Министерство образования и науки Российской Федерации
Российский национальный комитет по автоматическому управлению
Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН
Universitetet i Tromsø

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ, КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ

Тезисы докладов Международной конференции,
посвященной 110-летию со дня рождения Иринарха Петровича Макарова,
Рязань, 15–18 сентября 2016 г.

GEOMETRIC METHODS IN CONTROL THEORY AND MATHEMATICAL PHYSICS: DIFFERENTIAL EQUATIONS, INTEGRABILITY, QUALITATIVE THEORY

Abstracts of the International Conference
in honor of Irinarkh P. Makarov on his 110th birthday,
Ryazan, 15–18 September 2016

Рязань 2016

УДК 517.9
ББК 22.1
Г 36

Рецензенты:
С.С. Мамонов, д-р. физ.-мат. наук, проф.
(Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина)
И.С. Стрельцова, канд. физ.-мат. наук, доц.
(Астраханский государственный университет)

Г 36 Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория [Текст] : Тезисы докладов Междунар. конф., посвященной 110-летию Иринарха Петровича Макарова, 15–18 сентября 2016 года / под ред. А.Г. Кушнера, В.В. Лычагина, М.Т. Терёхина; Ряз. гос. ун-т имени С.А. Есенина. – Рязань, 2016. – 50 с.

ISBN

Содержатся результаты исследований участников Международной конференции в области дифференциальных уравнений, оптимального управления, а также дифференциальной геометрии и теории инвариантов. Издание адресовано научным работникам, аспирантам и студентам.

нелинейные дифференциальные уравнения, оптимальное управление, теория инвариантов.

УДК 517.9
ББК 22.1

© Коллектив авторов, 2016
© Под общ. ред. А.Г. Кушнера,
В.В. Лычагина, М.Т. Терёхина, 2016
© ФГБОУ ВО «Рязанский государственный
университет имени С.А. Есенина», 2016
© ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова», 2016

ISBN

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= A(t)x + f(t,x,y,\varepsilon), \\ \dot{y} &= B(t,\varepsilon)y + g(t,x,y,\varepsilon)y, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$E = \operatorname{diag}(\underbrace{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_1}_{k_1},\underbrace{\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_2}_{k_2},\underbrace{\varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_3}_{k_3}),$$

$k_1+k_2+k_3=n$; $\varepsilon = \operatorname{colon}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, ε_i, $i=\overline{1,3}$ – малые параметры.

Обозначим через C^k_ω пространство ω-периодических k-мерных вектор-функций аргумента t, непрерывных на $[0,\omega]$. Допустим что $|x| = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$, $|A| = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$, $\|\cdot\| = \max\limits_{0\le t\le\omega}|\cdot|$, $D^k_R = \left\{z\in C^k_\omega : \|z\|\le R\right\}$, $R>0$, $U(0,\varepsilon^0) = \{\varepsilon : |z|\le\varepsilon^0\}$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. Матрица $A(t) = \operatorname{diag}(A_1(t),A_2(t),A_3)$, где A_i – $(k_i\times k_i)$-матрицы, $i=\overline{1,3}$, – ω-периодична, непрерывна на $[0,\omega]$; матрицы $A_1(t)$, $A_2(t)$ имеют собственные значения со знакопостоянными при всех $t\in[0,\omega]$ действительными частями,

$$A_3 = \operatorname{diag}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}}_{j}\right),$$

где $a>0$, $2j=k_3$.

2. Вектор-функция $f = \operatorname{colon}(f^1,f^2,\varepsilon_3 f^3)$, $\dim f^i = k_i$, $i=\overline{1,3}$, причем существуют положительные числа h_1, h_2 и функция $h_3(t,\varepsilon_3)$ такие, что при всех $(t,x,y,\varepsilon)\in[0,\omega]\times D^n_R\times D^2_R\times U(0,\varepsilon^0)$ выполняются неравенства

$$\left|f^i(t,x,y,\varepsilon)\right| \le |\varepsilon|^2\cdot h_i\cdot\|x\|, i=\overline{1,2},$$

$$\left|f^3(t,x,y,\varepsilon)\right| \le h_3(t,\varepsilon_3),\ \texttt{где}\ \lim_{\varepsilon_3\to 0} h_3(t,\varepsilon_3) = 0.$$

3. Матрица $B(t,\varepsilon) = (b_{ij}(t,\varepsilon))^2_{i,j=1}$ ω-периодична по t, непрерывна на $[0,\omega]\times U(0,\varepsilon^0)$, кроме того при всех $\varepsilon\in U(0,\varepsilon^0)$ выполняются неравенства

$$\|b_{11}-b_{22}\| \le -\nu_0,\quad \|b_{21}\| \le \frac{1}{KRn_0},\quad \|b_{12}\| \le \frac{R}{K}\left(1-\frac{1}{n_0}\right),$$

$$\|b_{ii}(t,\varepsilon)\| > \frac{1}{Kn_0},\ \texttt{где}\ n_0\in\mathbb{N},\quad K = \left(\left(1-e^{-\nu_0\omega}\right)^{-1}+1\right)\omega.$$

4. Матрица $g(t,x,y,\varepsilon)$ ω-периодична по t, непрерывна на $(t,x,y,\varepsilon)\in[0,\omega]\times D^n_R\times D^2_R\times U(0,\varepsilon^0)$ и $g(t,x,0,0)\equiv 0$.

Теорема 1. *Если выполнены условия 1–4, то система* (1) имеет ω-периодическое решение, близкое к нулю при достаточно малых ε_i, $i=\overline{1,3}$.

О КИНЕМАТИКЕ И ДИНАМИКЕ ДВУХКОЛЁСНОЙ РОЛИКОВОЙ ДОСКИ (ЭССБОРДА)

М. М. Гаджиев, А. С. Кулешов

(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: maxim-gadzhiev@yandex.ru

Эссборд или рипстик представляет из себя двухколёсную вариацию скейтборда. Типичный эссборд состоит из двух платформ, соединённых при помощи торсионного вала, позволяющего им совершать вращение относительно друг друга. На нижней стороне каждой из платформ имеется наклонная поверхность с закреплённым на ней поворотным самоориентирующемся колесом. Ось вращения поворотного колеса перпендикулярна наклонной поверхности.

Задача качения эссборда по горизонтальной плоскости сводится к построению и изучению неголономной системы уравнений. В настоящее время существует мало работ, посвящённых исследованию кинематики или динамики эссборда. В работах [1, 2] содержится описание кинематических особенностей эссборда и, в частности, получены формулы, связывающие угол наклона платформы с углом поворота соответствующего поворотного колеса. При этом результаты, полученные в этих работах, являются справедливыми только в предположении, что продольная ось эссборда остаётся параллельной земле всё время движения. В данной работе рассматривается симметричный случай качения эссборда без райдера, когда педали отклоняются на одинаковый по модулю угол в разные стороны, а геометрические и динамические характеристики передней и задней платформ совпадают. Вычисляется энергия ускорений эссборда (функция Аппеля), и находятся уравнения движения в форме Гиббса-–Аппеля [3]. Найдено частное решение уравнений, являющееся равномерным прямолинейным движением, и исследована устойчивость в окрестностях этого решения.

[1] *Wang, T.* On Kinematic Mechanism of a Two-Wheel Skateboard: The Essboard [Text] / T. Wang, B. Su, Sh. Kuang, J. Wang // ASME Journal of Mechanisms and Robotics. – 2013. – Vol. 5. – No 3. – P. 034503-1–034503-7.

[2] *Su, B.* Kinematic mechanism and path planning of the Essboard [Text] / B. Su, T. Wang, J. Wang, Sh. Kuang // Science China Technological Sciences. – 2013. – Vol. 56. – Issue 6. – P. 1499–1516.

[3] *Лурье, А.И.* Аналитическая механика [Текст]. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. литры, 1961. – 824 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

А.А. Дуюнова

(Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия)

E-mail address: duyunova_anna@mail.ru

Рассмотрим уравнения движения идеальной жидкости [1] на плоскости

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + \dfrac{p_x}{\rho} = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \dfrac{p_y}{\rho} = 0, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho\left(u_x + v_y\right) = 0, \\ T\left(s_t + us_x + vs_y\right) - \dfrac{k}{\rho}\left(T_{xx} + T_{yy}\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$