

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА**

На правах рукописи

Шипило Даниил Евгеньевич

**ШИРОКОПОЛОСНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ
ИЗЛУЧЕНИЕ СХОДЯЩЕГОСЯ ПУЧКА
ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ФИЛАМЕНТОВ
В ВОЗДУХЕ**

Специальность
01.04.21 — «Лазерная физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре общей физики и волновых процессов физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Косарева Ольга Григорьевна

Официальные
оппоненты:

Фёдоров Михаил Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор,
Институт общей физики им. А. М. Прохорова
Российской академии наук, отдел мощных лазеров,
главный научный сотрудник

Козлов Сергей Аркадьевич,

доктор физико-математических наук, профессор,
Национальный исследовательский университет ИТМО,
ведущий профессор, декан факультета фотоники
и оптоинформатики

Лушников Павел Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор РАН,
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Российской академии наук, сектор нелинейных волн,
ведущий научный сотрудник

Защита состоится «17» июня 2021 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.01.13 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 62, корпус нелинейной оптики, ауд. имени С. А. Ахманова.

E-mail: diss.sov.31@physics.msu.ru

Диссертация находится на хранении в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27). С информацией о регистрации участия в защите и с диссертацией в электронном виде можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/365664027/>

Автореферат разослан « » 2021 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета

МГУ.01.13, кандидат физ.-мат. наук

Коновко Андрей Андреевич

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию нелинейно-оптических явлений, в том числе генерации третьей гармоники и терагерцового излучения, при фокусировке в воздух мощного фемтосекундного лазерного излучения с неунимодальным пространственным профилем пучка и фазовой модуляцией импульса. Работа выполнена методом теоретического анализа и численного моделирования в тесном сотрудничестве с российскими и зарубежными экспериментальными группами. Результаты представляют практический интерес для задач зондирования в ультрафиолетовом, видимом и терагерцовом диапазонах, доставки высокой интенсивности до исследуемого объекта, поджига электрического разряда в газах атмосферной плотности, управляемой модификации прозрачных диэлектриков.

Актуальность выбранной темы обусловлена появлением нового режима распространения мощного (свыше 10 критических мощностей самофокусировки) фемтосекундного лазерного излучения в газах и конденсированных средах [1—4]. В настоящее время явление, которое получило название «суперфиламентация» [4], является одной из наиболее обсуждаемых проблем фемтосекундной нелинейной оптики. При самофокусировке импульса, мощность которого сопоставима с критической мощностью самофокусировки, формируется одиночный филамент [5—7]. В воздухе интенсивность филамента насыщается на уровне около 60 ТВт/см^2 , а концентрация электронов — на уровне $\sim 10^{16} - 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Примечательной является устойчивость этих параметров: их изменение при слабой фокусировке не превышает нескольких процентов [2], а увеличение пиковой мощности фемтосекундного импульса на порядок и более ведет к распаду импульса на отдельные филаменты, мощность каждого из которых составляет 2–3 критических [8—10], а пиковые интенсивность и концентрация электронов приблизительно соответствуют характеристикам одиночного филамента. Теоретически предсказанное в работе [2] преодоление насыщения интенсивности и увеличение плотности плазмы на порядок при столкновении двух когерентных филаментов наблюдалось в эксперименте при столкновении нескольких десятков филаментов импульса тераваттной пиковой мощности [4] и было названо суперфиламентацией. Заметим, что сжатие выходного пучка титан-сапфирового лазера с пиковой мощностью около 1 ТВт с помощью телескопа также приводило к существенному увеличению плотности плазмы в канале многих филамен-

тов на стометровой трассе в воздухе [3]. Режим когерентного слияния многих филаментов позволяет существенно повысить как интенсивность оптического излучения, так и пиковую концентрацию электронов в плазменном канале, что определяет новые, необычные свойства данного режима самофокусировки излучения. Эти факторы приводят к существенному усилению нелинейно-оптических свойств плазменной среды. Одним из наиболее интересных следствий формирования суперфиламента является возможность эффективной генерации терагерцового излучения.

Генерация терагерцового излучения в плазме двучастотного оптического пробоя [11] важна для приложений вследствие широкого спектра электромагнитного импульса и отсутствия ограничений на энергию накачки [12–14]. Эта актуальная задача сейчас активно исследуется для двуцветного $(\omega + 2\omega)$ одиночного филамента [15–20]. В случае стохастической множественной филаментации тераваттного импульса (800 + 400 нм) в эксперименте удалось зарегистрировать интегральный выход терагерцового излучения [21; 22] в зависимости от длительности chirпированного импульса. При одноцветной филаментации было зарегистрировано изменение диаграммы направленности терагерцового излучения от задержки по времени между двумя филаментами, образующимися при регуляризации профиля начального пучка титан-сапфирового лазера [23]. Терагерцовое излучение массива одноцветных (800 нм) регуляризованных филаментов рассматривалось теоретически и численно в соответствии с интерференционной моделью, была показана малая угловая расходимость и определено оптимальное расстояние между плазменными каналами для регистрации максимальной энергии на частоте 1 ТГц в узком конусе в окрестности оси пучка [24].

На момент начала работы над диссертацией были опубликованы единичные статьи [2; 4] по теоретическому исследованию и численному моделированию слияния нескольких филаментов в условиях геометрической фокусировки фемтосекундного излучения. Для адекватного описания нелинейно-оптических эффектов при когерентном сложении филаментов необходимо использовать модель, описывающую пространственно-временное распределение излучения с учетом быстроосциллирующей несущей оптического поля [25; 26]. Было показано, что в случае жесткой фокусировки уравнения распространения с традиционными начальными условиями, заданными на входной плоскости, неверно описывают электромагнитное поле в окрестности геометрического фокуса, мак-

симальная интенсивность существенно отличается от полученной с помощью прямого интегрирования векторных уравнений Максвелла [A1]. В связи с этим автор диссертации приступил к разработке подходящих начальных условий, задаваемых на плоскости и применимых к описанию фокусировки фемтосекундного излучения высокоапертурными элементами с помощью уравнения распространения. Экспериментальное и численное исследование генерации терагерцового излучения при множественной, в том числе регуляризованной, филаментации двуцветного ($\omega + 2\omega$) фемтосекундного излучения являются пионерской задачей, актуальной для удаленного зондирования и медицинских приложений [27; 28]. На сегодняшний день известна одна публикация по самосогласованному решению уравнения распространения и генерации терагерцового излучения при множественной филаментации двуцветного фемтосекундного излучения в воздухе [29]. Можно заключить, что **степень разработанности** выбранной темы является достаточной, чтобы обеспечить развитую методологию и востребованность исследований, но оставляет открытыми ряд актуальных вопросов.

Цель и задачи

Цель диссертационной работы состоит в теоретическом анализе и численном моделировании слияния филаментов, генерации третьей гармоники и терагерцового излучения при жесткой фокусировке мощного фемтосекундного лазерного излучения с неунимодальным поперечным распределением светового поля в воздухе. Поставлены и решены следующие конкретные **задачи**:

1. Разработать теоретические подходы и численные алгоритмы для описания жесткой фокусировки лазерного излучения с помощью однонаправленного уравнения распространения.
2. Провести численное моделирование трансформации частотно-углового спектра и генерации самонаведенной плазмы при слиянии сходящихся филаментов на основе трехмерной в пространстве модели распространения мощного фемтосекундного импульса в воздухе с учетом оптической несущей поля.
3. Определить физический механизм, обуславливающий зависимость эффективности преобразования оптического излучения в терагерцовое от фазовой модуляции двучастотного (800 + 400 нм) фемтосекундного импульса накачки в условиях лабораторного эксперимента.

4. Разработать численный алгоритм и пакет программ для моделирования самосогласованной генерации и распространения терагерцового импульса при двуцветной множественной филаментации фемтосекундного излучения титан-сапфирового лазера в воздухе.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования в диссертационной работе являются сфокусированное фемтосекундное лазерное и импульсное широкополосное электромагнитное излучение. **Предметом исследования** являются методы моделирования жесткой фокусировки фемтосекундного лазерного излучения в газовые среды и физические механизмы генерации широкополосного электромагнитного излучения в лазерной плазме фокальной перетяжки.

Методология диссертационного исследования

Диссертационная работа выполнена в основном методом численного решения уравнений распространения для электромагнитного поля. Нелинейность воздушной среды описана феноменологически: электронный отклик — мгновенной кубичной нелинейностью, возбуждение вращательных уровней — инерционной кубичной нелинейностью, ионизация вычислялась по формуле Переломова-Попова-Терентьева либо в туннельном приближении, движение освободившихся в результате ионизации электронов описывалось моделью нестационарного фототока. Для численного моделирования высокоапертурной фокусировки использовано уравнение однонаправленного распространения для вектора Герца, описывающее как поперечные, так и продольную компоненты электрического поля. Для численного моделирования генерации терагерцового излучения применялось уравнение однонаправленного распространения, учитывающее непараксиальные эффекты. Моделирование слияния регуляризованного пучка филаментов проводилось с помощью параксиального однонаправленного уравнения Максвелла.

Научная новизна

1. Впервые на основе сравнения решения уравнений Максвелла в виде векторных дифракционных интегралов и решения уравнения однонаправленного распространения импульса установлено максимальное значение числовой

апертуры, при котором применима модель фокусирующей оптики в виде тонкого транспаранта, задающего параболическую пространственную фазу. Для числовой апертуры выше установленной впервые получено геометрикооптическое преобразование электромагнитного поля, заданного на поверхности высокоапертурного фокусирующего элемента, в поле на плоскости, касающейся элемента, что позволяет описать жесткую фокусировку лазерного излучения интегрированием однонаправленного уравнения распространения.

2. Впервые методом численного моделирования с учетом быстроосциллирующей несущей оптического поля показано, что при слиянии многих филаментов образуется устойчивый максимум излучения, распространяющийся вдоль оси пучка на расстояние, превышающее двойное фокусное расстояние линзы. Полученный в дальней зоне максимум излучения соответствует экспериментальным данным и является практическим критерием наблюдения явления преодоления насыщения интенсивности в сходящемся пучке фемтосекундных филаментов в воздухе.
3. Впервые методом численного моделирования в условиях эксперимента (ФИАН им. П. Н. Лебедева) по регуляризации излучения амплитудной маской показано десятикратное увеличение сигнала третьей гармоники титан-сапфирового лазера при слиянии пучков по сравнению с одиночным пучком, если пиковая мощность излучения после маски составляет около половины критической мощности самофокусировки в воздухе.
4. Впервые методом численного моделирования получено объяснение ряда экспериментов [21],[A3] по достижению максимальной эффективности преобразования двуцветного фемтосекундного излучения в терагерцовое в плазменном канале филамента в воздухе. Показано, что максимум эффективности преобразования в терагерцовое излучение достигается при положительной начальной фазовой модуляции импульса накачки и второй гармоники благодаря наилучшему перекрытию оптических импульсов во времени.
5. Впервые на основе созданных автором модели и численного алгоритма генерации терагерцового излучения при неунимодальном пространственном профиле двуцветного фемтосекундного излучения накачки показано, что плазменные каналы филаментов, полученные с использованием четырёхсекционной фазовой маски, образуют волновод для генерируемого ими терагерцового

излучения, длина которого в условиях эксперимента [Аб] при числовой апертуре 0.03 составляет около 4 мм.

Теоретическая и практическая значимость

В ходе выполнения работы значительно развиты существующие и разработаны новые подходы к моделированию задач нелинейной фемтосекундной оптики газовых сред. Разработана методика расчета нелинейных задач в условиях жесткой фокусировки с помощью численного интегрирования непараксиальных уравнений распространения. Найдены аналитические выражения для предела применимости традиционного подхода к описанию фокусировки параболическим фазовым экраном. В настоящее время полученные выражения уже активно применяются исследователями в области, см. например [30; 31]. Результаты, связанные с преодолением интенсивности насыщения при фемтосекундной филаментации и суперфиламентации, могут использоваться в задачах удаленного экологического мониторинга, доставке интенсивного излучения на атмосферных трассах и т.д. Результаты исследований влияния фазовой модуляции импульса на выход терагерцового излучения уже нашли применение для оптимизации энергии терагерцовых импульсов двуцветной лазерной плазмы, см. например [32]. Результаты исследований генерации терагерцового излучения фемтосекундным излучением с неунимодальным пространственным профилем могут найти применение для управления диаграммой направленности и спектром терагерцового излучения двуцветного филамента в газовой среде.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Амплитудно-фазовое геометрооптическое преобразование электромагнитного поля позволяет построить начальные условия для описания высокоапертурной фокусировки непараксиальными уравнениями однонаправленного распространения. Поперечные и продольная компоненты поля, полученные численно с построенными начальными условиями, совпадают с точным решением уравнений Максвелла в форме векторных дифракционных интегралов для числовой апертуры $NA \leq 0.64$.
2. В условиях слияния филаментов, полученных при регуляризации пучка фемтосекундного излучения амплитудной маской, происходит преодоление насыщения интенсивности и увеличение плотности плазмы по сравнению с

одиноким филаментом. Если мощность излучения после маски составляет около половины критической мощности самофокусировки в воздухе, энергия третьей гармоники на порядок превышает таковую для одиночного пучка той же мощности.

3. В плазме филамента в воздухе максимальная эффективность преобразования двуцветного фемтосекундного оптического излучения в терагерцовое достигается при положительной начальной фазовой модуляции импульса накачки и второй гармоники, что обусловлено наибольшим временным перекрытием импульсов оптических гармоник.
4. Оптическое и терагерцовое излучение при филаментации в газах может быть представлено в численном моделировании на перекрывающихся расчетных областях разного размера, при этом нелинейный отклик среды определяется широкополосным континуумом электромагнитного поля от гигагерцового до ультрафиолетового диапазона.
5. Плазменные каналы двухчастотных филаментов, полученные с использованием четырёхсекционной фазовой маски, образуют волновод для генерируемого ими терагерцового излучения, длина которого при числовой апертуре 0.03 составляет примерно 4 мм.

Личный вклад

Все изложенные в диссертации результаты получены автором лично или при его определяющем участии. Автором разработаны программные коды, проведено моделирование и обработаны результаты моделирования. Теоретические результаты сравнивались с экспериментальными, полученными в Физическом институте имени П. Н. Лебедева РАН группой проф. А. А. Ионина: Л. В. Селезневым, Д. В. Мокроусовой, Е. С. Сунчугашевой и Г. Е. Ризаевым (разделы 3.1, 3.3 и 3.4), в Institute of Modern Optics, Nankai University (Тяньджин, Китай) группой проф. Weiwei Liu (параграф 3.5) и в Shanghai Jiao Tong University (Шанхай, Китай) группой проф. Yanping Chen (раздел 4.1). Обсуждение результатов и подготовка публикаций проводилась совместно с соавторами.

Достоверность результатов

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается использованием современных теоретических моделей распространения лазерного излучения, сопоставлением результатов расчетов, полученных с помощью различных моделей, сравнением полученных результатов с экспериментальными.

Апробация работы

Основные результаты, отраженные в диссертации, были представлены в докладах на международных конференциях: «Фундаментальные проблемы оптики» (2019, Санкт-Петербург, Россия); Laser Physics Workshop (LPHYS'19, Кёнджу, Республика Корея; LPHYS'18, Ноттингем, Великобритания; LPHYS'17, Казань, Россия); UltrafastLight-2018 (Москва, Россия); International Conference on Laser Filamentation (COFIL-2018, Женева, Швейцария); SPIE Optics and Optoelectronics (2017, Прага, Чехия); International Conference on Coherent and Nonlinear Optics (ICONO/LAT 2016, Минск, Беларусь). Список докладов приведен в конце автореферата перед списком литературы.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 17 работах, в том числе 7 статьях в рецензируемых научных изданиях, удовлетворяющих Положению о присуждении учёных степеней в МГУ имени М.В. Ломоносова, 1 свидетельстве о регистрации программы для ЭВМ и 9 тезисах конференций. Список работ автора приведен в конце автореферата перед списком литературы.

Структура и объем диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав текста, результатов и выводов диссертационной работы, списка цитируемой литературы. Объем работы составляет 125 страниц с 44 рисунками и 2 таблицами. Список литературы содержит 161 наименование.

Содержание работы

Введение

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы, представлены данные об апробации результатов.

Глава 1. Современное состояние исследований по проблеме генерации вторичного излучения из плазменного канала фемтосекундного импульса в газах

Первая глава посвящена обзору современного состояния исследований нелинейной трансформации частотно-углового спектра фемтосекундного лазерного излучения при его фокусировке в воздух и другие газы. Рассмотрены режимы филаментации коллимированного излучения, интенсивность насыщения при котором достигается вследствие динамического баланса между самофокусировкой в среде с кубичной нелинейностью и самодефокусировкой самонаведенной лазерной плазмы, и суперфиламентации, когда интенсивность насыщения преодолевается при слиянии нескольких филаментов. Представлено описание особенностей филаментации импульсов с центральной длиной волны, лежащей в среднем инфракрасном и ультрафиолетовом диапазонах. Проведен анализ генерации суперконтинуума — когерентного вторичного излучения филамента со спектром, простирающимся от ультрафиолетового диапазона до дальнего инфракрасного. Особое внимание уделено вопросам генерации терагерцового (ТГц) излучения и третьей гармоники при оптическом пробое газов. Рассмотрен массив экспериментальных данных по высокоапертурной фокусировке фемтосекундного лазерного излучения в воздух, в том числе с точки зрения ТГц эмиссии в этих условиях.

Глава 2. Теоретический анализ и методика численного моделирования фокусировки ультракороткого излучения высокой пиковой мощности в диспергирующие среды

Вторая глава посвящена методам численного описания распространения мощного фемтосекундного излучения в воздухе. Особое внимание уделяется его

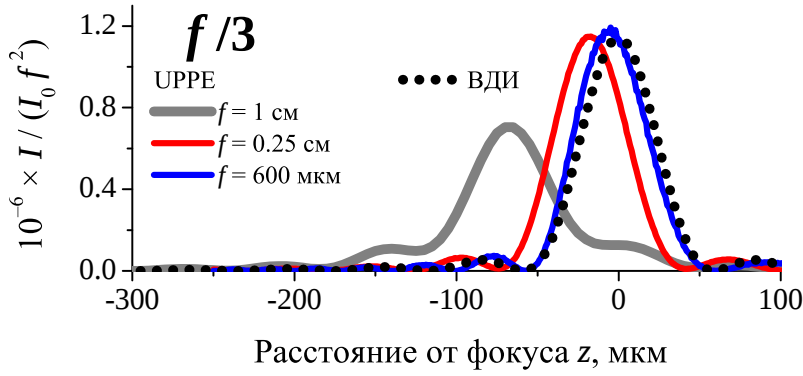


Рис. 1 — Проверка формулы для критического параметра фокусировки при $f/3$ ($NA = 0.17$).

жесткой фокусировке. Представлено описание известных из литературы однонаправленных уравнений распространения, которые редуцируют волновые уравнения к эволюционным уравнениям и содержат только первую производную по координате распространения z . Построена модель материального отклика среды. Основой его описания является феноменологическое разделение макроскопического отклика на поляризационный, соответствующий отклику связанных электронов, и фототоковый, соответствующий движению электронов, оторванных от атома в результате ионизации, в лазерном поле. Уравнения распространения с нелинейным откликом среды являются базовой моделью для численных расчетов, проведенных в диссертации.

В третьей части главы исследована применимость уравнений распространения к проблеме жесткой фокусировки. Проведено сравнение решений задачи фокусировки в линейном случае, полученных с помощью двух методов: (1) путем интегрирования непараксиальных векторных уравнений распространения и (2) вычисления векторных дифракционных интегралов (ВДИ). Предполагалась фокусировка параболическим зеркалом с числовой апертурой вплоть до 0.5. Как уравнения распространения, так и ВДИ являются следствием уравнений Максвелла, однако полученные решения при жесткой фокусировке не совпадали друг с другом. Это объясняется тем, что при жесткой фокусировке фокусирующий элемент принципиально неплоский, в то время как уравнения распространения построены на эволюции поля, определенного в плоскости (x, y) , вдоль продольной координаты z . Таким образом, начальные условия в уравнении распространения должны задаваться на начальной плоскости. Фокусировка в этом случае описывается с помощью параболического фазового набег $\varphi = kr^2/2f$, где k — волновое число, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — поперечная координата, f — фокусное расстояние. В случае же фокусирующего элемента конечной толщины такая про-

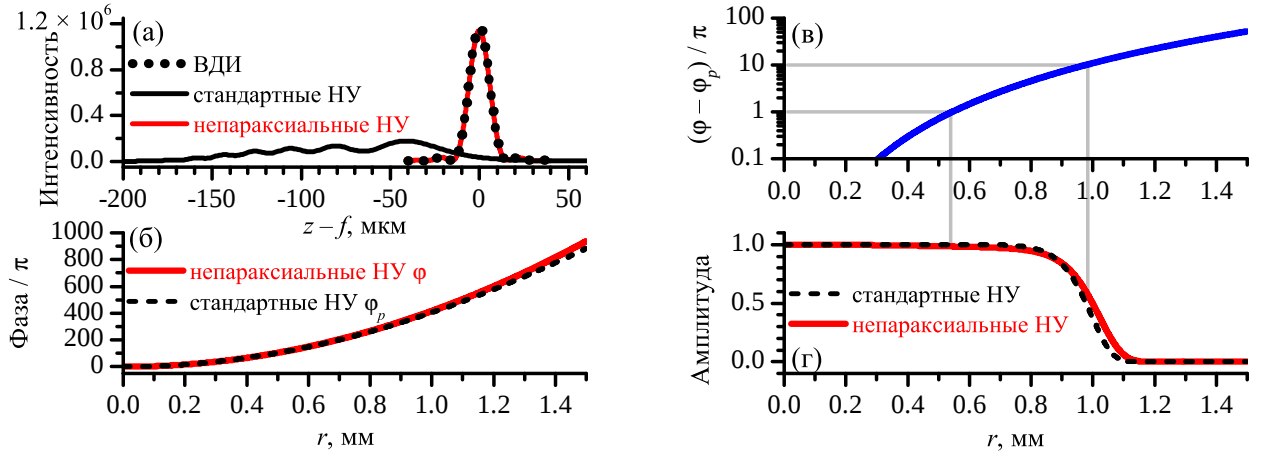


Рис. 2 — Фокусировка параболическим зеркалом $f = 3 \text{ мм}$ ($f/1.5$, $\text{NA} = 0.33$). (а) Зависимость $|E_x|^2(x = y = 0, z)$, рассчитанная со стандартными (черная кривая) и непараксиальными (красная кривая) начальными условиями, а также с помощью ВДИ (черные точки). (б) Фаза и (г) амплитуда стандартных (черный пунктир) и непараксиальных (красная кривая) начальных условий. Рисунок (в) показывает разницу между фазами (б).

цедура становится некорректной. На основе серии расчетов (рис. 1) определено критическое значение числовой апертуры $\text{NA}_{\text{crit}} \approx 1.6\sqrt[4]{\lambda/f}$. При фокусировке с большей числовой апертурой плоский фазовый транспарант перестает быть адекватной моделью фокусирующего элемента. Показано, что данное ограничение не связано с векторными эффектами.

Дальнейшее описание посвящено построению амплитудно-фазового преобразования электрического поля, которое позволяет получать корректные начальные условия для моделирования высокоапертурной фокусировки с помощью уравнений распространения. Идея заключается в том, чтобы подобрать такое распределение поля в плоскости $z = 0$, которое при распространении совпало бы с распределением поля на искривленной поверхности фокусирующего элемента $z_s(r)$. Поскольку «зазор» между плоскостью и поверхностью элемента характеризуется достаточно большим числом Френеля, амплитудно-фазовое преобразование было получено в предположении, что распространение по этому «зазору» описывается геометрической оптикой. Луч, падающий на оптический элемент параллельно оси z и имеющий координату r , после отражения распространяется под углом $2\alpha(r)$ к оси, где $\tan(\alpha) = dz_s/dr$. Угол α нельзя считать

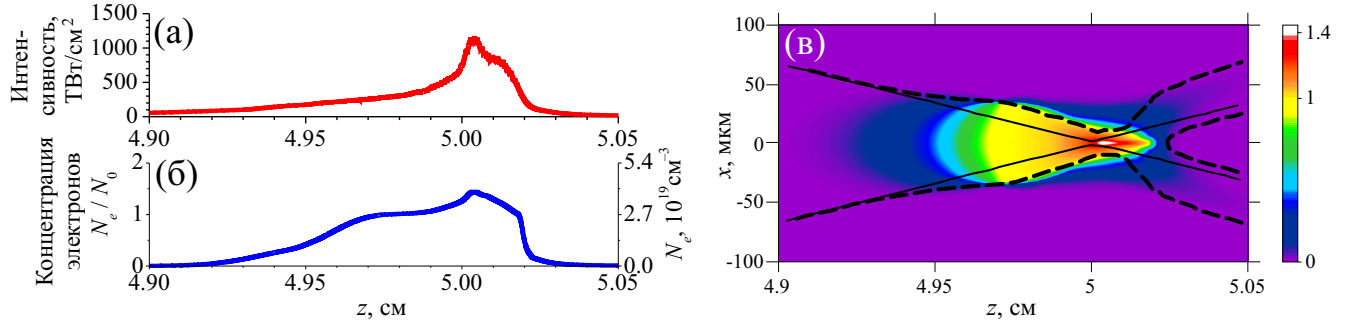


Рис. 3 — Зависимость от расстояния распространения (а) пиковой интенсивности и (б) пиковой концентрации электронов при фокусировке на $f = 5$ см. (в) Продольный разрез плазменного канала. Черная сплошная кривая обозначает ширину пучка по половине высоты при линейной фокусировке в вакуум, пунктирная — при фокусировке в воздух атмосферной плотности.

малым, поэтому продолжение луча пересечет плоскость $z = 0$ в координате

$$R(r) = r + z_s(r) \tan 2\alpha(r).$$

Поскольку векторное поле не является осесимметричным, введем декартовы координаты $X/x = Y/y = R/r$ и будем искать поле в плоскости $z = 0$ в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}_e(\omega, X, Y, z = 0) = \tilde{\mathbf{E}}_r(\omega, x, y, z_s) \Upsilon(r, R) e^{i\varphi(\omega, r)}.$$

Уравнения для амплитуды и эйконала оптического поля позволяют найти соответствующие выражения для фазы и амплитуды

$$\varphi(\omega, r) = k(\omega) \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha(r)} \right) z_s(r), \quad \Upsilon(r, R) = \sqrt{\frac{r \, dr}{R \, dR} \frac{1}{\cos 2\alpha}}.$$

Показано, что такая корректировка начальных условий позволяет согласовать решения уравнений распространения с ВДИ (см. рис. 2). Верификация проведена для различных отражающих поверхностей: параболического и конического зеркал, а также для поверхности $z_s \propto r^{1.1}$.

Затем рассмотрена проблема вычислительных ресурсов для моделирования нелинейных задач в условиях эксперимента. Уравнения распространения в $(t, x, y) + z$ геометрии требуют больших объёмов оперативной памяти и затрат машинного времени. Особенно остро данная проблема стоит для непараксиальных уравнений распространения, которые требуют равномерных расчетных

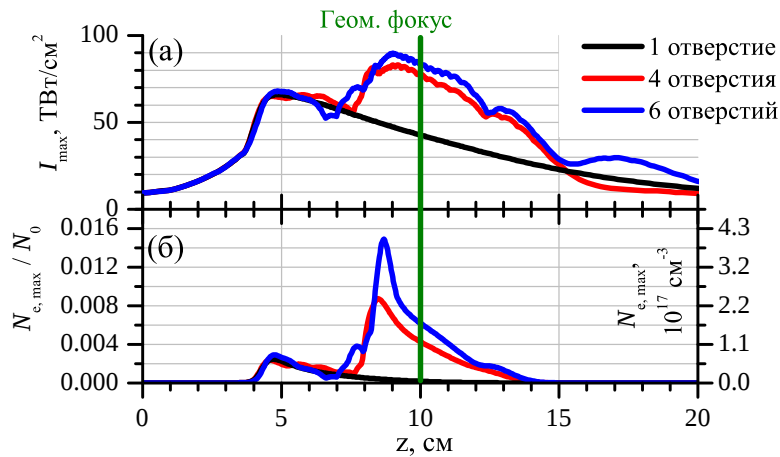


Рис. 4 — Зависимость (а) пиковой интенсивности излучения и (б) пиковой концентрации плазмы от расстояния z для различных конфигураций лазерного пучка.

сеток для выполнения быстрого преобразования Фурье. Однако при жесткой фокусировке влияние самофокусировки невелико, поэтому решение уравнений распространения можно существенно оптимизировать: большую часть пути от фокусирующего элемента к фокусу распространение можно считать линейным. Тогда распространение излучения от фокусирующего элемента $z = 0$ до некоторой промежуточной плоскости $z = z_0 < f$ можно описывать очень эффективно по памяти и времени вычислений. В качестве количественных критериев выбраны малость B -интеграла при распространении от 0 до z_0 и низкая плотность плазмы на расстоянии z_0 . Оба критерия могут быть оценены аналитически. На рис. 3 приведены результаты тестового расчета фокусировки ($f = 5$ см) фемтосекундного излучения с пучком сантиметрового диаметра в воздух.

Глава 3. Управление плазменными каналами и спектральным континуумом при регуляризованной суперфиламентации фемтосекундного излучения

В третьей главе представлены результаты исследований регуляризованной суперфиламентации при фокусировке фемтосекундного лазерного излучения, т.е. слияния нескольких филаментов, сформировавшихся после амплитудной маски с несколькими отверстиями, в окрестности геометрического фокуса линзы. Рассмотрены маски с числом отверстий от двух до шести. Установлено, что при слиянии филаментов в воздухе происходит преодоление интенсивности насыщения (рис. 4). Так, слияние шести филаментов, каждый из которых сформировался в пучке с мощностью около двух критических мощностей самофокусировки, обеспечивает рост максимальной интенсивности в 1.35 раза по сравнению со случаем одного филамента (с 65 до 89 ТВт/см²). Такое увеличение

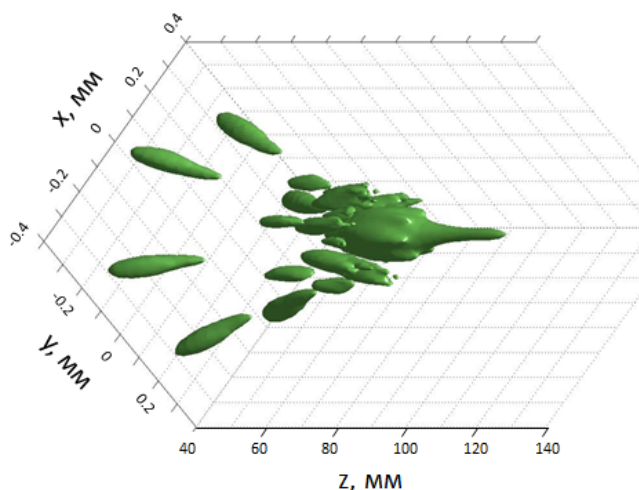


Рис. 5 — Плазменные каналы при слиянии шести филаментов. Поверхность проведена по уровню $2.7 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

интенсивности ведет к росту пиковой плотности плазмы практически на порядок: с 7×10^{16} до $4 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

Взаимодействие множества филаментов в окрестности геометрического фокуса и формирование суперфиламента обеспечивает существенную трансформацию частотно-углового спектра импульса. Формируется компонента излучения, распространяющаяся за геометрическим фокусом вдоль оси пучка (рис. 5). Из-за высокой плотности плазмы в суперфиламенте происходит сдвиг этой осевой компоненты по спектру на десятки нанометров в коротковолновую область.

Установлены особенности генерации третьей гармоники при суперфиламентации. Показано, что суперфиламент с высокой интенсивностью и плотностью плазмы практически не участвует в ее генерации ввиду уменьшения длины фазового синхронизма до примерно 100 мкм. Поэтому энергия третьей гармоники, сгенерированной в суперфиламенте, практически сразу возвращается в первую гармонику, и излучение третьей гармоники в дальней зоне в основном воспроизводит исходное распределение плотности энергии основной гармоники за маской. На оси в поперечном распределении третьей гармоники находится минимум плотности энергии в отличие от основной гармоники, для которой на оси формируется яркий максимум, связанный с суперфиламентом (рис. 6).

Детально исследована эффективность генерации третьей гармоники при фокусировке в воздух 1–4 пучков в зависимости от полной энергии фемтосекундного излучения длительностью 100 фс, прошедшего маску (рис. 7). Показано, что при малой энергии накачки менее $\sim 100 \text{ мкДж}$ эффективность генерации третьей гармоники $\sim 10^{-6}$ практически не зависит от числа пучков. С ростом энергии накачки в зависимостях энергии третьей гармоники от энергии накачки происходит ветвление. Генерация третьей гармоники на первой ветви, соответ-

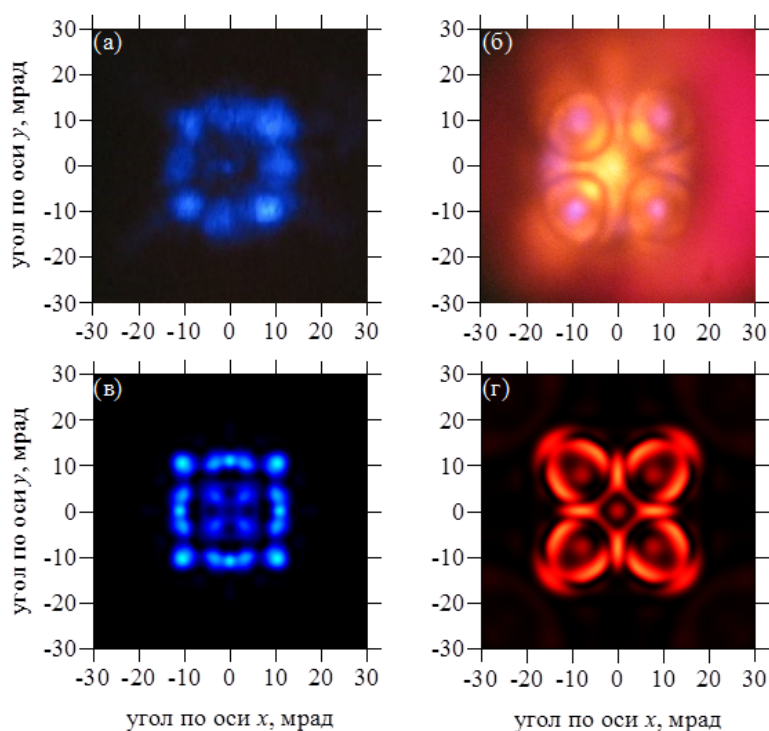


Рис. 6 — (а, б) Экспериментальные и (в, г) расчетные распределения третьей гармоники (левый столбец) и импульса в целом (правый столбец). Эксперимент проведен в группе проф. А. А. Ионина и д. ф.-м. н. Л. В. Селезнева (ФИАН, Москва) [А4].

ствующей нескольким пучкам, на 1–2 порядка эффективнее по сравнению со второй, соответствующей одному пучку. Физическая причина ветвления состоит в том, что наведенная при взаимодействии пучков асимметрия в распределениях поля перед и после фокуса препятствует обратной конверсии вследствие поворота фазы на π после фокуса, которая развивается для одного пучка. С приближением мощности пучка к критической мощности самофокусировки (энергия ~ 1 мДж) ветви вновь сливаются, поскольку в этих условиях даже для одного пучка асимметрия становится существенной из-за перераспределения энергии излучения в пространстве, обусловленного керровской самофокусировкой и плазменной дефокусировкой.

Глава 4. Оптимизация генерации терагерцового излучения при жесткой фокусировке первой и второй гармоники титан-сапфирового лазера в воздухе

Четвертая глава посвящена эффекту генерации терагерцового излучения в двучетном филаменте. Симметрия изотропной среды запрещает генерацию чётных гармоник. Однако при смешении первой и второй гармоник фемтосекундного излучения этот запрет снимается, и помимо генерации высоких чётных гармоник происходит генерация терагерцового излучения как «нулевой» гармоники. Терагерцовое излучение филамента обусловлено, в основном, нестационарным фототоком в условиях ионизации. Длительность терагерцового им-

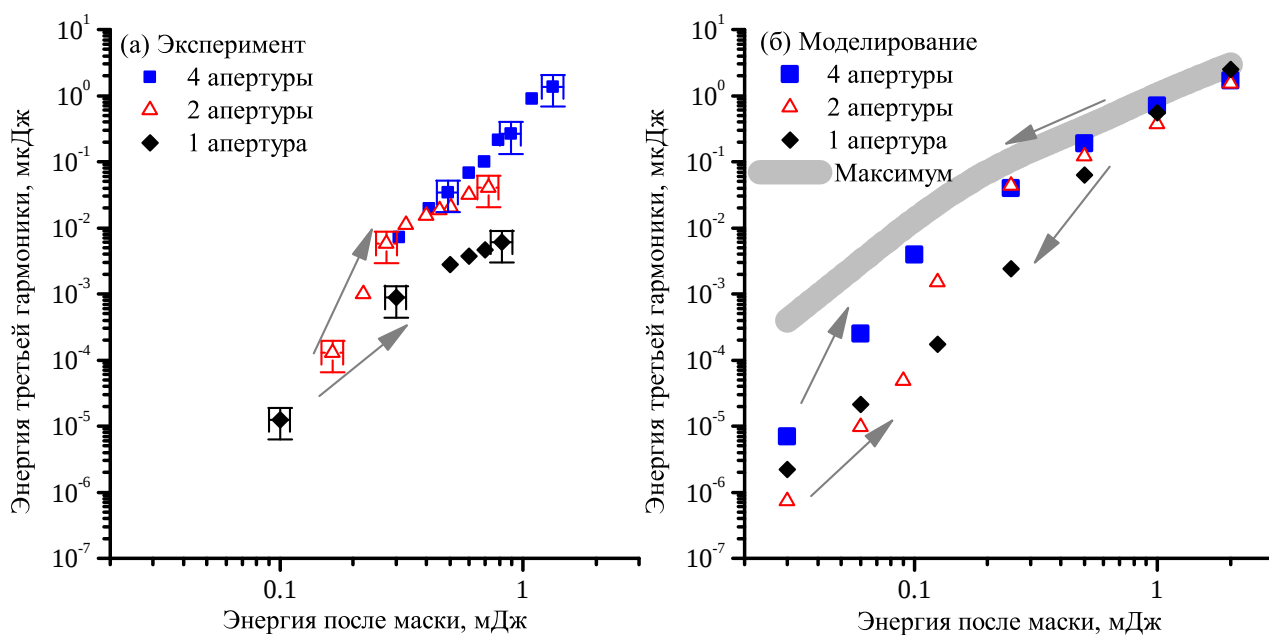


Рис. 7 — (а) Экспериментально и (б) численно полученные зависимости энергии третьей гармоники от энергии исходного импульса после маски с одной, двумя и четырьмя открытыми отверстиями (апертурами). Серые стрелки указывают точки «ветвления». Эксперимент проведен в группе проф. А. А. Ионина и д. ф.-м. н. Л. В. Селезнева (ФИАН, Москва) [А7].

пульса составляет единицы пикосекунд, а расходимость — десятки градусов, в связи с чем при описании терагерцового излучения филамента принципиально важны непараксиальные эффекты. Глава состоит из двух частей.

В первой части главы представлено описание экспериментов по генерации терагерцового излучения в двуцветном филаменте при чирпировании импульса накачки. При достаточно коротком (35 фс) спектрально-ограниченном импульсе накачки энергия терагерцового излучения имела локальный минимум (рис. 8). Локальные максимумы же формировались при длительности отрицательно и положительно чирпированных импульсов около 100 фс. При этом в случае положительного чирпа конверсия в ТГц была заметно выше. Этот эффект является достаточно парадоксальным: максимум мощности накачки соответствует минимуму эффективности. При этом положительно чирпированный импульс должен расплываться при распространении (хотя и несущественно, на несколько фемтосекунд при заданном фокусном расстоянии 30 см) и терять мощность, а отрицательно чирпированный — компрессироваться, то есть и асимметрия относительно знака чирпа противоположна ожидаемой.

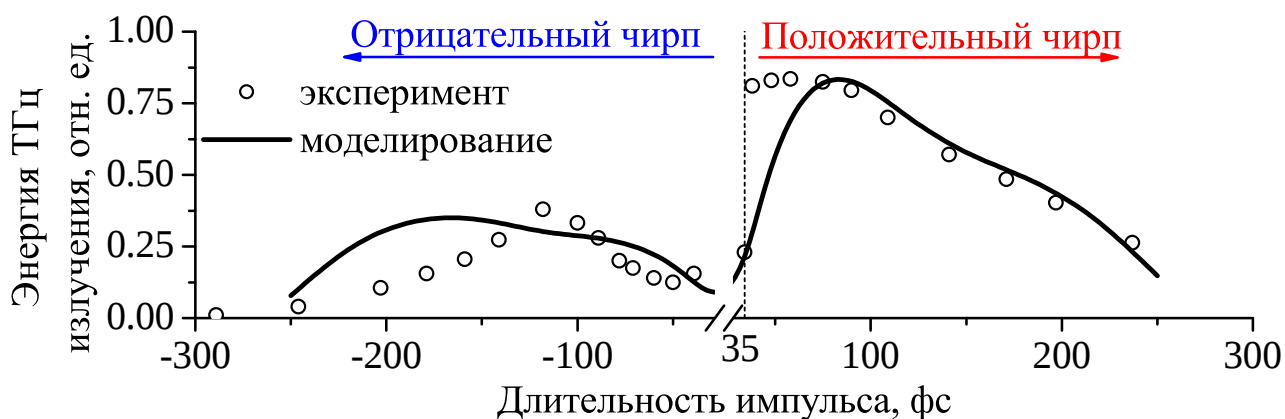


Рис. 8 — Зависимость энергии ТГц излучения двуцветного филамента от длительности чирпированного импульса. Эксперимент проведен в группе проф. Y. Chen (Shanghai Jiao Tong Univ., Шанхай, Китай) [A3].

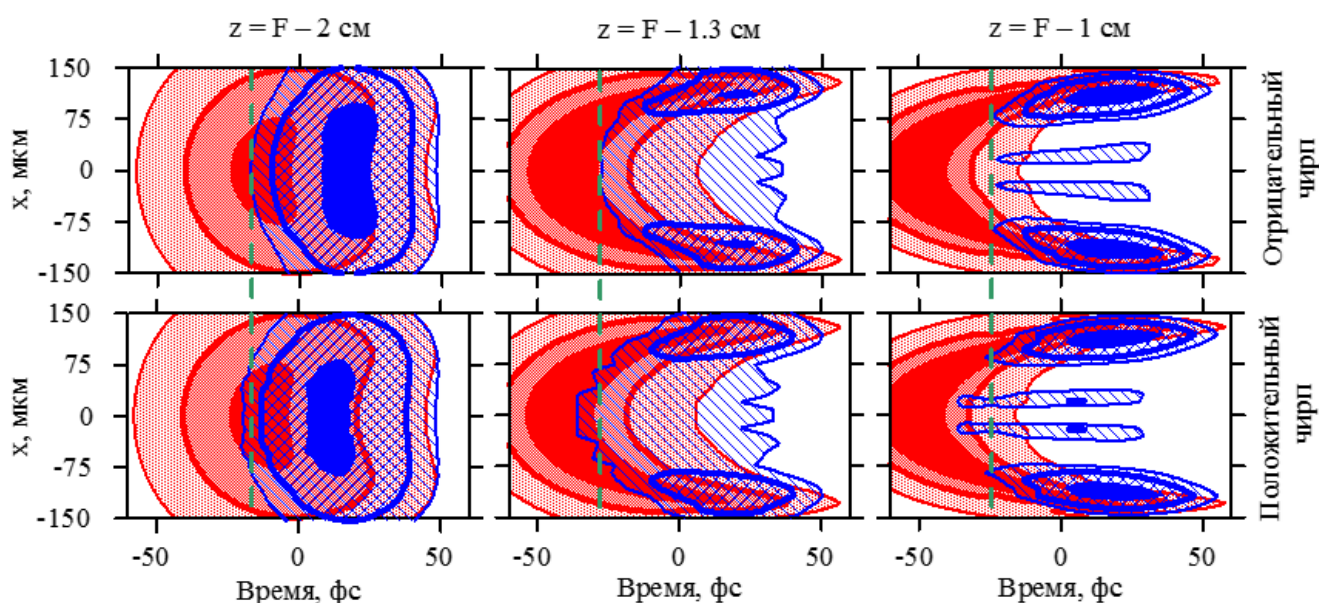


Рис. 9 — Пространственно-временные распределения интенсивности первой (красные контуры) и второй (синие контуры) гармоник излучения на различных расстояниях распространения z для отрицательно и положительно чирпированных импульсов длительностью 83 фс по полувысоте. Фокусное расстояние линзы F равно 30 см.

Для описания и анализа данного явления была проведена серия расчетов с длительностью chirпированного импульса от 35 до 200 фс для обоих знаков chirпа. Зависимость энергии ТГц излучения от chirпа воспроизвела экспериментальную. Детальное сравнение спектральных и угловых характеристик терагерцового излучения для противоположных chirпов не выявило существенных отличий в процессе генерации. Единственным важным отличием, обнаруженным при анализе результатов расчетов, была разница в пространственно-временном перекрытии импульсов первой и второй гармоник. Для спектрально-ограниченного импульса вторая гармоника в фокусе отставала от первой почти на 50 фс, что превышает её длительность. Перекрытие импульсов, необходимое для генерации ТГц излучения, в этом случае практически потеряно, что и объясняет локальный минимум конверсии в ТГц. Асимметрия положительного и отрицательного chirпа также объясняется тем, что из-за удлинения положительно chirпированного импульса на несколько фемтосекунд перекрытие импульсов первой и второй гармоник лучше, чем для отрицательно chirпированного импульса (рис. 9).

Во второй части главы разработана численная схема и проведено моделирование генерации ТГц излучения из массива двуцветных филаментов. В связи с отсутствием осевой симметрии задача имеет $(t, x, y) + z$ геометрию, однако требования к вычислительным ресурсам оказываются существенно более жесткими, чем для моделирования одноцветной филаментации. Так, из-за высокой расходимости терагерцового излучения размер области по поперечным координатам должен быть существенно больше, чем для одноцветной филаментации. Кроме того, необходимо в разы увеличить размер области по времени. Разрешение (как временное, так и пространственное) при этом должно быть не хуже, чем для расчета одноцветной филаментации.

Чтобы сократить требуемый объём оперативной памяти, предложена схема с перекрывающимися расчетными областями для оптического и терагерцового излучения. Во всех самосогласованных расчетах оптическая и терагерцовая компоненты поля заданы на одной и той же сетке. Однако обычно они достаточно хорошо разделены в спектре и обладают существенно разными физическими свойствами, благодаря чему возможно хранить их в памяти в двух отдельных массивах. Так, оптическое поле значительно вблизи оси пучка, имеет относительно небольшую расходимость, локализовано по времени, и только оно обладает ионизирующим действием. Для терагерцового поля требуется заведомо

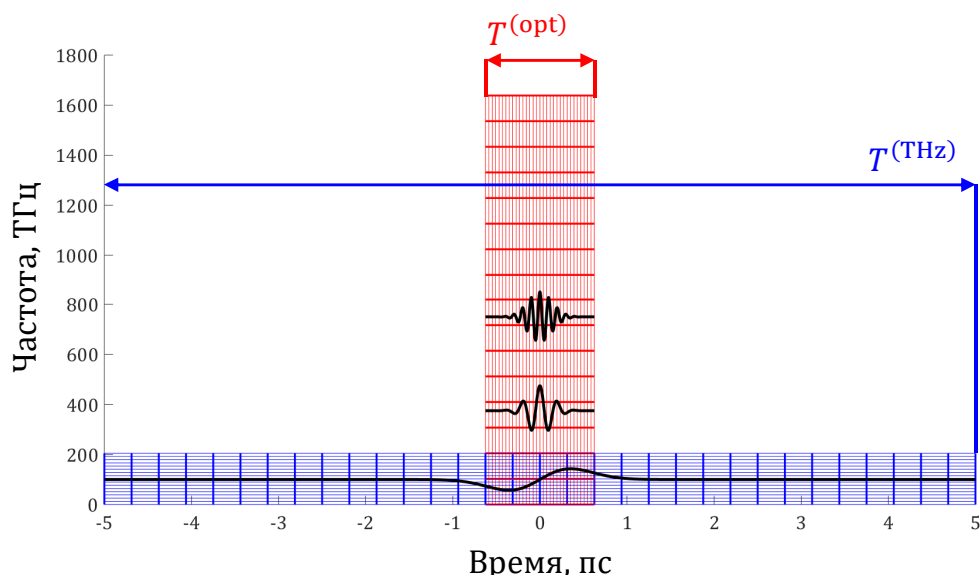


Рис. 10 — Перекрывающиеся расчетные области для оптического и терагерцового полей в частотно-временном представлении. Красная область относится к оптическому излучению (высокое разрешение по времени, низкое по частоте), синяя — к терагерцовому излучению (наоборот).

большая расчетная область по пространству и времени, однако для него избыточно разрешение, которое необходимо для оптического поля (~ 1 мкм по пространству и ~ 0.1 фс по времени). Таким образом, определив поля на двух связанных расчетных сетках (см. рис. 10), можно эффективно экономить оперативную память. Нелинейное взаимодействие происходит только в области, где существует оптическое поле. ТГц часть спектра фототока, наведенного оптическим полем, становится генератором в уравнении для терагерцового поля. Аналогичные перекрывающиеся области могут быть заданы и в пространстве поперечных координат (x, y) .

С использованием разработанного алгоритма проведено численное моделирование генерации ТГц излучения при фокусировке в воздух двуцветного фемтосекундного излучения (800 нм, 50 фс, 1 мДж + 400 нм, 35 фс, 0.1 мДж), регуляризованного четырехсекционной фазовой пластинкой (диаметр 1 см), формирующей в поперечном распределении поля крестообразный разрыв фазы на π . В численном моделировании показана локализация ТГц излучения в промежутке между плазменными каналами, которые, таким образом, представляют и источник излучения, и волноводную структуру для него же.

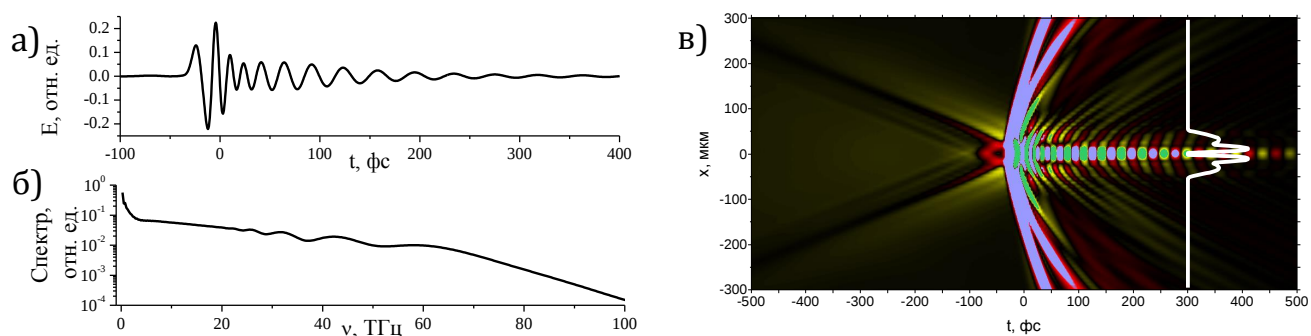


Рис. 11 — (а) Волновая форма, (б) интегральный спектр и (в) (x, t) -распределение терагерцового поля при филаментации двучветного излучения, регуляризованного четырехсекционной фазовой пластинкой. Белая кривая справа изображает поперечный профиль плазмы.

Использование двух расчетных сеток в алгоритме моделирования позволяет разделить вклады рассеяния и генерации, которые представлены двумя отдельными слагаемыми в фототоке. В дополнительном расчете показано, что волноводный режим распространения обеспечивает именно рассеяние ТГц волны на плазменных каналах, а не конструктивная интерференция излучения регулярного массива отдельных источников ТГц поля.

Плазменные каналы существуют только при $t \gtrsim 0$, поскольку фронт ионизации соответствует $t \approx 0$. Поэтому волноводное распространение ТГц излучения возможно только после прохождения оптического импульса. Именно этот эффект демонстрирует рис. 11, где показано ТГц поле, локализованное внутри плазменных каналов. При этом ТГц импульс уширен во временной области до ~ 1 пс вследствие дисперсии плазменного волновода.

Заключение

В заключении приведены основные результаты работы:

1. Найдено критическое значение числовой апертуры фокусирующего элемента, для которой начальные условия в виде плоского фазового транспаранта позволяют получать распределение электромагнитного поля в окрестности геометрического фокуса с помощью непараксиальных уравнений распространения. Полученные распределения согласуются с точными решениями уравнений Максвелла в форме векторных дифракционных интегралов (ВДИ). При более жесткой фокусировке необходима модификация начальных условий.

2. Перенос поля от фокусирующего элемента к плоскости с помощью уравнений геометрической оптики позволяет построить начальные условия для описания жесткой фокусировки отражающими оптическими элементами с произвольной формой поверхности непараксиальными векторными уравнениями распространения. Интегрирование уравнений распространения с построенными начальными условиями позволяет восстановить поперечные и продольную компоненты электрического поля, что открывает возможность описания жесткой фокусировки в нелинейную среду в условиях эксперимента.
3. При фокусировке нескольких (2–4) суб-критических лазерных пучков фемтосекундного импульса в воздух суммарный сигнал третьей гармоники приблизительно на порядок превосходит таковой в случае фокусировки унимодального пучка с мощностью, равной сумме мощностей суб-пучков. При достижении порога филаментации в каждом из пучков разница в сигнале третьей гармоники, сгенерированном унимодальным или регуляризованным пучком, практически пропадает. Данный эффект связан с тем, что при фокусировке докритического излучения в воздух третья гармоника испытывает обратную конверсию из-за поворота фазы на π при прохождении геометрического фокуса. Как в режиме филаментации, так и при взаимодействии нескольких суб-критических пучков симметрия относительно геометрического фокуса оказывается нарушена, и обратная конверсия третьей гармоники в основное излучение становится пренебрежимо малой.
4. Воспроизведены и объяснены результаты экспериментов по влиянию начальной фазовой модуляции (чирпа) двухцветного фемтосекундного импульса на эффективность ТГц генерации. Основным фактором, определяющим зависимость ТГц энергии от чирпа, является перекрытие в пространстве и времени первой и второй оптических гармоник, которое при положительном чирпе увеличивается по сравнению со случаями отрицательно чирпированного и спектрально ограниченного импульса.
5. Разработана схема с перекрывающимися расчетными сетками для оптического и терагерцового излучения, позволяющая оптимизировать вычислительные ресурсы при моделировании, в том числе при филаментации пространственно регуляризованных пучков. Факторизация электрического поля на оптическую и терагерцовую компоненты позволяет дискретизовать их с разным разрешением и получить два отдельных уравнения распространения, связанные

через нелинейный отклик среды, зависящий от обеих компонент. Результаты численного моделирования по предложенной схеме согласуются с решением, полученным без факторизации.

**Публикации в рецензируемых журналах, удовлетворяющих Положению
о присуждении ученых степеней в МГУ имени М. В. Ломоносова:**

- A1. A. Couairon, O. G. Kosareva, N. A. Panov, **D. E. Shipilo**, V. A. Andreeva, V. Jukna, F. Nesa “Propagation equation for tight-focusing by a parabolic mirror”, Opt. Express **23**, 31240–31252 (2015). IF = 3.669
- A2. **D. E. Shipilo**, N. A. Panov, E. S. Sunchugasheva, D. V. Mokrousova, V. A. Andreeva, O. G. Kosareva, L. V. Seleznev, A. B. Savel’ev, A. A. Ionin, S. L. Chin “Fusion of regularized femtosecond filaments in air: far field on-axis emission”, Laser Phys. Lett. **13**, 116005 (2016). IF = 1.884
- A3. Zh. Zhang, N. Panov, V. Andreeva, Zh. Zhang, A. Slepkov, **D. Shipilo**, M. D. Thomson, T.-J. Wang, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, Y. Chen, O. Kosareva, A. Savel’ev “Optimum chirp for efficient terahertz generation from two-color femtosecond pulses in air”, Appl. Phys. Lett. **113**, 241103 (2018). IF = 3.597
- A4. **D. E. Shipilo**, D. V. Mokrousova, N. A. Panov, G. E. Rizaev, A. V. Shalova, E. S. Sunchugasheva, A. A. Ionin, A. Couairon, L. V. Seleznev, O. G. Kosareva “Third-harmonic generation from regularized converging filaments”, J. Opt. Soc. Am. B **36**, A66–A71 (2019). IF = 2.18
- A5. **D. E. Shipilo**, I. A. Nikolaeva, V. Yu. Fedorov, S. Tzortzakis, A. Couairon, N. A. Panov, O. G. Kosareva “Tight focusing of electromagnetic fields by large-aperture mirrors”, Phys. Rev. E **100**, 033316 (2019). IF = 2.296
- A6. C. Chu, **D. E. Shipilo**, D. Lu, Z. Zhang, S. V. Chuchupal, N. A. Panov, O. G. Kosareva, W. Liu “Femtosecond filament emergence between π -shifted beamlets in air”, Opt. Express **28**, 1002–1013 (2020). IF = 3.669
- A7. D. V. Mokrousova, **D. E. Shipilo**, G. E. Rizaev, N. A. Panov, E. S. Sunchugasheva, A. V. Shalova, A. A. Ionin, O. G. Kosareva, L. V. Seleznev “Enhancement of third harmonic yield in fused filaments due to Gouy shift suppression” J. Opt. Soc. Am. B **37**, 1406–1412 (2020). IF = 2.18

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ:

- A8. Д. Е. Шипило «Генератор начальных условий для уравнений распространения фемтосекундного лазерного излучения при жесткой фокусировке». Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2019618004, 25 июня 2019.

Доклады на конференциях:

- A9. **D. E. Shipilo**, N. A. Panov, V. A. Andreeva, F. Nesa, V. V. Bukin, A. Couairon, O. G. Kosareva, V. Jukna “Simulations of tight focusing by propagation equations” The International Conference on Coherent and Nonlinear Optics (ICONO/LAT 2016), Минск, Беларусь, 26–30 сентября 2016.
- A10. **D. Shipilo**, N. Panov, V. Andreeva, O. Kosareva, A. Saletski, H. L. Xu, P. Polynkin “Nonlinearly enhanced linear absorption under filamentation in mid-infrared” SPIE Optics and Optoelectronics, Прага, Чехия, 24-27 апреля 2017.
- A11. **D. E. Shipilo**, N. A. Panov, V. A. Andreeva, O. G. Kosareva, A. M. Saletsky, H. L. Xu, P. Polynkin “Dissipation of High-Intense 3.9-micron Radiation Due to Atmospheric Absorption” 26th International Laser Physics Workshop (LPHYS’17), Казань, Россия, 17–21 июля 2017.
- A12. **D. E. Shipilo**, Nikolaeva I.A., N. A. Panov, O. G. Kosareva, Tzortzakis S., A. Couairon, V. Yu. Fedorov “Geometric-optics correction of initial conditions for non-paraxial propagation equations” International Conference on Laser Filamentation (COFIL-2018), Женева, Швейцария, 25–29 июня 2018.
- A13. К. А. Dolgikh, O. G. Kosareva, N. A. Panov, **D. E. Shipilo** “Suitable input conditions for femtosecond pulse tight focusing into dense medium” International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight-2018), Москва, Россия, 1–5 октября 2018.
- A14. **D. E. Shipilo**, N. A. Panov, W. Liu, Q. Su, D. Lu, A. B. Savel’ev, O. G. Kosareva “Phase Barrier for Electron Density Enhancement in Femtosecond Filamentation” 27th annual International Laser Physics Workshop (LPHYS’18), Ноттингем, Великобритания, 16–20 июля 2018.
- A15. **D. E. Shipilo**, I. A. Nikolaeva, N. A. Panov, Y. Chen, W. Liu, L. V. Seleznev, O. G. Kosareva “Suitable Input Conditions for Quantifying the Yields of Secondary Emission from Femtosecond Filament” 28th annual International Laser Physics Workshop (LPHYS’19), Кёнджу, Республика Корея, 08–12 июля 2019.

- A16. **Д. Е. Шипило**, Н. А. Панов, О. Г. Косарева «Сканирование среднего ИК по длине волны через линии поглощения для оптимальной доставки сверхкороткого мощного излучения» XI Международная конференция «Фундаментальные проблемы оптики» (ФПО — 2019), Санкт-Петербург, Россия, 21–25 октября 2019.
- A17. И. А. Николаева, **Д. Е. Шипило**, Н. А. Панов, В. Ю. Федоров, С. Тзортзакис, А. Куарон, О. Г. Косарева «Влияние распространения на генерацию терагерцового излучения двуцветным фемтосекундным лазерным полем: роль относительной фазы между гармониками» XI Международная конференция «Фундаментальные проблемы оптики» (ФПО — 2019), Санкт-Петербург, Россия, 21–25 октября 2019.

Список литературы

1. *Luo Q., Liu W., Chin S. L.* Lasing action in air induced by ultra-fast laser filamentation // *Appl. Phys. B.* — 2003. — т. 76, № 3. — с. 337–340.
2. Can we reach very high intensity in air with femtosecond PW laser pulses? / О. Г. Косарева [и др.] // *Laser Phys.* — 2009. — т. 19, № 8. — с. 1776–1792.
3. Controlling a bunch of multiple filaments by means of a beam diameter / О. Косарева [и др.] // *Appl. Phys. B.* — 2006. — т. 82, № 1. — с. 111–122.
4. Superfilamentation in Air / G. Point [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — т. 112. — с. 223902.
5. Self-channeling of high-peak-power femtosecond laser-pulses in air / A. Braun [и др.] // *Opt. Lett.* — 1995. — т. 20. — с. 73.
6. Conical emission from self-guided femtosecond pulses in air / E. Nibbering [и др.] // *Opt. Lett.* — 1996. — т. 21, № 1. — с. 62–64.
7. Conical emission from laser-plasma interactions in the filamentation of powerful ultrashort laser pulses in air / О. Г. Косарева [и др.] // *Opt. Lett.* — 1997. — т. 22, № 17. — с. 1332–1334.
8. *Беспалов В., Таланов В.* О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях // *Письма в ЖЭТФ.* — 1966. — т. 3, № 12. — с. 471–476.
9. Optically Turbulent Femtosecond Light Guide in Air / M. Mlejnek [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — т. 83. — с. 2938.
10. Competition of multiple filaments during the propagation of intense femtosecond laser pulses / S. A. Hosseini [и др.] // *Phys. Rev. A.* — 2004. — т. 70. — с. 033802.
11. *Cook D., Hochstrasser R.* Intense terahertz pulses by four-wave rectification in air // *Opt. Lett.* — 2000. — т. 25, № 16. — с. 1210–1212.
12. *Xie X., Dai J., Zhang X.-C.* Coherent Control of THz Wave Generation in Ambient Air // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — т. 96. — с. 075005.
13. Ultrabroad terahertz spectrum generation from an air-based filament plasma / V. Andreeva [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — т. 116, № 6. — с. 063902.

14. *Zhang X. C., Shkurinov A., Zhang Y.* Extreme terahertz science // *Nat. Photonics*. — 2017. — т. 11, № 1. — с. 16.
15. Polarization control of terahertz radiation from two-color femtosecond gas breakdown plasma / O. Kosareva [и др.] // *Opt. Lett.* — 2018. — т. 43, № 1. — с. 90–93.
16. Manipulation of polarizations for broadband terahertz waves emitted from laser plasma filaments / Z. Zhang [и др.] // *Nature Photonics*. — 2018. — т. 12, № 9. — с. 554–559.
17. Observation of extremely efficient terahertz generation from mid-infrared two-color laser filaments / A. D. Koulouklidis [и др.] // *Nature Communications*. — 2020. — т. 11, № 1. — с. 1–8.
18. Wavelength scaling of terahertz pulse energies delivered by two-color air plasmas / A. Nguyen [и др.] // *Opt. Lett.* — 2019. — т. 44, № 6. — с. 1488–1491.
19. Efficient terahertz and Brunel harmonic generation from air plasma via mid-infrared coherent control / D. Jang [и др.] // *Optica*. — 2019. — т. 6, № 10. — с. 1338–1341.
20. Ultraviolet-to-millimeter-band supercontinua driven by ultrashort mid-infrared laser pulses / A. Mitrofanov [и др.] // *Optica*. — 2020. — т. 7, № 1. — с. 15–19.
21. High energy terahertz emission from two-color laser-induced filamentation in air with pump pulse duration control / T.-J. Wang [и др.] // *Appl. Phys. Lett.* — 2009. — т. 95, № 13. — с. 131108.
22. Toward remote high energy terahertz generation / T.-J. Wang [и др.] // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — т. 97, № 11. — с. 111108.
23. Coherent synthesis of terahertz radiation from femtosecond laser filaments in air / S. I. Mitryukovskiy [и др.] // *Appl. Phys. Lett.* — 2013. — т. 102, № 22. — с. 221107.
24. Directionality of terahertz radiation emitted from an array of femtosecond filaments in gases / N. Panov [и др.] // *Laser Phys. Lett.* — 2014. — т. 11, № 12. — с. 125401.
25. *Kozlov S., Sazonov S.* Nonlinear propagation of optical pulses of a few oscillations duration in dielectric media // *J. Exp. Theor. Phys.* — 1997. — т. 84, № 2. — с. 221–228.
26. *Kolesik M., Moloney J. V.* Nonlinear optical pulse propagation simulation: From Maxwell's to unidirectional equations // *Phys. Rev. E*. — 2004. — т. 70, № 3. — с. 036604.
27. Broadband THz emission from gas plasmas induced by femtosecond optical pulses: From fundamentals to applications / M. D. Thomson [и др.] // *Las. Photon. Rev.* — 2007. — т. 1, № 4. — с. 349–368.
28. *Zhang X.-C., Xu J.* Introduction to THz wave photonics. т. 29. — Springer, 2010.
29. 3D Numerical Simulations of THz Generation by Two-Color Laser Filaments / L. Bergé [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — т. 110, вып. 7. — с. 073901.
30. Effect of pulse duration on the energy delivery under nonlinear propagation of tightly focused Cr:forsterite laser radiation in bulk silicon / E. Mareev [и др.] // *Laser Phys. Lett.* — 2019. — т. 17, № 1. — с. 015402.
31. Accessing extreme spatiotemporal localization of high-power laser radiation through transformation optics and scalar wave equations / V. Y. Fedorov [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — т. 117, № 4. — с. 043902.
32. Terahertz radiation from extended two-colour air filaments / P. Chizhov [и др.] // *Laser Phys. Lett.* — 2019. — т. 16, № 7. — с. 075301.