Автоматика и телемеханика, № 12, 2019

© 2019 г. **А.И. МАТАСОВ, д-р физ.-мат. наук (alexander.matasov@gmail.com)**
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КАЛИБРОВКИ БЛОКА НЬЮТОНОМЕТРОВ[1]

В рамках гарантирующего подхода к оцениванию предлагается новая формализация задачи калибровки блока ньютонометров. Эта задача сводится к анализу специальных вариационных задач. На основании новой формализации обосновывается метод скаляризации, широко используемый при калибровке блока ньютонометров. В частности, определена граница его применимости.

Ключевые слова: гарантирующий подход к оцениванию, блок ньютонометров, калибровка.

DOI: 10.1134/S0005231019120043

1. Введение

Гарантирующий подход к оцениванию в так называемой априорной постановке впервые был сформулирован в классических работах [1–3] (см. также [4]). В дальнейшем он был развит в [5, 6] в связи с решением задач космической баллистики (см. также [7, 8]). Оказалось, что гарантирующий подход при небольшой модификации является очень удобным инструментом для формализации задачи калибровки блока ньютонометров [9, 10], который представляет собой один из главных сенсоров инерциальной навигационной системы [11, 12]. При калибровке блока ньютонометров в случае грубой информации об угловых положениях стенда традиционно применяется метод скаляризации. Впервые в доступной литературе он был предложен в [13] (см. также [14, 15]). Немного позже автором данной статьи независимо был предложен аналогичный подход, приводящий к тем же расчетным соотношениям; впоследствии он был представлен в [16].

В данной работе в рамках гарантирующего подхода предлагается новая формализация задачи калибровки блока ньютонометров, основанная на анализе специальных вариационных задач. Указывается связь предлагаемой формализации с методом скаляризации и определяется граница применимости этого метода. Краткая версия работы представлена в [17].

2. Формализация задачи калибровки

2.1. Калибровка блока ньютонометров

В идеале три ньютонометра должны быть установлены строго по осям так называемого приборного трехгранника, положение которого фиксирова-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00054-а).

но в корпусе бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Традиционная модель показаний реального (неидеального) блока ньютонометров имеет вид [10, 12]

$$f' = (I_3 + \Gamma) f_z + \Delta f^0 + \varrho', \tag{1}$$

где $f' \in \mathbb{R}^3$ – показания блока ньютонометров; $I_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ – единичная матрица; $\Gamma \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ – матрица погрешностей блока (диагональные элементы которой характеризуют ошибки масштабных коэффициентов, а внедиагональные – несоосности ньютонометров); $f_z \in \mathbb{R}^3$ – вектор удельной силы, действующей на чувствительную массу блока в проекциях на приборный трехгранник (эта сила является разностью между силой, действующей на массу со стороны подвеса, и силой тяготения; если блок неподвижен относительно Земли, что имеет место при рассматриваемых здесь статических испытаниях, то она равна ускорению силы тяжести в точке проведения экспериментов с обратным знаком) [11]; $\Delta f^0 \in \mathbb{R}^3$ – систематические смещения показаний блока, $\varrho' \in \mathbb{R}^3$ – флуктуационная составляющая ошибок измерений. Величина f_z является “полезным” сигналом для функционирования инерциальной навигационной системы, который надо извлечь из измерений f'. Неизбежные параметрические ошибки Γ и Δf^0 мешают этому. Определение величин Γ и Δf^0 составляет цель калибровки. Для этого блок ньютонометров устанавливают в различные угловые положения относительно силы тяжести, составляя систему уравнений для нахождения указанных ошибок. Главная проблема состоит в определении набора этих угловых положений. Поскольку проведение калибровочных экспериментов технологически не простая процедура, то количество таких положений желательно сократить.

Для удобства нормализуем соотношение (1), разделив его на модуль ускорения силы тяжести g, который для простоты будет считаться точно известным. Неточность в его знании, конечно, можно учесть, но это не повлияет ни на какие принципиальные выводы. Тогда (1) представится в виде

$$\frac{f'}{g} = (I_3 + \Gamma)\, n_z + \varepsilon + \varrho, \quad \|n_z\| = 1, \tag{2}$$

$$n_z = \frac{f_z}{g}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta f^0}{g}, \quad \varrho = \frac{\varrho'}{g}.$$

Приближенное знание о единичном векторе n_z ориентации приборного трехгранника относительно ускорения силы тяжести определяется по измерениям углов поворота стенда. Обозначим через n наше знание об n_z (n точно известно). Опишем неточность в этом знании вектором малого поворота $\alpha = \mathrm{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с неизвестными, но ограниченными известной величиной μ компонентами. Тогда с точностью до малых второго порядка

$$n_z = (I_3 + \hat\alpha)\, n, \quad \hat\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\alpha_i| \leqslant \mu, \quad i = 1, 2, 3.$$

Будем считать, что компоненты ошибок измерений показаний ньютонометров $\varrho = \mathrm{col}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ также ограничены известной величиной σ. Вводя новую точно известную величину $z(n) = g^{-1} f'(n) - n \in \mathbb{R}^3$, соотношение (2) можно переписать в виде

$$z(n) = \big(\Gamma + \hat{\alpha}(n)\big) n + \varepsilon + \varrho(n), \quad n \in S \quad (S - \text{единичная сфера}) \tag{3}$$

при условиях

$$|\alpha_i(n)| \leqslant \mu, \quad |\varrho_i(n)| \leqslant \sigma, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Тогда задача калибровки принимает вид задачи оценивания, в которой по континууму всех измерений $z(n)$ на единичной сфере, определяемых уравнением (3), требуется найти элементы Γ и ε на фоне помех $\alpha(n)$ и $\varrho(n)$, ограниченных условиями (4).

2.2. Метод гарантирующего оценивания

Рассмотрим векторные измерения (3), (4), в которых помехи $\alpha(n)$ и $\varrho(n)$ являются всюду определенными на S интегрируемыми по Лебегу функциями с ограниченными компонентами. Представим набор элементов неизвестной матрицы Γ в виде удлиненного вектора-столбца

$$\gamma = \operatorname{col}(\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \Gamma_{31}, \Gamma_{12}, \Gamma_{22}, \Gamma_{32}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}, \Gamma_{33}) \tag{5}$$

и введем вектор неизвестных оцениваемых параметров $q = \operatorname{col}(\gamma, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{12}$. Поставим задачу оценивания скалярной величины $l = a^{\mathsf{T}} q \in \mathbb{R}^1$ для различных заданных векторов $a \in \mathbb{R}^{12}$. В рассматриваемой задаче $a = e^{(\nu)}$, где $e^{(\nu)}$ – один из единичных координатных ортов из $\mathbb{R}^{12}$ с единицей на ν-м месте, (что соответствует оценке каждой компоненты q) или $a = e^{(2)} + e^{(4)}$, $a = e^{(3)} + e^{(7)}$, $a = e^{(6)} + e^{(8)}$ (что соответствует оценке взаимных перекосов осей чувствительности ньютонометров [10]). Рассмотрим линейные оцениватели для $l = a^{\mathsf{T}} q$ вида

$$\tilde{l} = \int \Phi_0^{\mathsf{T}}(n)\, z(n)\, dS + \sum_{k=1}^{M} \Phi^{(k)\mathsf{T}} z(n^{(k)}), \tag{6}$$

где интеграл берется по поверхности сферы S, $\Phi_0(n)\colon S \to \mathbb{R}^3$ – некоторая весовая функция, интегрируемая по Лебегу, а $\Phi^{(k)} \in \mathbb{R}^3$ и $n^{(k)} \in S$, $k = 1, \ldots, M$ – некоторые векторы и ориентации. В отличие от широко распространенной формы оценивателя этот оцениватель содержит не только интегральный член, но и слагаемые, зависящие от измерений при некоторых отдельных ориентациях.

Для простоты будем писать

$$\tilde{l} = \int \Phi^{\mathsf{T}}(n)\, z(n)\, dS, \quad \Phi(n) = \Phi_0(n) + \sum_{k=1}^{M} \Phi^{(k)} \delta(n - n^{(k)}),$$

где формально положим $\int f(n)\delta(n - n^{(k)})\, dS = f(n^{(k)})$, т.е., что $\delta(n - n^{(k)})$ есть дельта-функция Дирака. Обозначим множество всех таких функций $\Phi(n)$ через $\mathcal{F}$.

Величина

$$I(\Phi) = \sup_{q\in\mathbb{R}^{12},\, |\alpha_i(n)|\leqslant\mu,\, |\varrho_i(n)|\leqslant\sigma,\, i=1,2,3} |\tilde{l} - l| \tag{7}$$

называется гарантированной ошибкой оценки.

При выбранном оценивателе это – максимальное значение ошибки оценки при всевозможных значениях неопределенных факторов. Будем искать весовые коэффициенты $\Phi(n)$, минимизирующие гарантированную ошибку оценки, т.е. искать из решения следующей минимаксной задачи:

$$\inf_{\Phi\in\mathcal{F}} \sup_{q\in\mathbb{R}^{12},\, |\alpha_i(n)|\leqslant\mu,\, |\varrho_i(n)|\leqslant\sigma,\, i=1,2,3} |\tilde{l} - l|. \tag{8}$$

Такая задача называется задачей оптимального гарантирующего оценивания. Таким образом, для решения задачи калибровки нужно решить 15 отдельных задач для всех указанных выше a. Интересно отметить, что привлечение нелинейных оценивателей в дополнение к линейным оценивателям вида (6) не приводит к уменьшению гарантированной ошибки оценки (см. раздел 6), т.е. можно ограничиться линейными оценивателями.

Получим явное выражение для гарантированной ошибки оценки (7). Ошибка оценки имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{l} - l &= \int \Big(\Phi^{\mathsf{T}}(n)\,(\Gamma + \hat{\alpha}(n))\, n + \Phi^{\mathsf{T}}(n)\,\varepsilon + \Phi^{\mathsf{T}}(n)\,\varrho(n)\Big)\, dS - a^{\mathsf{T}} q = \\ &= \Big(\int n\otimes\Phi(n)\, dS\Big)^{\mathsf{T}}\gamma + \Big(\int \Phi(n)\, dS\Big)^{\mathsf{T}}\varepsilon + \\ &+ \int (\hat{n}\,\Phi(n))^{\mathsf{T}}\alpha(n)\, dS + \int \Phi^{\mathsf{T}}(n)\,\varrho(n)\, dS - a^{\mathsf{T}} q,\end{aligned} \tag{9}$$

где γ определяется (5), а $\otimes$ есть символ кронекеровского произведения матриц [18]. В (9) использованы известные матричные свойства:

$$\Phi^{\mathsf{T}}(n)\,\Gamma\, n = \Big(n^{\mathsf{T}}\otimes\Phi^{\mathsf{T}}(n)\Big)\gamma = (n\otimes\Phi(n))^{\mathsf{T}}\gamma$$

и

$$\Phi^{\mathsf{T}}(n)\,\hat{\alpha}(n)\, n = -\Phi^{\mathsf{T}}(n)\,\hat{n}\,\alpha(n) = -\Big(\hat{n}^{\mathsf{T}}\Phi(n)\Big)^{\mathsf{T}}\alpha(n) = (\hat{n}\,\Phi(n))^{\mathsf{T}}\alpha(n).$$

Из (9) следует, что для конечности выражения (7) необходимо выполнение условия

$$\int \begin{pmatrix} n\otimes\Phi(n) \\ \Phi(n) \end{pmatrix} dS = a. \tag{10}$$

Оно называется условием несмещенности: при равных нулю помехах измерений $\alpha(n)$ и $\varrho(n)$ оценка $\tilde{l}$ совпадает с точным значением оцениваемого параметра l. Введем покомпонентные обозначения:

$$\Phi(n) = \mathrm{col}\,(\Phi_1(n), \Phi_2(n), \Phi_3(n))\,, \quad n = \mathrm{col}\,(n_1, n_2, n_3)\,.$$

Ясно, что при выполнении условия несмещенности верхняя грань в (7) достигается при

$$\alpha_1(n) = \mu \operatorname{sign}\left(n_3\Phi_2(n) - n_2\Phi_3(n)\right), \quad \alpha_2(n) = \mu \operatorname{sign}\left(n_1\Phi_3(n) - n_3\Phi_1(n)\right),$$
$$\alpha_3(n) = \mu \operatorname{sign}\left(n_2\Phi_1(n) - n_1\Phi_2(n)\right), \quad \varrho_i(n) = \sigma \operatorname{sign}\left(\Phi_i(n)\right), \quad i = 1, 2, 3$$

и гарантированная ошибка оценки определяется формулой

$$I(\Phi) = \sigma \int \left(|\Phi_1(n)| + |\Phi_2(n)| + |\Phi_3(n)| \right) dS + \tag{11}$$
$$+ \mu \int \left(|n_3\Phi_2(n) - n_2\Phi_3(n)| + |n_1\Phi_3(n) - n_3\Phi_1(n)| + |n_2\Phi_1(n) - n_1\Phi_2(n)| \right) dS.$$

Здесь для скалярной функции $\chi(n) = \chi_0(n) + \sum_{k=1}^{M} \chi^{(k)}\delta(n - n^{(k)})$, где $\chi_0(n)$ определена всюду на S, положим

$$\operatorname{sign}\chi(n) = \begin{cases} \operatorname{sign}\chi_0(n), & \text{если } n \neq \{n^{(1)}, \ldots, n^{(M)}\}, \\ \operatorname{sign}\chi^{(k)}, & \text{если } n = n^{(k)}, \end{cases}$$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

$$\int |\chi(n)|\, dS = \int |\chi_0(n)|\, dS + \sum_{k=1}^{M} |\chi^{(k)}|.$$

Таким образом, задача оптимального гарантирующего оценивания (8) сводится к следующей вариационной задаче:

$$\inf_{\Phi \in \mathcal{F}} I(\Phi) \quad \text{при условии несмещенности (10)},$$

где $I(\Phi)$ задается формулой (11).

2.3. Основная вариационная задача

Для дальнейшего анализа построенную выше вариационную задачу удобно представить в более простом структурном виде. Назовем эту модификацию задачей $\mathcal{P}$.

Задача $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{I}_0 = \inf_{\Phi, \Psi \in \mathcal{F}} \sigma \int \sum_{i=1}^{3} |\Phi_i(n)|\, dS + \mu \int \sum_{i=1}^{3} |\Psi_i(n)|\, dS \tag{12}$$

при условиях

$$\int \begin{pmatrix} n \otimes \Phi(n) \\ \Phi(n) \end{pmatrix} dS = a, \quad \Psi(n) = \hat{n}\, \Phi(n); \quad \Psi(n) = \operatorname{col}\left(\Psi_1(n), \Psi_2(n), \Psi_3(n)\right). \tag{13}$$

3. Метод скаляризации

Метод скаляризации состоит в том, что вместо трехмерных измерений (3) рассматривается одномерное скалярное измерение

$$\begin{aligned} \bar z(n) = n^{\mathsf T} z(n) = n^{\mathsf T}\big(\Gamma + \hat\alpha(n)\big)n + n^{\mathsf T}\varepsilon + n^{\mathsf T}\varrho(n) = \\ = n^{\mathsf T}\Gamma\, n + n^{\mathsf T}\varepsilon + n^{\mathsf T}\varrho(n), \quad n \in S. \end{aligned} \tag{14}$$

При этом волевым образом устраняется неизвестная помеха $\alpha(n)$, так как очевидно, что $n^{\mathsf T}\hat\alpha(n)n = 0$ [9, 10, 16]. Задача оптимального гарантирующего оценивания ставится по аналогичной схеме, описанной выше. Формально это соответствует введению дополнительного ограничения на oцениватель $\Phi(n)$:

$$\Phi(n) = n\,\chi(n), \quad \chi(n)\colon S \to \mathbb{R}^1, \quad \chi(n) = \chi_0(n) + \sum_{k=1}^{M} \chi^{(k)}\delta(n - n^{(k)}),$$

где $\chi_0(n)$ – скалярная интегрируемая на S функция, а $\chi^{(k)}$ – числа.

Тогда задача $\mathcal{P}$ сводится к более простой вариационной задаче относительно скалярной функции $\chi(n)$.

Задача $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{J}_0 = \inf_{\chi}\ \sigma \int \big(\,|n_1| + |n_2| + |n_3|\,\big)\,|\chi(n)|\,dS \tag{15}$$

при условии

$$\int \begin{pmatrix} n\otimes n\chi(n) \\ \chi(n) \end{pmatrix} dS = a. \tag{16}$$

Условия (16) содержат три повторяющихся равенства. Следовательно, для их совместности соответствующие компоненты a должны быть одинаковы. Это означает, что при скаляризации не все компоненты q являются наблюдаемыми. Действительно, из уравнения измерений (14) видно, что наблюдаемыми являются не все внедиагональные элементы Γ, а только суммы симметричных относительно главной диагонали элементов. Поэтому в задаче $\mathcal{S}$ требуется оценить параметры $l = \bar a^{\mathsf T}\bar q \in \mathbb{R}^1$, где

$$\bar q = \mathrm{col}\,(\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{33}, \Gamma_{12}+\Gamma_{21}, \Gamma_{13}+\Gamma_{31}, \Gamma_{23}+\Gamma_{32}, \varepsilon) \in \mathbb{R}^9,$$

$$\bar a \in \mathbb{R}^9 - \text{заданный вектор.}$$

При этом условия несмещенности (16) можно представить в более явном виде:

$$\begin{aligned} \int h(n)\,\chi(n)\,dS = \bar a, \\ h(n) = \mathrm{col}\,\big(n_1^2, n_2^2, n_3^2, n_1n_2, n_1n_3, n_2n_3, n_1, n_2, n_3\big) \in \mathbb{R}^9. \end{aligned} \tag{17}$$

Отметим, что в [9, 10] “скалярная” задача $\mathcal{S}$ сформулирована более упрощенно: величина $|n_1| + |n_2| + |n_3|$ в (15) заменена на ее оценку сверху $\sqrt{3}$.

З а д а ч а $\mathcal{S}^0$.

$$\inf_{\chi} \sqrt{3}\sigma \int |\chi(n)|\, dS \quad \text{при условии (17).}$$

4. Эквивалентность задач $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^0$

Покажем, что решения задач $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^0$ совпадают (при соответствующих $\bar{a}$).

Т е о р е м а 1. Решения задач $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{S}^0$ *совпадают. Более того, они единственны. Для параметров* Γ_{11}, $\Gamma_{12}+\Gamma_{21}$, ε_1 *эти решения определяются следующими импульсными функциями*:

$$\chi(n)_{\,\Gamma_{11}} = \frac{1}{2}\Big[\delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0)\right) + \delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0)\right)\Big],$$

$$\chi(n)_{\,\Gamma_{12}+\Gamma_{21}} = \frac{1}{2}\left[\delta\left(n - \mathrm{col}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) - \delta\left(n - \mathrm{col}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) + \right.$$
$$\left. +\delta\left(n - \mathrm{col}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) - \delta\left(n - \mathrm{col}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)\right],$$

$$\chi(n)_{\,\varepsilon_1} = \frac{1}{2}\Big[\delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0)\right) - \delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0)\right)\Big].$$

Для остальных параметров решения имеют ту же структуру, отличаясь очевидными модификациями. Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении 1.

5. Решение задачи $\mathcal{P}$

Т е о р е м а 2 (обоснование метода скаляризации). *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для параметров* Γ_{11}, ε_1 *(при всех значениях* μ*) и для* $\Gamma_{12}+\Gamma_{21}$ *(при* $\mu > (\sqrt{2}-1)\sigma$*) решение задачи* $\mathcal{P}$ *единственно и имеет вид* $\Phi(n) = \chi(n)n$, *где* $\chi(n)$ *– соответствующее решение задачи* $\mathcal{S}$. *При этом оптимальные ориентации и значения соответствующих гарантированных ошибок оценок в задачах* $\mathcal{P}$ *и* $\mathcal{S}$ *совпадают.*

2. *Для параметра* $\Gamma_{12}+\Gamma_{21}$ *при* $\mu \leqslant (\sqrt{2}-1)\sigma$ *решение задачи* $\mathcal{P}$ *имеет вид*

$$\Phi(n) = \mathrm{col}\left(\frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(0,1,0)\right) - \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(0,-1,0)\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0)\right) - \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0)\right),\ 0\right),$$
$$\Psi_1(n) = \Psi_2(n) = 0, \quad \Psi_3(n) = n_2\Phi_1(n) - n_1\Phi_2(n).$$

Если $\mu < (\sqrt{2}-1)\sigma$, то оно единственно; при этом оптимальные ориентации в задачах $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}$ различны, а гарантированная ошибка оценки в задаче $\mathcal{P}$ равна $2\sigma + 2\mu$, что меньше гарантированной ошибки оценки в задаче $\mathcal{S}$, равной $2\sqrt{2}\sigma$.

Если $\mu = (\sqrt{2}-1)\sigma$, то решение задачи $\mathcal{P}$ неединственно, но гарантированные ошибки оценок в задачах $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}$ совпадают и равны $2\sqrt{2}\sigma$.

3. *Для параметра Γ_{21} решение задачи $\mathcal{P}$ единственно и имеет вид*

$$\Phi(n) = \mathrm{col}\left(0, \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0)\right) - \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0)\right), 0\right),$$
$$\Psi_1(n) = \Psi_2(n) = 0, \quad \Psi_3(n) = -n_1\Phi_2(n).$$

Для параметров $\Gamma_{13} + \Gamma_{31}$, $\Gamma_{23} + \Gamma_{32}$ и остальных внедиагональных элементов матрицы Γ решения имеют такую же структуру, отличаясь очевидными модификациями.

Таким образом, для параметров Γ_{ii}, ε_i при всех μ и для $\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}$ при $\mu \geqslant (\sqrt{2}-1)\sigma$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ метод скаляризации обоснован. А для $\mu < (\sqrt{2}-1)\sigma$ найдены более точные решения задачи $\mathcal{P}$. Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении 2.

Замечание 1. Из теорем 1 и 2 следует, что решения всех трех рассматриваемых задач для всех нужных комбинаций параметров имеют импульсный характер с малым числом импульсов. Точки расположения этих импульсов в совокупности определяют оптимальный план экспериментов. Во всех задачах, включая задачу $\mathcal{P}$ при $\mu > (\sqrt{2}-1)\sigma$, оптимальный план содержит 18 ориентаций (угловых положений блока). При $\mu \leqslant (\sqrt{2}-1)\sigma$ оптимальный план экспериментов в задаче $\mathcal{P}$ содержит 6 ориентаций. Таким образом, применение гарантирующего подхода позволяет из континуума ориентаций S выбрать небольшое число наиболее информативных угловых положений блока ньютонометров, т.е. наряду с задачей оценивания одновременно решается задача о выборе оптимального плана экспериментов.

6. Оптимальность линейных оценивателей

Исследуем вопрос об оптимальности линейных оценивателей среди всех, в том числе нелинейных, алгоритмов оценивания [8, 19–24]. Рассмотрим исходные измерения $z(n)$, определяемые (3), (4). Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех троек (q, α, ϱ), удовлетворяющих ограничениям

$$q = \mathrm{col}\,(\gamma, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{12}, \quad |\alpha_i(n)| \leqslant \mu, \quad |\varrho_i(n)| \leqslant \sigma, \quad n \in S, \quad i = 1, 2, 3,$$

где γ задается (5), а $\alpha_i(n)$, $\varrho_i(n)$ являются интегрируемыми функциями. Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество всех измерений (3) при $(q, \alpha, \varrho) \in \mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{R}\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R}^1$ произвольный оцениватель, возможно нелинейный. Введем гарантированную ошибку оценки

$$\mathcal{D}(\mathcal{R}) = \sup_{(q,\alpha,\varrho)\in\mathcal{A}} |\mathcal{R}(z(n)) - a^{\mathsf{T}} q\,|.$$

Теорема 3. Применение нелинейных оценивателей не улучшает точности оценивания: $\mathcal{D}(\mathcal{R}) \geqslant \mathcal{I}_0$.

Доказательство теоремы 3 содержится в Приложении 3. Ясно, что аналогичный результат можно получить и для скаляризованной задачи.

7. Заключение

В работе предложена новая формализация задачи калибровки блока ньютонометров. В рамках этой формализации задача калибровки сводится к решению негладкой вариационной задачи, решение которой определяет оптимальные угловые положения блока и соответствующие оценки параметров. Обоснован метод скаляризации для решения задачи калибровки блока. Определена граница применимости этого метода. Данный подход в принципе применим и для датчиков угловой скорости, и при любой конфигурации (неортогональной или избыточной) чувствительных элементов.

Автор благодарит рецензентов за полезные вопросы и замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1. Для доказательства будет полезна задача, двойственная к задаче $\mathcal{S}$, которая строится по общему правилу [24–26]:

(П.1.1)
$$\mathcal{J}^0 = \sup_{\bar{\lambda}} \inf_{\chi} L(\chi; \bar{\lambda}),$$

где

$$L(\chi; \bar{\lambda}) = \sigma \int (\,|n_1| + |n_2| + |n_3|\,)\,|\chi(n)|\,dS + \bar{\lambda}^{\mathsf{T}} \left(a - \int h(n)\,\chi(n)\,dS \right)$$

есть функция Лагранжа, а $\bar{\lambda} = \mathrm{col}\left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_9\right) \in \mathbb{R}^9$ – множители Лагранжа. Тогда, явно вычисляя нижнюю грань в (П.1.1), нетрудно показать, что двойственная задача примет следующий вид:

(П.1.2)
$$\mathcal{J}^0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^9} \bar{a}^{\mathsf{T}} \bar{\lambda}$$

при условии

(П.1.3)
$$|h^{\mathsf{T}}(n)\bar{\lambda}| \leqslant (|n_1| + |n_2| + |n_3|)\,\sigma, \quad n \in S.$$

При построении двойственной задачи исходную задачу называют прямой.

Для любого допустимого элемента $\chi(n)$ прямой задачи (15), (17) и любого допустимого элемента $\bar{\lambda}$ двойственной задачи (П.1.2), (П.1.3) справедливо известное соотношение [6]

(П.1.4)
$$\begin{aligned} \bar{a}^{\mathsf{T}}\bar{\lambda} = \int h^{\mathsf{T}}(n)\chi(n)\bar{\lambda}\,dS \leqslant \int |h^{\mathsf{T}}(n)\bar{\lambda}||\chi(n)|\,dS \leqslant \\ \leqslant \sigma \int (\,|n_1| + |n_2| + |n_3|\,)\,|\chi(n)|\,dS. \end{aligned}$$

Вычислив верхнюю грань левой части по $\bar{\lambda}$ и нижнюю грань от правой по $\chi(n)$, получаем, что $\mathcal{J}_0 \leqslant \mathcal{J}^0$. Ясно, что если удастся подобрать $\chi(n)$ и $\bar{\lambda}$, которые доставляют равенство левой и правой частей в (П.1.4), то они будут решениями соответствующих вариационных задач и $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}^0$. Более того, в тех точках S, в которых

$$|h^{\mathsf{T}}(n)\bar{\lambda}| < (|n_1| + |n_2| + |n_3|)\,\sigma, \tag{П.1.5}$$

любой оптимальный очениватель $\chi(n) = 0$. Воспользуемся этими свойствами. Поскольку σ входит постоянным множителем в функционал прямой задачи, в дальнейшем при нахождении решений для простоты будем полагать $\sigma = 1$.

Оценивание Γ_{11}

Сначала оценим Γ_{11}, т.е. положим $\bar{a} = \operatorname{col}(1, 0, \ldots, 0)$. Возьмем $\chi(n)$ и $\bar{\lambda}$ равными решениям задачи $\mathcal{S}^0$ и двойственной к ней, полученным в [9, 10]:

$$\chi(n) = \frac{1}{2}\Big[\delta\left(n - \operatorname{col}(1,0,0)\right) + \delta\left(n - \operatorname{col}(-1,0,0)\right)\Big] \ \text{ и } \ \bar{\lambda} = \operatorname{col}(1, 0, \ldots, 0).$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что выбранный элемент $\chi(n)$ является допустимым для прямой задачи $\mathcal{S}$. Поскольку очевидно, что $n_1^2 \leqslant |n_1| \leqslant (|n_1| + |n_2| + |n_3|)$ при $n \in S$, то $\bar{\lambda}$ является допустимым элементом для двойственной задачи. Более того, левая часть в (П.1.4) равна правой и равна 1. Следовательно, выбранные элементы доставляют решения соответствующих вариационных задач.

Покажем, что решение прямой задачи $\mathcal{S}$ единственно. Действительно, при $|n_1| < 1$ очевидно, что $n_1^2 < |n_1| < (|n_1| + |n_2| + |n_3|)$ и условие (П.1.5) выполнено. Следовательно, любой оптимальный оцениватель отличен от нуля только при $n = \operatorname{col}(\pm 1, 0, 0)$. Легко убедиться, что при сосредоточении импульсов только в этих точках условие несмещенности (17) имеет единственное решение. Оценивание компонент Γ_{22} и Γ_{33} проводится аналогично и приводит к тем же по структуре результатам.

Оценивание ε_1

Оценим ε_1, т.е. положим $\bar{a} = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, 1, 0, 0)$. Возьмем $\chi(n)$ и $\bar{\lambda}$ равными решениям задачи $\mathcal{S}^0$ и двойственной к ней, полученным в [9, 10]:

$$\chi(n) = \frac{1}{2}\Big[\delta\left(n - \operatorname{col}(1,0,0)\right) - \delta\left(n - \operatorname{col}(-1,0,0)\right)\Big] \ \text{ и } \ \bar{\lambda} = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, 1, 0, 0).$$

Подстановкой проверяется, что $\chi(n)$ и $\bar{\lambda}$ являются допустимыми. Более того, левая часть в (П.1.4) равна правой и равна 1. Следовательно, выбранные элементы доставляют решения соответствующих вариационных задач.

Покажем, что решение прямой задачи $\mathcal{S}$ единственно. Действительно, при $|n_1| < 1$ очевидно, что $|n_1| < (|n_1| + |n_2| + |n_3|)$, и условие (П.1.5) выполнено. Следовательно, любой оптимальный оцениватель отличен от нуля только при $n = \operatorname{col}(\pm 1, 0, 0)$. Ясно, что тогда условие несмещенности (17) имеет единственное решение. Оценивание компонент ε_2 и ε_3 проводится аналогично и приводит к тем же по структуре результатам.

Оценивание $\Gamma_{12}+\Gamma_{21}$

Теперь оценим $\Gamma_{12}+\Gamma_{21}$, т.е. положим $\bar{a} = \mathrm{col}\,(0,0,0,1,0,\ldots,0)$. Возьмем $\chi(n)$ и $\bar{\lambda}$ равными решениям задачи $\mathcal{S}^0$ и двойственной к ней, полученным в [9, 10]:

$$\chi(n) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(n - \mathrm{col}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) - \delta\left(n - \mathrm{col}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \,\delta\left(n - \mathrm{col}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) - \delta\left(n - \mathrm{col}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)\right]$$

$$\text{и} \quad \bar{\lambda} = \mathrm{col}\,(0,0,0,2\sqrt{2},0,\ldots,0).$$

Подстановкой проверяется, что выбранный элемент $\chi(n)$ является допустимым для прямой задачи $\mathcal{S}$. Покажем, что $\bar{\lambda}$ является допустимым элементом.

Лемма 1. При $n \in S$ справедливо неравенство $2\sqrt{2}|n_1 n_2| \leqslant |n_1| + |n_2|$; причем равенство имеет место только при $n = \mathrm{col}\,(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ и при $n = \mathrm{col}\,(0,0,\pm 1)$.

Доказательство. 1. Сначала докажем вспомогательное утверждение: если $\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2 = 1$, то

$$\frac{2\sqrt{2}|\bar{n}_1\bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| + |\bar{n}_2|} \leqslant 1; \tag{П.1.6}$$

при этом равенство в (П.1.6) достигается тогда и только тогда, когда $|\bar{n}_1| = |\bar{n}_2|$.

Действительно,

$$\frac{2\sqrt{2}|\bar{n}_1\bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| + |\bar{n}_2|} \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{2\sqrt{2}|\bar{n}_1\bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| + |\bar{n}_2|}\right)^2 \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{8|\bar{n}_1\bar{n}_2|^2}{1 + 2|\bar{n}_1\bar{n}_2|} \leqslant 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 8\left(|\bar{n}_1\bar{n}_2| + \frac{1}{4}\right)\left(|\bar{n}_1\bar{n}_2| - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; |\bar{n}_1\bar{n}_2| \leqslant \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; (|\bar{n}_1| - |\bar{n}_2|)^2 \geqslant 0.$$

Ясно, что равенство в этой цепочке достигается тогда и только тогда, когда $|\bar{n}_1| = |\bar{n}_2|$.

2. Очевидно, что при $|n_3| = 1$ лемма верна. Поэтому далее положим $|n_3| < 1$. Рассмотрим два случая: (а) $n_3 \neq 0$; (б) $n_3 = 0$.

В случае (а)

$$\frac{2\sqrt{2}|n_1 n_2|}{|n_1| + |n_2|} < \frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}}\,\frac{2\sqrt{2}|n_1 n_2|}{|n_1| + |n_2|} = \frac{2\sqrt{2}|\bar{n}_1\bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| + |\bar{n}_2|},$$

где

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}}\, n_1, \quad \bar{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}}\, n_2, \quad \bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2 = 1.$$

По доказанному утверждению (П.1.6) последняя величина в цепочке не превышает единицы.

В случае (б) $n_1^2 + n_2^2 = 1$ и по доказанному утверждению (П.1.6) рассматриваемое отношение не превышает единицы, причем равенство единице достигается тогда и только тогда, когда $|n_1| = |n_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что $2\sqrt{2}|n_1 n_2| \leqslant |n_1| + |n_2| + |n_3|$, причем равенство достигается только при $n = \mathrm{col}\,(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Действительно, если $n_3 \neq 0$, то в силу леммы $2\sqrt{2}|n_1 n_2| \leqslant |n_1| + |n_2| < |n_1| + |n_2| + |n_3|$. Если же $n_3 = 0$, то из леммы вытекает, что равенство возможно только при $|n_1| = |n_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $\bar{\lambda}$ является допустимым элементом двойственной задачи. На выбранных элементах левая и правая части в (П.1.4) принимают одинаковые значения и поэтому эти элементы являются решениями соответствующих вариационных задач.

При $n \neq \mathrm{col}\,(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ выполняется условие (П.1.5) и любой оптимальный оцениватель отличен от нуля только при $n = \mathrm{col}\,(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Нетрудно проверить, что при таких точках приложения импульсов условие несмещенности (17) имеет единственное решение. Оценивание компонент $\Gamma_{13} + \Gamma_{31}$ и $\Gamma_{23} + \Gamma_{32}$ проводится аналогично и приводит к тем же по структуре результатам.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 2. Решение задачи $\mathcal{P}$ проведем по той же схеме, что и задачи $\mathcal{S}$, но с более сложными выкладками. Двойственная задача к $\mathcal{P}$ также строится по общему правилу [24–26]:

$$\mathcal{I}^0 = \sup_{\lambda,\,\xi}\ \inf_{\Phi,\,\Psi}\ \mathcal{L}(\Phi, \Psi; \lambda, \xi), \tag{П.2.1}$$

где

$$\mathcal{L}(\Phi, \Psi; \lambda, \xi) = \sigma \int \sum_{i=1}^{3} |\Phi_i(n)|\, dS + \mu \int \sum_{i=1}^{3} |\Psi_i(n)|\, dS +$$
$$+ \lambda^{\mathsf{T}} \left(a - \int \begin{pmatrix} n \otimes \Phi(n) \\ \Phi(n) \end{pmatrix} dS \right) + \int \xi^{\mathsf{T}}(n) \Big(\Psi(n) - \hat{n}\, \Phi(n) \Big)\, dS$$

есть функция Лагранжа[2], а λ, ξ – множители Лагранжа: $\lambda = \mathrm{col}(\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_{12}) \in \mathbb{R}^{12}$, $\xi(n)\colon S \to \mathbb{R}^3$ – всюду на S определенная функция с интегрируемыми по Лебегу компонентами $\xi_i(n)$, $i = 1, 2, 3$. Явно вычисляя нижнюю

[2] Строго говоря, это эвристическая функция Лагранжа, так как вопрос об общем виде непрерывного линейного функционала на $\mathcal{F}$ открыт.

грань в (П.2.1), нетрудно показать, что двойственная задача примет следующий вид:

$$\mathcal{I}^0 = \sup_{\lambda,\, \xi(n)} a^{\mathsf{T}} \lambda \tag{П.2.2}$$

при условиях

$$|\, H_i(n)| \leqslant \sigma, \quad |\, \xi_i(n)| \leqslant \mu, \quad i = 1, 2, 3; \quad n \in S, \tag{П.2.3}$$

где

$$\begin{aligned} H_1(n) &= \lambda_1 n_1 + \lambda_4 n_2 + \lambda_7 n_3 + \lambda_{10} - \xi_2(n) n_3 + \xi_3(n) n_2, \\ H_2(n) &= \lambda_2 n_1 + \lambda_5 n_2 + \lambda_8 n_3 + \lambda_{11} - \xi_3(n) n_1 + \xi_1(n) n_3, \\ H_3(n) &= \lambda_3 n_1 + \lambda_6 n_2 + \lambda_9 n_3 + \lambda_{12} - \xi_1(n) n_2 + \xi_2(n) n_1. \end{aligned} \tag{П.2.4}$$

Для любого допустимого элемента $(\Phi(n), \Psi(n))$ прямой задачи (12), (13) и любого допустимого элемента $(\lambda, \xi(n))$ двойственной задачи (П.2.2)–(П.2.4) справедливо соотношение, аналогичное (П.1.4):

$$\begin{aligned} a^{\mathsf{T}} \lambda &= \int \lambda^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} n \otimes \Phi(n) \\ \Phi(n) \end{pmatrix} dS + \int \xi^{\mathsf{T}}(n) \left(\Psi(n) - \hat{n}\, \Phi(n) \right) dS = \\ &= \int \sum_{i=1}^{3} H_i(n) \Phi_i(n) + \sum_{i=1}^{3} \xi_i(n) \Psi_i(n) \, dS \leqslant \\ &\leqslant \sigma \int \sum_{i=1}^{3} |\Phi_i(n)| \, dS + \mu \int \sum_{i=1}^{3} |\Psi_i(n)| \, dS. \end{aligned} \tag{П.2.5}$$

Вычислив верхнюю грань левой части по λ и нижнюю грань от правой по $(\Phi(n), \Psi(n))$, получаем, что $\mathcal{I}_0 \leqslant \mathcal{I}^0$. Ясно, что если удастся подобрать $(\Phi(n), \Psi(n))$ и $(\lambda, \xi(n))$, которые доставляют равенство левой и правой частей в (П.2.5), то они будут решениями соответствующих вариационных задач и $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}^0$. Более того, в тех точках S, в которых

$$|\, H_i(n)| < \sigma \quad \text{или} \quad |\, \xi_i(n)| < \mu, \tag{П.2.6}$$

для любой оптимальной пары $(\Phi(n), \Psi(n))$ соответствующая компонента $\Phi_i(n)$ или $\Psi_i(n)$ равна нулю. При решении задачи $\mathcal{P}$, как и при решении задачи $\mathcal{S}$ выше, будем полагать $\sigma = 1$ для упрощения формул.

Оценивание Γ_{11}

Положим $a = \mathrm{col}\,(1, 0, \ldots, 0)$. Возьмем

$$\Phi(n) = \mathrm{col}\left(\frac{1}{2} \delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0) \right) - \frac{1}{2} \delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0) \right), 0, 0 \right), \quad \Psi(n) = 0;$$

$$\lambda = \mathrm{col}\,(1, 0, \ldots, 0), \quad \xi(n) = 0.$$

Очевидно, что они являются допустимыми и на них значения функционалов обеих задач в (П.2.5) совпадают и равны 1. Следовательно, выбранные элементы являются решениями. При этом

$$H_1(n) = n_1, \quad H_2(n) = H_3(n) = 0,$$

а тогда любой оптимальный оцениватель сосредоточен только в точках S таких, что $|n_1| = 1$, и, кроме того, $\Phi_2(n) = \Phi_3(n) = 0$. Ясно, что условие несмещенности (10) с импульсами лишь в точках $\mathrm{col}\,(\pm 1, 0, 0)$ имеет единственное решение, указанное выше. Полученному единственному решению задачи $\mathcal{P}$, очевидно, можно придать скаляризованный вид:

$$\Phi(n) = \left(\frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0)\right) + \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0)\right)\right) n.$$

Оценивание Γ_{22} и Γ_{33} проводится аналогично и приводит к тем же по структуре результатам.

Оценивание Γ_{21}

Положим $a = \mathrm{col}\,(0, 1, \dots, 0)$. Возьмем

$$\Phi(n) = \mathrm{col}\left(0, \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0)\right) - \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0)\right), 0\right),$$
$$\Psi_1(n) = \Psi_2(n) = 0, \quad \Psi_3(n) = -n_1\Phi_2(n);$$
$$\lambda = \mathrm{col}\,(0, 1+\mu, 0, -1-\mu, 0, \dots, 0), \quad \xi(n) = \mathrm{col}\,(0, 0, \mu).$$

Очевидно, что они являются допустимыми и на них значения функционалов обеих задач в (П.2.5) совпадают и равны $1+\mu$. Следовательно, выбранные элементы являются решениями. При этом

$$H_1(n) = n_2, \quad H_2(n) = n_1, \quad H_3(n) = 0,$$

а тогда первая компонента любого оптимального оценивателя сосредоточена только в точках $\mathrm{col}\,(0, \pm 1, 0)$, а вторая – только в точках $\mathrm{col}\,(\pm 1, 0, 0)$; кроме того, $\Phi_3(n) = 0$. Нетрудно убедиться, что условие несмещенности (10) с импульсами лишь в этих точках имеет единственное решение, указанное выше. Ясно, что ему нельзя придать скаляризованный вид. Оценивание остальных Γ_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ проводится аналогично и приводит к тем же по структуре результатам.

Оценивание ε_1

Положим $a = \mathrm{col}\,(0, \dots, 0, 1, 0, 0)$. Возьмем

$$\Phi(n) = \mathrm{col}\left(\frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0)\right) + \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0)\right), 0, 0\right), \quad \Psi(n) = 0;$$
$$\lambda = \mathrm{col}\,(0, \dots, 0, 1, 0, 0), \quad \xi(n) = 0.$$

Очевидно, что они являются допустимыми и на них значения функционалов обеих задач в (П.2.5) совпадают и равны 1. Следовательно, выбранные элементы являются решениями. При этом

$$H_1(n) = 1, \quad H_2(n) = H_3(n) = 0, \tag{П.2.7}$$

а тогда согласно (П.2.6) $\Phi_2(n) = \Phi_3(n) = 0$. Полученному решению задачи $\mathcal{P}$ также можно придать скаляризованный вид:

$$\Phi(n) = \left(\frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0)\right) - \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0)\right)\right) n.$$

Покажем, что решение единственно. Действительно, так как $\xi(n) = 0$, то из (П.2.6) следует, что для любого решения $(\Phi(n), \Psi(n))$ задачи $\mathcal{P}$ справедливо тождество $\Psi(n) = 0$, а тогда $n_3\Phi_1(n) = 0$ и $n_2\Phi_1(n) = 0$. Следовательно, $\Phi_1(n)$ сосредоточен и на дуге большого круга $n_3 = 0$, и на дуге большого круга $n_2 = 0$. Это означает, что $\Phi_1(n)$ сосредоточен только в точках $\mathrm{col}\,(\pm 1, 0, 0)$. Из условий несмещенности, как и ранее, следует, что полученное решение единственно. Можно рассуждать по-другому. Из условия $\Psi(n) = 0$ вытекает, что $\Phi(n) = \chi(n)n$, где $\chi(n) = n^{\mathsf{T}}\Phi(n)$ – скалярная интегрируемая функция. Тогда задача $\mathcal{P}$ сводится к задаче $\mathcal{S}$, для которой, как доказано выше в Приложении 1, решение единственно. Оценивание ε_2 и ε_3 проводится аналогично и приводит к тем же по структуре результатам.

Оценивание $\Gamma_{12} + \Gamma_{21}$

Положим $a = \mathrm{col}\,(0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Рассмотрим два случая: (а) $\mu \leqslant \sqrt{2} - 1$; (б) $\mu > \sqrt{2} - 1$. Сначала исследуем случай (а). Возьмем

$$\begin{gathered}\Phi(n) = \mathrm{col}\left(\frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(0,1,0)\right) - \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(0,-1,0)\right),\right.\\ \left.\frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(1,0,0)\right) - \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}(-1,0,0)\right),\ 0\right),\end{gathered}$$

$$\Psi_1(n) = \Psi_2(n) = 0, \quad \Psi_3(n) = n_2\Phi_1(n) - n_1\Phi_2(n);$$

$$\lambda = \mathrm{col}\,(0, 1+\mu, 0, 1+\mu, 0, \ldots, 0), \quad \xi_1(n) = \xi_2(n) = 0,$$

при $\sqrt{1 - n_3^2} \geqslant \dfrac{1}{1+\mu}$ $$\xi_3(n) = \begin{cases} -1 - \mu + \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{|n_2|}, & \text{если } |n_2| \geqslant \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{1+\mu}, \\ 0, & \text{если } \max\left(|n_1|, |n_2|\right) < \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{1+\mu}, \\ 1 + \mu - \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{|n_1|}, & \text{если } |n_1| \geqslant \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{1+\mu}, \end{cases}$$

при $\sqrt{1 - n_3^2} < \dfrac{1}{1+\mu}$ $$\xi_3(n) = 0.$$

Такая конструкция $\xi_3(n)$ означает, что вдоль дуги большого круга, проходящего через точки $\mathrm{col}\,(0,0,\pm 1)$ и $\mathrm{col}\,(n_1, n_2, n_3)$, значения $\xi_3(n)$ не меняются (при $\sqrt{1-n_3^2} \geqslant \frac{1}{1+\mu}$).

Подстановкой легко убедиться, что $\Phi(n)$ является допустимым элементом прямой задачи. Покажем, что пара $(\lambda, \xi(n))$ является допустимым элементом двойственной задачи, т.е. она удовлетворяет (П.2.3), (П.2.4). Действительно, ясно, что $|\,\xi_3(n)| \leqslant \mu$, а остальные ограничения принимают вид

$$|\,(1+\mu+\xi_3(n))\,n_2| \leqslant 1, \quad |\,(1+\mu-\xi_3(n))\,n_1| \leqslant 1, \quad |0| \leqslant 1. \tag{П.2.8}$$

Проверим выполнение первого условия (П.2.8).

При $\sqrt{1-n_3^2} \geqslant \frac{1}{1+\mu}$ функция $\xi_3(n)$ непрерывна на S и

$$|\,(1+\mu+\xi_3(n))\,n_2| = \tag{П.2.9}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{1-n_3^2}\,(\leqslant 1), & \text{если } |n_2| \geqslant \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{1+\mu}, \\ (1+\mu)\,|n_2|\,(<1), & \text{если } \max(|n_1|,|n_2|) < \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{1+\mu}, \\ \left(2+2\mu-\dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{|n_1|}\right)|n_2|, & \text{если } |n_1| \geqslant \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{1+\mu}. \end{cases}$$

Докажем оставшееся неравенство $\left(2+2\mu-\frac{\sqrt{1-n_3^2}}{|n_1|}\right)|n_2| \leqslant 1$. Его можно представить в виде

$$\left(2+2\mu-\frac{1}{|\bar n_1|}\right)|\bar n_2|\sqrt{1-n_3^2} \leqslant 1,$$

где

$$\bar n_1 = \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}}\,n_1, \quad \bar n_2 = \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}}\,n_2, \quad \bar n_1^2+\bar n_2^2 = 1.$$

Заметим, что в рассматриваемой области

$$\left(2\sqrt{2}-\frac{1}{|\bar n_1|}\right)|\bar n_2| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}|\bar n_1||\bar n_2| \leqslant |\bar n_1|+|\bar n_2|,$$

причем последнее неравенство имеет место в силу леммы из Приложения 1. Справедлива цепочка неравенств

$$\left(2+2\mu-\frac{1}{|\bar n_1|}\right)|\bar n_2|\sqrt{1-n_3^2} \leqslant \tag{П.2.10}$$

$$\leqslant \left(2\sqrt{2}-\frac{1}{|\bar n_1|}\right)|\bar n_2|\sqrt{1-n_3^2} \leqslant \sqrt{1-n_3^2} \leqslant 1.$$

При $\sqrt{1-n_3^2} < \frac{1}{1+\mu}$ ограничение для $H_1(n)$ примет вид $|\,(1+\mu)\,n_2| \leqslant 1$. Так как $|n_2| \leqslant \sqrt{n_1^2+n_2^2} = \sqrt{1-n_3^2} < \frac{1}{1+\mu}$, то $|\,(1+\mu)\,n_2| < 1$. Аналогично доказывается, что выполнено второе неравенство в (П.2.8). Итак, выбранные элементы допустимы, а значения функционалов обеих задач в (П.2.5) совпадают и равны $2 + 2\mu$. Поэтому эти элементы являются решениями при $\mu \leqslant \sqrt{2} - 1$. Отметим, что для рассматриваемого случая оценка для $\Gamma_{12} + \Gamma_{21}$ оказалась равной сумме оценок для Γ_{12} и Γ_{21}.

Обсудим вопрос о единственности решения задачи $\mathcal{P}$ при $\mu < \sqrt{2} - 1$. Рассмотрим произвольное решение $(\Phi(n), \Psi(n))$ задачи $\mathcal{P}$. Так как в третьем соотношении (П.2.8) имеет место строгое неравенство, то согласно (П.2.6) $\Phi_3(n) = 0$. Далее, поскольку $\xi_1(n) = \xi_2(n) = 0$, то в силу (П.2.6) $\Psi_1(n) = \Psi_2(n) = 0$, а тогда с учетом полученного тождества $\Phi_3(n) = 0$ имеем, что $n_3\Phi_2(n) = n_3\Phi_1(n) = 0$, откуда следует, что $\Phi_1(n)$ и $\Phi_2(n)$ сосредоточены только на дуге большого круга $n_3 = 0$.

При $\mu < \sqrt{2} - 1$ в цепочке (П.2.10) первое неравенство является строгим и в силу (П.2.6) вне множества $|n_2| \geqslant \frac{1}{1+\mu}$ компонента $\Phi_1(n)$ равна нулю. Совершенно аналогично исследовав второе соотношение в (П.2.8), можно придти к выводу, что вне множества $|n_1| \geqslant \frac{1}{1+\mu}$ компонента $\Phi_2(n)$ также равна нулю. Это означает, что носители $\Phi_1(n)$ и $\Phi_2(n)$ не пересекаются.

Поскольку $|\xi_3(n)| < \mu$ при $|n_1| \neq 1$ и $|n_2| \neq 1$, то согласно (П.2.6)

$$\Psi_3(n) = 0 \quad \text{при} \quad |n_1| \neq 1 \quad \text{и} \quad |n_2| \neq 1. \tag{П.2.11}$$

При $\frac{1}{1+\mu} \leqslant |n_2| < 1$ (на части носителя $\Phi_1(n)$) по доказанному $\Phi_2(n) = 0$, а тогда из (П.2.11) получается, что $n_2\Phi_1(n) = 0$, т.е. вне двух точек $|n_2| = 1$ компонента $\Phi_1(n) = 0$. Совершенно аналогично можно показать, что вне двух точек $|n_1| = 1$ компонента $\Phi_2(n) = 0$. Уравнение несмещенности (10), записанное для точек $\mathrm{col}\,(\pm 1, 0, 0)$ и $\mathrm{col}\,(0, \pm 1, 0)$, очевидно имеет единственное решение. Для $\mu < \sqrt{2} - 1$ единственность доказана.

Теперь исследуем случай (б) ($\mu > \sqrt{2} - 1$). Возьмем

$$\Phi(n) = \left(\frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) - \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right) - \frac{1}{2}\delta\left(n - \mathrm{col}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)\right) n,$$

$\Psi(n) = 0$;

$$\lambda = \mathrm{col}\,(0, \sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0, \ldots, 0), \quad \xi_1(n) = \xi_2(n) = 0,$$

$$\text{при } \sqrt{1 - n_3^2} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \xi_3(n) = \begin{cases} -\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{1 - n_3^2}}{|n_2|}, & \text{если } |n_2| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - n_3^2}, \\ \sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{1 - n_3^2}}{|n_1|}, & \text{если } |n_1| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - n_3^2}, \end{cases}$$

$$\text{при } \sqrt{1 - n_3^2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \xi_3(n) = 0.$$

Так же, как и для случая (a), вдоль дуги большого круга, проходящего через точки $\operatorname{col}(0,0,\pm 1)$ и $\operatorname{col}(n_1,n_2,n_3)$, значения $\xi_3(n)$ не меняются (при $\sqrt{1-n_3^2} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$).

Подстановкой легко убедиться, что $\Phi(n)$ является допустимым элементом прямой задачи. Покажем, что пара $(\lambda, \xi(n))$ является допустимым элементом двойственной задачи, т.е. она удовлетворяет (П.2.3), (П.2.4). Действительно, ясно, что $|\,\xi_3(n)| \leqslant \sqrt{2}-1 < \mu$, а остальные ограничения принимают вид

$$\text{(П.2.12)} \qquad |\left(\sqrt{2}+\xi_3(n)\right) n_2| \leqslant 1, \quad |\left(\sqrt{2}-\xi_3(n)\right) n_1| \leqslant 1, \quad |0| \leqslant 1.$$

Проверим выполнение первого условия (П.2.12).

При $\sqrt{1-n_3^2} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ функция $\xi_3(n)$ непрерывна на S и

$$\text{(П.2.13)} \qquad \left|\left(\sqrt{2}+\xi_3(n)\right) n_2\right| =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{1-n_3^2}\,(\leqslant 1), & \text{если } |n_2| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-n_3^2}, \\ \left(2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{1-n_3^2}}{|n_1|}\right)|n_2|, & \text{если } |n_1| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-n_3^2}. \end{cases}$$

Требуемое неравенство $\left(2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{1-n_3^2}}{|n_1|}\right)|n_2| \leqslant 1$ можно представить в виде

$$\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{|\bar{n}_1|}\right)|\bar{n}_2|\sqrt{1-n_3^2} \leqslant 1,$$

где

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}}\,n_1, \quad \bar{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}}\,n_2, \quad \bar{n}_1^2+\bar{n}_2^2 = 1.$$

Заметим, что в рассматриваемой области

$$\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{|\bar{n}_1|}\right)|\bar{n}_2| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}|\bar{n}_1||\bar{n}_2| \leqslant |\bar{n}_1|+|\bar{n}_2|,$$

причем второе неравенство справедливо согласно лемме 1. Тогда

$$\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{|\bar{n}_1|}\right)|\bar{n}_2|\sqrt{1-n_3^2} \leqslant \sqrt{1-n_3^2} \leqslant 1.$$

При $\sqrt{1-n_3^2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ограничение для $H_1(n)$ примет вид $|\sqrt{2}n_2| \leqslant 1$. Так как $|n_2| \leqslant \sqrt{n_1^2+n_2^2} = \sqrt{1-n_3^2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $|\sqrt{2}n_2| < 1$. Аналогично доказывается, что выполнено второе соотношение в (П.2.12). Итак, выбранные элементы допустимы, а значения функционалов обеих задач в (П.2.5) совпадают и равны $2\sqrt{2}$. Поэтому выбранные элементы являются решениями соответствующих задач при $\mu > \sqrt{2}-1$. Отметим, что в рассматриваемом случае оценка для $\Gamma_{12}+\Gamma_{21}$ оказалась не равной сумме оценок для Γ_{12} и Γ_{21}.

Поскольку $|\xi_i(n)| < \mu$, то в силу (П.2.6) $\Psi(n) = 0$. Тогда очевидно, что $\Phi(n) = \chi(n)\, n$, где $\chi(n) = n^{\mathsf{T}}\Phi(n)$ – скалярная интегрируемая функция, и задача $\mathcal{P}$ сводится к задаче $\mathcal{S}$, для которой, как доказано выше в Приложении 1, решение единственно.

В случае $\mu = \sqrt{2}-1$ легко проверить, что $\Phi(n) = \chi(n)\, n$, где $\chi(n)$ – решение задачи $\mathcal{S}$, также является решением задачи $\mathcal{P}$, т.е. единственность нарушается. Заметим, что если у выпуклой задачи есть два решения, то и весь отрезок, соединяющий эти решения, является решением.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Доказательство теоремы 3. Очевидно,

$$\mathcal{D}(\mathcal{R}) \geqslant \sup_{(q,\alpha,\varrho)\in\mathcal{A}\colon\, z(n)=0} |\mathcal{R}(0) - a^{\mathsf{T}}q\,| \geqslant \sup_{(q,\alpha,\varrho)\in\mathcal{A}\colon\, z(n)=0} |\,a^{\mathsf{T}}q\,| = \sup_{(q,\alpha,\varrho)\in\mathcal{A}\colon\, z(n)=0} a^{\mathsf{T}}q;$$

последнее равенство имеет место в силу центральной симметрии $\mathcal{A}$.

Заметим, что множество $\{(q,\alpha,\varrho)\in\mathcal{A}\colon z(n)=0\}$ можно представить в виде

$$|\gamma_1 n_1 + \gamma_4 n_2 + \gamma_7 n_3 + \varepsilon_1 - \alpha_2(n) n_3 + \alpha_3(n) n_2| \leqslant \sigma,$$
$$|\gamma_2 n_1 + \gamma_5 n_2 + \gamma_8 n_3 + \varepsilon_2 - \alpha_3(n) n_1 + \alpha_1(n) n_3| \leqslant \sigma,$$
$$|\gamma_3 n_1 + \gamma_6 n_2 + \gamma_9 n_3 + \varepsilon_3 - \alpha_1(n) n_2 + \alpha_2(n) n_1| \leqslant \sigma.$$

Поэтому

$$\mathcal{D}(\mathcal{R}) \geqslant \sup_{(q,\alpha,\varrho)\in\mathcal{A}\colon\, z(n)=0} a^{\mathsf{T}}q = \mathcal{I}^0 = \mathcal{I}_0,$$

где $\mathcal{I}^0$ определяется двойственной задачей (П.2.2)–(П.2.4), а $\mathcal{I}_0$ есть гарантированная точность оценивания в задаче $\mathcal{P}$, в которой рассматриваются только линейные оцениватели из класса $\mathcal{F}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космические исследования. 1964. Т. 2. № 5. С. 713–715.
2. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
4. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания. М.: Препринт № 71. Ин-т прикл. мат. им. М.В. Келдыша РАН. 2010.
5. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.

6. *Белоусов Л.Ю.* Оценивание параметров движения космических аппаратов. М.: Физматлит, 2002.

7. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.

8. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht–Boston–London: Springer Science+Business Media, B.V., 2013.

9. *Бобрик Г.И., Матасов А.И.* Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока акселерометров // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 5. С. 8–14.

10. *Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Гарантирующее оценивание и l_1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.

11. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.

12. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. М.: МАКС Пресс, 2011.

13. *Браславский Д.А., Поликовский Е.Ф., Якубович А.М.* Метод калибровки трехосного блока акселерометров // Заявка на изобретение № 2422425/23 с приоритетом от 24 ноября 1976 г.

14. *Чесноков Г.И., Поликовский Е.Ф., Молчанов А.В., Кремер В.И.* Некоторые пути улучшения тактико-технических характеристик бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Сб. X СПб междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб.: ГНЦ РФ “ЦНИИ Электроприбор”, 2003. С. 155–164.

15. *Измайлов Е.А., Лепе С.Н., Молчанов А.В., Поликовский Е.Ф.* Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Сб. Юбилейная XV СПб междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб.: ГНЦ РФ “ЦНИИ Электроприбор”, 2008. С. 145–154.

16. *Матасов А.И.* Некоторые задачи идентификации параметров в инерциальной навигации // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Механико-мат. факультет МГУ, 1982.

17. *Матасов А.И.* Негладкие вариационные проблемы в задаче калибровки блока ньютонометров // Докл. РАН. 2019. Т. 487. № 1. С. 15–19.

18. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.

19. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Механико-мат. факультет МГУ, 1965.

20. *Марчук А.Г., Осипенко Л.Ю.* Наилучшее приближеие функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Математические заметки. 1975. Т. 17. № 3. С. 359–368.

21. *Milanese M., Tempo R.* Optimal algorithms theory for robust estimation and prediction // IEEE Transact. Autom. Control. 1985. AC-30. No. 8. P. 730–743.

22. *Матасов А.И.* Об оптимальности линейных алгоритмов гарантированного оценивания, I, II // Космические исследования. 1988. Т. 26. № 5–6. С. 643–653, 807–812.

23. *Матасов А.И.* Оптимальность линейных алгоритмов в “задаче о наихудшей корреляции” // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 1. С. 61–64.

24. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Книжный дом "Либроком", 2011.

25. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

26. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.

Поступила в редакцию 11.04.2019

После доработки 02.07.2019

Принята к публикации 18.07.2019