сделаем так, чтобы шарниры C, D, O оставались на одной прямой. Таким образом, для любой конфигурации P шарниров A, B, C, D конфигурационное пространство точки O будет пересечением прямых $P(A)P(B)$ и $P(C)P(D)$, т. е. точкой, если отрезки не совпадают. Если же точки $P(A), P(B), P(C)$ и $P(D)$ лежат на одной прямой, то конфигурационное пространство точки O будет некоторым отрезком, лежащим на этой прямой.

Механизм 10 (параллельный перенос отрезка непостоянной длины). Требуется построить механизм L на плоскости $\mathbb{R}^2$, содержащий шарниры A, A', B, B' , не ограничивающий положения шарниров A, A', B и такой, что для каждого допустимого $\varphi: \{A, A', B\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ множество $\{P(B') \in \mathcal{C}_L\}$ состоит из одного элемента P , для которого $\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(A')P(B')$.

Рассмотрим механизм $AA_1A'C'C_1CBB_1B'$, изображённый на рис. 11. Он состоит из четырёх укрепленных параллелограммов, а все стержни имеют одинаковую длину a . В нём отрезок AB всегда равен отрезку $A'B'$ и параллелен ему потому, что $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, следовательно, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Для каждой конфигурации точки B конфигурационное пространство точки A будет замкнутым кругом радиуса $2a$ с центром в точке B , т. е. можно задать любой вектор $\overrightarrow{AB}$ длины не больше $2a$. Для любой конфигурации точки A конфигурационное пространство точки A' — это круг радиуса $2a$ с центром

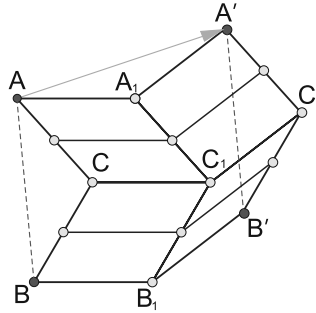


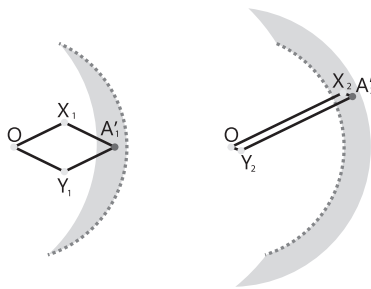
Рис. 11. Параллельный перенос отрезка произвольной длины

в A . Положение точки A' задаёт вектор параллельного переноса. Значит, он тоже может быть любым, не превышающим по длине $2a$. При всех конфигурациях полученный механизм совершает параллельный перенос отрезка длины не больше $2a$ в любом направлении на любое расстояние не больше $2a$ (рис. 11).

Механизм 11 (ограничение конфигурационного множества точки полуплоскостью, заданной граничной прямой и внешней точкой). Требуется построить механизм на плоскости, содержащий шарниры A_1, A_2, B, C , точно реализующий следующее свойство: для каждой конфигурации $P \in \mathcal{C}_L$, в которой $P(B) \neq P(C)$, точки $P(A_1)$ и $P(A_2)$ находятся в разных полуплоскостях относительно прямой $P(B)P(C)$.

С помощью такого механизма можно ограничивать конфигурационное пространство точки A_2 частью полуплоскости, заданной прямой BC , которая её ограничивает, и точкой A_1 , которая не содержится в этой полуплоскости.

Рассмотрим механизм 8,двигающий набор из четырёх точек по прямой. Пусть это будут точки A_1, A_2, B, C . Заменим в этом механизме стержень MA'_1 на шарнирный ромб $MX_1A'_1Y_1$, стороны которого равны половине длины MA'_1

Рис. 12. Точки A'_1 и A'_2

В таком механизме для любой конфигурации $P \in \mathcal{C}_L$ верно, что $P(A'_1)$ находится внутри окружности, которая при инверсии переходит в прямую $P(B)P(C)$, а $P(A'_2)$ — снаружи, а значит, точки $P(A_1)$ и $P(A_2)$ будут находиться в разных полуплоскостях относительно прямой $P(B)P(C)$.

С помощью такого механизма можно ограничивать конфигурационное пространство точки A_2 полуплоскостью, заданной прямой BC , которая её ограничивает, и точкой A_1 , внутренней для этой полуплоскости.

Механизм 13 (построение окружности заданного радиуса с центром в заданной точке). Требуется построить механизм на плоскости, содержащий шарниры A, B, C, O , такой что для любого допустимого $\varphi: \{A, B, O\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ множество всех положений $\{P(C), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ — окружность радиуса $|\varphi(A)\varphi(B)|$ с центром в $\varphi(O)$.

Для начала с помощью механизма 10 нужно параллельно перенести отрезок AB так, чтобы точка A перешла в O (соединим соответственно шарниры рассматриваемого механизма и механизма 10 следующим образом: A с A , B с B , O с A'). Соединим точки O и C' шарнирным ромбом $OH'C'K'$. Прикрепим к точке O ещё один ромб $OHCK$ с теми же длинами сторон. Необходимо сделать так, чтобы он мог вращаться вокруг точки O и оставаться равным ромбу $OH'C'K'$ (рис. 13). Для этого достаточно добиться того, чтобы $\angle HOK$ был всегда равен $\angle H'OK'$. Это будет выполнено, если $\angle HOK'$ будет равен $\angle H'OK' + \angle KOK'$. Последнее можно сделать при помощи сумматора Кемпе

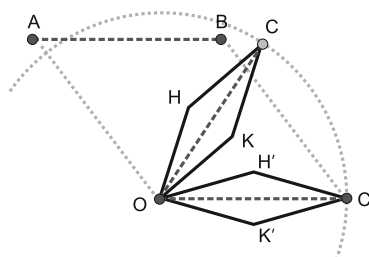


Рис. 13. Точка C может двигаться по окружности с центром в O радиуса AB

(механизм 3), скрепив нужные стержни сумматора со стержнями рассматриваемого механизма (механизм 3).

Механизм 14 (построение перпендикуляра из точки к прямой). Требуется построить механизм на плоскости, содержащий шарниры A, B, C, H , такой что для любого допустимого $\varphi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором $\varphi(B) \neq \varphi(C)$, множество положений $\{P(H), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ состоит из одного элемента, такого что $P(H)$ — основание высоты, опущенной из $\varphi(A)$ на прямую $\varphi(B)\varphi(C)$.

Возьмём жёсткий прямоугольный треугольник MHK (механизм 1) с вершиной прямого угла H . Соединим шарниры B, C, M, H с шарнирами $A_1, \dots, A_4$ механизма 8. Таким образом, в любом положении шарниры B, C, M, H будут располагаться на одной прямой. Аналогично прикрепим механизм 8 к шарнирам H, A, K , чтобы они тоже всегда оставались на одной прямой. В полученном механизме для любого допустимого положения $\varphi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ множество положений $\{P(H), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ состоит из одного элемента, для которого верно $\varphi(A)\varphi(H) \perp \varphi(A)P(H)$.

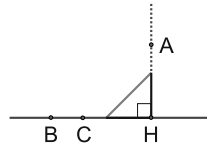


Рис. 14. Построение перпендикуляра из точки к прямой

Механизм 15 (ограничение множества положений точки C заданным лучом AB). Дано число $R > 0$. Требуется построить механизм на плоскости, содержащий шарниры A, B, C, C' , такой что для любого допустимого $\varphi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, множество положений $\{P(C'), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ представляет собой отрезок длины R , принадлежащий лучу $\varphi(A)\varphi(B)$, один из концов которого равен $\varphi(A)$.

Соберём механизм, в котором точка C может лежать на пересечении прямой AB и полуплоскости, содержащей точку B , ограниченной прямой, перпендикулярной AB и содержащей точку A . При помощи механизма 8 сделаем так, чтобы точка C могла находиться только на прямой AB (соединим шарниры A, B, C' рассматриваемого механизма с шарнирами A_1, A_2, A_3 механизма 8). Возьмём жёсткий прямоугольный треугольник $U'V'B'$ с прямым углом V' . Скрепим шарниры A и V' . Затем соединим шарниры A, B, B' с шарнирами A_1, A_2, A_3 . Теперь в любом положении шарниры A, B и B' будут лежать на одной прямой. Прикрепим к имеющимся шарнирам U', V', C', B соответственно шарниры B, C, A_1, A_2 механизма 12 и получим, что для любого допустимого $\varphi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, точка $P(C')$ находится в нужном нам положении.

Механизм 16 (поворот точки C вокруг A , при котором образ точки C попадает на заданный луч AB). Требуется построить механизм на плоскости, содержащий шарниры A, B, C, C' , такой что для любого допустимого $\varphi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, множество положений $\{P(C'), P \in C_L(\varphi)\}$ состоит из одного элемента, такого что $P(C')$ принадлежит лучу $\varphi(A)\varphi(B)$ и находится на расстоянии $|\varphi(A)\varphi(C)|$ от точки $\varphi(A)$.

Реализуем идею того, что точка C' является пересечением окружности с центром в A радиуса AC и луча AB . При помощи механизма 13 ограничим конфигурационное пространство точки C' окружностью с центром в A радиуса AC (соединим шарниры рассматриваемого механизма и механизма 13 следующим образом: A с O , C с C). Затем при помощи механизма 15 сделаем так, чтобы эта точка также могла находиться только на луче AB (соединим шарниры A, B, C' рассматриваемого механизма с шарнирами A, B, C механизма 15).

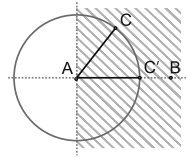


Рис. 15. Поворот точки C вокруг A , при котором образ C' точки C попадает на заданный луч AB

Механизм 17 (построение отрезка, равного по длине минимальному из двух данных). Требуется построить механизм, содержащий шарниры M, N, K, L, P', H , такой что для каждого положения $C \in C_L$ верно

$$|C(P')C(H)| = \min\{|C(M)C(N)|, |C(K)C(L)|\}.$$

Опишем основные шаги предлагаемого нами решения этой задачи.

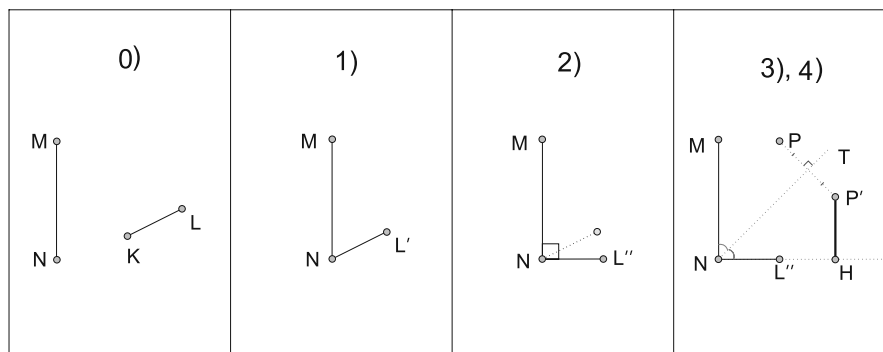


Рис. 16. План решения

1. Перенесём параллельно отрезок KL так, чтобы точка K совпала с N . Образ точки L обозначим L' .
2. Повернём перенесённый отрезок так, чтобы угол между отрезками стал равен $\pi/2$. Полученный отрезок обозначим NL'' .
3. Пусть NT — биссектриса $\angle MNL$. Построим точку P так, чтобы четырёхугольник $MNL''P$ оказался прямоугольником. Построим точку P' , которая будет совпадать с точкой P , если она лежит в $\angle TNL''$, иначе она будет образом отражения точки P относительно биссектрисы NT .
4. Опустим высоту $P'H$ на прямую NL'' . Эта высота и будет равна минимальному из отрезков.

Приведём теперь подробное описание построения минимального отрезка. Первый пункт плана выполним при помощи механизма 10 (соединяем A с K , B с L , N с A'). Для выполнения второго пункта возьмём жёсткий равнобедренный прямоугольный треугольник ABC (механизм 1), у которого точка T — середина гипотенузы. Скрепим вершину прямого угла C с точкой N . При помощи механизма 8 зафиксируем катет AC на прямой MN (соединим A с A_1 , M с A_2 , N с A_3). Тогда второй катет BC задаст луч, перпендикулярный MN . При помощи механизма 16 можно повернуть отрезок NL' так, чтобы он лёг на этот луч (соединим N с A , L' с C , B с B , L'' с C'). Получившийся угол MNL'' будет равен $\pi/2$. Точка P из пункта 3 является образом точки M при параллельном переносе на вектор NL (с помощью механизма 10 соединяем N с A , L'' с B , M с A' , P с B'). Прикрепим к P шарнирный ромб $EPFP'$. Отметим, что этот ромб должен быть неукреплённым, так как нам нужны будут конфигурации, представляющие собой ломаную, когда пара противоположных вершин ромба совпадает. Вершины E и F этого ромба при помощи механизма 8 поместим на биссектрису NT угла MNL (соединяем N с A_1 , T с A_2 , E с A_3 , F с A_4). Ограничим конфигурационное пространство точки P' полуплоскостью, ограниченной прямой NT и содержащей точку L'' (при помощи механизма 12, соединив N с A , T с B , P' с A_1 , L'' с A_2). Точка P' будет находиться внутри угла MNL , и если она и точка M лежат в одной полуплоскости относительно прямой NT , то P' — её образ при отражении относительно NT ; в противном случае P совпадёт с P' . Перпендикуляр из точки P' на прямую NL , построенный при помощи механизма 14, даст точку H (соединим P' с A , N с B , L'' с C , H с H), а отрезок $P'H$ будет равен минимальному из двух исходных отрезков MN и KL .

Механизм 18 (движение трёх точек по плоскости с сохранением ориентации). На плоскости $\mathbb{R}^2$ даны три точки E_1, E_2, E_3 и число $R > 0$. Требуется построить шарнирный механизм L , содержащий шарниры A, B, C, K, M, N , с граничным множеством $\{A, B, C\}$ и граничным отображением $\psi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi(A) = E_1$, $\psi(B) = E_2$, $\psi(C) = E_3$, точно реализующий следующее свойство. Шарниры K, M, N располагаются произвольным образом в круге радиуса R с центром в E_1 , но для каждого допустимого

$\varphi: \{M, N, K\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, при котором точки $\varphi(M)$, $\varphi(N)$, $\varphi(K)$ не лежат на одной прямой, множество всех положений $\{P(\{M, N, K\}), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ таково, что ориентации реперов $P(N)P(K)$, $P(N)P(M)$ и E_1E_2 , E_1E_3 совпадают.

Вначале с помощью механизма 10 совершим параллельный перенос треугольника ABC , образ которого обозначим $\triangle A'B'C'$, так, чтобы вершина C' совпала с точкой M . Затем с помощью сумматора Кемпе прибавим к углу $A'C'B'$ угол $A'C'N$. Полученный угол обозначим $\angle NMK'$. Соединим точки M , N , K , K' с помощью механизма 12 так, чтобы прямая MN ограничивала конфигурационное пространство точки K полуплоскостью, содержащей точку K' (M с A , N с B , K' с A_1 , K с A_2). Таким образом, репер MN , NK будет всегда ориентирован так же, как CA , CB (рис. 17).

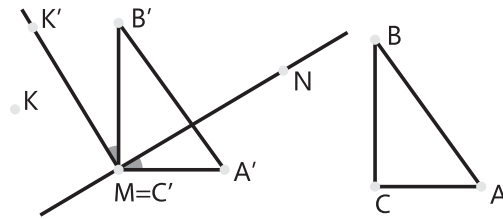


Рис. 17. Ориентация MN , MK совпадает с ориентацией CA , CB

Механизм 19 (построение правильного треугольника с заданной стороной и ориентацией). На плоскости $\mathbb{R}^2$ даны три точки E_1 , E_2 , E_3 , $R > 0$. Требуется построить шарнирный механизм L , содержащий шарниры A , B , C , K , M , N , с граничным множеством $\{A, B, C\}$ и граничным отображением $\psi: \{A, B, C\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi(A) = E_1$, $\psi(B) = E_2$, $\psi(C) = E_3$, точно реализующий следующее свойство. Шарниры K , M , N располагаются произвольным образом в круге радиуса R с центром в E_1 , но для каждого допустимого

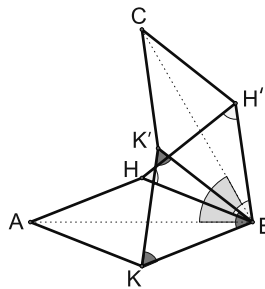


Рис. 18. Построение правильного треугольника с заданной стороной

$\varphi: \{M, N, K\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ множество всех положений $\{P(\{M, N, K\}), P \in \mathcal{C}_L(\varphi)\}$ таково, что ориентации реперов $P(N)P(K)$, $P(N)P(M)$ и E_1E_2 , E_1E_3 совпадают, а точки $\varphi(M)$, $\varphi(N)$, $\varphi(K)$ являются вершинами правильного треугольника.

Соединим точки A и B шарнирным ромбом $AHBK$. Прикрепим к точке B ещё один ромб $BK'CH'$, причём длины его стержней должны быть такие же, как и у ромба $AHBK$. Соединим попарно стержни BH , BH' и BK , BK' так, чтобы получились жёсткие треугольники с углами $\angle HBN' = \angle KBK' = \pi/3$. Таким образом, ромб $AHBK$ равен ромбу $BK'CH'$. Значит, $AB = BC$, $\angle ABC = \pi/3$ и для любого положения точек A и B треугольник ABC правильный (рис. 18). Теперь рассмотрим механизм 18 и соединим его шарниры M , N , K с шарнирами A , B , C только что построенного механизма. Полученный механизм и будет решением поставленной задачи.

3. Реализация минимальных деревьев Штейнера

Предложение 3.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — некоторый круг, $n \in \mathbb{N}$ и Φ_n — множество всех отображений $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow D$. Тогда для каждой ориентированной скобочной структуры $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ существует шарнирный механизм $L = L(\omega^+) = (H_{\omega^+}, \ell_{\omega^+}, \psi)$, $H_{\omega^+} = (V, E)$, такой что $\omega_v^+ \subset V$ и при всех $\varphi \in \Phi_n$ множество

$$\mathcal{C}_L(\omega_v^+, \varphi) := \{C \in \mathcal{C}_L(\omega_v^+): C|_{\partial\omega_v^+} = \varphi\},$$

состоящее из всех конфигураций шарниров ω_v^+ , в которых ограничение на границу $\partial\omega_v^+$ совпадает с φ , равно $[F_\alpha(\omega^+, \varphi)]$ — множеству сетей, полученных в результате применения алгоритма Мелзака к граничному отображению φ и скобочной структуре ω^+ .

Доказательство. Согласно описанию модифицированного алгоритма Мелзака все элементы множества ω_v^+ пронумерованы. Пусть n — количество граничных вершин скобочной структуры ω_v^+ . Начнём сборку механизма L , в множество шарниров которого будем постепенно включать элементы из ω_v^+ . Для этого пошагово будем собирать механизмы L_k , получая каждый последующий из предыдущего. Начнём нумерацию механизмов с $k = n$. Возьмём n шарнирных ромбов с общей вершиной, закреплённой в центре диска D , длина стороны каждого из которых равна половине радиуса диска D . Вершины этих ромбов, противоположные общей вершине, сделаем элементами множества $\partial\omega_v^+$. Полученный механизм обозначим L_n . Пусть первые $p \leq k$ механизмов L_p построены, а первые $p \leq k$ элементов ω_p стали шарнирами. Опишем построение L_{k+1} . Рассмотрим элемент ω_{k+1} . Он представляет собой некоторую пару (w_i, w_j) , $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$. С помощью механизма 19 соединим шарниры w_i и w_j механизма 19 так, чтобы для любой конфигурации $C_{k+1} \in \mathcal{C}_{L_{k+1}}$ точки $C(w_i)$ и $C(w_j)$ были вершинами правильного треугольника, третья вершина которого будет точкой $C(w_{k+1})$, причём базис $C(w_{k+1})C(w_i)$, $C(w_{k+1})C(w_j)$ ориентирован положительно относительно канонической ориентации плоскости $\mathbb{R}^2$ (соединяем ω_r с шарниром A механизма 19, ω_s с B , ω_j с C , шарниры A , B , C механизма 19

закрепим соответственно в точках E_1, E_2, E_3 , которые являются концами некоторого положительно ориентированного базиса E_1E_2, E_1E_3 , закреплённого на плоскости).

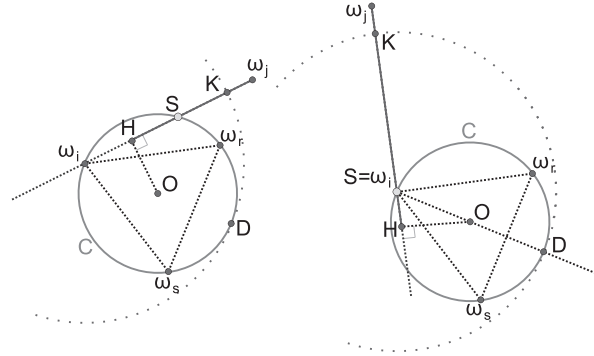
Продолжая таким образом, будем строить механизмы L_i , пока не получим механизм, содержащий в своём множестве шарниров все элементы ω_v^+ . Далее будем продолжать построение механизмов L_i согласно обратному ходу алгоритма Мелзака. Начиная с последнего пронумерованного элемента множества ω^+ , будем двигаться в обратном порядке и проделывать следующее. Пусть известен механизм L_{m-1} . Опишем, как из него построить L_m . Обозначим через w_k рассматриваемый элемент из $\omega^+(G)$. Если $h(w_k) = 0$ и $k > 1$, то переходим к рассмотрению w_{k-1} .

Если w_k — рёберный элемент вида $[w_i, w_j]$, $w_i, w_j \in \omega_v^+$, то $k > 1$ и мы поступим следующим образом. Если $\max\{h(w_i), h(w_j)\} = 0$, то переходим к рассмотрению w_{k-1} . Иначе возьмём тот элемент из w_i, w_j , у которого высота больше нуля. Пусть это w_i (если оба элемента имеют высоту больше нуля, то рассмотрим сначала один, а потом другой).

Элемент w_i имеет вид (w_r, w_s) . Опишем окружность вокруг треугольника $w_iw_rw_s$. Центр описанной окружности будем искать как точку пересечения высот w_iH_i, w_sH_s . Для этого возьмём два механизма 14. Соединим сначала шарниры A, B, C, H одного из них с шарнирами w_i, w_r, w_s, H_i соответственно, а шарниры A, B, C, H другого соответственно с шарнирами w_s, w_r, w_i, H_s . Затем добавим шарнир O и поместим его в точку пересечения прямых w_iH_i и w_sH_s (соединив шарниры w_i, H_i, w_s, H_s, O соответственно с шарнирами A, B, C, D, O механизма 9). Зная центр описанной окружности и положения вершин, с помощью механизма 13 построим саму окружность (соединим шарниры A, B, C, O механизма 13 с шарнирами w_i, O, w_s, O соответственно). Обозначим эту окружность через C . Далее будем строить шарнир S , являющийся пересечением окружности C и луча ℓ_1 , где луч ℓ_1 определён так, что его вершина — проекция центра описанной окружности на прямую w_iw_j , а направление выбрано так, что пересечение ℓ и ℓ_1 — луч.

В качестве точки, которая принадлежит этому пересечению и которая задаёт нужное направление, можно взять точку K , лежащую на пересечении окружности с центром в w_i , радиус которой равен диаметру описанной вокруг $\triangle w_iw_rw_s$ окружности, и луча w_iw_j (механизмы 14 и 12) (рис. 19). С помощью механизма 10 построим точку D , такую что отрезок w_iD равен диаметру окружности C . Для этого прикрепим шарниры A, B, A', B' механизма 10 к рассматриваемым шарнирам w_i, O, O, D . Затем соединим шарниры A, B, O, C механизма 13 соответственно с шарнирами w_i, D, w_i, K . Тем самым получим точку K , которая может двигаться по окружности с центром в w_i и радиусом, равным диаметру окружности C .

Теперь найдём вершину H луча $\ell_1 = HK$. Для этого добавим шарнир H и соединим имеющиеся шарниры w_i, w_j, O, H соответственно с шарнирами B, C, A, H механизма 14. Добавим точку S и поместим её на луч HK (механизм 15)

Рис. 19. Построение точки S

и на окружность C (соединим шарниры A, B, C, O механизма 13 с имеющимися шарнирами w_i, O, S, O). Построенный таким образом шарнир S будет пересечением луча ℓ_1 и окружности C .

Если w_k — вершинный элемент вида (w_i, w_j) , $w_i, w_j \in \omega_v^+(G)$, то поступим с ним так же, как с рёберным элементом $[w_i, w_j]$, заменив в описанных выше построениях точку P_j на точку P_k . Теперь переименуем шарниры w_k и S , поменяв местами их названия. Полученный механизм обозначим L_m и перейдём к построению L_{m+1} . Закончим построение, когда таким образом будут реализованы все шаги обратного хода алгоритма Мелзака. Последний построенный механизм обозначим через L . Этот механизм будет содержать элементы скобочной структуры ω^+ , а их конфигурационное пространство будет совпадать с множеством сетей $[F_\alpha(\omega^+, \varphi)]$. $\square$

Предложение 3.2. Дан плоский механизм $L_1(V_1, E_1, \ell_1, \psi_1)$, у которого выделено подмножество шарниров $V' \subset V_1$. Пусть V' — множество вершин некоторого графа $H = (V', E')$. Существует шарнирный механизм, который на заданном луче откладывает от его начала отрезок l_G , равный суммарной длине рёбер графа G .

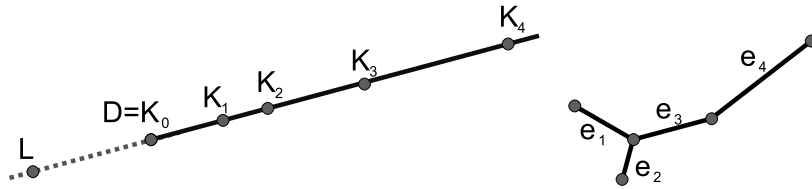


Рис. 20. Построение отрезка, равного длине сети

Доказательство. Пусть заданный в условии луч определён точкой D , которая является его началом, и точкой L , которая лежит на прямой, содержащей луч, но не принадлежит этому лучу. Пронумеруем все рёбра G . На выбранном луче будем последовательно откладывать отрезки $K_{j-1}K_j$, длина каждого из которых будет соответствовать длине ребра e_j . Положим $K_0 = D$ (рис. 20).

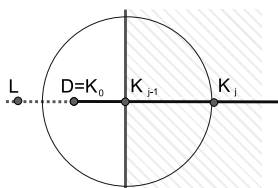


Рис. 21. Построение точки K_j

Опишем построение точки K_j , если известна K_{j-1} (рис. 21). При помощи механизма 8 сделаем так, чтобы K_j оставалась на прямой LD . Затем при помощи механизма 13 сделаем так, чтобы она лежала на окружности радиуса $|e_j|$ с центром в точке K_{j-1} , а также прикрепим к K_j механизм 11, чтобы она находилась только в полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через точку K_{j-1} , перпендикулярной прямой LD и не содержащей точку L . Таким образом, $|K_{j-1}K_j| = |e_j|$, и точка K_j лежит на нужном луче. Если e_s — последнее ребро дерева G , то отрезок K_0K_s равен суммарной длине рёбер графа G . $\square$

Предложение 3.3. Пусть x, y, z — стандартные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, и $D' \subset \mathbb{R}^3$ — некоторый круг с центром в начале координат, лежащий в плоскости $z = 0$. Пусть $G_1, \dots, G_n$ — произвольные графы, $V(G_i)$ — множество вершин графа G_i и $V'(G_i)$ — «копия» множества $V(G_i)$, т. е. равномощное с $V(G_i)$ множество, для которого задана биекция $\nu_i: V'(G_i) \rightarrow V(G_i)$. Тогда существует шарнирный механизм L в $\mathbb{R}^3$, содержащий среди множества шарниров семейство

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^n V'(G_i) \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^n V(G_i) \right),$$

такой что для любой конфигурации $C \in C_L$ выполняется следующее.

1. При каждом $i = 1, \dots, n$ имеем $C(V(G_i)) \subset \{z = 0\}$; таким образом, ограничение Γ_i отображения C на $V(G_i)$ является обобщённой сетью на координатной плоскости $z = 0$ и определена длина этой сети $\ell_i = \ell(\Gamma_i)$. Положим $c = \min_i \ell_i$.
2. Ограничение отображения C на $V'(G_i)$ равно $(0, 0, \ell_i - c) + \Gamma_i \circ \nu_i$, т. е. C поднимает копии шарниров из множества $V'(G_i)$ на высоту $\ell_i - c$.

Более того, для любого семейства отображений $\Gamma'_i: V(G_i) \rightarrow D'$ существует $C \in C_L$, для которого $\Gamma_i = \Gamma'_i$ при всех i .

Доказательство. Пусть X — шарнир, закреплённый на оси x , Y — шарнир, закреплённый на оси y . Рассмотрим шарнирные ромбы с общим концом O , закреплённым в начале координат, количество которых равно количеству элементов множества $\bigsqcup_i (V(G_i))$. Противоположные закреплённому концу вершины сделаем элементами множества $\bigsqcup_i (V(G_i))$. Обозначим получившийся механизм L . Согласно предложению 3.2 к каждому из множеств $V(G_i)$ можно прикрепить механизм, который для любого возможного положения $C(V(G_i))$, $C \in \mathcal{C}_L$, при котором образы вершин $V(G_i)$ лежат внутри круга D , будет строить на луче OX отрезок $[O, L_i]$, равный длине обобщённой сети $C|_{(V(G_i))}$. Прделаем то же самое для всех наборов вершин $V(G_i)$. Затем с помощью механизма 17 построим отрезок $[O, L]$, длина которого равна длине минимального из всех $[O, L_i]$. Теперь возьмём равнобедренный прямоугольный треугольник $F_0T_0P_0$ с углом T_0 , равным $2 \arctg(1/2)$, который закрепим в плоскости OXZ так, чтобы середина гипотенузы T'_0 лежала на оси OZ и имела положительную координату, а вершину T_0 скрепим с O . С помощью механизма 10 прикрепим к нему жёсткий треугольник FTP так, чтобы при любом расположении треугольник FTP получался параллельным переносом в плоскости OXZ из треугольника $F_0T_0P_0$. Затем сделаем так, чтобы шарниры F , T и O всегда оставались на одной прямой (с помощью механизма 8). Также соединим механизмом 8 шарниры T , P и L . Теперь треугольник FTP всегда расположен в плоскости OXZ так, что его сторона FP параллельна оси OX , вершина T находится ниже FP , а стороны FT и TP содержат концы отрезка OL .

Теперь будем параллельно переносить отрезки OL_i так, чтобы их концы были на сторонах треугольника FTP . Рассмотрим отрезок OL_i . Добавим шарниры O'_i и L'_i так, чтобы отрезок $O'_iL'_i$ получался параллельным переносом из отрезка OL (механизм 10) и шарнир O'_i находился на луче TF , а L'_i — на луче TP (механизм 15). Обозначим через Z_i шарнир, являющийся пересечением прямых OZ и $O'_iL'_i$. Эта точка будет задавать вектор параллельного переноса OZ_i . Прикрепим ко всем шарнирам $V(G_i)$ механизм, строящий образ параллельного переноса этих шарниров на вектор OZ_i . Шарниры, являющиеся образами такого параллельного переноса, сделаем элементами множества $V'(G_i)$. Таким образом, для любой конфигурации $C \in \mathcal{C}_L$ шарниров множество $C(V'(G_i))$ будет множеством вершин, которые получаются параллельным переносом из $C(V(G_i))$ на вектор, параллельный оси z . Положения шарниров множеств $V(G_i)$ ограничиваются плоскостью OXU и длинами стержней шарнирного механизма, поэтому для любого круга D можно подобрать такие длины стержней механизма, чтобы условие теоремы было верно. $\square$

Теорема 3.4. Пусть x, y, z — стандартные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$ и $D \subset \mathbb{R}^3$ — некоторый круг, лежащий в плоскости $z = 0$. Выберем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и для каждого ω^+ из множества $\mathcal{W}_n^+$ ориентированных скобочных структур через $\bar{\omega}_v^+$ обозначим «копию» множества ω_v^+ , т. е. равномощное с ω_v^+ множество, для которого задана биекция $\nu: \bar{\omega}_v^+ \rightarrow \omega_v^+$. Тогда существует шар-

нирный механизм $L \in \mathbb{R}^3$, содержащий среди семейства шарниров дизъюнктное объединение множеств ω_v^+ и $\bar{\omega}_v^+$ по всем $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$, такой что для любой конфигурации $C \in \mathcal{C}_L$ выполняется следующее.

1. При каждом $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ имеем $C(\omega_v^+) \subset \{z = 0\}$. Таким образом, ограничение Γ_{ω^+} отображения C на ω_v^+ является сетью на координатной плоскости $z = 0$ и определена длина этой сети $\ell(\Gamma_{\omega^+})$. Положим $c = \min_{\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+} \ell(\Gamma_{\omega^+})$.
2. Для каждого $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ ограничение отображения C на множество $\{1, \dots, n\}$ — одно и то же отображение, обозначим его через φ .
3. При каждом $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ отображение Γ_{ω^+} — элемент множества сетей $F_\alpha(\omega^+, \varphi)$, полученных в результате применения алгоритма Мелзака, соответствующего ω^+ и границе φ .
4. Ограничение отображения C на $\bar{\omega}_v^+$ равно $(0, 0, \ell(\omega_v^+) - c) + \Gamma_{\omega^+} \circ \nu$, т. е. C поднимает копии шарниров из множества ω_v^+ на высоту $\ell(\Gamma_{\omega^+}) - c$.

Более того, для каждого $\varphi': \{1, \dots, n\} \rightarrow D$ существует конфигурация $C \in \mathcal{C}_L$, такая что $\varphi = \varphi'$.

Доказательство. Рассмотрим множество ориентированных скобочных структур $\mathcal{W}_n^+$. Граничное множество каждой из них — множество $\{1, \dots, n\}$. Согласно предложению 3.1 для каждой из $\omega^+ \in \mathcal{W}_n^+$ можно построить шарнирный механизм, содержащий в семействе шарниров множество $\{1, \dots, n\}$ и для любой их конфигурации φ в диске D строящий семейство сетей $F_\alpha(\omega^+, \varphi)$. К получившемуся множеству сетей по всевозможным ω^+ применим предложение 3.3 и получим, что в плоскости $z = 0$ будут построены те из них, которые имеют наименьшую длину. $\square$

Литература

- [1] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.
- [2] Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — Москва; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
- [3] Ильютко Д. П. Локально минимальные сети в N -нормированных пространствах // Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, № 5. — С. 656—668.
- [4] Ильютко Д. П. Геометрия экстремальных сетей на λ -нормированных плоскостях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2005. — № 4. — С. 52—54.
- [5] Ильютко Д. П. Разветвлённые экстремали функционала λ -нормированной длины // Матем. сб. — 2006. — Т. 197, № 5. — С. 75—98.
- [6] Ильютко Д. П., Никонов И. М. Экстремальные сети на λ -нормированной плоскости, где $\lambda = 3, 4, 6$ // Матем. сб. — 2017. — Т. 208, № 4. — С. 17—50.
- [7] Математические этюды. — <http://www.etudes.ru/ru/mov/>.
- [8] Механизмы П. Л. Чебышёва. — <http://tcheb.ru/ru>.
- [9] Ошемков А. А., Попеленский Ф. Ю., Тужилин А. А., Фоменко А. Т., Шафаревич А. И. Курс наглядной геометрии и топологии. — М.: URSS; Ленанд, 2014.

- [10] Сосинский А. Б. Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция первая. — http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=130.
- [11] Сосинский А. Б. Двумерные поверхности и конфигурационные пространства шарнирных механизмов. Лекция вторая. — http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=131&option_lang=rus.
- [12] Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
- [13] Cauchy A. L. Recherche sur les polyèdres — premier mémoire // J. l'École Polytech. — 1813. — Vol. 9, Cahier 16. — P. 66—86.
- [14] Hwang F. K. A linear time algorithm for full Steiner trees // Operations Res. Lett. — 1986. — Vol. 4, no. 5. — P. 235—237.
- [15] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations. — CRC Press, 1994.
- [16] Kempe A. B. How to Draw a Straight Line: A Lecture on Linkages. — Macmillan, 1877.
- [17] Melzak Z. A. On the problem of Steiner // Can. Math. Bull. — 1961. — Vol. 4, no. 2. — P. 143—148.