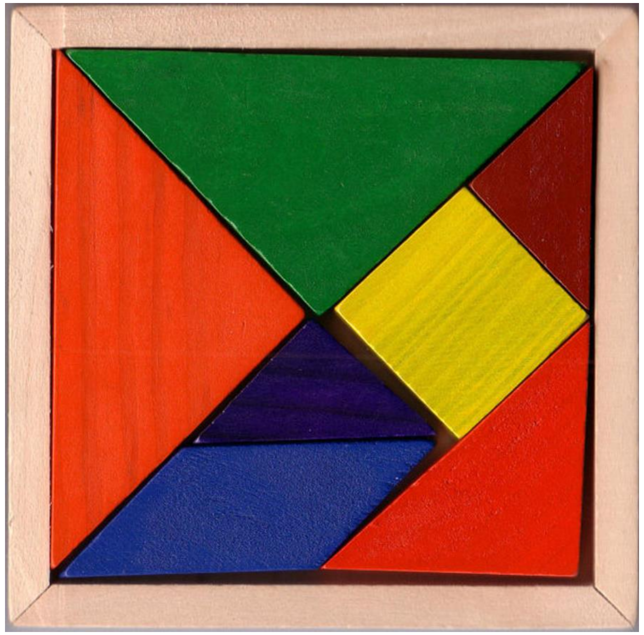
Кусочно-евклидова динамика. Заочная часть.

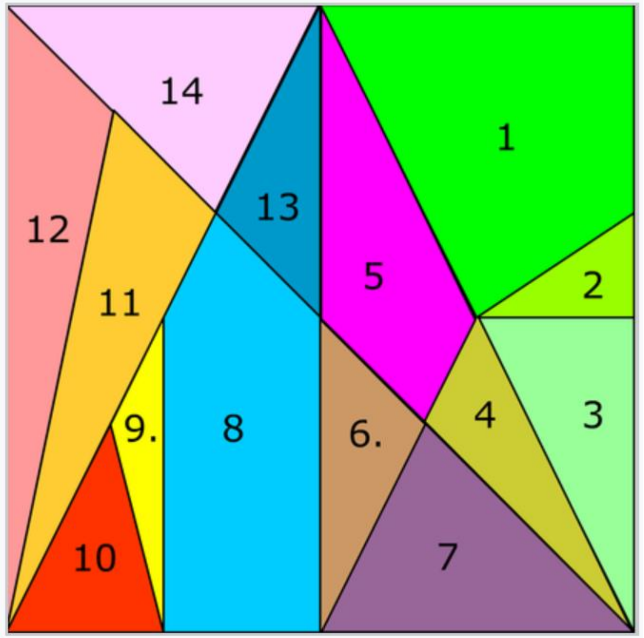
Проектная смена «Большие Вызовы», Сириус, Сочи 2021

Задачи, предложенные в этой версии, похожи, но не идентичны тем задачам, которые размещены в системе Сириус.Онлайн

Поле и куски пазла

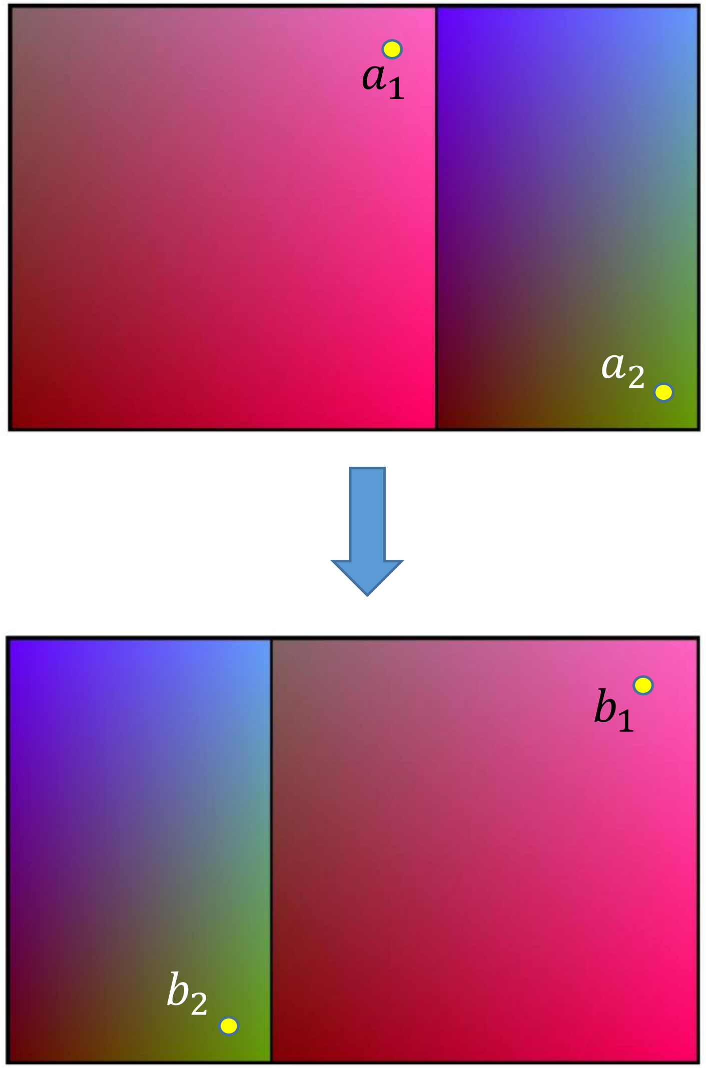
Мы рассмотрим несколько задач, объединенных следующей рамкой. Пусть X – многоугольник на плоскости, который будем называть *полем*. Поле разрезано на несколько меньших многоугольников, которые будем называть *кусками пазла*. Так бывает в некоторых известных головоломках, например, в [танграме]() или в [стомахионе]() Архимеда.





Отображение перекладывания

Допустим, что куски пазла кто-то вытащил и потом сложил их на том же поле по-другому. Этот процесс можно более точно описать так. Пусть B – объединение границ всех кусков пазла в смысле их начального положения. Тогда определено отображение $f: X \setminus B \to X$, сопоставляющее начальному положению каждой внутренней точки каждого куска пазла ее же конечное положение.

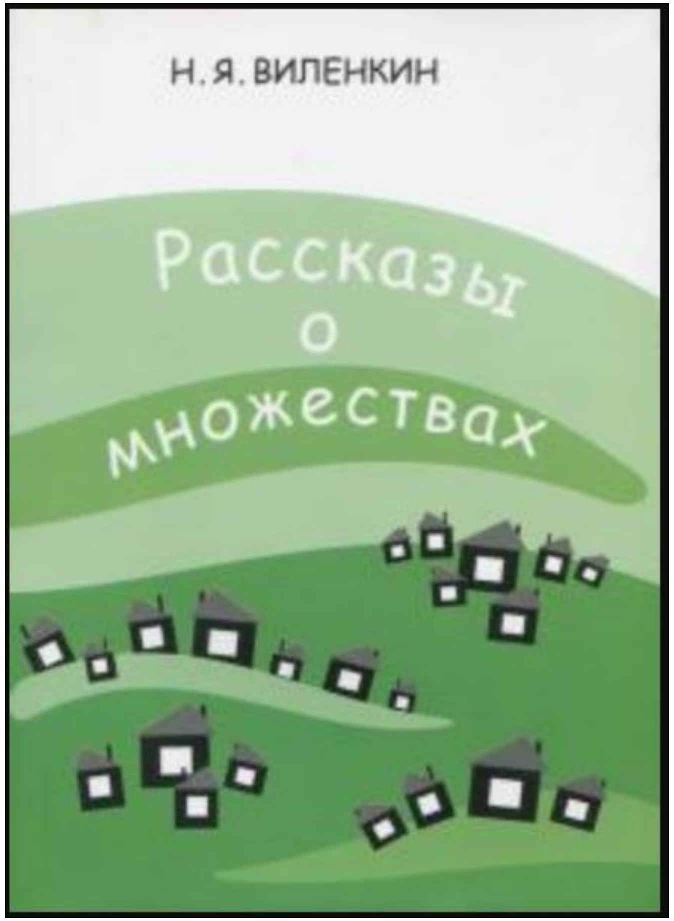


Каждой точке $a \in X$ сопоставляется такая точка $b = f(a)$, которая на нижней картинке покрашена в тот же цвет, в который покрашена точка a на верхней картинке. Например, $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$.

Вспомнить все: множества и отображения*

См. сноску на следующем слайде

- Множества и отображения.
- Пустое множество $\emptyset$. Включение $A \subset B$. Операции над множествами: объединение $A \cup B$ множеств A и B, разность $A \setminus B$, пересечение $A \cap B$.
- Композиция $g \circ f\colon X \to Z$ отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$.
- Образ $f(A) \subset Y$ для $A \subset X$ и полный прообраз $f^{-1}(B) \subset X$ для $B \subset Y$.



Как вспоминать или изучать. Если все понятия, перечисленные на предыдущем слайде слева, вам хорошо известны (и у вас есть существенный опыт использования этих понятий), то ничего «вспоминать» не надо. Иначе: вот несколько более подробных советов. Указанная справа книжка хорошая и написана в «разговорном» стиле, ее легко читать. Но если вы предпочитаете более концентрированное изложение, то рекомендуем вам посмотреть материалы летней школы «Матфак: предисловие» https://drive.google.com/drive/folders/1TkTo4rNK37SQ5zNwRal7RWWV8kaKudNw по темам «множества» и «отображения», а также посмотреть видеолекции https://youtu.be/c8S-XO8rWmY и https://youtube.com/playlist?list=PLq3E5oubNNoAiiVaeym2AdNUcXU9Alp5r. Разумеется, доступно и множество других материалов по указанным темам. Пока будет достаточно освоения самой базовой терминологии, в частности, тех терминов, которые указаны на предыдущем слайде слева. Более продвинутые концепции (мощности, декартовы произведения, …) на данном этапе не нужны.

Кусочно-евклидова динамика

- Отображение перекладывания f можно итерировать: *итерация* f^n – это отображение, состоящее в применении n раз отображения f. Другими словами,
$$f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f\big(f(x)\big), f^3(x) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big), \dots$$
- Итерация f^n определена на дополнении до множества $B_n = B \cup f^{-1}(B) \cup \dots \cup f^{-(n-1)}(B)$. Точки множества $B_1 \cup B_2 \cup \cdots$ называются *граничными*.

Напомним, что множество B – это объединение сторон всех кусков пазла. На этом множестве отображение перекладывания не определено. Заметим, что $B_1 = B$ согласно определению, приведенному выше. В этом месте стоит подумать над тем, почему отображение f^n не определено на множестве B_n.

Задачи с автоматической проверкой

Т1. (1 балл). Пусть X – множество всех цифр от 0 до 9. Отображение $f\colon X \to X$ сопоставляет каждому элементу $x \in X$ последнюю цифру числа x^2. Найдите сумму всех элементов множества $X \setminus f(X)$.

Т2. (2 балла). Для тех же X и f найдите $f^{2021}(X)$.

*Задачи с буквой **Т** – это тестовые задачи, в которых проверяется (автоматически) только ответ.*

Типичные вопросы

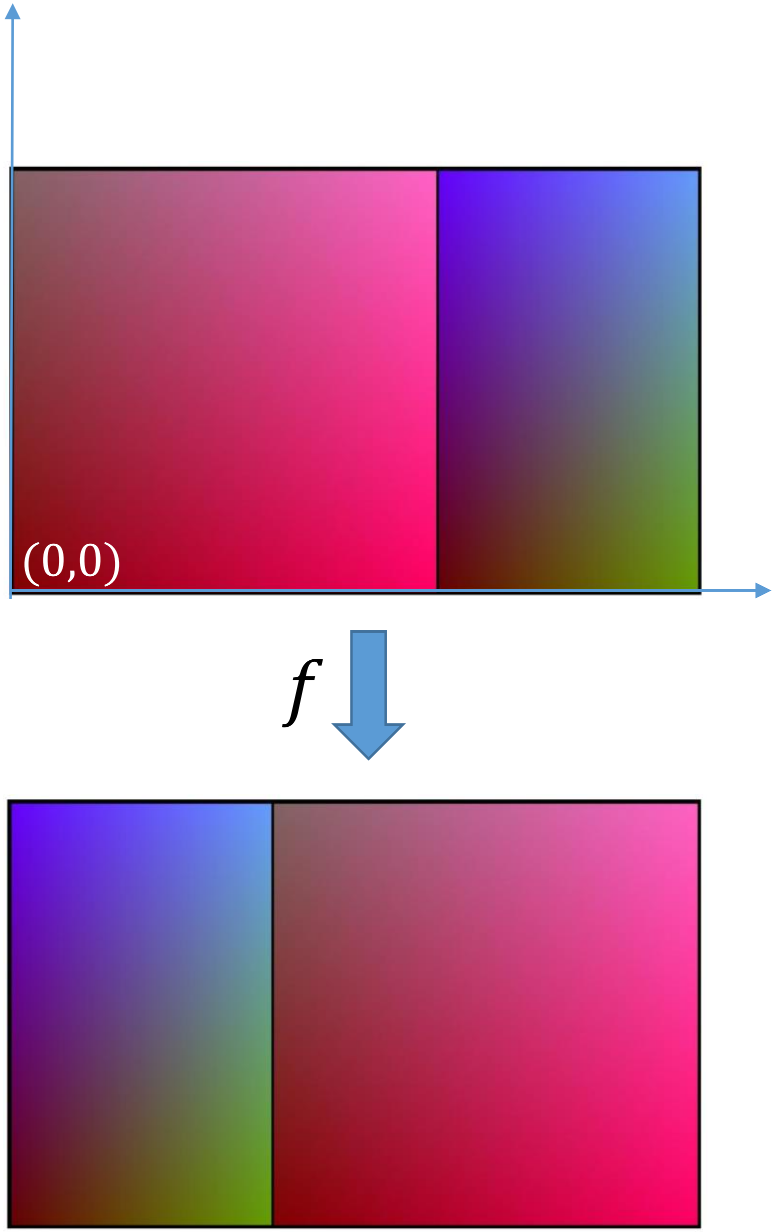
- Как устроено множество B_n? (Например, на сколько частей какого размера оно разбивает множество X?)
- Для каждой точки $x \in X \setminus B_n$ определена (конечная) последовательность кусков пазла: на месте с номером $i = 0, \dots, n-1$ стоит кусок, в который попала точка $f^i(x)$. Что можно сказать про такие последовательности? Сколько можно получить разных последовательностей, по-разному выбирая точку x?
- Что можно сказать про *орбиту* точки x, то есть про последовательность $x, f(x), f^2(x), \dots$? Может ли эта последовательность быть периодической? А бесконечной? Какие точки поля можно приблизить точками этой последовательности?

Перекладывание 1

Рассмотрим отображение, изображенное на картинке, в котором сторона квадрата равна 1, меньшая сторона прямоугольника равна $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$, а перекладывание двух кусков осуществляется параллельными переносами.

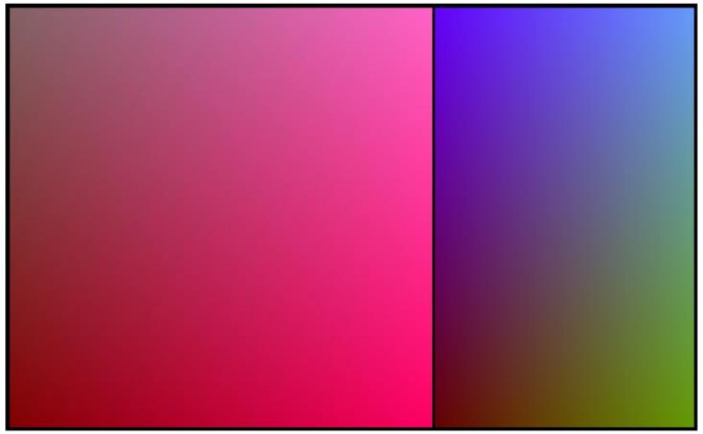
Т3. (1 балл). Найдите образ точки с координатами $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ при отображении f^2, то есть $f^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

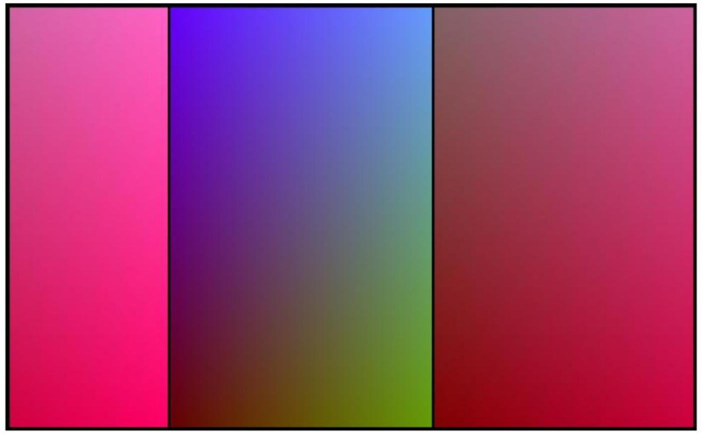
Система координат задана так, что левый нижний угол поля имеет координаты (0,0), ось абсцисс направлена вправо, а ось ординат вверх.



Перекладывание 1, сколько кусков.

На нижнем рисунке черный контур изображает множество B_2, а точки $x \in X$ покрашены в цвета точек $f(x) \in X$ относительно раскраски верхнего рисунка.





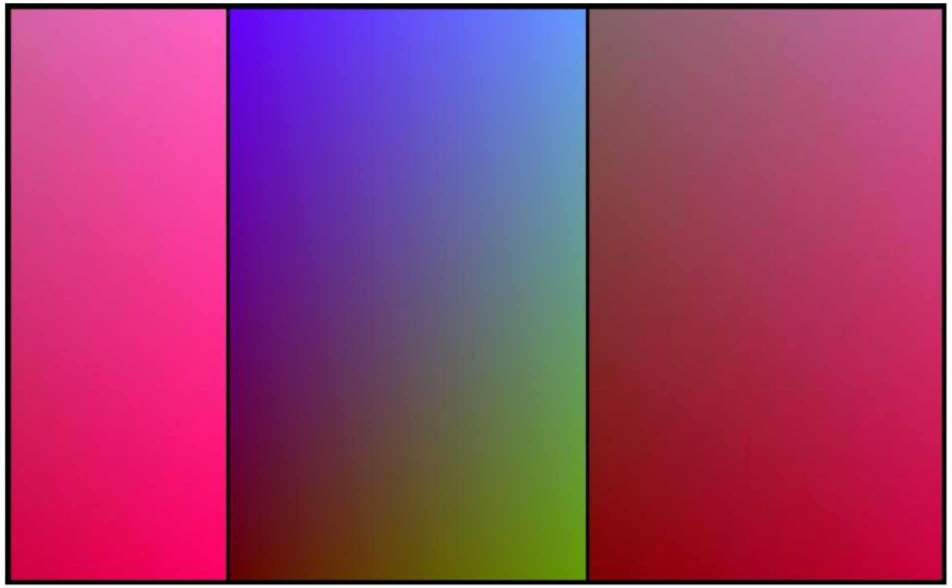
T4a. (1 балл). На сколько частей (кусков) множество B_3 делит поле X? (Для перекладывания 1).

T4. (2 балла). Тот же вопрос для B_{2021}.

Перекладывание 1, сколько форм.

Множество B_2 делит поле на прямоугольники, среди которых есть только два разной формы.*

Т5. (2 балла). На какое число прямоугольников разной формы множество B_5 делит поле X? (Для перекладывания 1).

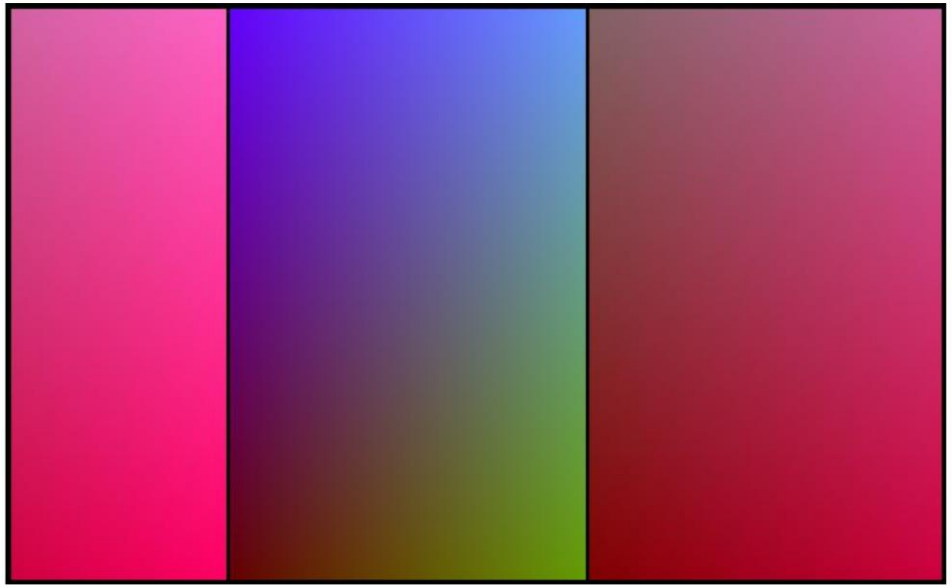


*Считается, что два прямоугольника имеют *одинаковую форму*, если они равны (конгруэнты) друг другу. Иначе говоря, у многоугольников разная форма, если у них разные длины оснований (а все высоты одинаковы и равны 1).

Перекладывание 1, только 2 формы.

Будем рассматривать n со следующим свойством: среди многоугольников, на которые множество B_n делит поле, есть только два прямоугольника разной формы.

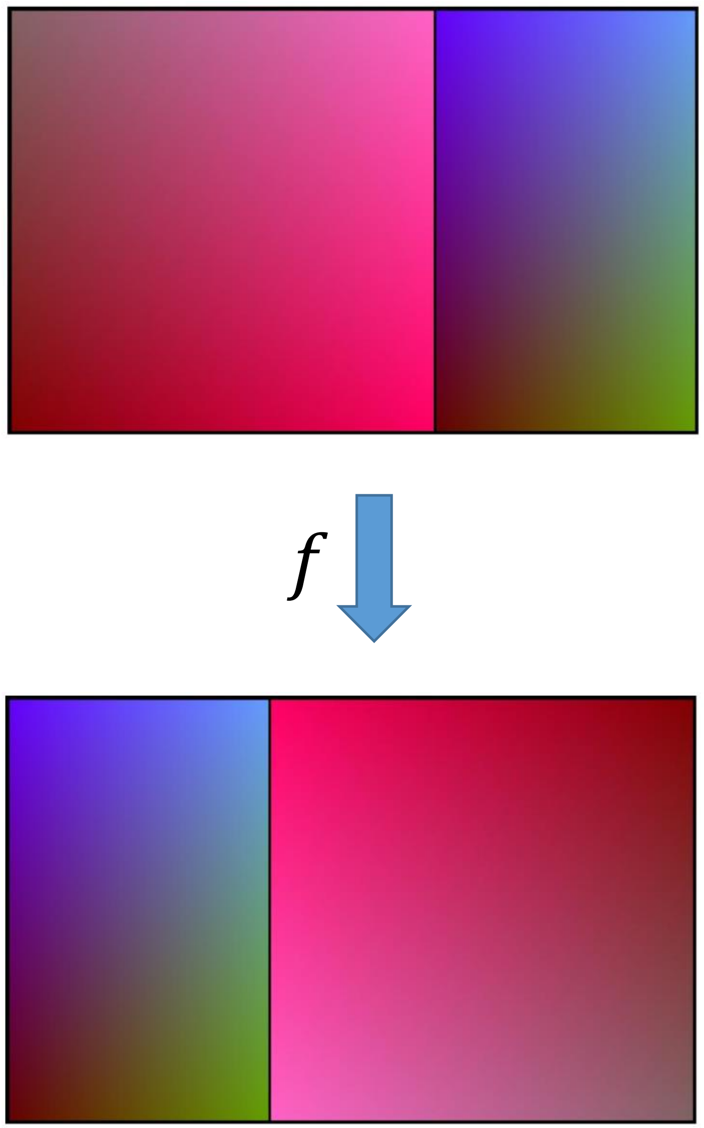
Т6. (3 балла). Пусть $n_1 = 1 < n_2 < \ldots$ – все номера n, для которых B_n обладает указанным свойством. Найдите n_5.



Перекладывание 2

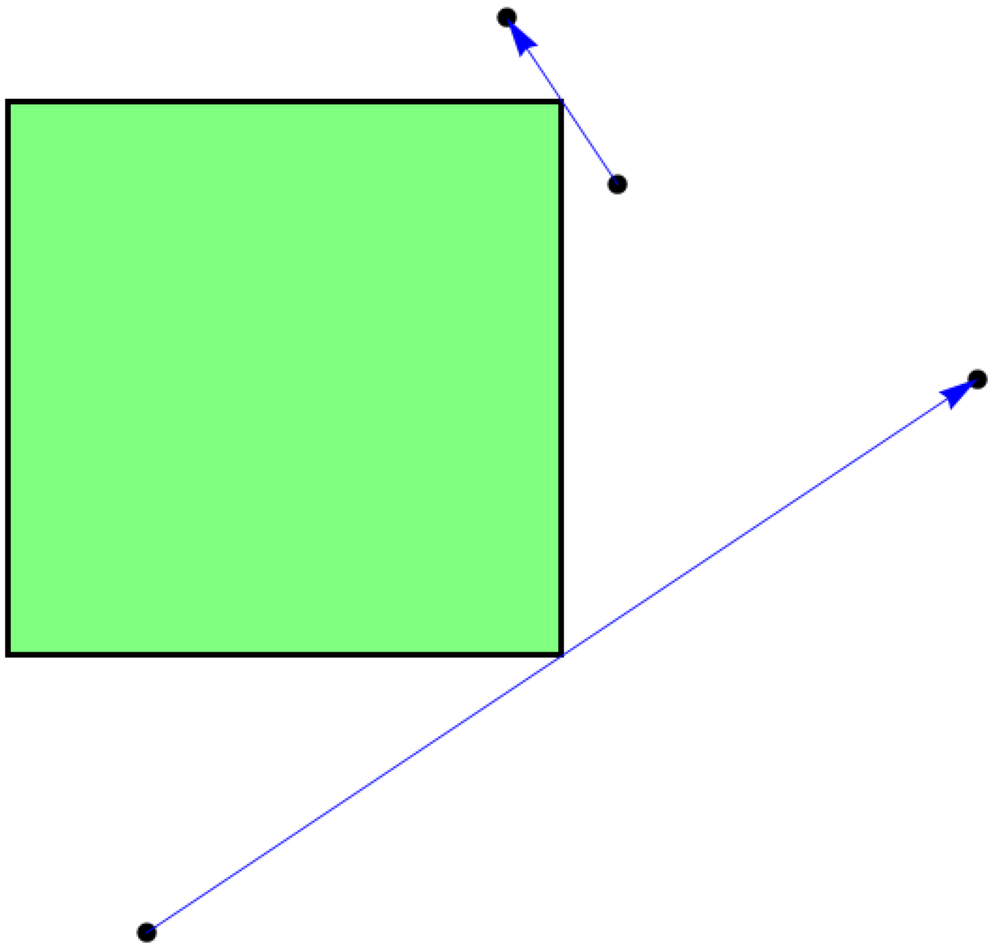
Поле то же, что и для перекладывания 1. Только лилово-розовый квадрат не просто параллельно переносится, но еще и поворачивается на 180 градусов вокруг центра. Сине-зеленый прямоугольник передвигается параллельно.

T7. (3 балла). На сколько частей (кусков) множество B_{2021} делит поле X? (Для перекладывания 2).



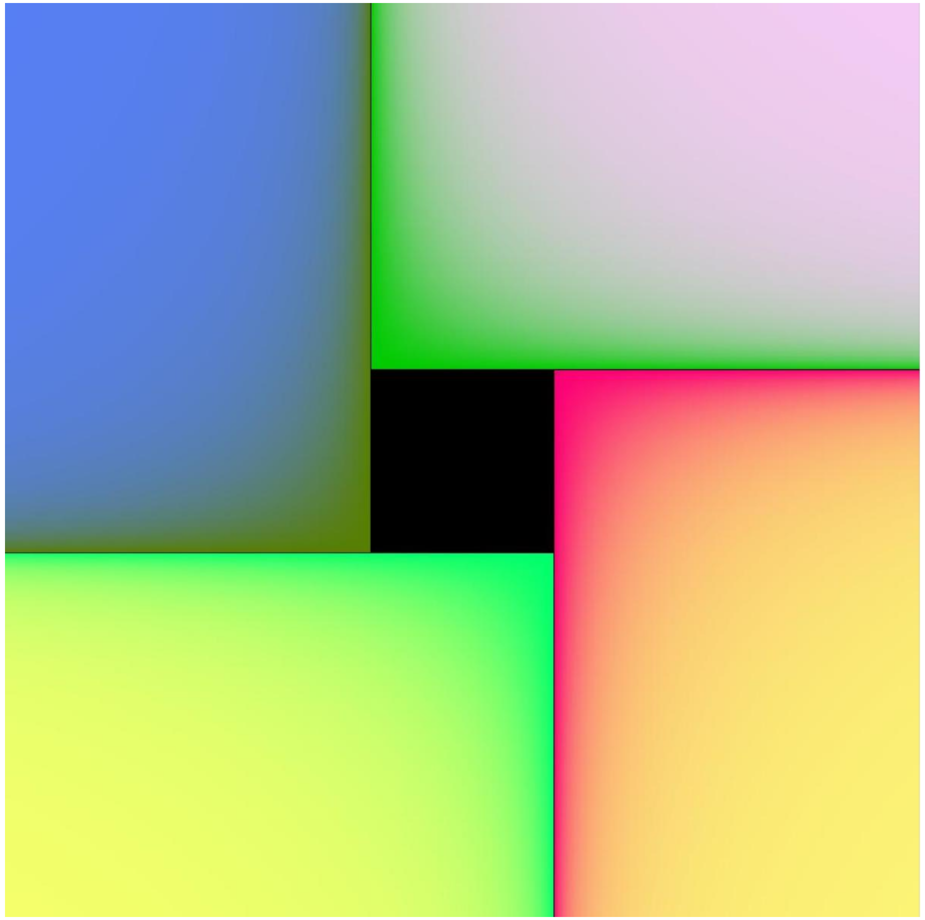
Внешний бильярд в многоугольнике

Дадим неформальное определение *внешнего бильярда* в выпуклом многоугольнике P. Пусть $x \in \mathbb{R}^2 \setminus P$. Посмотрим из точки x на многоугольник P и найдем самую правую вершину (если смотреть из x). Отразим точку x относительно этой вершины многоугольника P. Получим новую точку $y = f(x)$. На рисунке изображено отображение внешнего бильярда в зеленом квадрате. Стрелки идут от точек x к точкам $f(x)$.



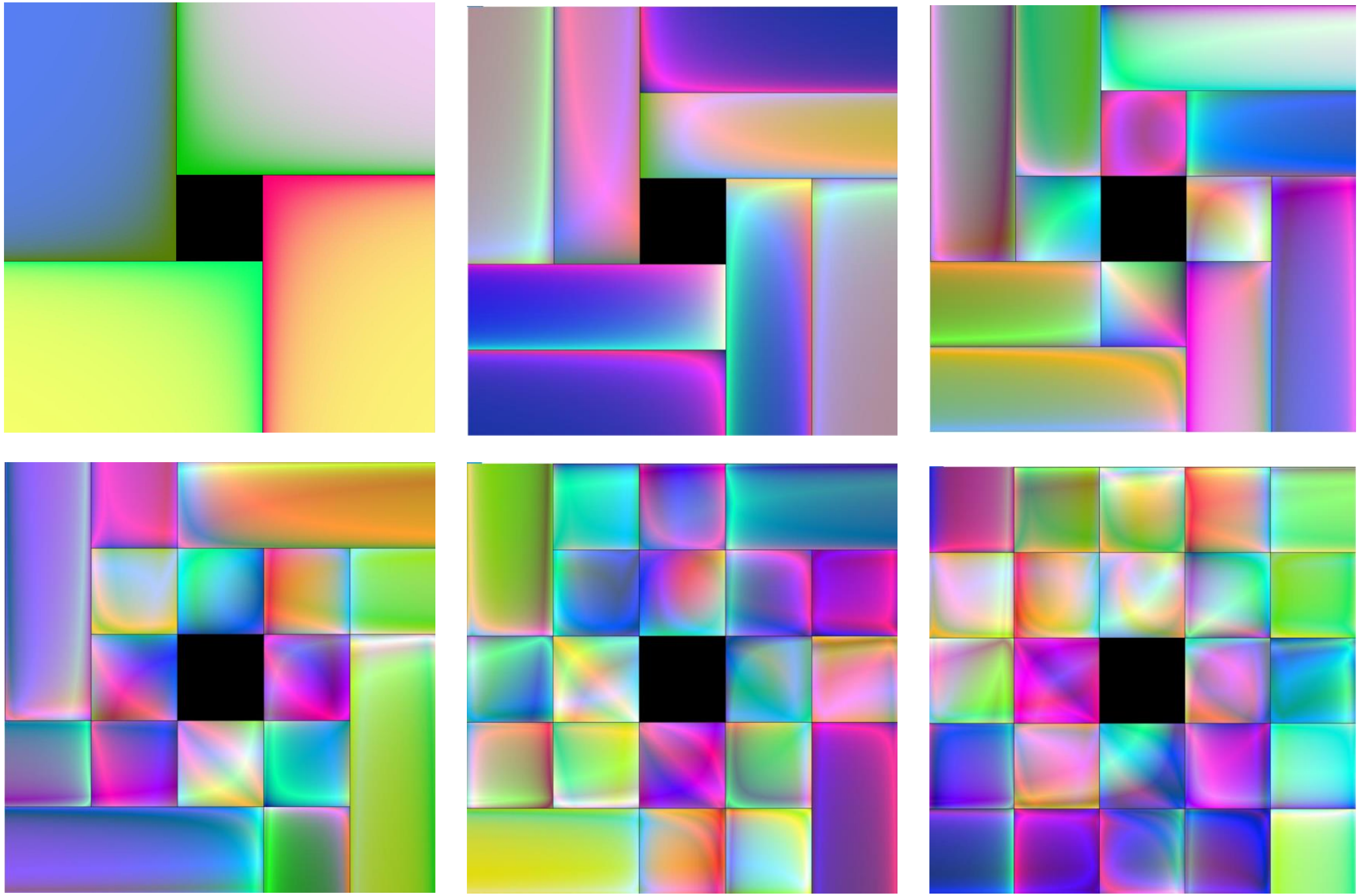
Внешний бильярд в (черном) квадрате

Соответствующее отображение f определено на всех точках плоскости, кроме самого квадрата и четырех лучей, являющихся границами областей, показанных на картинке. Каждая из четырех изображенных областей подвергается отражению относительно одной вершины квадрата. Внутри самого квадрата отображение f можно определить как тождественное.



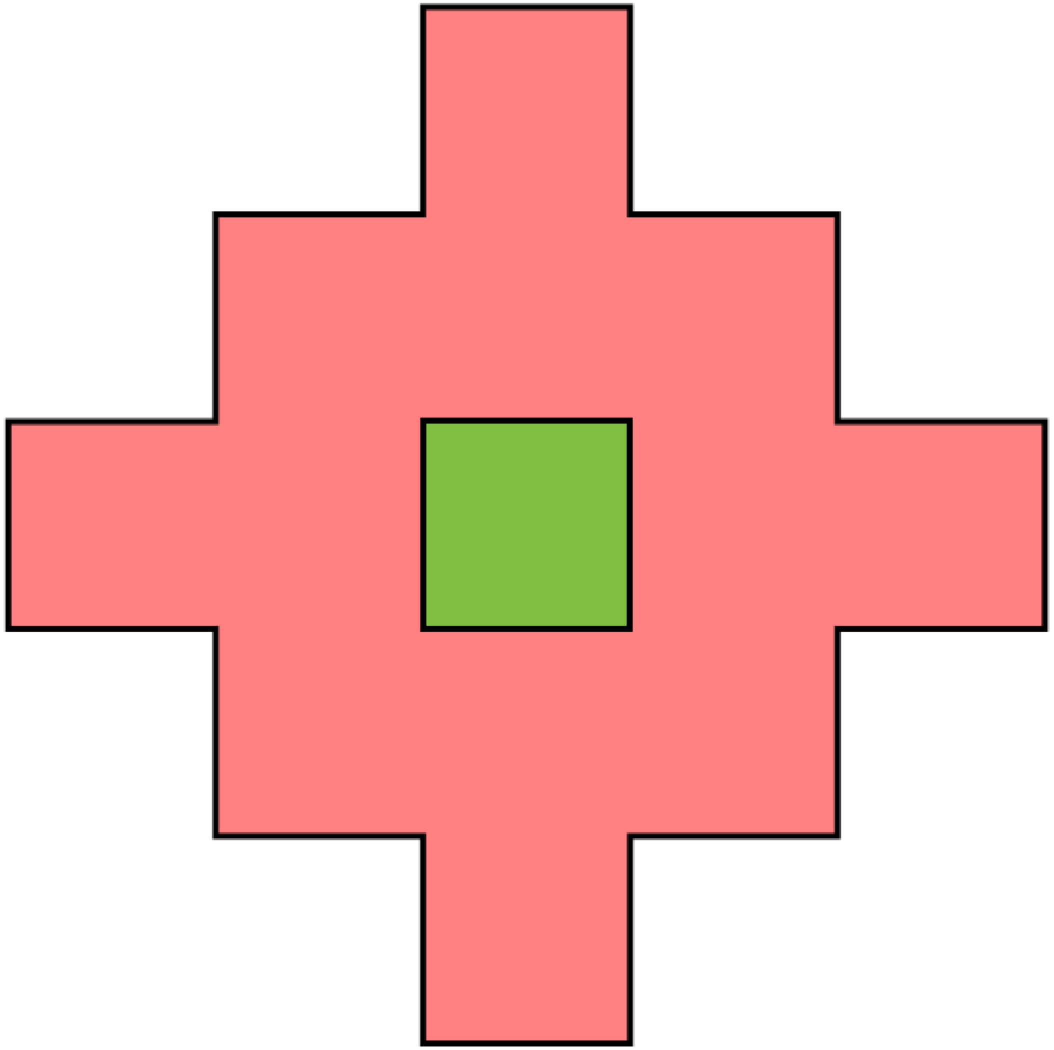
Внешний бильярд в квадрате

Приведенные изображения получаются «смешиванием» цветов. На картинке с порядковым номером n цвет точки x определяется как результат «смешивания» (по определенной процедуре) цветов точек $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$. Картинка может стать понятной после того, как вы разберетесь в геометрии множества всех граничных точек. А может быть и наоборот – картинка поможет вам разобраться.



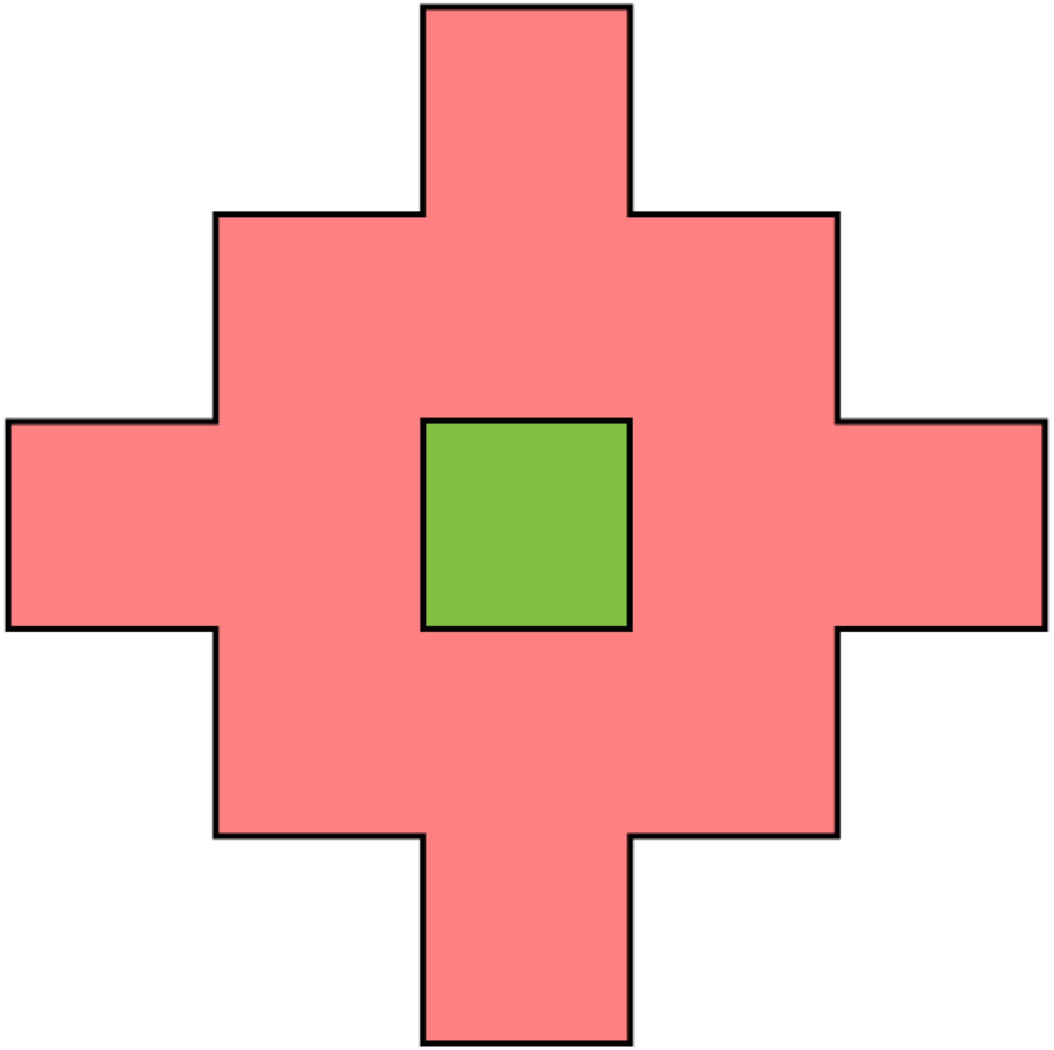
Внешний бильярд в квадрате

Рассмотрим поле X в виде красного многоугольника, в центре которого нарисован зеленый квадрат, как на картинке. Внешний бильярд в этом (зеленом) квадрате определяет кусочно-евклидову динамику $f: X \setminus B \to X$. Множество B – это объединение четырех лучей (как на предыдущем слайде), пересеченное с X.



Внешний бильярд в квадрате

Т8 (2 балла). На сколько кусков множество B делит поле, не считая зеленого квадрата в центре? Тот же вопрос для B_{2021}.



Периодические точки

Рассмотрим отображение $f\colon X \setminus B \to X$ (теперь X не обязательно многоугольник). Точка $x \in X$ называется *периодической периода* p, если эта точка не является граничной (то есть никакая итерация отображения f не отправляет точку x в B), выполнено равенство $f^p(x) = x$, и при этом p является наименьшим натуральным числом с таким свойством.

T9 (2 балла). Пусть f – отображение внешнего бильярда в квадрате $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x, y \leq 1\}$. Здесь $X = \mathbb{R}^2 \setminus P$. Найдите максимальный период точки $(x, y) \in X$, такой, что $|x| + |y| < 10$.

Периодические многоугольники

T10 (2 балла). Известно, что некоторый многоугольник Q вернулся на место при 2021-ой итерации внешнего бильярда в многоугольнике P, то есть $f^{2021}(Q) = Q$. (В частности, $Q \cap B_{2021} = \emptyset$). Какой максимальный период может иметь точка в многоугольнике Q?

В автоматическое тестирование входят задачи T1 – T10. Положительный результат автоматического тестирования – 21 балл или больше. Такой результат гарантирует дальнейшую проверку записанных упражнений.

Апериодические точки

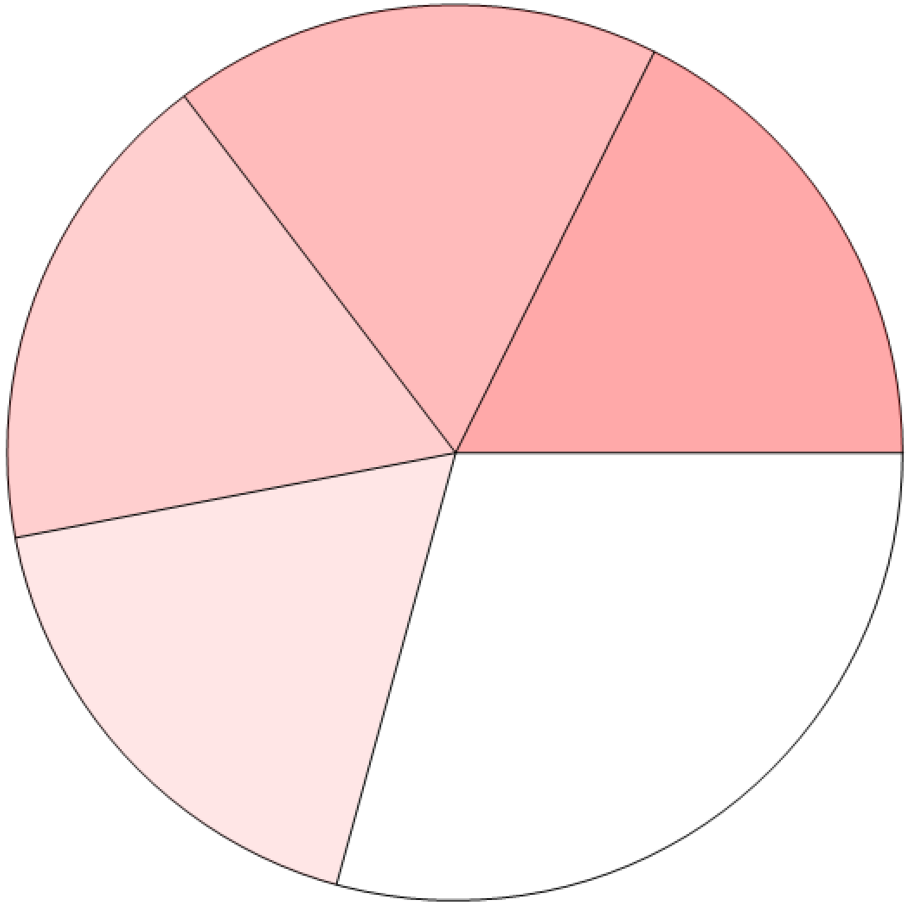
Рассмотрим кусочно-евклидову динамическую систему $f: X \setminus B \to X$. Точка $x \in X$ называется *апериодической*, если она не является ни граничной, ни периодической.

У1. Докажите, что у перекладывания 1 нет периодических точек, а у перекладывания 2 нет апериодических точек.

Буквой **У** отмечены упражнения, которые нужно снабдить записанными решениями. Впрочем, не обязательно решать все упражнения – достаточно выбрать из нескольких предлагаемых тем наиболее интересную вам, и решить упражнения на эту тему. В очной части проекта предусмотрено разделение на несколько «треков», в зависимости от интересов участников.

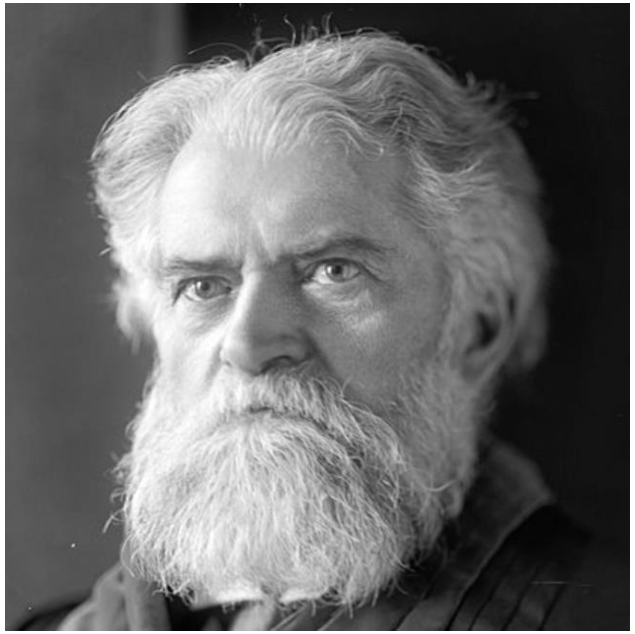
Вращение окружности на угол $2\pi\alpha$

… можно представить как отображение $f: [0,1) \to [0,1)$, заданное формулой $f(x) = \{x + \alpha\}$. Здесь $\{x\}$ – *дробная часть* числа $x \in \mathbb{R}$, то есть такое число из $[0,1)$, что $x - \{x\}$ целое.



У2. Докажите, что либо все точки из $[0,1)$ периодические, либо все апериодические для отображения f.

Закон Ньюкомба-Бенфорда*



Прочтите

http://kvant.mccme.ru/pdf/1998/01/kv0198arnold.pdf,

https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Бенфорда.

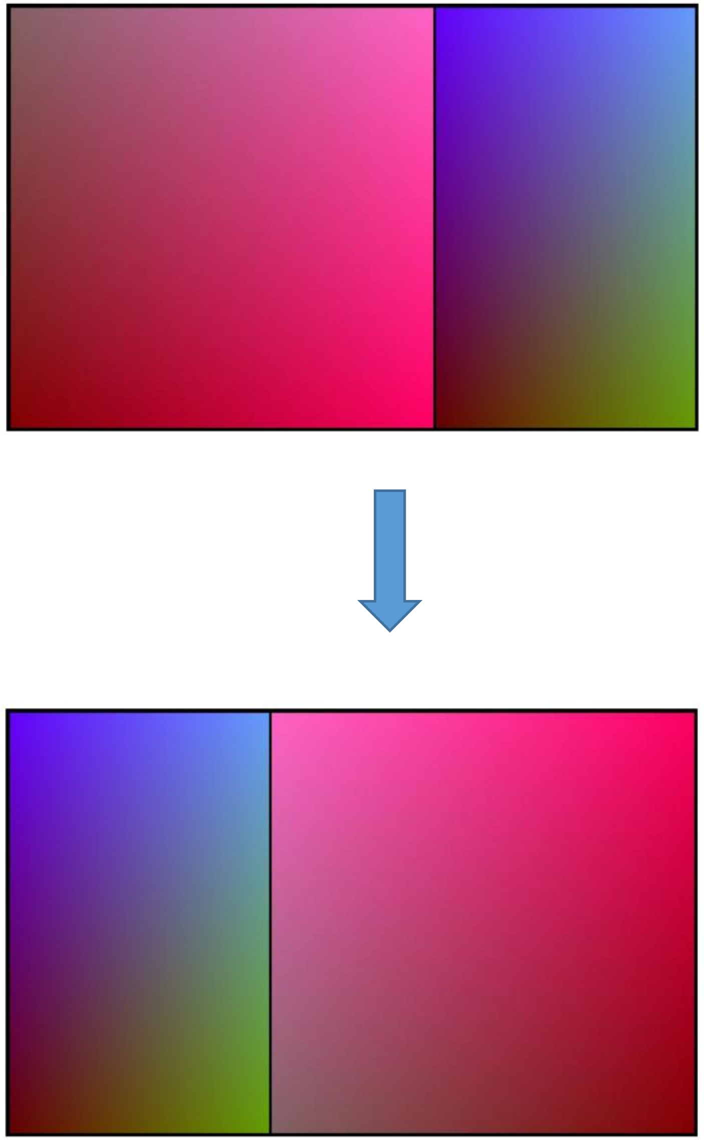
УЗ. Строго докажите закон Бенфорда для последовательности

$$10^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}.$$

*Этот сюжет является некоторым ответвлением, которым можно и не заниматься, если вам не очень интересно. Можно решать другие задачи, а эту пропустить. Читать указанные выше источники тоже не обязательно.

Перекладывание 3

Поле и куски – как в перекладывании 1, только лилово-розовый квадрат поворачивается на 90 градусов (против часовой стрелки).



У4. Напишите формулу для такого отображения f.

У5. Есть ли у этого отображения периодические точки? Каковы их периоды? А апериодические точки?

Орбиты, замыкания орбит

Орбитой $O_f(a)$ точки $a \in X$ при отображении $f: X \setminus B \to X$ называется последовательность

$$a_0 = a, a_1 = f(a), \dots, a_n = f^n(a), \dots$$

Если a не является граничной, то эта последовательность бесконечна.

Замыканием $\overline{O_f(a)}$ орбиты $O_f(a)$ называется множество точек $x \in X$, таких, что для любого $\epsilon > 0$ найдется точка орбиты a_n на расстоянии меньше ϵ от x.

Упражнения на замыкания

Вообще, *замыканием* множества A точек плоскости называется множество $\overline{A}$, состоящее из точек b со следующим свойством: для любого $\epsilon > 0$ найдется точка $a \in A$ на расстоянии меньше чем ϵ от b.

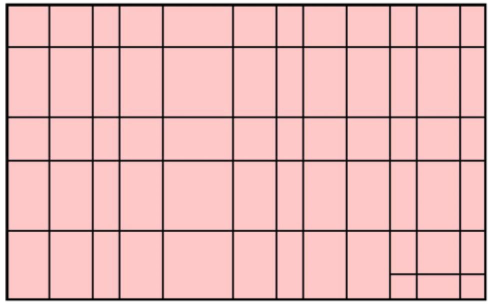
У6. Найдите замыкание множества всех точек плоскости, обе координаты которых (относительно заранее зафиксированной системы координат) – рациональные числа.

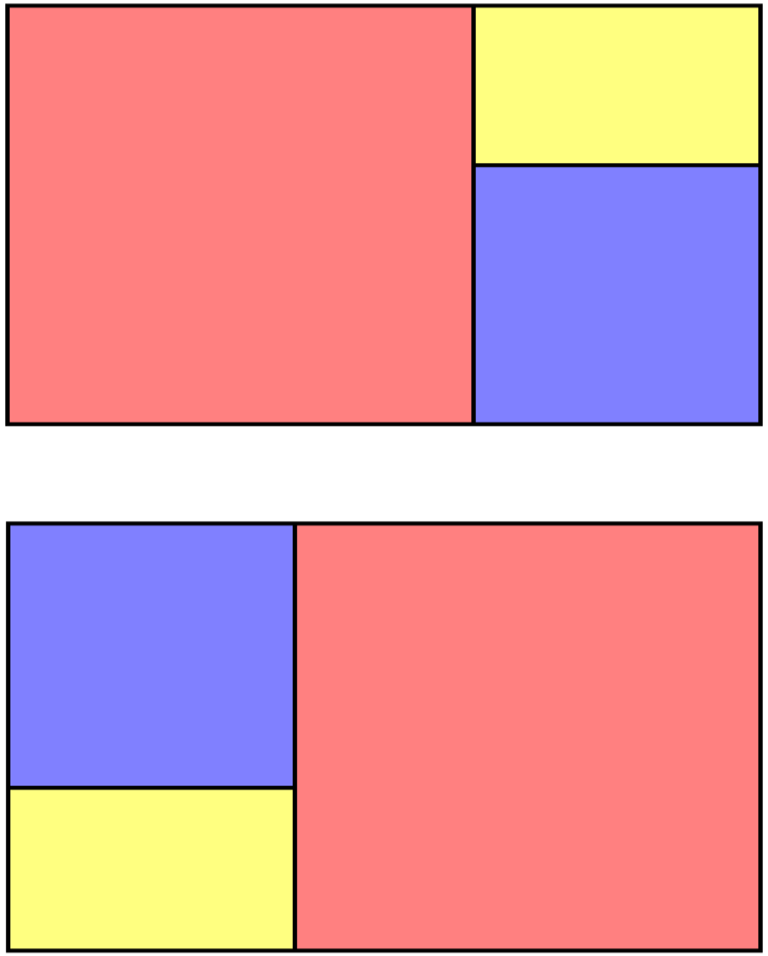
У7. Найдите замыкание множества всех точек, первая координата которых рациональна, а вторая – целая.

Упражнения на замыкания орбит

У8. Как выглядят замыкания орбит для перекладывания 1?

У9. Придумайте такое кусочно-евклидово перекладывание, при котором все поле является замыканием орбиты любой апериодической точки.





Внешние бильярды*

См. примечание на следующем слайде

- Прочитайте статью

Внешние бильярды

Ф. Догру, С. Л. Табачников

в сборнике

Л52 **Летние конференции Турнира городов**: Избранные материалы. Вып. 1 / Под общ. ред. Н. Н. Константинова. Сост. Б. Р. Френкин. — М.: МЦНМО, 2009. — 264 с.

ISBN 978-5-94057-466-8

У10. Докажите, что из любой точки вне выпуклой фигуры можно провести ровно две опорные прямые к этой фигуре.

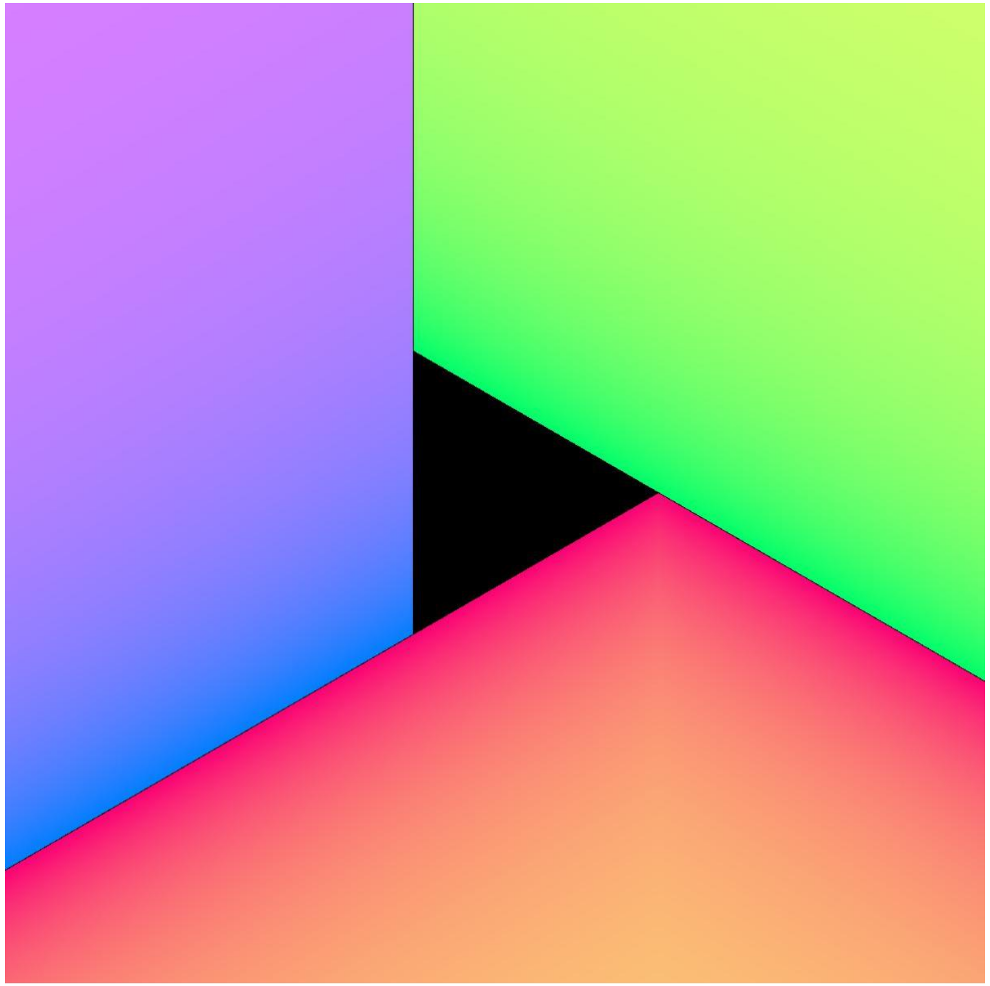
*Примечание к предыдущему слайду. На самом деле статья достаточно сложная, и читать ее на данном этапе не обязательно. Для решения задачи У10 нужно только знать определение опорной прямой. Вот оно. Прямая называется *опорной* для выпуклого множества, если эта прямая имеет хотя бы одну общую точку с выпуклым множеством, и при этом все выпуклое множество лежит в одной полуплоскости (говорят: «по одну сторону») относительно данной прямой. Имеется в виду *замкнутая полуплоскость*, то есть сама прямая включается в полуплоскость.

Внешний бильярд в треугольнике

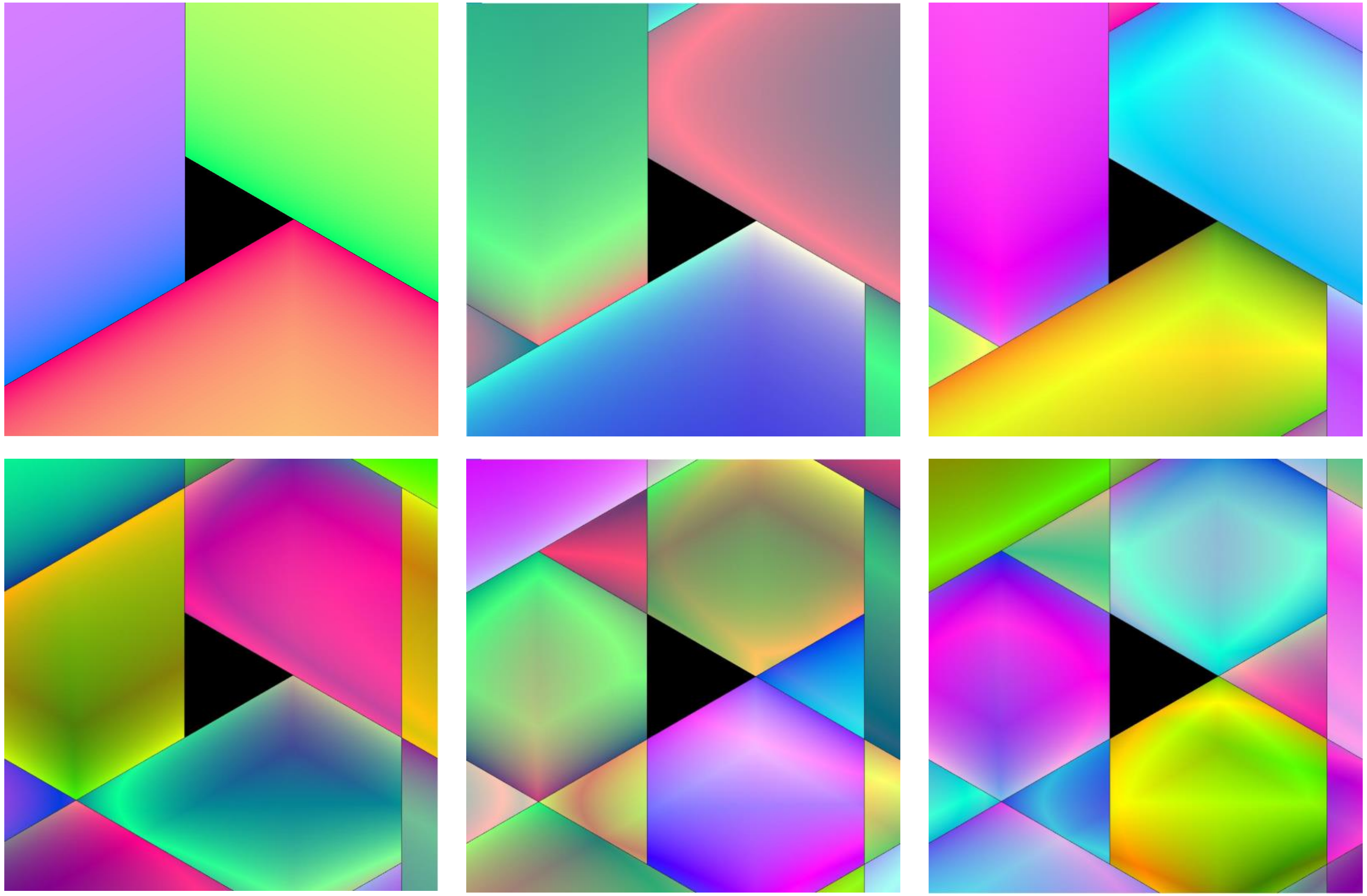
У11. Подберите конечный многоугольник, который может служить полем для внешнего бильярда в треугольнике.

У12. Опишите множества B, B_1, B_2.

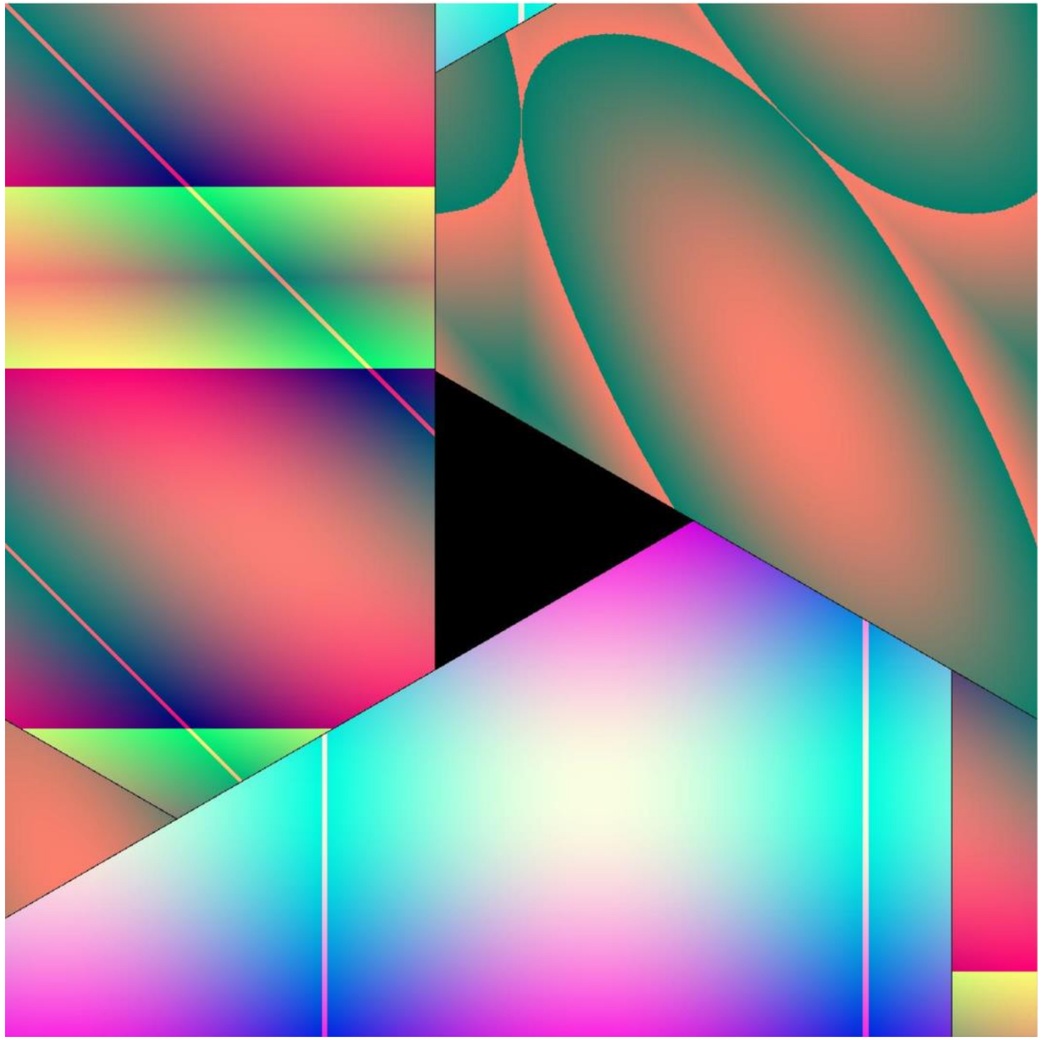
У13. Опишите множество всех граничных точек и множество всех периодических точек. Каковы периоды этих точек?

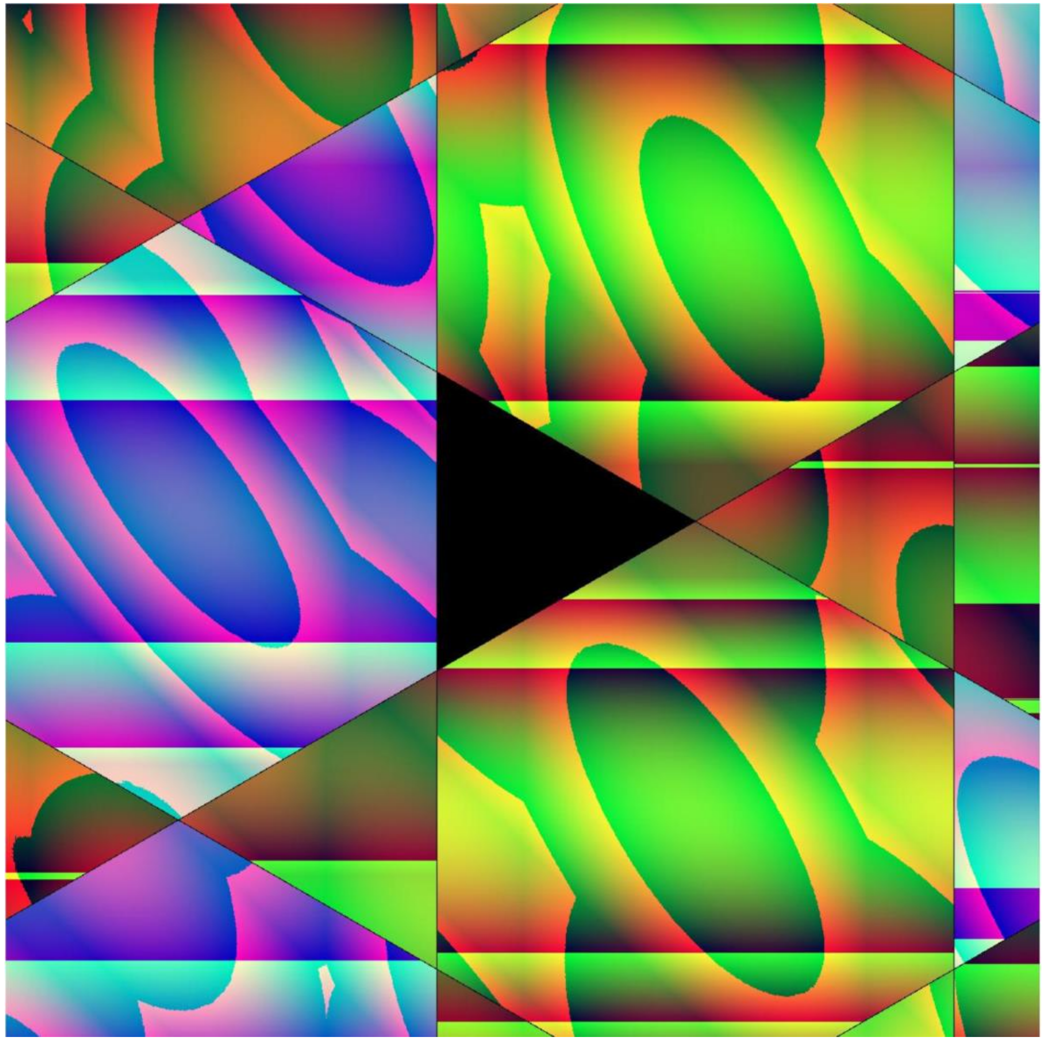


Итерации внешнего бильярда в треугольнике



«Черный треугольник» (просто картинки)





Что интересно...

Особый интерес для нас будут представлять такие кусочно-евклидовы перекладывания, которые допускают как периодические, так и апериодические точки, и в которых замыкания апериодических орбит имеют фрактальную форму.

Прочитайте https://ru.wikipedia.org/wiki/Фрактал.

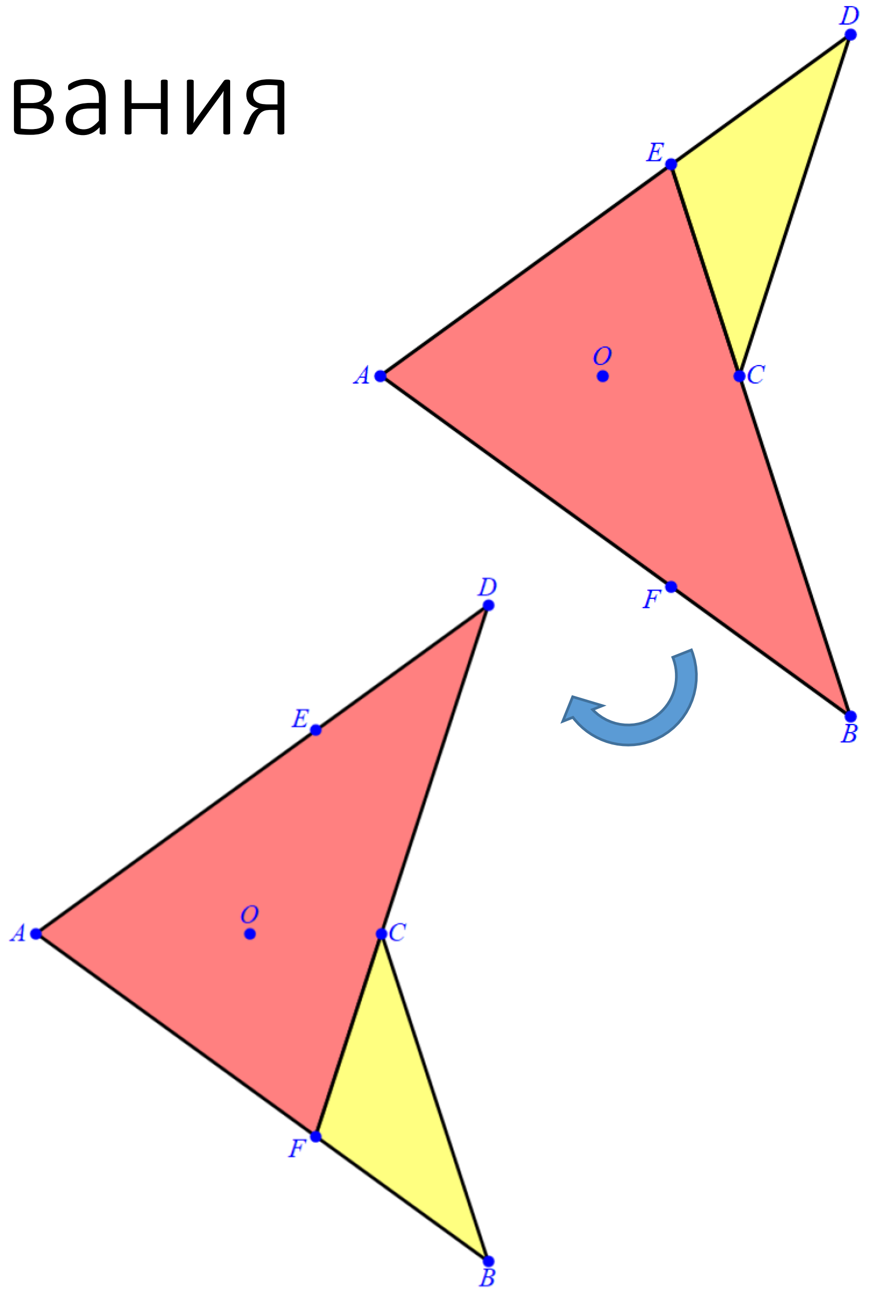
Пример такого перекладывания

У14. Дайте формальное описание примера, изображенного на картинке.*

*Начало такого описания приведено на следующем слайде.

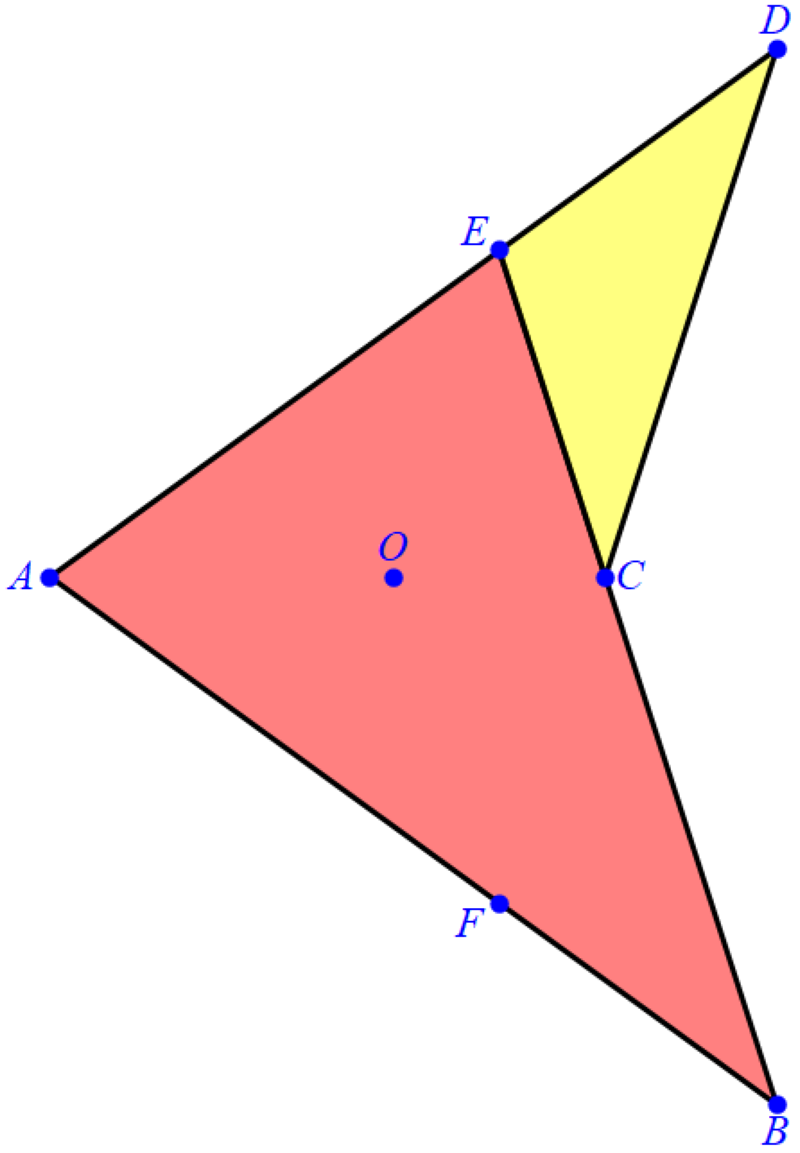
У15. Опишите периодические точки в этом примере и найдите их периоды.

У16. Множество апериодических точек самоподобно. В чем состоит это самоподобие?



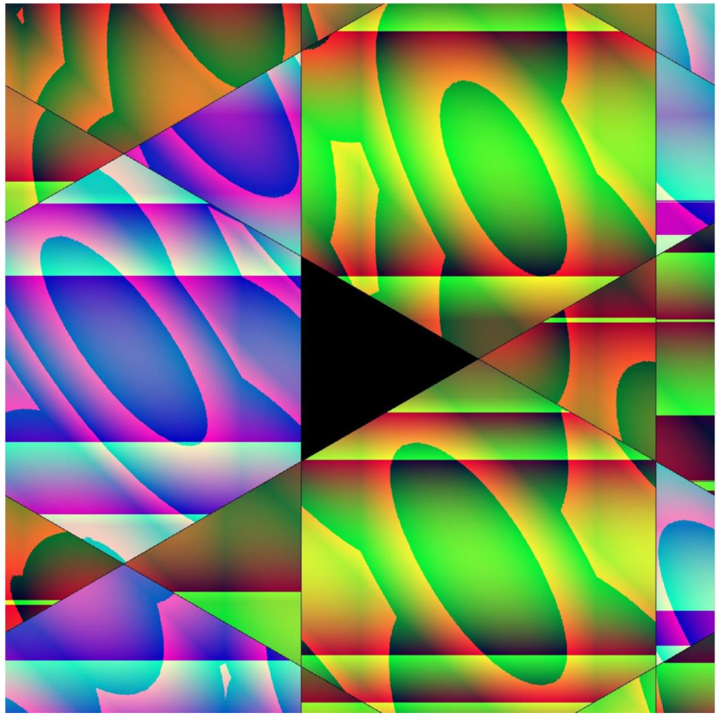
«Интересный» пример

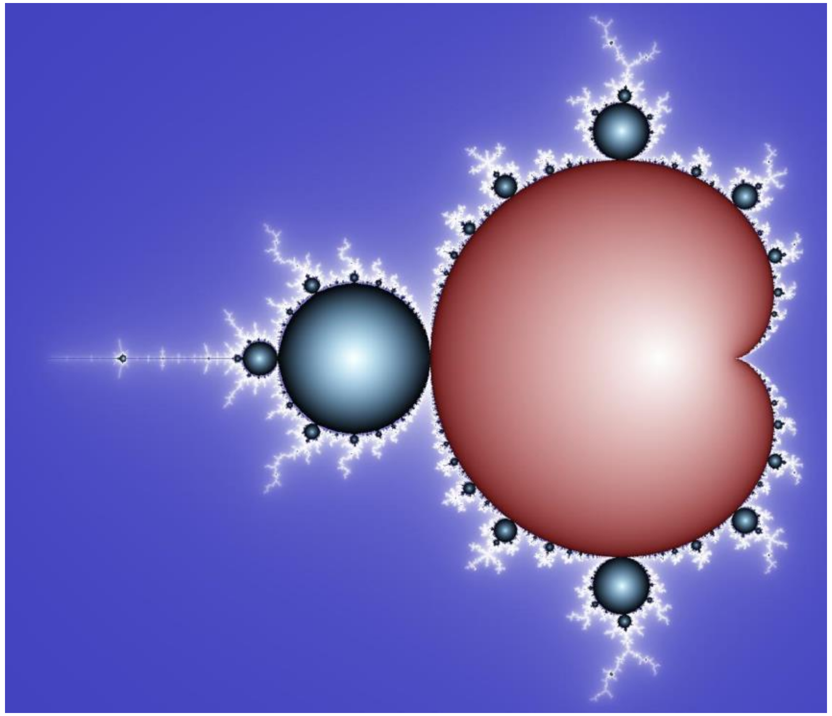
Отображение f переводит треугольник ABE в треугольник FDA вращением (так что вершины A, B, E при вращении переходят в вершины F, D, A, соответственно). Еще одно вращение переводит треугольник CED в треугольник BFC, с сохранением порядка вершин. Полем является невыпуклый четырехугольник $ABCD$. Чтобы f не выводило за пределы поля, треугольник ABE должен быть равнобедренным с основанием AE. Далее, для осуществимости описанного перекладывания f необходимо, чтобы треугольник CED тоже был равнобедренным. Найдите все углы и все стороны указанных треугольников, если известно, что отрезок CD имеет длину 1. Попробуйте записать отображение f формулой в координатах. При желании, попробуйте запрограммировать это отображение и получить картинки, аналогичные показанным выше для внешних бильярдов в квадрате и треугольнике.

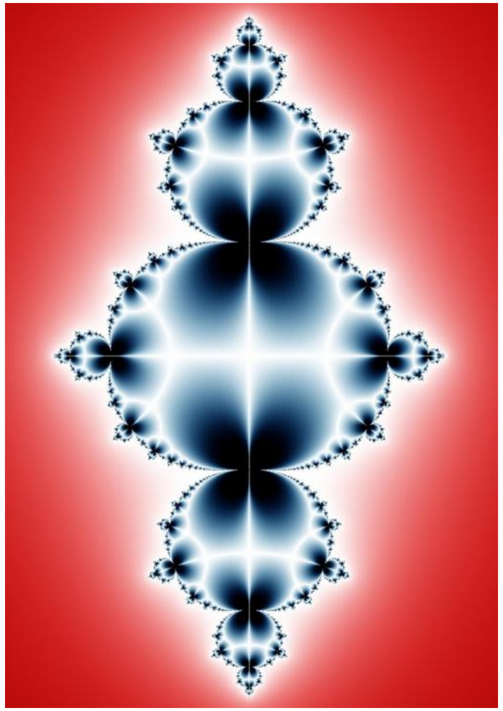


Компьютерные эксперименты …

… играют важную роль в рассматриваемой области. Они приводят к интересным гипотезам, некоторые из которых потом удается строго доказать без использования компьютера.







Преподаватели

- Полина Глебовна Барон
- Алексей Яковлевич Канель
- Мария Валентиновна Кубышкина
- Константин Анатольевич Нелаев
- Филипп Дмитриевич Рухович
- Александра Сергеевна Скрипченко
- Владлен Анатольевич Тиморин
- Александр Александрович Яковлев