МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Захарян Юрий Норикович

Нули функционалов, неподвижные точки и совпадения отображений топологических пространств

Специальность 01.01.04 —
«Геометрия и топология»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, доцент
Фоменко Татьяна Николаевна
доктор физико-математических наук, доцент
Садовничий Юрий Викторович

Москва — 2021

Оглавление

Введение **3**

1 Принцип поиска нулей функционалов в метрических пространствах. Некоторые приложения и обобщения. **28**

1.1 Принцип поиска нулей функционалов в метрических пространствах 28

1.2 Неподвижные точки и совпадения отображений 31

1.3 Сжимающие отображения метрического пространства, и некоторые их обобщения 32

1.4 Совпадение пары типа Замфиреску многозначных отображений . 35

2 Сохранение существования нулей при изменении параметра у семейства функционалов на подмножестве метрического пространства **43**

2.1 Теорема Гранаса-Фригон, постановка задачи о сохранении существования нулей для семейства функционалов 43

2.2 Локальная теорема о существовании нулей функционала, поискового на подмножестве метрического пространства. 45

2.3 Сохранение существования нулей у параметрического семейства функционалов на подмножестве метрического пространства . . . 46

2.4 Сохранение существования прообразов замкнутого подпространства у параметрического семейства отображений и некоторые следствия 50

2.5 Сохранение существования точек совпадения и общих неподвижных точек параметрического семейства отображений метрических пространств 59

2.6 Сохранение существования точек совпадения для параметрического семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений 64

3 Принцип поиска нулей функционалов в калибровочном пространстве **70**

3.1 Калибровочные пространства 70

3.2 Сжимающие отображения калибровочного пространства и некоторые обобщения 73

3.3 Калибровочные пространства и конические метрики 75

3.4 Существование нулей однозначных поисковых вектор-функций в калибровочных пространствах 79

3.5 Проблема обобщения на многозначный случай, многозначная почти поисковая вектор-функция в калибровочных пространствах . 81

3.6 Существование нулей многозначных почти поисковых вектор-функций в калибровочных пространствах 86

3.7 Сохранение существования нулей у параметрического семейства многозначных почти поисковых вектор-функций на подмножестве калибровочного пространства 88

3.8 Приложения к теории неподвижных точек и совпадений отображений калибровочных пространств 92

Заключение **99**

Список литературы **100**

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности

Диссертация посвящена развитию аппроксимационного метода поиска нулей функционалов и его применению в теории неподвижных точек и совпадений отображений метрических и калибровочных пространств.

Основная задача теории неподвижных точек в общем случае состоит в отыскании условий на множество X и многозначное отображение $T : X \to 2^X$, гарантирующих существование такой точки $\xi \in X$, что $\xi \in T(\xi)$.

Классическим результатом теории неподвижных точек являтся так называемый принцип сжимающих отображений. Он был сформулирован и доказан С. Банахом (S. Banach) в 1922-ом году для случая однозначных отображений полных нормированных пространств [13] и Р. Качиополи (R. Caccioppoli) в 1930-ом году для случая однозначных отображений полных метрических пространств [18]. Также в работе [18] была доказана единственность неподвижной точки. Понятие сжимающего отображения и принцип сжимающих отображений были распространены на многозначный случай С. Б. Надлером (S. B. Nadler) в работах [43, 44]. Эти теоремы имеют важные приложения в теории дифференциальных уравнений и включений. Существует множество обобщений теорем Банаха-Качиополи и Надлера. Примером обобщения теоремы Банаха-Качиополи является теорема Т. Замфиреску (T. Zamfirescu), в которой условие сжатия заменено на более слабое условие, которое не требует, вообще говоря, даже непрерывности отображения [57]. Существует также многозначный вариант теоремы Замфиреску, доказанный в 2010-ом году в работе [45].

Обобщением задачи о существовании неподвижной точки является задача существования точки совпадения пары многозначных отображений $T, S : X \to 2^Y$ из множества X в множество Y, то есть такой точки $\xi \in X$, для которой $T(\xi) \cap S(\xi) \neq \varnothing$. Действительно, если $X = Y$, то неподвижная точка $\xi \in X$ отображения T — суть точка совпадения T и тождественного отображения на

X.

В диссертации рассматривается задача существования точки совпадения для так называемой пары типа Замфиреску многозначных отображений.

Кроме теорем о существовании неподвижной точки (точки совпадения) значительный интерес представляют методы и алгоритмы приближения к множеству неподвижных точек (точек совпадения). Так, для сжимающих многозначных отображений для любой точки $x_0 \in X$ можно построить последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in T(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, которая сходится к неподвижной точке. В работах [5, 6] Т. Н. Фоменко предложены алгоритмы приближений к: полному прообразу замкнутого подпространства Y_0 при отображении из метрического пространства X в метрическое пространство Y; множеству точек совпадения конечного набора отображений из X в Y; множеству общих неподвижных точек конечного набора отображений X в себя. В частности, в работах [5,6] были обобщены теоремы 1,2 работы А. В. Арутюнова [1]. Позднее, Т.Н. Фоменко в работе [28] предложила решение более общей задачи. Было введено понятие (α, β)-поискового функционала и был представлен алгоритм приближения к множеству нулей такого функционала. Позднее в работе [7] были предложены локальный и глобальный версии принципа поиска нулей функционалов. Принцип поиска нашел применение в теории неподвижных точек и совпадений. К примеру, для отображения T метрического пространства X в себя строится некоторый функционал, существования нуля которого гарантирует существование неподвижной точки отображения T. Важно, что условия на функционал, достаточные для существования нуля, не требуют непрерывности отображения T и даже полноты пространства X.

В диссертации показано, что результат о совпадении для пары типа Замфиреску многозначных отображений может быть получен из принципа поиска нулей функционалов.

Особый интерес представляет более общая задача о сохранении существования неподвижной точки при изменении параметра у параметрического семейства отображений. В однозначном случае данный вопрос изучался рядом авторов [21, 30, 35, 46, 47]. В данных работах, как правило, речь идет о гомотопиях. В многозначном случае данный вопрос был изучен в работе [29] А. Гранасом (A. Granas) и М. Фригон (M. Frigon). Авторы ввели понятие λ-сжимающего семейства $\{T_t\}_{t\in[0;1]}$ и показали, что при определенных условиях существование неподвижной точки отображения T_0 гарантирует существование неподвижной точки отображения T_1. Областью применения данных результатов являются задачи о продолжении решений дифференциальных уравнений и включений.

В диссертации также рассматривается задача о сохранении существования нулей у семейства многозначных поисковых функционалов при изменении числового параметра и соответствующие приложения к теории неподвижных точек и совпадений. В частности, рассматривается задача о сохранении существования точки совпадения для параметрического семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений. Значительным отличием результатов, например, от теоремы Гранаса-Фригон является то, что рассматриваемые семейства многозначных отображений не обязаны быть гомотопиями. Более того, непрерывность, вообще говоря, не требуется ни по параметру, ни по аргументу.

Естественным обобщением метрического пространства является калибровочное пространство, топология которого задается разделяющим семейством псевдометрик. Ряд метрических результатов о неподвижных точках имеют аналоги в случае калибровочных пространств. Так, теорема Банаха-Качиополи обобщена в работах [19, 42, 56]; теоремы Надлера и Гранаса-Фригон были обобщены в работе [32]. Эти результаты применимы для проблем существования и продолжения решений бесконечных систем дифференциальных уравнений и включений. В диссертации рассматривается распространение принципа поиска нулей функционалов на случай калибровочных пространств. Данная часть диссертации на защиту не выносится.

Цели и задачи диссертации

Основной целью диссертации является решение следующих задач.

1. Изучить задачу о совпадении пары многозначных отображений, обобщающую многозначный вариант теоремы Замфиреску.

2. Исследовать связь задачи о совпадении для пары типа Замфиреску многозначных отображений с принципом поиска нулей функционалов.

3. Ввести обобщение понятия многозначного (α, β)-поискового функционала на случай, когда областью определения является не все пространство, а некоторое его подмножество.

4. Получить результат о существовании нуля для многозначного (α, β)-поискового на подмножестве функционала.

5. Исследовать вопрос о сохранении существования нулей при изменении параметра у параметрического семейства многозначных поисковых функционалов.

6. Применить полученные результаты к метрическим задачам для многозначных отображений о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства, точек совпадения конечного набора отображений, общих неподвижных точек набора отображений, точек совпадения для семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

Дополнительной задачей диссертации является исследование возможности распространения результов, связанных с принципом поиска нулей функционалов, на случай калибровочных пространств.

Объект и предмет исследования

Диссертация посвящена развитию аппроксимационного метода поиска нулей функционалов и его применению в теории неподвижных точек и совпадений отображений метрических и калибровочных пространств.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты состоят в следующем.

1. Введено понятие пары типа Замфиреску многозначных отображений. Получена теорема о существовании точки совпадения для пары типа Замфиреску. Показано, что полученная теорема обобщает многозначный вариант теоремы Замфиреску.

2. Показано, что теорема о существовании точки совпадения для пары типа Замфиреску многозначных отображений является следствием принципа поиска нулей функционалов.

3. Введено понятие многозначного функционала, являющегося (α, β)-поисковым на подмножестве метрического пространства. Получена соответствующая модификация локальной версии принципа поиска нулей для такого функционала.

4. Введено понятие θ-непрерывного семейства многозначных функционалов. Доказана теорема о сохранении существовании нулей для такого семейства поисковых функционалов.

5. Получена теорема о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства для параметрического семейства многозначных отображений метрических пространств.

6. Доказана теорема о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений метрических пространств. В качестве следствия получено утверждение о сохранении существования общих неподвижных точек для параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений метрического пространства в себя.

7. Доказана теорема о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

Дополнительно изучены следующие задачи для случая калибровочных пространств.

1. Введено понятие однозначной (α, β)-поисковой вектор-функции. Доказана теорема о существовании нуля для такой вектор-функции.

2. Введены понятия многозначной (α, β)-поисковой вектор-функции и многозначной почти (α, β)-поисковой вектор-функции. В метрическом случае эти понятия совпадают. Однако в калибровочном пространстве это не так даже для однозначных вектор-функций. Приведен пример почти (α, β)-поисковой вектор-функции, не являющейся (α, β)-поисковой. Получены глобальная и локальная теоремы о существовании нуля многозначных почти поисковых вектор-функций.

3. Введено понятие многозначной вектор-функции, являющейся почти (α, β)-поисковой на подмножестве. Получена локальная теорема о существования нуля у такой вектор-функции.

4. Введено понятие θ-непрерывного семейства многозначных вектор-функций. Получена теорема о сохранении существовании нулей для такого семейства почти поисковых вектор-функций.

5. В качестве следствий получены: теорема о существовании точки совпадения конечного набора многозначных отображений калибровочных пространств; теорема о существовании общей неподвижной точки конечного набора многозначных отображений калибровочного пространства в себя; теорема о сохранении существования точек совпадения у параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений калибровочных пространств; теорема о сохранении существования общих неподвижных точек у параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений калибровочного пространства в себя.

Теоретическая и практическая значимость

Характер диссертации является теоретическим. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов по теории неподвижных точек и совпадений отображений метрических и калибровочных пространств.

Методы исследования

В диссертации используются методы общей топологии, теории метрических и калибровочных пространств, теории упорядоченных множеств.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты и понятия являются основными и выносятся на защиту.

1. Понятие пары типа Замфиреску многозначных отображений, теорема о существовании точки совпадения для пары типа Замфиреску.

2. Понятие многозначного функционала, являющегося (α, β)-поисковым на подмножестве метрического пространства. Локальная версия принципа поиска нулей для такого функционала.

3. Понятие θ-непрерывного семейства многозначных функционалов. Теорема о сохранении существовании нулей у θ-непрерывного семейства многозначных поисковых функционалов.

4. Теорема о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства для параметрического семейства многозначных отображений метрических пространств.

5. Теорема о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений метриче-

ских пространств. Теорема о сохранении существования общих неподвижных точек для параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений метрического пространства в себя.

6. Теорема о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации обоснованы при помощь строгих математических доказательств и докладывались на следующих международных конференциях и семинарах.

Международные конференции:

1. IV-ая международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», посвященная 90-летию со дня рождения профессора Ю. Г. Борисовича, Воронеж, 9–11 ноября 2020;

2. международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, 10–27 ноября 2020;

3. международный молодежный научный форум «Ломоносов-2021», Москва, 12–23 апреля 2021.

Научно-исследовательские семинары механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова:

1. научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 8 октября 2020;

2. научно-исследовательский семинар «Современные геометрические методы», кафедра дифференциальной геометрии и приложений, 3 марта 2021;

3. научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 4 марта 2021;

4. научно-исследовательский семинар «Алгебраическая топология и ее приложения» им. М. М. Постникова, кафедра высшей геометрии и топологии, 25 мая 2021;

5. научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и математическая физика», кафедра теории функции и функционального анализа, 31 мая 2021.

Основные результаты диссертации изложены в 7 публикациях: 4 научных статьи в журналах Scopus и RSCI, 1 исправление к статье в журнале Scopus и RSCI, 2 статьи в материалах международных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 107 страниц. Список литературы включает в себя 66 наименований. Результаты, выносимые на защиту, изложены в главах 1 и 2. Дополнительные исследования и результаты, которые не выносятся на защиту, изложены в третьей главе.

Содерждание работы

Во **введении** приводится обзор литературы, даются постановки задач и формулируются результаты работы.

В **первой главе** приводятся основные определения и формулировки, связанные с принципом поиска нулей функционалов и принципом сжимающих отображений. Вводится понятие пары типа Замфиреску многозначных отображений рассматривается задача существования точки совпадения для такой пары. Также изучена связь данной задачи с принципом поиска нулей функционалов.

Рассмотрим некоторые обозначения. Для метрического пространства (X, d) обозначим через $\mathrm{CB}(X)$ — семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X. Рассмотрим следующие обозначения:

$$d(x, X_0) := \inf_{x' \in X_0} d(x, x')$$

— расстояние от точки $x \in X$ до подмножества $X_0 \in \mathrm{CB}(X)$;

$$d(X_0, X_1) := \inf_{x \in X_0,\ x' \in X_1} d(x, x')$$

— расстояние между подмножествами $X_0, X_1 \in \mathrm{CB}(X)$;

$$D(X_0, X_1) := \max\{\sup_{x \in X_0} d(x, X_1),\ \sup_{x' \in X_1} d(x', X_0)\}$$

— расстояние Хаусдорфа между подмножествами $X_0, X_1 \in \mathrm{CB}(X)$.

Основным понятием, которое вводится в данной главе, является понятие пары типа Замфиреску многозначных отображений.

Определение. Пусть (X,r), (Y,d) — метрические пространства. Пару многозначных отображений $T,S : X \to \mathrm{CB}(Y)$ будем называть *парой типа Замфиреску*, если $T(X) \subset S(X)$ и существуют такие числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \le a_1 < 1$, $0 \le a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, что для любых $x, x' \in X$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(fz1) \quad D(T(x),T(x')) \le a_1 d(S(x),S(x'));$$
$$(fz2) \quad D(T(x),T(x')) \le a_2[d(S(x),T(x)) + d(S(x'),T(x'))];$$
$$(fz3) \quad D(T(x),T(x')) \le a_3[d(S(x),T(x')) + d(S(x'),T(x))].$$

Отметим, что если в данном определении положить $X = Y$, $S = Id_X$, то отображение T является многозначным отображением типа Замфиреску [45].

Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть (X,r), (Y,d) — полные метрические пространства, $T,S : X \to \mathrm{CB}(Y)$ — пара типа Замфиреску многозначных отображений. Пусть график $\mathrm{Graph}(S)$ отображения S замкнут и для некоторого $\gamma \ge 1$ и любых $x, x' \in X$ верно, что $r(x,x') \le \gamma d(S(x),S(x'))$.*

Тогда существует точка совпадения отображений T и S.

Кроме того, для каждой начальной точки $(x_0,y_0) \in \mathrm{Graph}(T)$ существует последовательность $\{(x_n,y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(T)$, сходящаяся к некоторой точке $(\xi,\eta) \in \mathrm{Graph}(T) \cap \mathrm{Graph}(S)$. То есть ξ — точка совпадения отображений T и S, η — соответствующее общее значение.

В первой главе также показано, что полученная теорема следует из многозначной версии принципа поиска нулей функционалов, приведенной в [7].

Основные понятия и результаты данной главы анонсированы в [60, 61] и опубликованы с доказательствами в [58].

Вторая глава посвящена вопросу сохранения существования нулей поисковых функционалов и приложениям к теории неподвижных точек и совпадений.

Вводится следующая модификация понятия многозначного (α,β)-поискового функционала [7].

Определение. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $X_0 \subset X$ и заданы $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha$. Многозначный функционал $\Phi : X_0 \rightrightarrows [0; +\infty)$ называется (α, β)-*поисковым на* X_0, если для каждой точки $x \in X_0$ и любых таких $R > 0$, $c \in \Phi(x)$, что $\overline{B}(x, R) \subset X_0$, $c \leq (\alpha - \beta)R$, существуют такая точка $x' \in X_0$ и такое значение $c' \in \Phi(x')$, что $d(x, x') \leq \frac{1}{\alpha} c$ и $c' \leq \frac{\beta}{\alpha} c$.

Если (X, d) — метрическое пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ многозначного функционала $\Phi : X \rightrightarrows [0; +\infty)$ является $\{0\}$-полным [28], если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi)$ такой, что $c_n \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и $0 \in \Phi(\xi)$.

Доказана следующая модификация локальной версии принципа поиска нулей многозначных функционалов [7].

Теорема. *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство,* $X_0 \subset X$*, и* $\Phi : X_0 \rightrightarrows [0; +\infty)$ *— многозначный* (α, β)*-поисковый на* X_0 *функционал,* $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$*,* $\beta < \alpha$*, с* $\{0\}$*-полным графиком. Пусть заданы* $x_0 \in X_0$*,* $c_0 \in \Phi(x_0)$ *и* $R > 0$ *такие, что*

1. $\overline{B}(x_0, R) \subset X_0$.

2. $c_0 \leq (\alpha - \beta)R$.

Тогда существует $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$ *— нуль функционала* Φ.

Вводится следующее новое понятие θ-непрерывного семейства многозначных функционалов.

Определение. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Пусть $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Однопараметрическое семейство многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows [0; +\infty)\}_{t \in [0;1]}$ будем называть θ-*непрерывным*, если для каждого $x \in X$, любых $t, t' \in [0; 1]$ и любого $c \in \Phi_t(x)$ существует такое значение $c' \in \Phi_{t'}(x)$, что $|c - c'| \leq |\theta(t) - \theta(t')|$.

Для любого подмножества $X_0 \subset X$, и семейства многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows [0; +\infty)\}_{t \in [0;1]}$ введем следующее обозначение:

$$M_{X_0}(\Phi) := \{(t, x) \in [0; 1] \times X_0 \mid 0 \in \Phi_t(x)\}.$$

В случае, если $X_0 = \overline{U}$ для некоторого открытого подмножества U и графики функционалов Φ_t являются $\{0\}$-полными для всех $t \in [0;1]$, то показано, что достаточным условием замкнутости множества $M_U(\Phi)$ является отсутствие нулей функционалов Φ_t, $t \in [0;1]$, на границе ∂U.

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство,* $U \subset X$ *— некоторое открытое подмножество в* X*,* $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ *— непрерывная возрастающая функция,* $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$*,* $\beta < \alpha$*. Пусть задано однопараметрическое* θ*-непрерывное семейство* $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows [0; +\infty)\}_{t\in[0;1]}$ *многозначных* (α, β)*-поисковых на* $\overline{U}$ *функционалов с* $\{0\}$*-полными графиками. Пусть также множество* $M = M_U(\Phi)$ *— замкнуто. Тогда, если существует элемент вида* $(0, x_0) \in M$*, то существует и элемент* $(1, x_1) \in M$*. Иными словами, если в* U *существует нуль функционала* Φ_0*, то в* U *существует нуль функционала* Φ_1*.*

Отметим, что достаточное условие замкнутости множества $M_U(\Phi)$ и утверждение данной теоремы остаются справедливыми, если в условии θ-непрерывности требовать существование $c' \in \Phi_{t'}(x)$ не для любых $c \in \Phi_t(x)$, а лишь для случая $c = 0$. Это позволяет не требовать непрерывности по параметру t.

В качестве одного из приложений полученной теоремы доказано утверждение о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства Y_0 для семейства многозначных отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y.

Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $Y_0 \subset Y$ — замкнутое подпространство в Y. Через $C(Y)$ обозначим семейство замкнутых непустых подмножеств Y. График многозначного отображения $T : X \to \mathrm{C}(Y)$ будем называть Y_0-полным, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(T)$, где $d(y_n, Y_0) \to 0$, сходится к некоторому элементу $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(T)$, где $\eta \in Y_0$.

Верна следующая теорема.

Теорема. *Пусть* (X, r)*,* (Y, d) *— метрические пространства,* $Y_0 \subset Y$ *— замкнутое подпространство в* Y*,* $U \subset X$ *— открытое подмножество* X*. Пусть* $T = \{T_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ *— однопараметрическое семейство многозначных отображений. Пусть для некоторых чисел* $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$*,* $\beta < \alpha$*, и непрерывной возрастающей функции* $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ *выполнены следующие условия:*

1. *Для любого* $t \in [0;1]$ *график* $\mathrm{Graph}(T_t)$ *является* Y_0*-полным.*

2. *Для любого* $t \in [0;1]$*, каждого* $x \in \overline{U}$ *и любых таких* $R > 0$*,* $y \in T_t(x)$*, что* $\overline{B}(x,R) \subset \overline{U}$ *и* $d(y,Y_0) \leq (\alpha-\beta)R$*, существуют такая точка* $x' \in \overline{U}$ *и такое значение, что* $y' \in T_t(x')$*, что* $r(x,x') \leq \frac{1}{\alpha}d(y,Y_0)$ *и* $d(y',Y_0) \leq \frac{\beta}{\alpha}d(y,Y_0)$*.*

3. *Для каждых* $t,t' \in [0;1]$ *и любого* $x \in \overline{U}$ *верно неравенство*

$$D(T_t(x),T_{t'}(x)) \leq |\theta(t')-\theta(t)|.$$

4. *На границе множества* U *нет прообразов подпространства* Y_0*, то есть* $T_t^{-1}(Y_0) \cap \partial U = \varnothing$*.*

Тогда если $T_0^{-1}(Y_0) \neq \varnothing$*, то* $T_1^{-1}(Y_0) \neq \varnothing$*.*

В качестве следствия получена теорема о сохранении существования точек совпадения для семейства конечного набора из m отображений, $m \geq 2$. Из этой теоремы, в частности, вытекает следующее утверждение о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства пар многозначных отображений, одно из которых является α-накрывающим, а второе является β-липшицевым при любом значении параметра $t \in [0;1]$.

Теорема. *Пусть* (X,r)*,* (Y,d) *— метрические пространства,* $U \subset X$ *— открытое подмножество* X*. Пусть* $T = \{T_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ *и* $S = \{S_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ *— два однопараметрических семейства многозначных отображений. Пусть для некоторых чисел* $\alpha,\beta \in [0;+\infty)$*,* $0 < \beta < \alpha$*, и непрерывной возрастающей функции* $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ *выполнены следующие условия:*

1. *Для любого* $t \in [0;1]$ *либо* $\mathrm{Graph}(T_t)$*, либо* $\mathrm{Graph}(S_t)$ *полон, и* $\mathrm{Graph}(T_t)$ *замкнут.*

2. *Для любого* $t \in [0;1]$ *отображение* T_t *—* α*-накрывающее, т.е. для любой точки* $x \in X$ *и* $R > 0$ *выполнено* $\bigcup\limits_{y\in T(x)} \overline{B}(y,\alpha R) \subset T(\overline{B}(x,R))$*.*

3. *Для любого* $t \in [0;1]$ *отображение* S_t *—* β*-липшицево, т.е. для любых точек* $x,x' \in X$ *верно* $D(T(x),T(x')) \leq \beta r(x,x')$*.*

4. *Пусть, кроме того, для каждых $t, t' \in [0;1]$ и любого $x \in \overline{U}$ верно неравенство*

$$D(T_t(x), T_{t'}(x)) + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \le |\theta(t') - \theta(t)|.$$

5. *Для любого $t \in [0;1]$ на границе множества U нет точек совпадения отображений T_t и S_t, то есть $\mathrm{Coin}(T_t, S_t) \cap \partial U = \varnothing$.*

Тогда если $\mathrm{Coin}(T_0, S_0) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Coin}(T_1, S_1) \neq \varnothing$.

Еще одним применением теоремы о сохранении нулей семейства поисковых функционалов является следующая теорема о сохранении существования точек совпадения для семейства конечных наборов многозначных отображений.

Теорема. *Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть заданы однопараметрические семейства многозначных отображений*

$$S = \{S_t \mid S_t : X \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]},\ T^k = \{T^k_t \mid T^k_t : \overline{U} \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]},\ 1 \le k \le m.$$

Пусть для некоторых $\alpha, \beta \in [0;+\infty)$, $\beta < \alpha$, $\gamma \ge 1$, $1 < q < \frac{\alpha\gamma}{\beta}$ непрерывной возрастающей функции $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1. *Для любого $t \in [0;1]$ график $\mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right) = \{(x, y) \in \overline{U} \times Y \mid y \in S_t(x)\}$ полон и $T^m_t(\overline{U}) \subset S_t(X)$.*

2. *Для любого $t \in [0;1]$ и любой фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subset \overline{U}$ всякая последовательность $\{y_n\}$, где $y_n \in S_t(x_n)$, является фундаментальной.*

3. *Для любого $t \in [0;1]$ и любых $x', x'' \in \overline{U}$ верно*

$$\max_{1\le k\le m}\{D(T^k_t(x'), T^k_t(x''))\} \le \frac{\beta}{\alpha\gamma q} d(S_t(x'), S_t(x'')).$$

4. *Для любых $t \in [0;1]$, $x \in \overline{U}$, $y^0 \in S_t(x)$ и любого $1 \le k \le m-1$:*

$$D(\{y^0\}, T^k_t(x)) \le \gamma d(y^0, T^m_t(x)),\ 1 \le k \le m-1.$$

5. *Для любых* $t \in [0;1]$ *и любых* $x', x'' \in X$ *верно*

$$r(x', x'') \leq \frac{1}{\alpha} d(S_t(x'), S_t(x'')).$$

6. *Для любого* $x \in \overline{U}$ *и любых* $t, t' \in [0;1]$ *верно*

$$\max_{1 \leq k \leq m} \{D(T_t^k(x), T_{t'}^k(x))\} + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \leq |\theta(t') - \theta(t)| \,.$$

7. *Для любого* $t \in [0;1]$ *на границе множества* U *нет точек совпадения отображений* S_t, $T_t^1, \ldots, T_t^m$, *т.е.* $\mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m) \cap \partial U = \varnothing$.

Тогда если $\mathrm{Coin}(S_0, T_0^1, \ldots, T_0^m) \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Coin}(S_1, T_1^1, \ldots, T_1^m) \neq \varnothing$.

Положим $Y = X$ — полное пространство, $S_t = \mathrm{Id}_X$ для любого $t \in [0;1]$, $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha \leq 1$. Получим утверждение о сохранении существования общих неподвижных точек семейства конечных наборов многозначных отображений.

Для формулировки следующей теоремы нам понадобится следующая модификация определения пары типа Замфиреску многозначных отображений.

Определение. Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $X_0 \subset X$ — некоторое подмножество. Пару многозначных отображений (T, S) $T : X_0 \to \mathrm{CB}(Y)$, $S : X \to \mathrm{CB}(Y)$, будем называть *парой типа Замфиреску на* X_0, если $T(X_0) \subset S(X)$ и существуют такие числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \leq a_1 < 1$, $0 \leq a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, что для любых $x, x' \in X_0$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\begin{aligned}
&(fz1) \quad D(T(x), T(x')) \leq a_1 d(S(x), S(x'));\\
&(fz2) \quad D(T(x), T(x')) \leq a_2[d(S(x), T(x)) + d(S(x'), T(x'))];\\
&(fz3) \quad D(T(x), T(x')) \leq a_3[d(S(x), T(x')) + d(S(x'), T(x))].
\end{aligned}$$

Заключительным результатом второй главы является следующая теорема о сохранении существования точек совпадения для семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

Теорема. *Пусть* (X, r), (Y, d) *— метрические пространства,* $U \subset X$ *— открытое подмножество* X. *Пусть заданы однопараметрические семейства многозначных отображений*

$$S = \{S_t \mid S_t : X \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t \in [0;1]}, \;\; T = \{T_t \mid T_t : \overline{U} \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t \in [0;1]}.$$

Пусть для некоторых $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \le a_1 < 1$, $0 \le a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, *некоторого* $\gamma > 1$, *и непрерывной возрастающей функции* $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ *выполнены следующие условия:*

1. *Для любого* $t \in [0;1]$ *график* $\mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right) = \{(x,y) \in \overline{U} \times Y \mid y \in S_t(x)\}$ *полон.*

2. *Для любого* $t \in [0;1]$ *и любой фундаментальной последовательности* $\{x_n\} \subset \overline{U}$ *всякая последовательность* $\{y_n\}$, *где* $y_n \in S_t(x_n)$, *является фундаментальной.*

3. *Для любого* $t \in [0;1]$ *пара отображений* (T_t, S_t) *является парой типа Замфиреску на* $\overline{U}$.

4. *Для любых* $t \in [0;1]$ *и любых* $x', x'' \in X$ *верно*
$$r(x', x'') \le \gamma d(S_t(x'), S_t(x'')).$$

5. *Для любого* $x \in \overline{U}$ *и любых* $t, t' \in [0;1]$ *верно*
$$D(T_t(x), T_{t'}(x)) + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \le |\theta(t') - \theta(t)|\,.$$

6. *Для любого* $t \in [0;1]$ *на границе множества* U *нет точек совпадения отображений* T_t *и* S_t, *т.е.* $\mathrm{Coin}(S_t, T_t) \cap \partial U = \varnothing$.

Тогда если $\mathrm{Coin}(S_0, T_0) \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Coin}(S_1, T_1) \neq \varnothing$.

Отметим, что полученные теоремы о сохранении существования точек совпадения являются обобщениями теоремы Гранаса-Фригон.

Основные результаты данной главы анонсированы в [60, 61] и опубликованы с доказательствами в [59, 62].

В **третьей главе** исследуется проблема поиска нулей функционалов на калибровочных пространствах.

Калибровочным пространством (в англ. литературе «gauge space» [25]) называется такая пара $(X, \mathcal{D})$, где X — непустое множество, $\mathcal{D} = \{d_i : X \times X \to [0; +\infty)\}_{i \in I}$ — разделяющее семейство псевдометрик [25]. Топология на X задается предбазой
$$\mathcal{S} := \{B_i(x, R) \mid i \in I, x \in X, R > 0\},$$

где $B_i(x,R) := \{x' \in X \mid d_i(x,x') < R\}$ — открытый шар относительно псевдометрики d_i.

В случае калибровочного пространства оказывается удобным вместо семейства псевдометрик рассматривать их прямое произведение. Пусть I — непустое множество индексов. Рассмотрим произведение $\mathcal{L} := \mathbb{R}^I$ заданное, в тихоновской топологии. Тогда $\mathcal{L}$ — топологическое векторное пространство, линейные операции которого задаются покомпонентно. Рассмотрим на $\mathcal{L}$ покомпонентную операцию умножения, то есть для любых векторов $c, c' \in \mathcal{L}$ пусть

$$c \cdot c' = (c_i \cdot (c')_i)_{i \in I}\,.$$

Тогда $\mathcal{L}$ — коммутативная алгебра с вектор-единицей $1 = (1)_{i\in I}$. Отметим, что операция умножения является непрерывной, как отображение $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{C} = [0; +\infty)^I$. Тогда $\mathcal{C}$ — замкнуто в $\mathcal{L}$. Также $\mathcal{C}$ — собственный конус в $\mathcal{L}$, то есть множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\mathcal{C} \neq \varnothing$ и $\mathcal{C} \neq \{0\}$.
2. $b_1 c + b_2 c' \in \mathcal{C}$ для любых чисел $b_1, b_2 \geq 0$ и всех векторов $c, c' \in \mathcal{C}$.
3. $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$.

Кроме того, $\mathcal{C}$ замкнуто относительно операции умножения, то есть $c \cdot c' \in \mathcal{C}$ для любых векторов $c, c' \in \mathcal{C}$. Для любого вектора $c \in \mathcal{L}$ будем обозначать $|c| := \sup\{c, -c\} = (|c_i|)_{i\in I} \in \mathcal{C}$.

Пусть $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i\in I}$ — разделяющее семейство псевдометрик. Пусть $d : X \times X \to \mathcal{C}$ — отображение, задаваемое равенством

$$d(x,y) := (d_i(x,y))_{i\in I}.$$

Тогда d — коническая метрика [38] на X.

Рассмотрим снова обозначения $B(x,R) := \{x' \in X \mid d(x,x') \ll R\}$, $\overline{B}(x,R) := \{x' \in X \mid d(x,x') \leq R\}$, $d(x,X_0) := (d_i(x,X_0))_{i\in I}$, $d(X_1,X_2) := (d_i(X_1,X_2))_{i\in I}$ и $D(X_1,X_2) := (D_i(X_1,X_2))_{i\in I}$.

В данной главе приводятся необходимые для дальнейшнего свойства введеных операций, частичных порядков и конической метрики.

Для однозначных вектор-функций вводятся следующие определения.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Вектор-функция $\varphi : X \to \mathcal{C}$ называется (α, β)-*поисковой*, если для каждой точки $x \in X$ существует точка $x' \in X$ такая, что $d(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot \varphi(x)$ и $\varphi(x') \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \varphi(x)$.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство. Точка $\xi \in X$ называется *нулем* вектор-функции $\varphi : X \to \mathcal{C}$, если $\varphi(\xi) = 0$.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ вектор-функции $\varphi : X \to \mathcal{C}$ является *секвенциально* $\{0\}$-*полным*, если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, \varphi(x_n))\} \subset \mathrm{Graph}(\varphi)$ такой, что $\varphi(x_n) \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и ξ – нуль вектор-функции φ.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *– калибровочное пространство,* $\varphi : X \to \mathcal{C}$ *–* (α, β)*-поисковая вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$, *с секвенциально* $\{0\}$*-полным графиком. Тогда для любой точки* x_0 *существует последовательность* $\{x_n\} \subset X$, *сходящаяся к некоторой точке* ξ, *такой,* ξ *– нуль вектор-функции* φ *и* $d(x_0, \xi) \leq (\alpha - \beta)^{-1} \cdot \varphi(x_0)$.

Для многозначных вектор-функций вводятся следующие два определения.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Многозначная вектор-функция $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ называется (α, β)-*поисковой*, если для каждой точки $x \in X$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существуют точка $x' \in X$ и значение $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot c$ и $c' \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c$.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Многозначная вектор-функция $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ называется *почти* (α, β)-*поисковой*, если для каждого $\varepsilon \gg 0$, каждой точки $x \in X$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существуют точка $x' \in X$ и значение $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot c$ и $c' \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c + \varepsilon$.

Из данных определений непосредственно следует, что если Φ — (α, β)-поисковая вектор-функция, то она почти (α, β)-поисковая. В метрическом случае показано, что если Φ — многозначный почти (α, β)-поисковый функционал, то он

(α, β')-поисковый для всех $\beta' \in [0; +\infty)$, $\beta < \beta' < \alpha$. В случае калибровочного пространства это, вообще говоря, не так даже для однозначной вектор-функции.

Рассмотрим следующий контрпример.

Пример. Пусть $I = (0; +\infty)$ и $X_0 = (0; +\infty)^I$. Пусть $\xi \in [0; +\infty)^I$, $\xi = (\xi_i)_{i \in I}$,

$$\xi_i = \begin{cases} 0, & i = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & i = 2, \\ 1, & i \neq \frac{1}{2}, i \neq 2. \end{cases}$$

Пусть $X = X_0 \cup \{\xi\}$. Для каждого $i \in I$, пусть $d_i : X \to [0; +\infty)$ — отображение, задаваемое равенством $d_i(x, x') = |x_i - x'_i|$. Тогда $\mathcal{D} := \{d_i\}_{i \in I}$ — разделяющее семейство псевдометрик, что означает, что $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство.

Рассмотрим однозначную вектор-функцию. Пусть $\varphi : X \to [0; +\infty)^I$ — отображение, задаваемое соотношением:

$$\varphi(x) = \{\varphi_i(x)\}_{i \in I},\ \varphi_i(x) = \begin{cases} \min\left\{x_i, x_{\frac{1}{i}}\right\}, & x \in X_0, \\ 0, & x = \xi,\ i = 2, \\ 1, & x = \xi,\ i \neq 2. \end{cases}$$

φ — почти $\left(1, \left\{\frac{1}{2}\right\}_{i \in I}\right)$ — поисковая вектор-функция, не являющаяся (α, β)-поисковой вектор-функцией для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$.

Как выясняется, определение почти поисковой многозначной вектор-функции оказывается более удобным, чем определение поисковой многозначной вектор-функции.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство. Точка $\xi \in X$ называется *нулем* многозначной вектор-функции $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$, если $0 \in \Phi(\xi)$.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ многозначной вектор-функции $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ является *секвенциально* $\{0\}$*-полным*, если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi)$ такой, что $c_n \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и ξ — нуль вектор-функции Φ.

Для многозначных почти (α, β)-поисковых вектор-функций доказаны следующие глобальная и локальная версии принципа поиска нулей.

Теорема. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ *— многозначная почти* (α, β)*-поисковая вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$*, с секвенциально* $\{0\}$*-полным графиком. Тогда для любой пары* $(x_0, c_0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$ *и каждого* $\delta \gg 0$ *существует последовательность* $\{x_n\} \subset X$*, сходящаяся к некоторой точке* ξ*, такой, что* ξ *— нуль вектор-функции* Φ *и* $d(x_0, \xi) \leq (\alpha - \beta)^{-1} \cdot c_0 + \delta$*.*

Теорема. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ *— многозначная* (α, β)*-поисковая вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$*,* $\beta \ll \alpha$*, с секвенциально* $\{0\}$*-полным графиком. Тогда для любой пары* $(x_0, c_0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$ *такой, что* $c_0 \ll (\alpha - \beta) \cdot R$*,* $R \gg 0$*, существует* $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$ *— нуль вектор-функции* Φ*.*

В третьей главе для калибровочных пространства также рассмотрена задача о сохранении существования нулей для семейства многозначных вектор-функций. По аналогии с метрическим случаем дано понятие многозначной почти поисковой на подмножестве вектор-функции и доказана модификация локальной версии принципа поиска нулей многозначных вектор-функций.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $X_0 \subset X$ и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Многозначная вектор-функция $\Phi : X_0 \rightrightarrows \mathcal{C}$ называется *почти* (α, β)*-поисковой на* X_0, если для каждой точки $x \in X_0$, каждого значения $c \in \Phi(x)$, каждых $\varepsilon \gg 0$ и $R \gg 0$ таких, что $\overline{B}(x, R) \subset X_0$, $c \leq (\alpha - \beta) \cdot R$, существует такая точка $x' \in X_0$ и такое значение $c' \in \Phi(x')$, что $d(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot c$ и $c' \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c + \varepsilon$.

Теорема. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $X_0 \subset X$*, и* $\Phi : X_0 \rightrightarrows \mathcal{C}$ *— многозначная почти* (α, β)*-поисковая на* X_0 *вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$*,* $\beta \ll \alpha$*, с секвенциально* $\{0\}$*-полным графиком. Пусть заданы* $x_0 \in X_0$*,* $c_0 \in \Phi(x_0)$ *и* $R \gg 0$ *такие, что*

1. $\overline{B}(x_0, R) \subset X_0$*.*
2. $c_0 \ll (\alpha - \beta) \cdot R$*.*

Тогда существует $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$ *— нуль вектор-функции* Φ*.*

Для любого подмножества $X_0 \subset X$, и семейства многозначных вектор-функций $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t\in[0;1]}$ введем следующее обозначение:

$$M_{X_0}(\Phi) := \{(t, x) \in [0; 1] \times X_0 \mid 0 \in \Phi_t(x)\}.$$

Вектор-функцию $\theta : [0; 1] \to \mathcal{L}$ будем называть *строго изотонной*, если для любых $t, t' \in [0; 1]$ верно $t < t' \ \Rightarrow\ \theta(t) \ll \theta(t')$.

Определение. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство. Пусть $\theta : [0; 1] \to \mathcal{L}$ — непрерывная строго изотонная вектор-функция. Однопараметрическое семейство многозначных вектор-функций $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t\in[0;1]}$ будем называть *θ-непрерывным на $M_X(\Phi)$*, если для каждой пары $(t, x) \in M_X(\Phi)$ и любого $t' \in [0; 1]$ существует $c' \in \Phi_{t'}(x)$ такое, что $c' \le |\theta(t) - \theta(t')|$.

Как и в метрическом случае, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $U \subset X$ — некоторое открытое подмножество в X, $\theta : [0; 1] \to \mathcal{L}$ — непрерывная строго изотонная вектор-функция. Пусть задано однопараметрическое θ-непрерывное на $M_{\overline{U}}(\Phi)$ семейство $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t\in[0;1]}$ многозначных вектор-функций с секвенциально $\{0\}$-полными графиками. Тогда если $M_{\partial U}(\Phi) = \varnothing$, то множество $M_U(\Phi)$ секвенциально замкнуто.*

Доказана следующая теорема о сохранении существования нулей для семейства многозначных почти поисковых вектор-функций.

Теорема. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $U \subset X$ — некоторое открытое подмножество в X, $\theta : [0; 1] \to \mathcal{L}$ — непрерывная строго изотонная вектор-функция, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Пусть задано однопараметрическое θ-непрерывное на $M_{\overline{U}}(\Phi)$ семейство $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t\in[0;1]}$ многозначных почти (α, β)-поисковых на $\overline{U}$ вектор-функций с секвенциально $\{0\}$-полными графиками. Пусть также множество $M = M_U(\Phi)$ — секвенциально замкнуто. Тогда, если существует элемент вида $(0, x_0) \in M$, то существует и элемент $(1, x_1) \in M$.*

Отметим, что в полученной теореме вместо замыкания $\overline{U}$ открытого подмножества U можно рассматривать произвольное подмножество X_0. Приведем соответствующую формулировку.

Теорема. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $X_0 \subset X$ *— некоторое подмножество в* X, $\theta : [0;1] \to \mathcal{L}$ *— непрерывная строго изотонная вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. *Пусть задано однопараметрическое* θ*-непрерывное на* $M_{X_0}(\Phi)$ *семейство* $\Phi = \{\Phi_t : X_0 \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t\in[0;1]}$ *многозначных почти* (α, β)*-поисковых на* X_0 *вектор-функций с секвенциально* $\{0\}$*-полными графиками. Пусть также для любой пары* $(t, x) \in M_{X_0}(\Phi)$, $t < 1$ *существует* $t' \in (t, 1]$ *такая, что*

$$\overline{B}(x, 2(\alpha - \beta)^{-1} \cdot [\theta(t') - \theta(t)]) \subset X_0.$$

Тогда, если существует элемент вида $(0, x_0) \in M_{X_0}(\Phi)$, *то существует и элемент* $(1, x_1) \in M_{X_0}(\Phi)$.

В конце данной главы приведены теорема о существовании точки совпадения для конечного набора многозначных отображений калибровочных пространств и теорема о сохранении существования точек совпадения для семейства конечных наборов многозначных отображений калибровочных пространств.

Для произвольного семейства числовых псевдометрик $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i\in I}$ рассмотрим семейство числовых псевдометрик

$$\mathcal{D}_+ := \{\max\{d_{i_1}, \ldots, d_{i_m}\} \mid i_1 \ldots i_m \in I,\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Доказаны следующие теоремы

Теорема. *Пусть* $(X, \mathcal{R})$, $(Y, \mathcal{D})$ *— калибровочные пространства и* $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$. *Пусть для некоторых* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$, $\gamma \geq 1$, *многозначные отображения* $S : X \to \mathrm{C}(Y)$, $T^k : X \to \mathrm{C}(Y)$, $1 \leq k \leq m$, *удовлетворяют следующим условиям:*

1. *График отображения* S *секвенциально полный. Кроме того, для любой фундаментальной последовательности* $\{x_n\} \subset X$, *любая последовательность* $\{y_n\} \subset Y$, $y_n \in S(x_n)$, *также фундаментальная.*

2. $T^m(X) \subset S(X)$.

3. *Для любых* $x, x' \in X$,

$$D(T^m(x), T^m(x')) \leq \gamma^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot d(S(x), S(x')).$$

4. *Для всех* $x \in X$, *каждого* $y^0 \in S(x)$ *и каждого* k, $1 \le k \le m-1$,

$$d(y^0, T^k(x)) \le \gamma \cdot d(y^0, T^m(x)).$$

5. *Для любых* $x, x' \in X$,

$$r(x, x') \le \alpha^{-1} \cdot d(S(x), S(x')).$$

6. *Для всех* k, $1 \le k \le m$, *каждого* $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, *каждых* $x \in X$ *и* $y^0 \in S(x)$, *существует* $y^k \in T^k(x)$ *такое, что*

$$d(y^0, y^k) \le d(y^0, T^k(x)) + \varepsilon.$$

Тогда существует точка совпадения $\xi \in \mathrm{Coin}(S, T^1, \ldots, T^m)$.

Теорема. *Пусть* $(X, \mathcal{R})$, $(Y, \mathcal{D})$ — *калибровочные пространства,* $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$ *и* $U \subset X$ — *открытое подмножество. Пусть для некоторых* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$, $\gamma \ge 1$, *и некоторой непрерывной строго изотонной вектор-функции* $\theta : [0;1] \to \mathcal{C}$, *семейства* $S = \{S_t : X \to \mathrm{C}(Y)\}_{t \in [0;1]}$, $T^k = \{T^k_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t \in [0;1]}$, $1 \le k \le m$, *удовлетворяют следующим условиям:*

1. *Для каждого* $t \in [0;1]$, *график* $S_t|_{\overline{U}}$ *секвенциально полон. Кроме того, для каждой фундаментальной последовательности* $\{x_n\} \subset \overline{U}$ *последовательность* $\{y_n\} \subset Y$, $y_n \in S_t(x_n)$, $\{y_n\}$ *также фундаментальная.*

2. $T^m_t(\overline{U}) \subset S_t(X)$, *для любого* $t \in [0;1]$.

3. *Для любого* $t \in [0;1]$ *и всех* $x, x' \in \overline{U}$,

$$D(T^m_t(x), T^m_t(x')) \le \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \gamma^{-1} \cdot d(S_t(x), S_t(x')).$$

4. *Для любого* $t \in [0;1]$, *любых* k, $1 \le k \le m-1$, *каждых* $x \in \overline{U}$ *и* $y^0 \in S_t(x)$

$$d(y^0, T^k_t(x)) \le \gamma \cdot d(y^0, T^m_t(x)).$$

5. *Для любого* $t \in [0;1]$ *и всех* $x, x' \in X$,

$$r(x, x') \le \alpha^{-1} \cdot d(S_t(x), S_t(x')).$$

6. *Для любого* $t \in [0;1]$, *любого* k, $1 \leq k \leq m$, *каждого* $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, *каждых* $x \in \overline{U}$ *и* $y^0 \in S_t(x)$, *существует* $y^k \in T_t^k(x)$ *такая, что*

$$d(y^0, y^k) \leq d(y^0, T_t^k(x)) + \varepsilon.$$

7. *Для любых* $t, t' \in [0;1]$, *каждого* $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, *каждых* $x \in \overline{U}$ *и* $y \in S_t(x)$, *существует* $y' \in S_{t'}(x)$ *такая, что*

$$d(y, y') \leq d(y, S_{t'}(x)) + \varepsilon.$$

8. *Для любых* $t, t' \in [0;1]$ *и каждого* $x \in \mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m)$,

$$D(T_t^m(x), T_{t'}^m(x)) + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \leq |\theta(t') - \theta(t)|.$$

9. *Для любого* $t \in [0;1]$, $\mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m) \cap \partial U = \varnothing$.

Тогда если $\mathrm{Coin}(S_0, T_0^1, \ldots, T_0^m) \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Coin}(S_1, T_1^1, \ldots, T_1^m) \neq \varnothing$.

Отметим, что полученная теорема о существовании точки совпадения у конечного набора многозначных отображений калибровочных пространств обобщает некоторые результаты работ [32, 56]. В теореме о сохранении существования точки совпадения для параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений калибровочных пространств замыкание открытого множества $U \subset X$ может быть заменено на произвольное подмножество $X_0 \subset X$. В этом случае, условие 9 необходимо заменить на *Для любого* $t \in [0;1)$ *и каждого* $x \in \mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m)$, *существует* $t' \in (t, 1]$ *такое, что*

$$\overline{B}(x, 2(\alpha - \beta)^{-1} \cdot (\theta(t') - \theta(t))) \subset X_0.$$

Это ослабление позволяет получить обобщение некоторых результатов из [32].

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям: доктору физико-математических наук, профессору Татьяне Николаевне Фоменко за постановки задач и их плодотворное обсуждение, конструктивные замечения и постоянное внимание к работе, а также доктору физико-математических наук, профессору Садовничему Юрию Викторовичу за консультации и поддержку по различным смежным вопросам.

Автор благодарит коллектив кафедры Общей топологии и геометрии за творческую и доброжелательную атмосферу.

Автор выражает благодарность преподавателю Киевского политехнического института доктору физико-математических наук, профессору Богданскому Юрию Викторовичу, который пробудил интерес к занятию фундаментальной математикой и привил математическую культуру.

Автор благодарен своим близким за постоянную поддержку.

Глава 1

Принцип поиска нулей функционалов в метрических пространствах. Некоторые приложения и обобщения.

1.1 Принцип поиска нулей функционалов в метрических пространствах

В 2009 году Т. Н. Фоменко в работах [5, 6] рассмотрела задачу о построении на полном метрическом пространстве X алгоритма последовательного приближения из произвольной точки пространства к некоторому заданному замкнутому подмножеству X_0. Был предложен метод решения этой задачи в случаях, когда в качестве такого подмножества X_0 берется: полный прообраз замкнутого подпространства Y_0 при отображении из X в метрическое пространство Y; множество точек совпадения конечного набора отображений из X в Y; множество общих неподвижных точек конечного набора отображений X в себя. В частности, в работе [5] было получено обобщение теоремы А. В. Арутюнова о совпадениях двух отображений (см. теорема 2 в [1]).

Позднее, в 2010 году Т. Н. Фоменко в работе [28] развила идеи в [5, 6]. Были предложены понятия однозначного и многозначного (α, β)-поисковых функционалов в метрическом пространстве и был представлен каскадный принцип поиска нулей для таких функционалов. В 2013 году понятие многозначного (α, β)-поискового функционала было обобщено Т. Н. Фоменко в работе [7] и были доказаны глобальные и локальные версии принципа поиска нулей.

Принцип поиска нулей функционалов является мощным инструментом в задачах отыскания множества неподвижных точек многозначных отображений метрического пространства в себя, точек совпадений набора многозначных отображений метрических пространств, общих неподвижных точек набора многозначных отображений метрического пространства в себя, прообразов замкнутого подпространства при многозначном отображении метрических пространств. Важно, что для существования таких точек не требуется непрерывности отображений или полноты пространства.

Также, принцип поиска нулей функционалов был обобщен Т.Н. Фоменко на случай квазиметрических и конических метрических пространств [8, 9].

Рассмотрим основные определения и теоремы, связанные принципом поиска нулей функционалов в метрическом пространстве. Определения 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 и теорема 1.1.1 относится к однозначному случаю, определения 1.1.4, 1.1.5, 1.1.6 и теоремы 1.1.2, 1.1.3 — к многозначному. Основные понятия и определения, связанные с многозначными отображениями приведены, например, в [3].

Определение 1.1.1. [28] Пусть (X, d) — метрическое пространство и заданы $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha$. Функционал $\varphi : X \to [0; +\infty)$ называется (α, β)-*поисковым*, если для каждой точки $x \in X$ существует точка $x' \in X$ такая, что $d(x, x') \leq \frac{1}{\alpha}\varphi(x)$ и $\varphi(x') \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x)$.

Определение 1.1.2. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Точка $\xi \in X$ называется *нулем* функционала $\varphi : X \to [0; +\infty)$, если $\varphi(\xi) = 0$.

Определение 1.1.3. [28] Пусть (X, d) — метрическое пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала $\varphi : X \to [0; +\infty)$ является $\{0\}$-*полным*, если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, \varphi(x_n))\} \subset \mathrm{Graph}(\varphi)$ такой, что $\varphi(x_n) \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и $\varphi(\xi) = 0$.

Следующая теорема 1.1.1 представляет принцип поиска нулей однозначных функционалов в метрическом пространстве.

Теорема 1.1.1. [28] *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство,* $\varphi : X \to [0; +\infty)$ *—* (α, β)*-поисковый функционал,* $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$*,* $\beta < \alpha$*, с* $\{0\}$*-полным* *графиком. Тогда для любой точки x_0 существует последовательность $\{x_n\} \subset X$, сходящаяся к некоторой точке ξ — нулю функционала φ, причем справедлива оценка $d(x_0, \xi) \leq \frac{\varphi(x_0)}{\alpha-\beta}$.*

В многозначном случае нас будет интересовать именно обобщенный вариант (α, β)-поискового функционала, представленный в работе [7].

Определение 1.1.4. [7] Пусть (X, d) — метрическое пространство и заданы $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha$. Многозначный функционал $\Phi : X \rightrightarrows [0; +\infty)$ называется (α, β)-*поисковым*, если для каждой точки $x \in X$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существуют точка $x' \in X$ и значение $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \leq \frac{1}{\alpha}c$ и $c' \leq \frac{\beta}{\alpha}c$.

Определение 1.1.5. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Точка $\xi \in X$ называется *нулем* многозначного функционала $\Phi : X \rightrightarrows [0; +\infty)$, если $0 \in \Phi(\xi)$.

Определение 1.1.6. [28] Пусть (X, d) — метрическое пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ многозначного функционала $\Phi : X \rightrightarrows [0; +\infty)$ является $\{0\}$-*полным*, если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi)$ такой, что $c_n \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и $0 \in \Phi(\xi)$.

Следующие теоремы 1.1.2 и 1.1.3 представляют соответственно глобальную и локальную версии принципа поиска нулей многозначных функционалов.

Теорема 1.1.2. [7] *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\Phi : X \rightrightarrows [0; +\infty)$ — многозначный (α, β)-поисковый функционал, $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, с $\{0\}$-полным графиком. Тогда для любой пары $(x_0, c_0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$ существует последовательность $\{x_n\} \subset X$, сходящаяся к некоторой точке ξ — нулю функционала Φ, причем справедлива оценка $d(x_0, \xi) \leq \frac{c_0}{\alpha-\beta}$.*

Теорема 1.1.3. [7] *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\Phi : X \rightrightarrows [0; +\infty)$ — многозначный (α, β)-поисковый функционал, $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, с $\{0\}$-полным графиком. Тогда для любой пары $(x_0, c_0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$ такой, что $c_0 \leq (\alpha - \beta)R$, $R > 0$, существует $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$ — нуль функционала Φ.*

Замечание 1.1.1. Фундаментальность и сходимость последовательностей графика в определениях 1.1.3 и 1.1.6 рассматриваются относительно метрики декартового произведения $d_\Sigma : (X \times \mathbb{R})^2 \to [0; +\infty)$,

$$d_\Sigma((x, c), (x', c')) := d(x, x') + |c - c'|.$$

1.2 Неподвижные точки и совпадения отображений

Рассмотрим основные определения, связанные с неподвижными точками и совпадениями отображений. Основные методы и задачи теории неподвижных точек отображений, в частности метрических пространств, приведены, например, в [2, 17, 36, 41].

Для непустого множества $X \neq \varnothing$ обозначим через $\mathrm{P}(X)$ – семейство всех непустых подмножеств множества X.

Определение 1.2.1. Точка $\xi \in X$ называется *неподвижной точкой* многозначного отображения $T : X \to \mathrm{P}(X)$, если $\xi \in T(\xi)$. Обозначим через $\mathrm{Fix}(T) := \{\xi \in X \mid \xi \in T(\xi)\}$ множество неподвижных точек отображения T.

Если отображение T однозначно, то неподвижной точкой T называется такая точка $\xi \in X$, что $T(\xi) = \xi$.

Определение 1.2.2. Точка $\xi \in X$ называется *общей неподвижной точкой* набора многозначных отображений $T_1, \dots, T_m$, $T_k : X \to \mathrm{P}(X)$, $1 \leq k \leq m$, если $\xi \in T_1(\xi) \cap \dots \cap T_m(\xi)$. Обозначим через $\mathrm{Comfix}(T_1, \dots, T_m) := \{\xi \in X \mid \xi \in T_1(\xi) \cap \dots \cap T_m(\xi)\}$ множество общих неподвижных точек набора отображений $T_1, \dots, T_m$.

Если отображения $T_1, \dots, T_m$ однозначные, то общей неподвижной точкой $T_1, \dots, T_m$ называется такая точка $\xi \in X$, что $T_1(\xi) = \dots = T_m(\xi) = \xi$.

Таким образом, определение 1.2.1 является частным случаем (при $m = 1$) определения 1.2.2. Естественным же обобщением понятия общей неподвижной точки является следующее понятие точки совпадения.

Определение 1.2.3. Точка $\xi \in X$ называется *точкой совпадения* набора многозначных отображений $T_1, \dots, T_m$, $T_k : X \to \mathrm{P}(Y)$, $1 \leq k \leq m$, если $T_1(\xi) \cap \dots \cap T_m(\xi) \neq \varnothing$. Обозначим через $\mathrm{Coin}(T_1, \dots, T_m) := \{\xi \in X \mid T_1(\xi) \cap \dots \cap T_m(\xi) \neq \varnothing\}$ множество точек совпадения набора отображений $T_1, \dots, T_m$.

Если отображения $T_1, \dots, T_m$ однозначные, то точкой совпадения $T_1, \dots, T_m$ называется такая точка $\xi \in X$, что $T_1(\xi) = \dots = T_m(\xi)$.

Действительно, общая неподвижная точка набора отображений $T_1, \ldots, T_m, T_k : X \to \mathrm{P}(X)$ — суть точка совпадения набора отображений $T_0, T_1, \ldots, T_m$, где $T_0 = \mathrm{Id}_X : X \to X$ – тождественное отображение на X. Также неподвижная точка отображения $T : X \to \mathrm{P}(X)$ — суть точка совпадения пары отображений: T и Id_X.

1.3 Сжимающие отображения метрического пространства, и некоторые их обобщения

В 1922 году С. Банах (S. Banach) доказал теорему о существовании в полном нормированном пространстве неподвижной точки сжимающего отображения [13]. В 1930 году Р. Качиополи (R. Caccioppoli) доказал это утверждение в полном метрическом пространстве, а также показал, что неподвижная точка единственная [18].

Определение 1.3.1. Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства. Отображение $T : X \to Y$ называется λ-*сжимающим*, если существует такое число $\lambda \in [0; +\infty)$, $0 \le \lambda < 1$, что для любых $x, x' \in X$ выполнено следующее условие:

$$d(T(x), T(x')) \le \lambda r(x, x').$$

Следующая теорема в литературе часто встречается под названием «принцип сжимающих отображений».

Теорема 1.3.1. [13,18] *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $T : X \to X$ — λ-сжимающее отображение в себя, $0 \le \lambda < 1$. Тогда существует единственная неподвижная точка T.*

Принцип сжимающих отображений имеет множество обобщений [14–16, 20, 22, 23, 26, 34, 37, 40, 48–50, 54, 55, 57]. Более подробный список и сравнение приведены в [53]. Обобщения в работах [14, 20, 22, 37, 40, 49, 57] следуют из однозначной версии принципа поиска нулей функционалов.

Нас будут интересовать так называемые отображения Замфиреску [57].

Определение 1.3.2. [57] Пусть (X, d) — метрическое пространство. Отображение $T : X \to X$ называется *отображением Замфиреску*, если существуют такие числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \le a_1 < 1$, $0 \le a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, что для любых $x, x' \in X$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\begin{aligned}
&(z1) \quad d(T(x), T(x')) \le a_1 d(x, x');\\
&(z2) \quad d(T(x), T(x')) \le a_2[d(x, T(x)) + d(x', T(x'))];\\
&(z3) \quad d(T(x), T(x')) \le a_3[d(x, T(x')) + d(x', T(x))].
\end{aligned}$$

Для таких отображений Т. Замфиреску (T. Zamfirescu) в 1972 году доказал следующую теорему [57].

Теорема 1.3.2. [57] *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $T : X \to X$ — отображение Замфиреску. Тогда существует единственная неподвижная точка T.*

В 1967 году С. Б. Надлер (S. B. Nadler) предложил понятие многозначного сжимающего отображения [43], а в 1969 году доказал теорему о существовании в полном метрическом пространстве неподвижной точки такого отображения [44].

Рассмотрим некоторые обозначения. Для метрического пространства (X, d) обозначим через $\mathrm{CB}(X)$ — семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X. Рассмотрим следующие обозначения:

$$d(x, X_0) := \inf_{x' \in X_0} d(x, x')$$

— расстояние от точки $x \in X$ до подмножества $X_0 \in \mathrm{CB}(X)$;

$$d(X_0, X_1) := \inf_{x \in X_0,\ x' \in X_1} d(x, x')$$

— расстояние между подмножествами $X_0, X_1 \in \mathrm{CB}(X)$;

$$D(X_0, X_1) := \max\{\sup_{x \in X_0} d(x, X_1),\ \sup_{x' \in X_1} d(x', X_0)\}$$

— расстояние Хаусдорфа между подмножествами $X_0, X_1 \in \mathrm{CB}(X)$.

Определение 1.3.3. [43] Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства. Многозначное отображение $T : X \to \mathrm{CB}(Y)$ называется λ-*сжимающим*, если существует такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda < 1$, что для любых $x, x' \in X$ выполнено следующее условие:

$$D(T(x), T(x')) \le \lambda r(x, x').$$

Теорема 1.3.3. [44] *Пусть* (X, d) *— полное метрическое пространство,* $T: X \to \mathrm{CB}(X)$ *—* λ*-сжимающее многозначное отображение в себя,* $0 \le \lambda < 1$*. Тогда существует неподвижная точка* T*.*

Как и в однозначном случае, принцип многозначных сжимающих отображений имеет множество обобщений [4, 24, 45, 50–52]. Некоторые из обобщений могут быть получены из многозначной версии принципа поиска нулей функционалов. Нас снова будет интересовать так называемые многозначные отображения типа Замфиреску. В 2010 году это понятие было введено К. Няммани (K. Neammanee) и А. Кевхао (A. Kaevkhao) в работе [45]. Также для таких отображений была доказана теорема о существовании неподвижной точки.

Определение 1.3.4. [45] Пусть (X, d) — метрическое пространство. Многозначное отображение $T: X \to \mathrm{CB}(X)$ называется *отображением типа Замфиреску*, если существуют такие числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \le a_1 < 1$, $0 \le a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, что для любых $x, x' \in X$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\begin{aligned}
&(z1) \quad D(T(x), T(x')) \le a_1 d(x, x');\\
&(z2) \quad D(T(x), T(x')) \le a_2[d(x, T(x)) + d(x', T(x'))];\\
&(z3) \quad D(T(x), T(x')) \le a_3[d(x, T(x')) + d(x', T(x))].
\end{aligned}$$

Теорема 1.3.4. [45] *Пусть* (X, d) *— полное метрическое пространство,* $T: X \to \mathrm{CB}(X)$ *— многозначное отображение типа Замфиреску. Тогда существует неподвижная точка* T*. Кроме того, для каждой начальной точки* $x_0 \in X$ *существует последовательность* $\{x_n\} \subset X$*,* $x_{n+1} \in T(x_n)$*, сходящаяся к неподвижной точке* $\xi \in X$ *отображения* T*, причем для некоторого числа* $0 \le \lambda < 1$ *верны следующие оценки:*

$$d(x_n, \xi) \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1), \;\; d(x_n, \xi) \le \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_n, x_n).$$

1.4 Совпадение пары типа Замфиреску многозначных отображений

Принцип поиска нулей функционалов не только обобщает ряд результатов о существовании неподвижных точек отображения метрического пространства в себя, но и позволяет доказать существование общих неподвижных точек набора отображений метрического пространства в себя, точек совпадений набора отображений метрических пространств, прообразов замкнутого подпространства для некоторого отображения метрических пространств.

В данном параграфе вводится понятие пары типа Замфиреску многозначных отображений метрических пространств и рассматривается вопрос у существовании точек совпадения для такой пары отображений. Результаты данного параграфа анонсированы в [60, 61] и опубликованы с доказательствами в [58].

Дано следующее определение.

Определение 1.4.1. [58] Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства. Пару многозначных отображений $T, S : X \to \mathrm{CB}(Y)$ будем называть *парой типа Замфиреску*, если $T(X) \subset S(X)$ и существуют такие числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \le a_1 < 1$, $0 \le a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, что для любых $x, x' \in X$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(fz1) \quad D(T(x), T(x')) \le a_1 d(S(x), S(x'));$$
$$(fz2) \quad D(T(x), T(x')) \le a_2[d(S(x), T(x)) + d(S(x'), T(x'))];$$
$$(fz3) \quad D(T(x), T(x')) \le a_3[d(S(x), T(x')) + d(S(x'), T(x))].$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.4.1. *Пусть X_0, X_1 — замкнутые ограниченные множества в метрическом пространстве (X, d). Тогда для любого $q > 1$ и каждой точки $x \in X_0$ существует точка $x' \in X_1$ такая, что $d(x, x') \le qD(X_0, X_1)$.*

Доказательство. Если $x \in X_1$, достаточно взять $x' = x$.

Пусть $x \notin X_1$. По определению инфимума для любого заданного $x \in X_0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x' = x'(\varepsilon) \in X_1$ такая, что $d(x, x') < d(x, X_1) + \varepsilon$. Тогда для любого $q > 1$, положив $\varepsilon = \varepsilon_q = (q-1)d(x, X_1) > 0$, получим точку

$x' = x'(\varepsilon_q) \in X_1$, для которой

$$d(x, x') < d(x, X_1) + \varepsilon_q = d(x, X_1) + (q-1)d(x, X_1) = \\ = qd(x, X_1) \leq qD(X_0, X_1).$$

□

Из доказательства леммы 1.4.1 получаем:

Следствие 1.4.1. *Пусть X_0, X_1 — замкнутые ограниченные множества в метрическом пространстве (X, d). Тогда для любого $q > 1$ верно, что для каждой точки $x \in X_0$ существует точка $x' \in X_1$ такая, что $d(x, x') \leq qd(x, X_1)$.*

Следствие 1.4.2. *Пусть X_0, X_1 — замкнутые ограниченные множества в метрическом пространстве (X, d). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ верно, что для каждой точки $x \in X_0$ существует точка $x' \in X_1$ такая, что $d(x, x') \leq d(x, X_1) + \varepsilon$.*

Также нам понадобится еще одно достаточное условие фундаментальности последовательности в метрическом пространстве.

Лемма 1.4.2. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\{x_n\} \subset X$ — последовательность. Пусть для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < 1$, верно $d(x_n, x_{n+1}) = \mathcal{O}(\lambda^n)$. Тогда $\{x_n\}$ — фундаментальная.*

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Существует $N \in \mathbb{N}$ и $\rho > 0$ такие, что для всех $n \geq N$:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \rho\lambda^n.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n, x_{n+k}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq \\ \leq \rho\lambda^n + \dots + \rho\lambda^{n+k-1} = \rho\lambda^n \left(1 + \lambda + \dots + \lambda^{k-1}\right) \leq \\ \leq \rho\lambda^n \frac{1}{1-\lambda}.$$

Существует $N_1 \in \mathbb{N}$ такой, что $\rho\lambda^n \frac{1}{1-\lambda} < \varepsilon$, для любого $n \geq N_1$. Тогда для любого $n \geq \max\{N, N_1\}$

$$d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon.$$

То есть $\{x_n\}$ — фундаментальная. $\square$

Получена следующая теорема о существовании точки совпадения для пары типа Замфиреску многозначных отображений полных метрических пространств.

Теорема 1.4.1. [58] *Пусть (X, r), (Y, d) — полные метрические пространства, $T, S : X \to \mathrm{CB}(Y)$ — пара типа Замфиреску многозначных отображений. Пусть график $\mathrm{Graph}(S)$ отображения S замкнут и для некоторого $\gamma \geq 1$ и любых $x, x' \in X$ верно, что $r(x, x') \leq \gamma d(S(x), S(x'))$.*

Тогда существует точка совпадения отображений T и S.

Кроме того, для каждой начальной точки $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graph}(T)$ существует последовательность $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(T)$, сходящаяся к некоторой точке $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(T) \cap \mathrm{Graph}(S)$. То есть ξ — точка совпадения отображений T и S, η — соответствующее общее значение.

Доказательство. Выберем некоторое число $q \in \mathbb{R}$, $1 < q < \min\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{2a_2}, \frac{1}{2a_3}\right\}$. Пусть $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graph}(T)$. Поскольку $T(X) \subset S(X)$, то существует $x_1 \in X$ такая, что $y_0 \in S(x_1)$. Возьмем произвольную точку $y_1 \in T(x_1)$. Тогда по аналогии существует $x_2 \in X$ такая, что $y_1 \in S(x_2)$. В силу леммы 1.4.1 существует $y_2 \in T(x_2)$ такая, что $d(y_1, y_2) \leq qD(T(x_1), T(x_2))$. Повторяя данный процесс, получаем последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ такие, что $y_n \in T(x_n) \cap S(x_{n+1})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $d(y_n, y_{n+1}) \leq qD(T(x_n), T(x_{n+1}))$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим возможные соотношения между $d(y_n, y_{n+1})$ и $d(y_{n-1}, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Возможны три случая:

- Для точек x_n, x_{n+1} выполнено условие $(fz1)$. Тогда:

  $$d(y_n, y_{n+1}) \leq qD(T(x_n), T(x_{n+1})) \leq qa_1 d(S(x_n), S(x_{n+1})) \leq qa_1 d(y_{n-1}, y_n).$$

  Откуда $d(y_n, y_{n+1}) \leq qa_1 d(y_{n-1}, y_n)$.

- Для точек x_n, x_{n+1} выполнено условие $(fz2)$. Тогда:

  $$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) &\leq qD(T(x_n), T(x_{n+1})) \leq \\ &\leq qa_2 \left[d(S(x_n), T(x_n)) + d(S(x_{n+1}), T(x_{n+1}))\right] \leq \\ &\leq qa_2 \left[d(y_{n-1}, y_n) + d(y_n, y_{n+1})\right]. \end{aligned}$$

  Откуда $d(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{qa_2}{1 - qa_2} d(y_{n-1}, y_n)$.

- Для точек x_n, x_{n+1} выполнено условие $(fz3)$. Тогда:

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) &\leq qD(T(x_n), T(x_{n+1})) \leq \\ &\leq qa_3 \left[d(S(x_n), T(x_{n+1})) + d(S(x_{n+1}), T(x_n))\right] = \\ &= qa_3 d(S(x_n), T(x_{n+1})) \leq qa_3 d(y_{n-1}, y_{n+1}) \leq \\ &\leq qa_3 \left[d(y_{n-1}, y_n) + d(y_n, y_{n+1})\right]. \end{aligned}$$

  Откуда $d(y_n, y_{n+1}) \leq \frac{qa_3}{1-qa_3} d(y_{n-1}, y_n)$.

То есть во всех трех случаях

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \lambda d(y_{n-1}, y_n),\ n \in \mathbb{N},$$

где $\lambda := \max\left\{qa_1, \frac{qa_2}{1-qa_2}, \frac{qa_3}{1-qa_3}\right\} < 1$. Но тогда

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq \lambda^n d(y_0, y_1),\ n \in \mathbb{N}.$$

В силу леммы 1.4.2 получаем, что $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность, а значит, сходится в полном пространстве Y. Обозначим этот предел через $\eta \in Y$, то есть $y_n \to \eta$.

По условию теоремы,

$$r(x_n, x_{n+1}) \leq \gamma d(S(x_n), S(x_{n+1})) \leq \gamma d(y_{n-1}, y_n) \leq \gamma \lambda^{n-1} d(y_0, y_1).$$

Снова в силу леммы 1.4.2 последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в полном пространстве X. Отсюда $x_n \to \xi$ для некоторой точки $\xi \in X$. В итоге, получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{Graph}(T) &\supset \{(x_n, y_n)\},\ (x_n, y_n) \to (\xi, \eta), \\ \mathrm{Graph}(S) &\supset \{(x_{n+1}, y_n)\},\ (x_{n+1}, y_n) \to (\xi, \eta). \end{aligned}$$

Имеем $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(S)$ силу замкнутости графика $\mathrm{Graph}(S)$. Осталось показать, что $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(T)$, что завершит доказательство. Для этого оценим расстояние от η до $T(\xi)$. Снова возможны три случая.

- Для точек x_n, ξ выполнено условие $(fz1)$. Тогда:

$$d(\eta, T(\xi)) \leq d(\eta, y_n) + d(y_n, T(x_n)) + D(T(x_n), T(\xi)) \leq$$
$$\leq d(\eta, y_n) + a_1 d(S(x_n), S(\xi)) \leq d(\eta, y_n) + a_1 d(y_{n-1}, \eta).$$

Откуда $d(\eta, T(\xi)) \leq d(\eta, y_n) + a_1 d(y_{n-1}, \eta)$.

- Для точек x_n, ξ выполнено условие $(fz2)$. Тогда:

$$d(\eta, T(\xi)) \leq d(\eta, y_n) + d(y_n, T(x_n)) + D(T(x_n), T(\xi)) \leq$$
$$\leq d(\eta, y_n) + a_2 \left[d(S(x_n), T(x_n)) + d(S(\xi), T(\xi))\right] \leq$$
$$\leq d(\eta, y_n) + a_2 d(y_{n-1}, y_n) + a_2 d(\eta, T(\xi)).$$

Откуда $d(\eta, T(\xi)) \leq \frac{1}{1-a_2}\left[d(\eta, y_n) + a_2 d(y_{n-1}, y_n)\right]$.

- Для точек x_n, ξ выполнено условие $(fz3)$. Тогда:

$$d(\eta, T(\xi)) \leq d(\eta, y_n) + d(y_n, T(x_n)) + D(T(x_n), T(\xi)) \leq$$
$$\leq d(\eta, y_n) + a_3 \left[d(S(x_n), T(\xi)) + d(S(\xi), T(x_n))\right] \leq$$
$$\leq d(\eta, y_n) + a_3 d(y_{n-1}, T(\xi)) + a_3 d(\eta, y_n) \leq$$
$$\leq d(\eta, y_n) + a_3 d(\eta, y_{n-1}) + a_3 d(\eta, T(\xi)) + a_3 d(\eta, y_n)$$

Откуда $d(\eta, T(\xi)) \leq \frac{1}{1-a_3}\left[(1+a_3) d(\eta, y_n) + a_3 d(\eta, y_{n-1})\right]$.

То есть во всех трех случаях: $0 \leq d(\eta, T(\xi)) \leq \mu(n) \to 0$, где

$$\mu(n) := \max \Big\{d(\eta, y_n) + a_1 d(y_{n-1}, \eta),$$
$$\frac{1}{1-a_2}\left[d(\eta, y_n) + a_2 d(y_{n-1}, y_n)\right],$$
$$\frac{1}{1-a_3}\left[(1+a_3) d(\eta, y_n) + a_3 d(\eta, y_{n-1})\right]\Big\}.$$

Но тогда $d(\eta, T(\xi)) = 0$, откуда $\eta \in T(\xi)$ и $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(T)$, что и требовалось доказать. □

Доказано, что теорема 1.4.1 следует из принципа поиска нулей функционалов.

Утверждение 1.4.1. [58] *Теорема 1.4.1 следует из принципа поиска нулей функционалов (теорема 1.1.2).*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 1.4.1. Рассмотрим многозначный функционал

$$\Phi : T(X) \rightrightarrows [0; +\infty), \;\; \Phi(y) := \{d(y, y') \mid y' \in T(S^{-1}(y))\}.$$

Определение корректно, так как

$$y \in T(X) \;\Rightarrow\; y \in S(X) \;\Rightarrow\; S^{-1}(y) \neq \varnothing \;\Rightarrow\; T(S^{-1}(y)) \neq \varnothing.$$

Также существование нуля функционала Φ в точности означает существование точки совпадения отображений T и S:

$$0 \in \Phi(\eta) \;\Leftrightarrow\; \eta \in T(S^{-1}(\eta)) \;\Leftrightarrow\; \exists \xi \in X : \; \eta \in T(\xi), \; \xi \in S^{-1}(\eta) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \exists \xi \in X : \; \eta \in T(\xi) \cap S(\xi).$$

Для того, чтобы использовать принцип поиска, необходимо доказать, что Φ — (α, β)-поисковый функционал с $\{0\}$-полным графиком. Приступим.

Пусть заданы $y \in T(X)$ и $c \in \Phi(y)$. Это означает, что $c = d(y, y')$ для некоторой точки $y' \in T(S^{-1}(y))$. Тогда существует $x' \in X$ такая, что $y \in S(x')$ и $y' \in T(x')$. Поскольку $T(X) \subset S(X)$, то существует $x'' \in X$ такая, что $y' \in S(x'')$. Выберем некоторое $q \in \mathbb{R}$, $1 < q < \min\left\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{2a_2}, \frac{1}{2a_3}\right\}$. В силу леммы 1.4.1 существует $y'' \in T(x'')$ такая, что $d(y', y'') \leq qD(T(x'), T(x''))$. Из доказательства теоремы 1.4.1 следует, что $d(y', y'') \leq \lambda d(y, y')$, где $\lambda := \max\left\{qa_1, \frac{qa_2}{1-qa_2}, \frac{qa_3}{1-qa_3}\right\} < 1$. Тогда поскольку $y'' \in T(S^{-1}(y'))$, то $c' := d(y', y'') \in \Phi(y')$, откуда имеем:

$$d(y, y') = c, \;\; c' = d(y', y'') \leq \lambda d(y, y') = \lambda c.$$

Таким образом, Φ — $(1, \lambda)$-поисковый функционал.

Пусть $(y_n, c_n) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$ — фундаментальная последовательность и $c_n \to 0$. Это означает, что существует ${y'}_n \in T(S^{-1}(y_n))$ такая что $c_n = d(y_n, {y'}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $x_n \in S^{-1}(y_n)$ (то есть $y_n \in S(x_n)$) такая, что ${y'}_n \in T(x_n)$. Поскольку $\{y_n\}$ — фундаментальная в Y, а Y — полное пространство, то $y_n \to \eta$ для некоторой точки $\eta \in Y$. В силу условия теоремы

$$r(x_n, x_m) \leq \gamma d(S(x_n), S(x_m)) \leq \gamma d(y_n, y_m),$$

что означает, что и $\{x_n\}$ фундаментальная в полном пространстве X. То есть $x_n \to \xi$ для некоторой точки $\xi \in X$. Поскольку график Graph(S) замкнут и $(x_n, y_n) \to (\xi, \eta)$, то $(\xi, \eta) \in$ Graph(S). Нам достаточно доказать, что $\eta \in T(\xi)$, поскольку тогда $\eta \in T(\xi) \cap S(\xi)$, откуда $0 \in \Phi(\eta)$, что завершит доказательство $\{0\}$-полноты графика Graph(Φ).

Так как $c_n = d({y'}_n, y_n) \to 0$, то

$$d({y'}_n, \eta) \leq d({y'}_n, y_n) + d(y_n, \eta) \to 0,$$

то есть ${y'}_n \to \eta$. Возможны три случая.

- Для точек x_n, ξ выполнено условие $(fz1)$. Тогда:

$$\begin{aligned} d(\eta, T(\xi)) &\leq d(\eta, {y'}_n) + d({y'}_n, T(x_n)) + D(T(x_n), T(\xi)) \leq \\ &\leq d(\eta, {y'}_n) + a_1 d(S(x_n), S(\xi)) \leq d(\eta, {y'}_n) + a_1 d(y_n, \eta). \end{aligned}$$

  Откуда $d(\eta, T(\xi)) \leq d(\eta, {y'}_n) + a_1 d(y_n, \eta)$.

- Для точек x_n, ξ выполнено условие $(fz2)$. Тогда:

$$\begin{aligned} d(\eta, T(\xi)) &\leq d(\eta, {y'}_n) + d({y'}_n, T(x_n)) + D(T(x_n), T(\xi)) \leq \\ &\leq d(\eta, {y'}_n) + a_2 \left[d(S(x_n), T(x_n)) + d(S(\xi), T(\xi))\right] \leq \\ &\leq d(\eta, {y'}_n) + a_2 d(y_n, {y'}_n) + a_2 d(\eta, T(\xi)). \end{aligned}$$

  Откуда $d(\eta, T(\xi)) \leq \frac{1}{1-a_2}\left[d(\eta, {y'}_n) + a_2 d(y_n, {y'}_n)\right]$.

- Для точек x_n, ξ выполнено условие $(fz3)$. Тогда:

$$\begin{aligned} d(\eta, T(\xi)) &\leq d(\eta, {y'}_n) + d({y'}_n, T(x_n)) + D(T(x_n), T(\xi)) \leq \\ &\leq d(\eta, {y'}_n) + a_3 \left[d(S(x_n), T(\xi)) + d(S(\xi), T(x_n))\right] \leq \\ &\leq d(\eta, {y'}_n) + a_3 d(y_n, T(\xi)) + a_3 d(\eta, {y'}_n) \leq \\ &\leq d(\eta, {y'}_n) + a_3 d(\eta, y_n) + a_3 d(\eta, T(\xi)) + a_3 d(\eta, {y'}_n) \end{aligned}$$

  Откуда $d(\eta, T(\xi)) \leq \frac{1}{1-a_3}\left[(1 + a_3) d(\eta, {y'}_n) + a_3 d(\eta, y_n)\right]$.

Во всех трех случаях: $d(\eta, T(\xi)) \leq \mu(n) \to 0$, где

$$\begin{aligned}\mu(n) := \max \{ & d(\eta, {y'}_n) + a_1 d(y_n, \eta), \\ & \frac{1}{1-a_2}\left[d(\eta, {y'}_n) + a_2 d(y_n, {y'}_n)\right], \\ & \frac{1}{1-a_3}\left[(1+a_3) d(\eta, {y'}_n) + a_3 d(\eta, y_n)\right] \Big\}.\end{aligned}$$

То есть $d(\eta, T(\xi)) = 0$, откуда $\eta \in T(\xi)$, что и требовалось доказать. $\square$

Глава 2

Сохранение существования нулей при изменении параметра у семейства функционалов на подмножестве метрического пространства

2.1 Теорема Гранаса-Фригон, постановка задачи о сохранении существования нулей для семейства функционалов

Отдельный интерес вызывает задача о сохранении существования неподвижных точек на некотором подмножестве метрического пространства при изменении параметра некоторого семейства отображений. Этот вопрос в случае однозначных отображений изучали ряд авторов [21, 30, 35, 46, 47]. В данных работах речь идет в основном о гомотопиях, а параметрическим множеством является отрезок $[0;1]$. В работе [39] рассматривается гомотопия, где в качестве параметрического множества является метрическое пространство. В многозначном случае подобная задача также рассматривалась. Так в 1994 году А. Гранас (A. Granas) и М. Фригон (M. Frigon) ввели понятие λ-сжимающего параметрического семейства многозначных отображений и доказали теорему о сохранении существования неподвижных точек многозначного отображения на некотором открытом подмножестве полного метрического пространства при изменении параметра [29]. Некоторые обобщения этого результата приведены, например, в [11, 33].

Определение 2.1.1. [29] Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства. Семейство многозначных отображений $T = \{T_t : X \to \mathrm{CB(Y)}\}_{t\in[0;1]}$ называется λ-*сжимающим*, если существует такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda < 1$, и такая непрерывная возрастающая функция $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$, что выполнены следующие условия:

1. T_t — λ-сжимающее многозначное отображение для любых $t \in [0; 1]$.

2. $D(T_t(x), T_{t'}(x)) \le |\theta(t) - \theta(t')|$ для любых $x \in X$ и $t, t' \in [0; 1]$.

Теорема 2.1.1. [29] *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество. Пусть $T = \{T_t : \overline{U} \to \mathrm{CB(X)}\}_{t\in[0;1]}$ — λ-сжимающее семейство многозначных отображений, причем для любого $t \in [0; 1]$ отображение T_t не имеет неподвижных точек на границе ∂U. Тогда если существует неподвижная точка отображения T_0, то существует неподвижная точка отображения T_1.*

Возникает естественный вопрос: какие условия необходимо наложить на параметрическое семейство поисковых функционалов, чтобы при изменении параметра сохранялось существования нулей для этого семейства на некотором подмножестве метрического пространства. Данная глава посвящена изучению этого вопроса. Основные результаты данной главы анонсированы в [60, 61] и опубликованы с доказательствами в [59, 62].

2.2 Локальная теорема о существовании нулей функционала, поискового на подмножестве метрического пространства.

Многозначный поисковый функционал (определение 1.1.4) рассматривается как многозначное отображение, определенное на всем метрическом пространстве (X, d). Для изучения задачи о сохранении существования на некотором подмножестве метрического пространства нулей для параметрического семейства многозначных поисковых функционалов нам понадобится понятие многозначного поискового функционала, как отображения, определенного на подмножестве.

Определение 2.2.1. [59] Пусть (X, d) — метрическое пространство, $X_0 \subset X$ и заданы $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha$. Многозначный функционал $\Phi : X_0 \rightrightarrows [0; +\infty)$ называется (α, β)-*поисковым на* X_0, если для каждой точки $x \in X_0$ и любых таких $R > 0$, $c \in \Phi(x)$, что $\overline{B}(x, R) \subset X_0$, $c \leq (\alpha - \beta)R$, существуют такая точка $x' \in X_0$ и такое значение $c' \in \Phi(x')$, что $d(x, x') \leq \frac{1}{\alpha}c$ и $c' \leq \frac{\beta}{\alpha}c$.

Доказана следующая модификация теоремы 1.1.3.

Теорема 2.2.1. [59] *Пусть (X, d) — метрическое пространство, $X_0 \subset X$, и $\Phi : X_0 \rightrightarrows [0; +\infty)$ — многозначный (α, β)-поисковый на X_0 функционал, $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$, $\beta < \alpha$, с $\{0\}$-полным графиком. Пусть заданы $x_0 \in X_0$, $c_0 \in \Phi(x_0)$ и $R > 0$ такие, что*

1. $\overline{B}(x_0, R) \subset X_0$.

2. $c_0 \leq (\alpha - \beta)R$.

Тогда существует $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$ — нуль функционала Φ.

Доказательство. Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1.3.

Поскольку $\overline{B}(x_0, R) \subset X_0$ и $c_0 \leq (\alpha - \beta)R$, то существует точка $x_1 \in X_0$ и такое значение $c_1 \in \Phi(x_1)$, что $d(x_0, x_1) \leq \frac{1}{\alpha}c_0$ и $c_1 \leq \frac{\beta}{\alpha}c_0$. Положим $R_1 := \frac{\beta}{\alpha}R$. Тогда если $x \in \overline{B}(x_1, R_1)$, то

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) \leq R_1 + \frac{1}{\alpha}c_0 \leq \frac{\beta}{\alpha}R + \frac{\alpha - \beta}{\alpha}R = R.$$

Это означает, что $\overline{B}(x_1, R_1) \subset \overline{B}(x_0, R) \subset X_0$. Кроме того,

$$c_1 \le \frac{\beta}{\alpha} c_0 \le \frac{\beta}{\alpha}(\alpha - \beta)R \le (\alpha - \beta)R_1.$$

То есть $c_1 \le (\alpha - \beta)R_1$.

Таким образом, по индукции построим последовательности $\{x_n\} \subset \overline{B}(x_0, R)$, $\{c_n\}$ и $\{R_n\}$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}
&c_n \in \Phi(x_n),\ d(x_n, x_{n+1}) \le \frac{1}{\alpha} c_n,\\
&R_n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n R,\ \overline{B}(x_n, R_n) \subset \overline{B}(x_{n-1}, R_{n-1}) \subset \cdots \subset \overline{B}(x_0, R),\\
&c_{n+1} \le \frac{\beta}{\alpha} c_n \le \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} c_0 \le \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} (\alpha - \beta)R.
\end{aligned}$$

Тогда $\{x_n\}$ — фундаментальная и $c_n \to 0$. Отсюда, в силу $\{0\}$-полноты графика $\mathrm{Graph}(\Phi)$ функционала Φ существует такая точка $\xi \in X_0$ такая, что $x_n \to \xi$ и $0 \in \Phi(\xi)$. Кроме того, поскольку $x_n \in \overline{B}(x_0, R)$ и в силу замкнутости $\overline{B}(x_0, R)$, то $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$. $\square$

2.3 Сохранение существования нулей у параметрического семейства функционалов на подмножестве метрического пространства

Рассмотрим некоторое специальное семейство многозначных функционалов. Дано следующее определение.

Определение 2.3.1. [59] Пусть (X, d) — метрическое пространство. Пусть $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Однопараметрическое семейство многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows [0; +\infty)\}_{t \in [0;1]}$ будем называть *θ-непрерывным*, если для каждого $x \in X$, любых $t, t' \in [0; 1]$ и любого $c \in \Phi_t(x)$ существует такое значение $c' \in \Phi_{t'}(x)$, что $|c - c'| \le |\theta(t) - \theta(t')|$.

Для любого подмножества $X_0 \subset X$, и семейства многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows [0; +\infty)\}_{t \in [0;1]}$ введем следующее обозначение:

$$M_{X_0}(\Phi) := \{(t, x) \in [0; 1] \times X_0 \mid 0 \in \Phi_t(x)\}.$$

Оказывается полезным следующее утверждение.

Утверждение 2.3.1. [59] *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство,* $U \subset X$ *— некоторое открытое подмножество в* X*,* $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ *— непрерывная возрастающая функция. Пусть задано однопараметрическое* θ*-непрерывное семейство* $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows [0;+\infty)\}_{t\in[0;1]}$ *многозначных функционалов с* $\{0\}$*-полными графиками. Тогда если* $M_{\partial U}(\Phi) = \varnothing$*, то множество* $M_U(\Phi)$ *замкнуто.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{(t_n, x_n)\} \subset M_U(\Phi)$ сходится к точке $(\tau, \xi) \in [0;1] \times \overline{U}$. Покажем, что $(\tau, \xi) \in M_U(\Phi)$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке ξ. Так как $0 \in \Phi_{t_n}(x_n)$, то в силу θ-непрерывности существует значение $c_n \in \Phi_\tau(x_n)$ такое, что $|c_n - 0| \le |\theta(\tau) - \theta(t_n)|$. Поэтому:

$$c_n = |c_n - 0| \le |\theta(\tau) - \theta(t_n)| \to 0,$$

то есть последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi_t)$ сходится к некоторому элементу $(0, \xi)$. В силу $\{0\}$-полноты $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ получаем $(0, \xi) \in \mathrm{Graph}(\Phi_t)$, то есть $0 \in \Phi_t(\xi)$. Так как $M_{\partial U}(\Phi) = \varnothing$, что $\xi \notin \partial U$. Это означает, что $(\tau, \xi) \in M_U(\Phi)$. $\square$

Основной результат данного параграфа — теорема о сохранении существования нулей у семейства многозначных функционалов.

Теорема 2.3.1. [59] *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство,* $U \subset X$ *— некоторое открытое подмножество в* X*,* $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ *— непрерывная возрастающая функция,* $\alpha, \beta \in [0;+\infty)$*,* $\beta < \alpha$*. Пусть задано однопараметрическое* θ*-непрерывное семейство* $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows [0;+\infty)\}_{t\in[0;1]}$ *многозначных* (α, β)*-поисковых на* $\overline{U}$ *функционалов с* $\{0\}$*-полными графиками. Пусть также множество* $M = M_U(\Phi)$ *— замкнуто. Тогда, если существует элемент вида* $(0, x_0) \in M$*, то существует и элемент* $(1, x_1) \in M$*. Иными словами, если в* U *существует нуль функционала* Φ_0*, то в* U *существует нуль функционала* Φ_1*.*

Доказательство. Отметим, что некоторые рассуждения, которые приводятся ниже, аналогичны соответствующим фрагментам доказательства теоремы 2.1.1.

Шаг 1. Рассмотрим $\preceq$ — частичный порядок на M, задаваемый по правилу:

$$(t,x) \preceq (t',x') \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t \le t' \\ d(x,x') \le \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\theta(t')-\theta(t)\right] \end{cases}$$

Покажем, что всякая цепь в M имеет верхнюю грань.

Пусть $S = \{(t,x)\} \subset M$ — произвольная цепь в M. Рассмотрим соответствующее множество

$$T_S = \{t \in [0;1] \mid (t,x) \in S\} \subset [0;1].$$

Очевидно, что T_S ограничено сверху. Тогда существуют $\tau = \sup T_S$ и такая неубывающая последовательность $\{t_n\} \subset T_S$, что $t_n \to \tau$. Рассмотрим какую-то последовательность $\{(t_n,x_n)\} \subset S$, соответствующую последовательности $\{t_n\}$. Тогда $(t_n,x_n) \preceq (t_{n+1},x_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поскольку $t_n \le t_{n+1}$, а все элементы цепи S попарно сравнимы. Отсюда

$$d(x_n,x_{n+1}) \le \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)\right].$$

Из этого неравенства следует, что для любых $n,p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\le d(x_n,x_{n+1}) + \dots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \le \\ &\le \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\theta(t_{n+p})-\theta(t_n)\right]. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Поскольку θ — непрерывная, то последовательность $\{\theta(t_n)\}$ сходится к $\theta(\tau)$, а значит, она фундаментальна. Тогда с учетом неравенства 2.3.1 последовательность $\{x_n\}$ также фундаментальна. Так как $0 \in \Phi_{t_n}(x_n)$, то в силу θ-непрерывности существует значение $c_n \in \Phi_\tau(x_n)$ такое, что

$$c_n = |c_n - 0| \le \theta(\tau) - \theta(t_n) \to 0.$$

Поскольку график Φ_τ является $\{0\}$-полным, то существует $\xi \in \overline{U}$ такая, что $x_n \to \xi$ и $0 \in \Phi_\tau(\xi)$.

Так как M замкнуто по условию, то $\{(t_n,x_n)\} \subset S \subset M$, и $(t_n,x_n) \to (\tau,\xi)$, то $(\tau,\xi) \in M$. Покажем, что (τ,ξ) — искомая верхняя грань S.

Переходя в неравенстве 2.3.1 к пределу при $p \to \infty$, получим

$$d(x_n, \xi) \le \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\theta(\tau) - \theta(t_n)\right].$$

Поскольку $t_n \le \tau$, $n \in \mathbb{N}$, то $(t_n, x_n) \preceq (\tau, \xi)$. Пусть $(t, x) \in S$ — произвольный элемент цепи. Поскольку $t_n \to \tau$, то для $\varepsilon = \tau - t$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\tau - t_N \le \varepsilon = \tau - t$. Следовательно $t \le t_N$. Но поскольку любые элементы S сравнимы, то $(t, x) \preceq (t_N, x_N)$. Следовательно, по транзитивности, $(t, x) \preceq (\tau, \xi)$. То есть, (τ, ξ) — верхняя грань S.

Шаг 2. Пусть существует $(0, x_0) \in M$. В силу шага 1 по лемме Куратовского-Цорна в $(M, \preceq)$ существует максимальный элемент (τ, ξ), причем такой, что $(0, x_0) \preceq (\tau, \xi)$. Покажем, что $\tau = 1$. Это завершит доказательство: достаточно будет положить $x_1 := \xi$.

Рассуждаем от противного. Пусть $\tau < 1$. В силу непрерывности функции θ существует такое t, $\tau < t < 1$, для которого

$$R := \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\theta(t) - \theta(\tau)\right] \le \frac{1}{2} d(\xi, \partial U).$$

Следовательно, $\overline{B}(\xi, R) \subset U$. Покажем, что найдется такая точка $x \in \overline{B}(\xi, R)$, что $0 \in \Phi_t(x)$. Это будет означать, что $(t, x) \in M$ и $(\tau, \xi) \prec (t, x)$. Это будет противоречие максимальности (τ, ξ). Итак, найдем такую точку.

Поскольку $0 \in \Phi_\tau(\xi)$, то в силу θ-непрерывности Φ, существует такое значение $c \in \Phi_t(\xi)$, что $|c - 0| \le \theta(t) - \theta(\tau)$. Следовательно,

$$c = |c - 0| \le \theta(t) - \theta(\tau) = (\alpha - \beta) R.$$

Тогда по теореме 2.2.1 существует точка $x \in \overline{B}(\xi, R)$, такая, что $0 \in \Phi_t(x)$. □

Условия теоремы 2.3.1 можно ослабить.

Определение 2.3.2. [59] Пусть (X, d) — метрическое пространство. Пусть $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Однопараметрическое семейство многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows [0; +\infty)\}_{t \in [0;1]}$ будем называть *θ-непрерывным на* $M_X(\Phi)$, если для каждой пары $(t, x) \in M_X(\Phi)$ и любого $t' \in [0; 1]$ существует такое значение $c' \in \Phi_{t'}(x)$, что $c' \le |\theta(t) - \theta(t')|$.

Замечание 2.3.1. [59] В утверждении 2.3.1 и теореме 2.3.1 вместо условия

θ-непрерывности достаточно рассмотреть условие θ-непрерывности на $M_{\overline{U}}(\Phi)$. В этом случае семейство Φ не обязательно непрерывно по параметру t.

2.4 Сохранение существования прообразов замкнутого подпространства у параметрического семейства отображений и некоторые следствия

В работе [6] был получен результат о существовании прообраза замкнутого подпространства Y_0 при многозначном отображении из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Там же была получена теорема о существовании точки совпадения конечного набора многозначных отображений, обобщающая теорему работы А. В. Арутюнова [1] о существовании точки совпадения пары многозначных отображений, одно из которых является α-накрывающим, а второе — β-липшицевым. В работе [7] было показано, что вышеупомянутые результаты фактически следуют из многозначной версии принципа поиска нулей.

Рассмотрим в данном параграфе задачу о сохранении при изменении параметра существования на открытом подмножестве метрического пространства прообразов замкнутого подпространства для семейства многозначных отображений. В качестве следствий получим теоремы о сохранении существования точек совпадений.

Для метрического пространства (X, d) обозначим через $\mathrm{C}(X)$ — семейство замкнутых непустых подмножеств X.

Нам понадобится следующее определение.

Определение 2.4.1. [6] Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $Y_0 \subset Y$ — замкнутое подпространство в Y. Пусть $T : X \to \mathrm{C}(Y)$ — многозначное отображение. Будем говорить, что график

$$\mathrm{Graph}(T) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in T(x)\}$$

отображения T является Y_0-*полным*, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(T)$, где $d(y_n, Y_0) \to 0$, сходится к некоторому элементу $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(T)$, где $\eta \in Y_0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.1. [59] *Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $Y_0 \subset Y$ — замкнутое подпространство в Y, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть $T = \{T_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ — однопараметрическое семейство многозначных отображений. Пусть для некоторых чисел $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha$, и непрерывной возрастающей функции $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $t \in [0; 1]$ график $\mathrm{Graph}(T_t)$ является Y_0-полным.*
2. *Для любого $t \in [0; 1]$, каждого $x \in \overline{U}$ и любых таких $R > 0$, $y \in T_t(x)$, что $\overline{B}(x, R) \subset \overline{U}$ и $d(y, Y_0) \le (\alpha - \beta)R$, существуют такая точка $x' \in \overline{U}$ и такое значение, что $y' \in T_t(x')$, что $r(x, x') \le \frac{1}{\alpha} d(y, Y_0)$ и $d(y', Y_0) \le \frac{\beta}{\alpha} d(y, Y_0)$.*
3. *Для каждых $t, t' \in [0; 1]$ и любого $x \in \overline{U}$ верно неравенство*
$$D(T_t(x), T_{t'}(x)) \le |\theta(t') - \theta(t)|.$$
4. *На границе множества U нет прообразов подпространства Y_0, то есть $T_t^{-1}(Y_0) \cap \partial U = \varnothing$.*

Тогда если $T_0^{-1}(Y_0) \ne \varnothing$, то $T_1^{-1}(Y_0) \ne \varnothing$.

Доказательство. Рассмотрим семейство многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows [0; +\infty)\}_{t\in[0;1]}$ задаваемых по формуле $\Phi_t(x) := \{d(y, Y_0) \mid y \in T_t(x)\}$. Выбор значения $c \in \Phi_t(x)$ означает выбор некоторой точки $y \in T_t(x)$, для которой $c = d(y, Y_0)$. Тогда, $0 \in \Phi_t(x)$ в том и только том случае, если $y \in Y_0 \cap T_t(x)$, то есть $x \in T_t^{-1}(Y_0)$. Отсюда, во-первых, из условия 1 следует, что для любого $t \in [0; 1]$ график $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ является $\{0\}$-полным. Во-вторых, из условия 2 следует, что для любого $t \in [0; 1]$ функционал Φ_t является (α, β)-поисковым на $\overline{U}$. В-третьих, из условия 4 следует, что на границе ∂U нет нулей Φ_t для любого $t \in [0; 1]$, то есть $M_{\partial U}(\Phi) = \varnothing$. В силу утверждения 2.3.1, множество $M_U(\Phi)$ замкнуто. Также из условия 4 следует, что

$$T_0^{-1}(Y_0) = T_0^{-1}(Y_0) \cap U \quad \text{и} \quad T_1^{-1}(Y_0) = T_1^{-1}(Y_0) \cap U.$$

Отметим, что для любых точек $y, y' \in Y$ и замкнутого подпространства $Y_0 \subset Y$ верно, что

$$|d(y, Y_0) - d(y', Y_0)| \le d(y, y'). \tag{2.4.1}$$

Выберем некоторое $q > 1$. Из леммы 1.4.1 и условия 3 следует, что для любого $x \in \overline{U}$, любых $t, t' \in [0; 1]$ и любой точки $y \in T_t(x)$ существует такая точка $y' \in T_{t'}(x)$, для которой

$$d(y, y') \le qD(T_t(x), T_{t'}(x)) \le q\,|\theta(t) - \theta(t')|\,,$$

откуда с учетом неравенства 2.4.1

$$|d(y, Y_0) - d(y', Y_0)| \le d(y, y') \le q\,|\theta(t) - \theta(t')|\,.$$

То есть получили, что для любой $x \in \overline{U}$, любых $t, t' \in [0; 1]$ и любого $c \in \Phi_t(x)$ существует такое значение $c' \in \Phi_{t'}(x)$, что

$$|c - c'| \le q\,|\theta(t) - \theta(t')|\,.$$

Это означает, что семейство $\Phi = \{\Phi_t\}_{t \in [0;1]}$ является $q\theta$-непрерывным.

Итак, выполнены все условия теоремы 2.3.1. Следовательно, если $T_0^{-1}(Y_0) \cap U \neq \varnothing$, то есть если существует $(0, x_0) \in M_U(\Phi)$, то существует $(1, x_1) \in M_U(\Phi)$, то есть $T_1^{-1}(Y_0) \cap U \neq \varnothing$. $\square$

В качестве следствий из теоремы 2.4.1 приведем две теоремы (см. ниже теоремы 2.4.2 и 2.4.3). Нам понадобится следующее определение.

Определение 2.4.2. [6] Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $Y_0 \subset Y$ — замкнутое подпространство в Y. Пусть $T : X \to \mathrm{C}(Y)$ — многозначное отображение. Будем говорить, что график

$$\mathrm{Graph}(T) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in T(x)\}$$

отображения T является *Y_0-замкнутым*, если для любой последовательности $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(T)$, где $(x_n, y_n) \to (\xi, \eta)$, $\eta \in Y_0$, выполнено $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(T)$.

Рассмотрим для метрического пространства (Y, d) метрическое пространство

(Y^m, d_Σ), где для любых $y = (y^1, \dots, y^m)$, $y' = ((y')^1, \dots, (y')^m)$ из Y^m

$$d_\Sigma(y, y') := \sum_{k=1}^{m} d(y^k, (y')^k).$$

Расстояние от точки до замкнутого подмножества и расстояние Хаусдорфа между замкнутыми подмножествами относительно метрики d_Σ обозначим соответственно через d_Σ и D_Σ.

Обозначим через $\Delta := \{(y, \dots, y) \mid y \in Y\} \subset Y^m$ — диагональ в Y^m. Отметим, что Δ — замкнутое подпространство Y^m.

Тогда следствием теоремы 2.4.1 является следующая теорема.

Теорема 2.4.2. *Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть $T = \{T_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y^m)\}_{t \in [0;1]}$, $T_t = \{T_t^1 \times \dots \times T_t^m\}$ — однопараметрическое семейство наборов многозначных отображений. Пусть для некоторых чисел $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha$, и непрерывной возрастающей функции $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $t \in [0; 1]$ график $\mathrm{Graph}(T_t)$ является Δ-замкнутым и хотя бы для одного отображения график $\mathrm{Graph}(T_t^i)$ полон, $1 \le i \le m$.*

2. *Для любого $t \in [0; 1]$, каждого $x \in \overline{U}$ и любых таких $R > 0$, $y \in T_t(x)$, что $\overline{B}(x, R) \subset \overline{U}$ и $d_\Sigma(y, \Delta) \le (\alpha - \beta)R$, существует такая точка $x' \in \overline{U}$ и такое значение $y' \in T_t(x')$, что $r(x, x') \le \frac{1}{\alpha} d_\Sigma(y, \Delta)$ и $d_\Sigma(y', \Delta) \le \frac{\beta}{\alpha} d_\Sigma(y, \Delta)$.*

3. *Для каждых $t, t' \in [0; 1]$ и любого $x \in \overline{U}$ верно неравенство*

$$D_\Sigma(T_t(x), T_{t'}(x)) \le |\theta(t') - \theta(t)|.$$

4. *Для любого $t \in [0; 1]$ на границе множества U нет точек совпадений отображений $T_t^1, \dots, T_t^m$, то есть $\mathrm{Coin}(T_t^1, \dots, T_t^m) \cap \partial U = \varnothing$.*

Тогда если $\mathrm{Coin}(T_0^1, \dots, T_0^m) \ne \varnothing$, то $\mathrm{Coin}(T_1^1, \dots, T_1^m) \ne \varnothing$.

Доказательство. Проверим выполнимость условий теоремы 2.4.1. Так, в качестве замкнутого подпространства берется диагональ $\Delta \subset Y^m$. Тогда условия 2, 3 теоремы повторяют соответствующие условия теоремы 2.4.1. Также для любого $t \in [0;1]$ верно $T_t^{-1}(\Delta) = \mathrm{Coin}(T_t^1, \ldots, T_t^m)$. То есть условие 4 теоремы 2.4.1 также выполнено. Остается проверить условие 1 теоремы 2.4.1.

Пусть $t \in [0;1]$ и задана произвольная фундаментальная последовательность $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(T_t)$, где $d_\Sigma(y_n, \Delta) \to 0$. Распишем последнее.

$$d_\Sigma(y_n, \Delta) = \inf_{y \in Y} d_\Sigma(y_n, (y \times \cdots \times y)) = \inf_{y \in Y} \sum_{k=1}^m d(y_n^k, y).$$

Для любых j, k, $1 \leq j, k \leq m$, $j \neq k$ верно:

$$d(y_n^j, y_n^k) \leq d(y_n^j, y) + d(y_n^k, y) \leq \sum_{k=1}^m d(y_n^k, y).$$

Но поскольку $d(y_n^j, y_n^j) \leq \sum_{k=1}^m d(y_n^k, y)$, тогда $d(y_n^j, y_n^k)$ — нижняя грань множества

$$\left\{ \sum_{k=1}^m d(y_n^k, y) \mid y \in Y \right\},$$

для любых j, k, $1 \leq j, k \leq m$. Но $d_\Sigma(y_n, \Delta)$ — соответствующая точная нижняя грань, а поэтому

$$d(y_n^j, y_n^k) \leq d_\Sigma(y_n, \Delta) \to 0,$$

Так как $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(T_t)$ фундаментальная, то $\{(x_n, y_n^k)\} \subset \mathrm{Graph}(T_t^k)$ фундаментальная для любого k, $1 \leq k \leq m$. Поскольку хотя бы для одного отображения, скажем для T_t^i, график $\mathrm{Graph}(T_t^i)$ полон, то существует $\xi \in X$ и $\eta \in T_t^i(\xi)$ такие, что $x_n \to \xi$ и $y_n^i \to \eta$. Но так как $d(y_n^i, y_n^k) \to 0$, то $y_n^k \to \eta$ для любого k, $1 \leq k \leq m$. То есть $(x_n, y_n) \to (\xi, (\eta, \ldots, \eta))$, что в силу Δ-замкнутости графика T_t означает, что $(\eta, \ldots, \eta) \in T_t(\xi)$. Итак, график $\mathrm{Graph}(T_t)$ является Δ-полным для любого $t \in [0;1]$, то есть условие 1 теоремы 2.4.1 также выполнено.

Итак, все условия теоремы 2.4.1 выполнены, откуда если $T_0^{-1}(\Delta) \neq \varnothing$, то $T_1^{-1}(\Delta) \neq \varnothing$, что в силу $T_t^{-1}(\Delta) = \mathrm{Coin}(T_t^1, \ldots, T_t^m)$ завершает доказательство теоремы. $\square$

Рассмотрим частный случай $m = 2$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.4.1. *Пусть (Y, d) — метрическое пространство. Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Для любых $Y^1, Y^2, Y^3, Y^4 \in C(Y)$ и любых точек $y^1 \in Y^1$, $y^2 \in Y^2$*

$$d_\Sigma((y^1, y^2), Y^3 \times Y^4) \leq d(y^1, Y^3) + d(y^2, Y^4).$$

2. *Для любых $Y^1, Y^2, Y^3, Y^4 \in C(Y)$*

$$D_\Sigma(Y^1 \times Y^2, Y^3 \times Y^4) \leq D(Y^1, Y^3) + D(Y^2, Y^4).$$

3. *Для любых $y^1, y^2 \in Y$*

$$d_\Sigma((y^1, y^2), \Delta) = d(y^1, y^2).$$

Доказательство.
1) Пусть $y^1 \in Y^1$, $y^2 \in Y^2$. Тогда для любых $y^3 \in Y^3$ и $y^4 \in Y^4$

$$d_\Sigma((y^1, y^2), Y^3 \times Y^4) \leq d_\Sigma((y^1, y^2), (y^3, y^4)) = d(y^1, y^3) + d(y^2, y^4).$$

Тогда $d_\Sigma((y^1, y^2), Y^3 \times Y^4) - d(y^2, y^4)$ — нижняя грань $\{d(y^1, y^3),\ y^3 \in Y^3\}$, откуда

$$d_\Sigma((y^1, y^2), Y^3 \times Y^4) - d(y^2, y^4) \leq d(y^1, Y^3),$$

так как $d(y^1, Y^3)$ — точная нижняя грань. Аналогичными рассуждениями получим, что

$$d_\Sigma((y^1, y^2), Y^3 \times Y^4) - d(y^1, Y^3) \leq d(y^2, Y^4),$$

что завершает доказательство первого утверждения.
2) Для любых $y^1 \in Y^1$, $y^2 \in Y^2$ верно

$$d_\Sigma((y^1, y^2), Y^3 \times Y^4) \leq d(y^1, Y^3) + d(y^2, Y^4) \leq D(Y^1, Y^3) + D(Y^2, Y^4).$$

Тогда $D(Y^1, Y^3) + D(Y^2, Y^4)$ — верхняя грань $\{d_\Sigma((y^1, y^2), Y^3 \times Y^4)\}$, откуда

$$\sup_{y_1 \in Y^1,\ y_2 \in Y^2} d_\Sigma((y^1, y^2), Y^3 \times Y^4) \leq D(Y^1, Y^3) + D(Y^2, Y^4).$$

Аналогично

$$\sup_{y_3\in Y^3,\ y_4\in Y^4} d_\Sigma((y^3,y^4),Y^1\times Y^2)\le D(Y^1,Y^3)+D(Y^2,Y^4).$$

Откуда

$$D_\Sigma(Y^1\times Y^2,Y^3\times Y^4)\le D(Y^1,Y^3)+D(Y^2,Y^4).$$

3) С одной стороны для любого $y\in Y$

$$d(y^1,y^2)\le d(y^1,y)+d(y^2,y).$$

Откуда

$$d(y^1,y^2)\le \inf_{y\in Y}(d(y^1,y)+d(y^2,y))=d_\Sigma((y^1,y^2),\Delta).$$

С другой стороны

$$d_\Sigma((y^1,y^2),\Delta)\le d(y^1,y^2)+d(y^2,y^2)=d(y^1,y^2).$$

$\square$

С учетом пункта 3 леммы 2.4.1 получаем следующее утвеждение.

Утверждение 2.4.1. *Пусть (X,r), (Y,d) — метрические пространства, $U\subset X$ — открытое подмножество X. Пусть $T=\{T_t:\overline{U}\to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ и $S=\{S_t:\overline{U}\to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$, — два однопараметрических семейства многозначных отображений. Пусть для некоторых чисел $\alpha,\beta\in[0;+\infty)$, $\beta<\alpha$, и непрерывной возрастающей функции $\theta:[0;1]\to\mathbb{R}$ выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $t\in[0;1]$ либо $\mathrm{Graph}(T_t)$, либо $\mathrm{Graph}(S_t)$ полон, и для любых последовательностей $\{(x_n,y_n^1)\}\subset \mathrm{Graph(T_t)}$ и $\{(x_n,y_n^2)\}\subset\mathrm{Graph}(S_t)$ таких, что $x_n\to\xi$, $y_n^1\to\eta$ и $y_n^2\to\eta$ верно: $\eta\in T_t(\xi)\cap S_t(\xi)$.*

2. *Для любого $t\in[0;1]$, каждого $x\in\overline{U}$ и любых таких $R>0$, $y^1\in T_t(x)$, $y^2\in S_t(x)$, что $\overline{B}(x,R)\subset\overline{U}$ и $d(y^1,y^2)\le(\alpha-\beta)R$, существует такая точка $x'\in\overline{U}$ и такие значения $(y')^1\in T_t(x')$ и $(y')^2\in S_t(x')$, что $r(x,x')\le\frac{1}{\alpha}d(y^1,y^2)$ и $d((y')^1,(y')^2)\le\frac{\beta}{\alpha}d(y^1,y^2)$.*

3. *Для каждых $t, t' \in [0;1]$ и любого $x \in \overline{U}$ верно неравенство*

$$D_\Sigma((T_t \times S_t)(x), (T_{t'} \times S_{t'})(x)) \leq |\theta(t') - \theta(t)|.$$

4. *Для любого $t \in [0;1]$ на границе множества U нет точек совпадений отображений T_t и S_t, то есть $\mathrm{Coin}(T_t, S_t) \cap \partial U = \varnothing$.*

Тогда, если $\mathrm{Coin}(T_0, S_0) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Coin}(T_1, S_1) \neq \varnothing$.

Наконец, рассмотрим следствие из утверждения 2.4.1 — о сохранении существования на открытом подмножестве метрического пространства точек совпадения для двух семейств многозначных отображений, где отображения первого семейства являются α-накрывающими, а отображения второго — β-липшицевыми.

Определение 2.4.3. Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства. Многозначное отображение $T : X \to C(Y)$ называется *α-накрывающим*, $\alpha > 0$, если для любой точки $x \in X$ и $R > 0$ выполнено:

$$\overline{B}(T(x), \alpha R) \subset T(\overline{B}(x, R)).$$

Здесь $\overline{B}(T(x), \alpha R) = \bigcup\limits_{y \in T(x)} \overline{B}(y, \alpha R)$ — замкнутая αR-окрестность множества $T(x)$.

Определение 2.4.4. Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства. Многозначное отображение $T : X \to C(Y)$ называется *β-липшицевым*, $\beta \geq 0$, если для любых точек $x, x' \in X$ выполнено:

$$D(T(x), T(x')) \leq \beta r(x, x').$$

Теорема 2.4.3. *Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть $T = \{T_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t \in [0;1]}$ и $S = \{S_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t \in [0;1]}$ — два однопараметрических семейства многозначных отображений. Пусть для некоторых чисел $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $0 < \beta < \alpha$, и непрерывной возрастающей функции $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $t \in [0;1]$ либо $\mathrm{Graph}(T_t)$, либо $\mathrm{Graph}(S_t)$ полон, и $\mathrm{Graph}(T_t)$ замкнут.*

2. *Для любого* $t \in [0;1]$ *отображение* T_t *—* α*-накрывающее и отображение* S_t *—* β*-липшицево.*

3. *Для каждых* $t, t' \in [0;1]$ *и любого* $x \in \overline{U}$ *верно неравенство*

$$D(T_t(x), T_{t'}(x)) + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \leq |\theta(t') - \theta(t)|.$$

4. *Для любого* $t \in [0;1]$ *на границе множества* U *нет точек совпадений отображений* T_t *и* S_t*, то есть* $\mathrm{Coin}(T_t, S_t) \cap \partial U = \varnothing$*.*

Тогда если $\mathrm{Coin}(T_0, S_0) \neq \varnothing$*, то* $\mathrm{Coin}(T_1, S_1) \neq \varnothing$*.*

Доказательство. Доказательство данной теоремы заключается в проверке выполнимости условий утверждения 2.4.1. Условие 4 полностью совпадает с условием 4 утверждения 2.4.1.

Проверим, что выполнено условие 1 утверждения 2.4.1. Пусть $t \in [0;1]$. Покажем сначала, что $\mathrm{Graph}(S_t)$ замкнут. Пусть $(x_n, y_n) \in \mathrm{Graph}(S_t)$ и $(x_n, y_n) \to (\xi, \eta)$. Оценим расстояние от точки η до множества $S_t(\xi)$.

$$\begin{aligned} d(\eta, S_t(\xi)) &\leq d(\eta, y_n) + d(y_n, S_t(x_n)) + D(S_t(x_n), S_t(\xi)) = \\ &= d(\eta, y_n) + D(S_t(x_n), S_t(\xi)) \leq d(\eta, y_n) + \beta r(x_n, \xi) \to 0. \end{aligned}$$

То есть $d(\eta, S_t(\xi)) = 0$, что означает $\eta \in S_t(\xi)$, то есть действительно график $\mathrm{Graph}(S_t)$ замкнут.

Пусть теперь заданы последовательности $\{(x_n, y_n^1)\} \subset \mathrm{Graph}(\mathrm{T_t})$ и $\{(x_n, y_n^2)\} \subset \mathrm{Graph}(S_t)$ такие, что $x_n \to \xi$, $y_n^1 \to \eta$ и $y_n^2 \to \eta$. Тогда $\eta \in T_t(\xi)$ и $\eta \in S_t(\xi)$ в силу замкнутости графиков $\mathrm{Graph}(T_t)$ и $\mathrm{Graph}(S_t)$. То есть условие 1 утверждения 2.4.1 выполнено.

Проверим, что выполнено условие 2 утверждения 2.4.1. Пусть $t \in [0;1]$. Пусть заданы $x \in \overline{U}$, $R > 0$, $y^1 \in T_t(x)$ и $y^2 \in T_t(x)$ такие, что $\overline{B}(x, R) \subset \overline{U}$ и $d(y^1, y^2) \leq (\alpha - \beta)R$. Обозначим $c := d(y^1, y^2)$. То есть $y^2 \in \overline{B}(y^1, c) \subset \overline{B}(T_t(x), c)$, откуда поскольку T_t α-накрывающее, то $y^2 \in T_t(\overline{B}(x, \frac{c}{\alpha}))$. Тогда существует $x' \in \overline{B}(x, \frac{c}{\alpha})$ такое, что $y^2 \in T_t(x')$. Отметим, что $x' \in \overline{B}(x, R) \subset \overline{U}$, так как

$$r(x, x') \leq \frac{c}{\alpha} \leq \frac{(\alpha - \beta)R}{\alpha} < R.$$

Положим $(y')^1 := y^2 \in T_t(x')$ и выберем некоторое q, $1 < q < \frac{\alpha}{\beta}$. В силу леммы

1.4.1 существует $(y')^2 \in S_t(x')$ такое, что

$$d((y')^1,(y')^2) \le qD(S_t(x),S_t(x')) \le q\beta r(x,x') \le \frac{q\beta}{\alpha}c.$$

Итак, выполнено условие 2 утверждения 2.4.1, так как $q\beta < \frac{\alpha}{\beta}\beta = \alpha$.

Наконец, в силу леммы 2.4.1 условие 3 гарантирует выполнимость условия 3 утверждения 2.4.1.

Итак, выполнены все условия утверждения 2.4.1, что и завершает доказательство теоремы. □

Полученная теорема 2.4.3 представляет обобщение одного из результатов работы А. В. Арутюнова [1] на случай параметрического семейства пар многозначных отображений.

2.5 Сохранение существования точек совпадения и общих неподвижных точек параметрического семейства отображений метрических пространств

Рассмотрим теперь еще одну задачу о сохранении существования на открытом подмножестве метрического пространства точек совпадений семейства наборов многозначных отображений при изменении параметра. Также рассмотрим задачу о сохранении существования на открытом подмножестве метрического пространства общих неподвижных точек для семейства наборов многозначных отображений в себя при изменении параметра. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.5.1. [59] *Пусть (X,r), (Y,d) — метрические пространства, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть заданы однопараметрические семейства многозначных отображений*

$$S = \{S_t \mid S_t : X \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]},\ T^k = \{T^k_t \mid T^k_t : \overline{U} \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]},\ 1 \le k \le m.$$

Пусть для некоторых $\alpha,\beta \in [0;+\infty)$, $\beta < \alpha$, $\gamma \ge 1$, $1 < q < \frac{\alpha\gamma}{\beta}$ и непрерывной возрастающей функции $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1. *Для любого* $t \in [0;1]$ *график* $\mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right) = \{(x,y) \in \overline{U} \times Y \mid y \in S_t(x)\}$ *полон и* $T_t^m(\overline{U}) \subset S_t(X)$.

2. *Для любого* $t \in [0;1]$ *и любой фундаментальной последовательности* $\{x_n\} \subset \overline{U}$ *всякая последовательность* $\{y_n\}$*, где* $y_n \in S_t(x_n)$*, является фундаментальной.*

3. *Для любого* $t \in [0;1]$ *и любых* $x', x'' \in \overline{U}$ *верно*
$$\max_{1 \le k \le m}\{D(T_t^k(x'), T_t^k(x''))\} \le \frac{\beta}{\alpha\gamma q} d(S_t(x'), S_t(x'')).$$

4. *Для любых* $t \in [0;1]$, $x \in \overline{U}$, $y^0 \in S_t(x)$ *и любого* $1 \le k \le m-1$*:*
$$D(\{y^0\}, T_t^k(x)) \le \gamma d(y^0, T_t^m(x)),\ 1 \le k \le m-1.$$

5. *Для любых* $t \in [0;1]$ *и любых* $x', x'' \in X$ *верно*
$$r(x', x'') \le \frac{1}{\alpha} d(S_t(x'), S_t(x'')).$$

6. *Для любого* $x \in \overline{U}$ *и любых* $t, t' \in [0;1]$ *верно*
$$\max_{1 \le k \le m}\{D(T_t^k(x), T_{t'}^k(x))\} + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \le \left|\theta(t') - \theta(t)\right|.$$

7. *Для любого* $t \in [0;1]$ *на границе множества* U *нет точек совпадения отображений* S_t*,* $T_t^1, \ldots, T_t^m$*, т.е.* $\mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m) \cap \partial U = \varnothing$.

Тогда если $\mathrm{Coin}(S_0, T_0^1, \ldots, T_0^m) \ne \varnothing$*, то* $\mathrm{Coin}(S_1, T_1^1, \ldots, T_1^m) \ne \varnothing$.

Доказательство. Рассмотрим семейство многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows [0;+\infty)\}_{t\in[0;1]}$ задаваемое по формуле
$$\Phi_t(x) := \left\{\max_{1 \le k \le m} d(y^0, y^k) \mid y^0 \in S_t(x),\ y^k \in T_t^k(x)\right\}.$$

Выбор значения $c \in \Phi_t(x)$ означает выбор таких $y^0 \in S_t(x)$ и $y^k \in T_t^k(x)$, $1 \le k \le m$, что $c = \max\limits_{1 \le k \le m}\{d(y^0, y^k)\}$. Тогда, $0 \in \Phi_t(x)$ в том и только том случае, если существует $\eta \in S_t(x) \cap T_t^1(x) \cap \cdots \cap T_t^m(x)$, что эквивалентно условию $x \in \mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m)$.

Покажем, что для любого $t \in [0;1]$ график $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ является $\{0\}$-полным. Пусть $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi_t)$ — фундаментальная последовательность и $c_n \to 0$. Каждому c_n соответствуют $y_n^0 \in S_t(x_n)$ и $y_n^k \in T_t^k(x_n)$, $1 \le k \le m$, для которых

$$c_n = \max_{1 \le k \le m} \{d(y_n^0, y_n^k)\}.$$

Поскольку $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi_t)$ фундаментальная, то $\{x_n\}$ — фундаментальная. Тогда в силу условия 2 фундаментальной является последовательность $\{y_n^0\}$. Отсюда фундаментальной будет $\{x_n, y_n^0\} \subset \mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right)$. В силу условия 1 график $\mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right)$ полон, откуда существует элемент $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right)$ такой, что $(x_n, y_n^0) \to (\xi, \eta)$. Иными словами $x_n \to \xi$, $y_n^0 \to \eta$ и $\eta \in S_t(\xi)$. Так как $c_n \to 0$, то $y_n^k \to \eta$ для любого k, $1 \le k \le m$. Осталось показать, что $\eta \in T_t^k(\xi)$ для любого k, $1 \le k \le m$. С учетом условия 3

$$\begin{aligned} d(\eta, T_t^k(\xi)) &\le d(\eta, y_n^k) + d(y_n^k, T_t^k(x_n)) + D(T_t^k(x_n), T_t^k(\xi)) \le \\ &\le d(\eta, y_n^k) + 0 + \frac{\beta}{\alpha\gamma q} d(S_t(x_n), S_t(\xi)) \le \\ &\le d(\eta, y_n^k) + \frac{\beta}{\alpha\gamma q} d(y_n^0, \eta) \to 0. \end{aligned}$$

Т.е. $d(\eta, T_t^k(\xi)) = 0$, что означает $\eta \in T_t^k(\xi)$. Итак, для любого $t \in [0;1]$ график $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ является $\{0\}$-полным.

Покажем, что для любого $t \in [0;1]$ функционал Φ_t является (α, β)-поисковым на $\overline{U}$. Пусть $x \in \overline{U}$, $c \in \Phi_t(x)$, $R > 0$ такие, что $\overline{B}(x, R) \subset \overline{U}$ и $c \le (\alpha - \beta)R$. Выбранному c соответствуют такие $y^0 \in S_t(x)$ и $y^k \in T_t^k(x)$, $1 \le k \le m$, что

$$c = \max_{1 \le k \le m} d(y^0, y^k).$$

В силу условия 1 имеем $T_t^m(\overline{U}) \subset S_t(X)$, откуда существует точка $x' \in X$, для которой $y^m \in S_t(x')$. Тогда согласно условию 5 имеем

$$r(x, x') \le \frac{1}{\alpha} d(S_t(x), S_t(x')) \le \frac{1}{\alpha} d(y^0, y^m) \le \frac{1}{\alpha} c.$$

Также $x' \in \overline{U}$, поскольку $r(x, x') \le \frac{1}{\alpha} c \le R$ и $\overline{B}(x, R) \subset \overline{U}$. Выберем $(y')^0 =$

$y^m \in S_t(x')$ и в силу леммы 1.4.1 выберем такие $(y')^k \in T_t^k(x')$, $1 \le k \le m$, и соответствующее им значение $c' = \max\limits_{1\le k\le m} d((y')^k, (y')^0) \in \Phi_t(x')$, что верно

$$d((y')^0, (y')^k) \le qD(\{(y')^0\}, T_t^k(x')) \le \gamma q d((y')^0, T_t^m(x')) = \gamma q d(y^m, T_t^m(x')) \le$$
$$\le \gamma q D(T_t^m(x), T_t^m(x')) \le \gamma q \frac{\beta}{\alpha\gamma q} d(S_t(x), S_t(x')) \le \frac{\beta}{\alpha} d(y^0, y^m) \le \frac{\beta}{\alpha} c.$$

Следовательно,

$$c' = \max_{1\le k\le m} d((y')^0, (y')^k) \le \frac{\beta}{\alpha} c.$$

Итак, для любого $t \in [0;1]$ функционал Φ_t является (α, β)-поисковым на $\overline{U}$.

Покажем, что семейство $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0;1]}$ является $q\theta$-непрерывным. Пусть $x \in \overline{U}$, $t, t' \in [0;1]$ и $c \in \Phi_t(x)$. Значению c соответствует набор $y^k \in T_t^k(x)$, $1 \le k \le m$, $y^0 \in S_t(x)$, для которого

$$c = \max_{1\le k\le m} d(y^k, y^0).$$

В силу леммы 1.4.1 существуют $(y')^k \in T_{t'}^k(x)$, $1 \le k \le m$, $(y')^0 \in S_{t'}(x)$, для которых

$$d((y')^0, y^0) \le qD(S_t(x), S_{t'}(x)),\ \ d((y')^k, y^k) \le qD(T_t^k(x), T_{t'}^k(x)).$$

Обозначим $c' = \max\limits_{1\le k\le m} d((y')^k, (y')^0) \in \Phi_{t'}(x)$. Получим

$$d(y^k, y^0) \le d(y^k, (y')^k) + d((y')^k, (y')^0) + d((y')^0, y^0) \le$$
$$\le qD(T_t^k(x), T_{t'}^k(x)) + c' + qD(S_t(x), S_{t'}(x)) \le c' + q\left|\theta(t') - \theta(t)\right|.$$

Отсюда $c \le c' + q\left|\theta(t') - \theta(t)\right|$. Аналогично, $c' \le c + q\left|\theta(t') - \theta(t)\right|$. Значит,

$$|c' - c| \le q\left|\theta(t') - \theta(t)\right|.$$

Итак, семейство $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0;1]}$ является $q\theta$-непрерывным.

Наконец, в силу условия 7 для любого $t \in [0;1]$ на границе множества ∂U нет нулей функционала Φ_t, поэтому с учетом утверждения 2.3.1 множество $M_U(\Phi)$ замкнуто.

Итак, выполнены все условия теоремы 2.3.1. А тогда по теореме 2.3.1 если

$$\mathrm{Coin}(S_0, T_0^1, \ldots, T_0^m) = \mathrm{Coin}(S_0, T_0^1, \ldots, T_0^m) \cap U \neq \varnothing,$$

т.е. существует $(0, x_0) \in M_U(\Phi)$, то существует $(1, x_1) \in M_U(\Phi)$, т.е.

$$\mathrm{Coin}(S_1, T_1^1, \ldots, T_1^m) = \mathrm{Coin}(S_1, T_1^1, \ldots, T_1^m) \cap U \neq \varnothing,$$

$\square$

Положим $Y = X$ — полное пространство, $S_t = \mathrm{Id}_X$ для любого $t \in [0;1]$, $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha \leq 1$. Получим следующее утверждение о сохранении существования общих неподвижных точек семейства конечных наборов многозначных отображений.

Следствие 2.5.1. [59] *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть заданы однопараметрические семейства многозначных отображений*

$$T^k = \{T_t^k \mid T_t^k : \overline{U} \to \mathrm{CB}(X)\}_{t\in[0;1]},\ 1 \leq k \leq m.$$

Пусть для некоторых $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha \leq 1$, $\gamma \geq 1$, $1 < q < \frac{\alpha\gamma}{\beta}$ и непрерывной возрастающей функции $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1. *Для любого $t \in [0;1]$ и любых $x', x'' \in \overline{U}$ верно*

$$\max_{1\leq k\leq m} \{D(T_t^k(x'), T_t^k(x''))\} \leq \frac{\beta}{\alpha\gamma q} d(x', x'').$$

2. *Для любых $t \in [0;1]$, $x \in \overline{U}$, $1 \leq k \leq m-1$:*

$$D(\{x\}, T_t^k(x)) \leq \gamma d(x, T_t^m(x)),\ 1 \leq k \leq m-1.$$

3. *Для любого $x \in \overline{U}$ и любых $t, t' \in [0;1]$ верно*

$$\max_{1\leq k\leq m} \{D(T_t^k(x), T_{t'}^k(x))\} \leq |\theta(t') - \theta(t)|.$$

4. *Для любого $t \in [0;1]$ на границе множества U нет общих неподвижных*

точек отображений $T_t^1, \dots, T_t^m$*, т.е.* $\mathrm{Comfix}(T_t^1, \dots, T_t^m) \cap \partial U = \varnothing$*.*

Тогда если $\mathrm{Comfix}(T_0^1, \dots, T_0^m) \neq \varnothing$*, то* $\mathrm{Comfix}(T_1^1, \dots, T_1^m) \neq \varnothing$*.*

2.6 Сохранение существования точек совпадения для параметрического семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений

Рассмотрим задачу о сохранении существования точек совпадения на открытом подмножестве метрического пространства для семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений при изменении параметра. Предлагается следующая модификация определения 1.4.1.

Определение 2.6.1. [62] Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $X_0 \subset X$ — некоторое подмножество. Пару многозначных отображений (T, S) $T : X_0 \to \mathrm{CB}(Y)$, $S : X \to \mathrm{CB}(Y)$, будем называть *парой типа Замфиреску на* X_0, если $T(X_0) \subset S(X)$ и существуют такие числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \leq a_1 < 1$, $0 \leq a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, что для любых $x, x' \in X_0$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(fz1) \quad D(T(x), T(x')) \leq a_1 d(S(x), S(x'));$$

$$(fz2) \quad D(T(x), T(x')) \leq a_2[d(S(x), T(x)) + d(S(x'), T(x'))];$$

$$(fz3) \quad D(T(x), T(x')) \leq a_3[d(S(x), T(x')) + d(S(x'), T(x))].$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.6.1. [62] *Пусть* (X, r)*,* (Y, d) *— метрические пространства,* $U \subset X$ *— открытое подмножество* X*. Пусть заданы однопараметрические семейства многозначных отображений*

$$S = \{S_t \mid S_t : X \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t \in [0;1]}, \ T = \{T_t \mid T_t : \overline{U} \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t \in [0;1]}.$$

Пусть для некоторых $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$*,* $0 \leq a_1 < 1$*,* $0 \leq a_2, a_3 < \frac{1}{2}$*, некоторого* $\gamma > 1$*, и непрерывной возрастающей функции* $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ *выполнены следующие условия:*

1. *Для любого* $t \in [0;1]$ *график* $\mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right) = \{(x,y) \in \overline{U} \times Y \mid y \in S_t(x)\}$ *полон.*

2. *Для любого* $t \in [0;1]$ *и любой фундаментальной последовательности* $\{x_n\} \subset \overline{U}$ *всякая последовательность* $\{y_n\}$, *где* $y_n \in S_t(x_n)$, *является фундаментальной.*

3. *Для любого* $t \in [0;1]$ *пара отображений* (T_t, S_t) *является парой типа Замфиреску на* $\overline{U}$.

4. *Для любых* $t \in [0;1]$ *и любых* $x', x'' \in X$ *верно*

$$r(x', x'') \leq \gamma d(S_t(x'), S_t(x'')).$$

5. *Для любого* $x \in \overline{U}$ *и любых* $t, t' \in [0;1]$ *верно*

$$D(T_t(x), T_{t'}(x)) + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \leq |\theta(t') - \theta(t)|\,.$$

6. *Для любого* $t \in [0;1]$ *на границе множества* U *нет точек совпадения отображений* T_t *и* S_t, *т.е.* $\mathrm{Coin}(S_t, T_t) \cap \partial U = \varnothing$.

Тогда если $\mathrm{Coin}(S_0, T_0) \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Coin}(S_1, T_1) \neq \varnothing$.

Доказательство. Рассмотрим семейство многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows [0;+\infty)\}_{t\in[0;1]}$ задаваемый по формуле $\Phi_t(x) := \{d(y^0, y) \mid y^0 \in S_t(x),\ y \in T_t(x)\}$. Выбор значения $c \in \Phi_t(x)$ означает выбор таких $y^0 \in S_t(x)$ и $y \in T_t(x)$, что $c = d(y^0, y)$. Тогда, $0 \in \Phi_t(x)$ в том и только том случае, если существует $\eta \in S_t(x) \cap T_t(x)$, что эквивалентно условию $x \in \mathrm{Coin}(S_t, T_t)$.

Покажем, что для любого $t \in [0;1]$ график $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ является $\{0\}$-полным. Пусть $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi_t)$ — фундаментальная последовательность и $c_n \to 0$. Каждому c_n соответствуют $y_n^0 \in S_t(x_n)$ и $y_n \in T_t(x_n)$, для которых

$$c_n = d(y_n^0, y_n).$$

Поскольку $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi_t)$ фундаментальная, то $\{x_n\}$ — фундаментальная. Тогда в силу условия 2 фундаментальной является последовательность $\{y_n^0\}$. Отсюда фундаментальной будет $\{x_n, y_n^0\} \subset \mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right)$. В силу условия

1 график $\mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right)$ полон, откуда существует элемент $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right)$ такой, что $(x_n, y_n^0) \to (\xi, \eta)$. Иными словами $x_n \to \xi$, $y_n^0 \to \eta$ и $\eta \in S_t(\xi)$. Так как $c_n \to 0$, то $y_n \to \eta$. Осталось показать, что $\eta \in T_t(\xi)$. Имеем:

$$d(\eta, T_t(\xi)) \leq d(\eta, y_n) + d(y_n, T_t(x_n)) + D(T_t(x_n), T_t(\xi)) = d(\eta, y_n) + D(T_t(x_n), T_t(\xi)).$$

С учетом условия 3 для пары точек $x_n, \xi \in \overline{U}$ возможны три случая:

- Пара точек $x_n, \xi \in \overline{U}$ удовлетворяет условию $(fz1)$:

$$\begin{aligned} d(\eta, T_t(\xi)) &\leq d(\eta, y_n) + D(T_t(x_n), T_t(\xi)) \leq \\ &\leq d(\eta, y_n) + a_1 d(S_t(x_n), S_t(\xi)) \leq \\ &\leq d(\eta, y_n) + a_1 d(y_n^0, \eta). \end{aligned}$$

  Т.е. $d(\eta, T_t(\xi)) \leq d(\eta, y_n) + a_1 d(y_n^0, \eta)$.

- Пара точек $x_n, \xi \in \overline{U}$ удовлетворяет условию $(fz2)$:

$$\begin{aligned} d(\eta, T_t(\xi)) &\leq d(\eta, y_n) + D(T_t(x_n), T_t(\xi)) \leq \\ &\leq d(\eta, y_n) + a_2\left[d(S_t(x_n), T_t(x_n)) + d(S_t(\xi), T_t(\xi))\right] \leq \\ &\leq d(\eta, y_n) + a_2 d(y_n^0, y_n) + a_2 d(\eta, T_t(\xi)). \end{aligned}$$

  Т.е. $d(\eta, T_t(\xi)) \leq \frac{1}{1-a_2}\left[d(\eta, y_n) + a_2 d(y_n^0, y_n)\right]$.

- Пара точек $x_n, \xi \in \overline{U}$ удовлетворяет условию $(fz3)$:

$$\begin{aligned} d(\eta, T_t(\xi)) &\leq d(\eta, y_n) + D(T_t(x_n), T_t(\xi)) \leq \\ &\leq d(\eta, y_n) + a_3\left[d(S_t(x_n), T_t(\xi)) + d(S_t(\xi), T_t(x_n))\right] \leq \\ &\leq d(\eta, y_n) + a_3 d(y_n^0, T_t(\xi)) + a_3 d(\eta, y_n) \leq \\ &\leq d(\eta, y_n) + a_3 d(y_n^0, \eta) + a_3 d(\eta, T_t(\xi)) + a_3 d(\eta, y_n). \end{aligned}$$

  Т.е. $d(\eta, T_t(\xi)) \leq \frac{1}{1-a_3}\left[(1+a_3) d(\eta, y_n) + a_3 d(y_n^0, \eta)\right]$.

Т.е. во всех трех случаях $d(\eta, T_t(\xi)) \leq \mu(n) \to 0$, где

$$\mu(n) := \max\Big\{d(\eta, y_n) + a_1 d(y_n^0, \eta), \\ \frac{1}{1-a_2}\left[d(\eta, y_n) + a_2 d(y_n^0, y_n)\right], \\ \frac{1}{1-a_3}\left[(1+a_3)d(\eta, y_n) + a_3 d(y_n^0, \eta)\right]\Big\}.$$

Т.е. $d(\eta, T_t(\xi)) = 0$, что означает $\eta \in T_t(\xi)$. Итак, для любого $t \in [0;1]$ график $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ является $\{0\}$-полным.

Покажем, что для любого $t \in [0;1]$ функционал Φ_t является (α, β)-поисковым на $\overline{U}$ для некоторых $\alpha, \beta \in [0;+\infty)$, $\beta < \alpha$.

Положим $\alpha := \frac{1}{\gamma}$ и $\beta := \frac{1}{\gamma}\max\{qa_1, \frac{qa_2}{1-qa_2}, \frac{qa_3}{1-qa_3}\}$. Пусть $x \in \overline{U}$, $c \in \Phi_t(x)$, $R > 0$ такие, что $\overline{B}(x, R) \subset \overline{U}$ и $c \leq (\alpha - \beta)R$. Выбранному c соответствуют такие $y^0 \in S_t(x)$ и $y \in T_t(x)$, что $c = d(y^0, y)$. В силу условия 3 имеем $T_t(\overline{U}) \subset S_t(X)$, откуда существует точка $x' \in X$, для которой $y \in S_t(x')$. Тогда согласно условию 4 имеем:

$$r(x, x') \leq \gamma d(S_t(x), S_t(x')) \leq \gamma d(y^0, y) \leq \gamma c.$$

То есть $r(x, x') \leq \frac{1}{\alpha}c$. Отсюда $x' \in \overline{U}$, поскольку $r(x, x') \leq \frac{1}{\alpha}c \leq R$ и $\overline{B}(x, R) \subset \overline{U}$. Выберем $(y')^0 = y \in S_t(x')$ и в силу леммы 1.4.1 для q, $1 < q < \min\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{2a_2}, \frac{1}{2a_3}\}$ выберем такое $y' \in T_t(x')$ и соответствующее им значение $c' = d(y', (y')^0) \in \Phi_t(x')$, что верно

$$d((y')^0, y') = d(y, y') \leq qD(T_t(x), T_t(x')).$$

С учетом условия 3 для точек $x, x' \in \overline{U}$ возможны три случая.

- Пара точек $x, x' \in \overline{U}$ удовлетворяет условию $(fz1)$:

$$c' = d((y')^0, y') \leq qD(T_t(x), T_t(x')) \leq \\ \leq qa_1 d(S_t(x), S_t(x')) \leq \\ \leq qa_1 d(y^0, (y')^0) = qa_1 d(y^0, y) = qa_1 c.$$

  Т.е. $c' \leq qa_1 c$.

- Пара точек $x, x' \in \overline{U}$ удовлетворяет условию $(fz2)$:

$$\begin{aligned} d((y')^0, y') \le qD(T_t(x), T_t(x')) \le \\ &\le qa_2\left[d(S_t(x), T_t(x)) + d(S_t(x'), T_t(x'))\right] \le \\ &\le qa_2 d(y^0, y) + qa_2 d((y')^0, y') = qa_2 c + qa_2 c'. \end{aligned}$$

  Т.е. $c' \le \frac{qa_2}{1-qa_2}c$.

- Пара точек $x, x' \in \overline{U}$ удовлетворяет условию $(fz3)$:

$$\begin{aligned} d((y')^0, y') &\le qD(T_t(x), T_t(x')) \le \\ &\le qa_3\left[d(S_t(x), T_t(x')) + d(S_t(x'), T_t(x))\right] \le \\ &\le qa_3 d(y^0, y') + qa_3 d((y')^0, y) \le \\ &= qa_3 d(y^0, y') \le qa_3 d(y^0, y) + qa_3 d(y, y') = qa_3 c + qa_3 c'. \end{aligned}$$

  Т.е. $c' \le \frac{qa_3}{1-qa_3}c$.

Следовательно, $c' \le \frac{\beta}{\alpha}c$. Итак, для любого $t \in [0;1]$ функционал Φ_t является (α, β)-поисковым на $\overline{U}$.

Покажем, что семейство $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0;1]}$ является $q\theta$-непрерывным для q, $1 < q < \min\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{2a_2}, \frac{1}{2a_3}\}$. Пусть $x \in \overline{U}$, $t, t' \in [0;1]$ и $c \in \Phi_t(x)$. Значению c соответствует набор $y \in T_t(x)$, $y^0 \in S_t(x)$, для которого $c = d(y, y^0)$. В силу леммы 1.4.1 существуют $y' \in T_{t'}(x)$, $(y')^0 \in S_{t'}(x)$, для которых

$$d((y')^0, y^0) \le qD(S_t(x), S_{t'}(x)),\ d(y', y) \le qD(T_t(x), T_{t'}(x)).$$

Обозначим $c' = d(y', (y')^0) \in \Phi_{t'}(x)$. Получим

$$\begin{aligned} d(y, y^0) \le d(y, y') + d(y', (y')^0) + d((y')^0, y^0) \le \\ &\le qD(T_t(x), T_{t'}(x)) + c' + qD(S_t(x), S_{t'}(x)) \le c' + q\left|\theta(t') - \theta(t)\right|. \end{aligned}$$

Отсюда $c \le c' + q\left|\theta(t') - \theta(t)\right|$. Аналогично, $c' \le c + q\left|\theta(t') - \theta(t)\right|$. Значит,

$$|c' - c| \le q\left|\theta(t') - \theta(t)\right|.$$

Итак, семейство $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0;1]}$ является $q\theta$-непрерывным.

Наконец, в силу условия 6 для любого $t \in [0;1]$ на границе множества ∂U нет нулей функционала Φ_t, поэтому с учетом утверждения 2.3.1 множество $M_U(\Phi)$ замкнуто.

Итак, выполнены все условия теоремы 2.3.1. А тогда по теореме 2.3.1 если

$$\mathrm{Coin}(S_0, T_0) = \mathrm{Coin}(S_0, T_0) \cap U \neq \varnothing,$$

т.е. существует $(0, x_0) \in M_U(\Phi)$, то существует $(1, x_1) \in M_U(\Phi)$, т.е.

$$\mathrm{Coin}(S_1, T_1) = \mathrm{Coin}(S_1, T_1) \cap U \neq \varnothing,$$

$\square$

Глава 3

Принцип поиска нулей функционалов в калибровочном пространстве

3.1 Калибровочные пространства

Естественным обобщением метрического пространства является хаусдорфово пространство, топология которого задается семейством псевдометрик. Рассмотрим основные определения и свойства таких пространств (см. также [25]).

Определение 3.1.1. Пусть X — непустое множество. Отображение $d : X \times X \to [0; +\infty)$ называется *числовой псевдометрикой*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $d(x, x) = 0$ для любого $x \in X$.

2. $d(x, x') = d(x', x)$ для любых $x, x' \in X$

3. $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ для любых $x, x', x'' \in X$.

Определение 3.1.2. Пусть X — непустое множество, I — непустое множество индексов. Семейство $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i \in I}$ числовых псевдометрик на X называется *разделяющим*, если для любых $x, x' \in X$ верна импликация

$$(\forall i \in I \ d_i(x, x') = 0) \ \Rightarrow \ (x = x').$$

Иными словами, одна псевдометрика разделяющего семейства может равняться нулю на паре различных точек, однако все псевдометрики разделяющего семейства не могут одновременно равняться нулю на паре различных точек.

Рассмотрим следующие обозначения. Пусть X — непустое множество, $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i\in I}$ — семейство числовых псевдометрик на X. Для любых $i \in I$, $x \in X$ и $R > 0$ обозначим через $B_i(x,R) = \{x' \in X \mid d_i(x,x') < R\}$ и $\overline{B_i}(x,R) = \{x' \in X \mid d_i(x,x') \leq R\}$ соответственно открытый и замкнутый шар относительно псевдометрики d_i с центром в x радиуса R.

Определение 3.1.3. Пусть X — непустое множество, $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i\in I}$ — семейство числовых псевдометрик на X. Топологию на X, задаваемую предбазой

$$\mathcal{S} := \{B_i(x,R) \mid i \in I, x \in X, R > 0\},$$

называют *топологией, индуцированной семейством* $\mathcal{D}$.

Пара $(X, \mathcal{D})$ с топологией, индуцированной семейством $\mathcal{D}$, называется *калибровочным пространством* (в англ. литературе «gauge space»).

Для произвольного семейства числовых псевдометрик $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i\in I}$ рассмотрим семейство числовых псевдометрик

$$\mathcal{D}_+ := \{\max\{d_{i_1}, \dots, d_{i_m}\} \mid i_1 \dots i_m \in I,\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Семейство $\mathcal{D}_+$ индуцируют ту же топологию, что и $\mathcal{D}$. Обозначим множество индексов семейства $\mathcal{D}_+$ через I_+.

Определение 3.1.4. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall i \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N :\ d_i(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Иными словами $\{x_n\}$ фундаментальная относительно каждой числовой псевдометрики семейства $\mathcal{D}$.

Пространство X называется *секвенциально полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится в X.

В некоторых теоремах многие авторы используют вместо понятия секвенциальной полноты следующее понятие.

Определение 3.1.5. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i\in I}$, и задано непустое множество индексов J.

Семейство $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J} \subset \mathrm{P}(X)$ непустых подмножеств X называется *базисом фильтра Коши*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Для любых $j_1, j_2 \in J$ существует $j \in J$ такое, что $U_j \subset U_{j_1} \cap U_{j_2}$.
2. Для любых $i \in I$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $j \in J$ такой, что
$$\sup_{x,x'\in U_j} d_i(x, x') < \varepsilon.$$

Пространство X называется *полным*, если всякий базис фильтра Коши $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ сходится, т.е. существует такая точка $\xi \in X$, что для любой окрестности U точки ξ существует $j \in J$, для которого $U_j \subset U$.

Для калибровочного пространства $(X, \mathcal{D})$ обозначим через $\mathrm{C}(X)$ — семейство всех непустых замкнутых подмножеств в X. Для каждой псевдометрики $d_i \in \mathcal{D}$ рассмотрим следующие обозначения: $d_i(x, X_0) := \inf\limits_{x'\in X_0} d_i(x, x')$ — псевдорасстояние от точки $x \in X$ до подмножества $X_0 \in \mathrm{C}(X)$; $d_i(X_0, X_1) := \inf\limits_{x\in X_0,\ x'\in X_1} d_i(x, x')$ — псевдорасстояние между подмножествами $X_0, X_1 \in \mathrm{C}(X)$; $D_i(X_0, X_1) := \max\{\sup\limits_{x\in X_0} d_i(x, X_1),\ \sup\limits_{x'\in X_1} d_i(x', X_0)\}$ — псевдорасстояние Хаусдорфа между подмножествами $X_0, X_1 \in \mathrm{C}(X)$.

Утверждение 3.1.1. *Верны следующие свойства калибровочного пространства* $(X, \mathcal{D})$.

1. *Пусть U — открыто и $x \in U$. Тогда существуют $R > 0$ и $i_1, \ldots, i_m \in I$ такие, что $\bigcap\limits_{k=1}^{m} B_{i_k}(x, R) \subset U$.*
2. *X — хаусдорфово пространство, причем*
$$x = x' \Leftrightarrow \ \forall i \in I: \ d_i(x, x') = 0.$$
3. *X — регулярное пространство, причем для любого $X_0 \in C(X)$*
$$x \in X_0 \ \Leftrightarrow \ \forall i \in I_+: \ d_i(x, X_0) = 0.$$

4. $x_n \to x \;\Leftrightarrow\; \forall i \in I : \; d_i(x_n, x) \to 0.$

3.2 Сжимающие отображения калибровочного пространства и некоторые обобщения

Множество результатов, связанных со сжимающими отображениями и их обобщениями, были перенесены на калибровочные пространства. Так понятие сжимающего отображения хаусдорфова равномерного пространства и соответствующая теорема о неподвижной точке впервые появилось в работе [42]. Позднее в 1971 году в работе [19] авторы предложили понятие сжимающего отображения локально выпуклого пространства (частный случай калибровочного пространства) и доказали теорему о существовании неподвижной точки.

В 1974 году Э. Тарафдар (E. Taradfar) обобщил принцип сжимаюших отображений на случай калибровочных пространств [56].

Определение 3.2.1. [56] Пусть $(X, \mathcal{R})$, $(Y, \mathcal{D})$ — калибровочные пространства, $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{R} = \{r_i\}_{i \in I}$. Отображение $T : X \to Y$ называется *λ-сжимающим*, если существует такое $\lambda \in [0;1)^I$, что для любых $x, x' \in X$ выполнено следующее условие:

$$d_i(T(x), T(x')) \le \lambda_i r_i(x, x'), \;\; \forall i \in I.$$

Теорема 3.2.1. [56] *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — полное калибровочное пространство, $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i \in I}$, $T : X \to X$ — λ-сжимающее отображение в себя, $\lambda \in [0;1)^I$. Тогда существует единственная неподвижная точка T.*

В 2000 году М. Фригон (M. Frigon) обобщила понятие сжимающего отображения калибровочного пространства [31], а позднее, в 2002 году ввела понятие многозначного сжимающего отображения калибровочного пространства и доказала теоремы о существовании и сохранении существования неподвижной точки для таких отображений [32].

Определение 3.2.2. [32] Пусть $(X, \mathcal{R})$, $(Y, \mathcal{D})$ — калибровочные пространства, $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{R} = \{r_i\}_{i \in I}$. Многозначное отображение $T : X \to \mathrm{C}(Y)$ называется *допустимым λ-сжимающим*, если

1. Существует такое $\lambda \in [0;1)^I$, что для любых $x, x' \in X$ выполнено следующее условие:

$$D_i(T(x), T(x')) \le \lambda_i r_i(x, x'), \;\; \forall i \in I.$$

2. Для любого $x \in X$ и каждого $\varepsilon \in (0; +\infty)^I$ существует $y \in T(x)$ такое, что
$$d_i(x, y) \leq d_i(x, T(x)) + \varepsilon_i, \ \forall i \in I.$$

Теорема 3.2.2. [32] *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — полное калибровочное пространство, $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i \in I}$, $T : X \to \mathrm{C}(X)$ — λ-сжимающее многозначное отображение в себя, $\lambda \in [0; 1)^I$. Тогда существует неподвижная точка T.*

Определение 3.2.3. [32] Пусть $(X, \mathcal{R})$, $(Y, \mathcal{D})$ — калибровочные пространства, $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{R} = \{r_i\}_{i \in I}$. Семейство многозначных отображений $T = \{T_t : X \to \mathrm{C(Y)}\}_{t \in [0;1]}$ называется *λ-сжимающим*, если существует такое такое $\lambda \in [0; 1)^I$, и такое $\mu \in (0; +\infty)^I$, что выполнены следующие условия:

1. T_t — допустимое λ-сжимающее многозначное отображение для любых $t \in [0; 1]$.

2. $D_i(T_t(x), T_{t'}(x)) \leq \mu_i |t - t'|$ для любых $i \in I$, $x \in X$ и $t, t' \in [0; 1]$.

Теорема 3.2.3. [32] *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — полное калибровочное пространство, $X_0 \subset X$ — подмножество. Пусть $T = \{T_t : X_0 \to \mathrm{C(X)}\}_{t \in [0;1]}$ — λ-сжимающее семейство многозначных отображений, причем для любого $t \in [0; 1]$ отображение T_t не имеет неподвижных точек на $X_{\lambda,\mu}$, где*

$$X_{\lambda,\mu} = \Bigg\{ x \in X_0 \mid \bigcap_{i \in I} \overline{B}_i(x, R_i) \not\subset X_0 \ \forall R = \{R_i\}_{i \in I} \in (0; +\infty)^I, \\ \inf_{i \in I} \frac{(1 - \lambda_i) R_i}{\mu_i} > 0 \Bigg\}.$$

Тогда, если существует неподвижная точка отображения T_0, то существует неподвижная точка отображения T_1.

Как и в метрическом пространстве, существует ряд обобщений сжимающих отображений в калибровочных пространствах. Следующая теорема, например, обобщает теорему 3.2.3 [12].

Теорема 3.2.4. [12] *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — полное калибровочное пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть $T = \{T_t : X_0 \to \mathrm{C(X)}\}_{t \in [0;1]}$ — семейство многозначных отображений, удовлетворяющее следующим условиям*

1. *Существует* $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in [0;1)^I$ *такой, что для каждого* $t \in [0;1]$ *и любых* $x, x' \in \overline{U}$,

$$\begin{aligned} D_i(T_t(x), T_t(x')) \leq \lambda_i \max \{ & d_i(x,x'), \\ & d_i(x, T_t(x)), \\ & d_i(x', T_t(x')), \\ & \frac{1}{2}\left[d_i(x, T_t(x')) + d_i(x', T_t(x))\right] \Big\}. \end{aligned}$$

2. *Существует* $\mu = (\mu_i)_{i\in I} \in [0;+\infty)^I$ *и возрастающая непрерывная функция* $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ *такая, что для любых* $x \in \overline{U}$ *и* $t, t' \in [0;1]$ *верно:*

$$D_i(T_t(x), T_{t'}(x)) \leq \mu_i|\theta(t) - \theta(t')|.$$

3. *На границе* ∂U *нет неподвижных точек* T_t *для любого* $t \in [0;1]$.

Тогда если отображение T_0 *имеет неподвижную точку, то отображение* T_1 *также имеет неподвижную точку.*

Замечание 3.2.1. Хотя в соответствующих работах [12,32] это явно не указано, в теоремах 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, по всей видимости, подразумевается, что $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+$. Это условие обусловлено тем, что при доказательстве этих теорем используется свойство 3 утверждения 3.1.1.

3.3 Калибровочные пространства и конические метрики

Работать непосредственно с семейством псевдометрик неудобно. Для удобства построим метрику, принимающую значения в некотором конусе векторного пространства, и рассмотрим необходимые нам свойства. Отметим, что связь между коническими метриками и равномерными хаусдорфовыми пространствами (то есть калибровочными в некотором смысле) была ранее изучена в работе [27].

В данном параграфе будет построена метрика со значениями в положительном конусе некоторой локально выпуклой векторной решетки (подробнее об упорядоченных векторных пространствах и локально выпуклых векторных решетках см в [10]).

Пусть I — непустое множество индексов.

Рассмотрим произведение $\mathcal{L} := \mathbb{R}^I$ заданное, в тихоновской топологии. Тогда $\mathcal{L}$ — топологическое векторное пространство, линейные операции которого задаются покомпонентно. Обозначим нулевой элемент через $0 = (0)_{i \in I}$. Кроме того, рассмотрим на $\mathcal{L}$ покомпонентную операцию умножения, то есть для любых векторов $c, c' \in \mathcal{L}$ пусть

$$c \cdot c' = (c_i \cdot (c')_i)_{i \in I}\,.$$

Тогда $\mathcal{L}$ — коммутативная алгебра с вектор-единицей $1 = (1)_{i \in I}$. Отметим, что операция умножения является непрерывной, как отображение $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{C} = [0; +\infty)^I$. Тогда $\mathcal{C}$ — замкнуто в $\mathcal{L}$. Также $\mathcal{C}$ — собственный конус в $\mathcal{L}$, то есть множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\mathcal{C} \neq \varnothing$ и $\mathcal{C} \neq \{0\}$.

2. $b_1 c + b_2 c' \in \mathcal{C}$ для любых чисел $b_1, b_2 \geq 0$ и всех векторов $c, c' \in \mathcal{C}$.

3. $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$.

Кроме того, $\mathcal{C}$ замкнуто относительно операции умножения, то есть $c \cdot c' \in \mathcal{C}$ для любых векторов $c, c' \in \mathcal{C}$.

Пусть на $\mathcal{C}$ задана тихоновская топология. Тогда $\mathcal{C}$ — топологическое подпространство $\mathcal{L}$. Кроме того, для любой последовательности векторов $\{c_n\} \subset \mathcal{C}$,

$$c_n \to c \;\Leftrightarrow\; (c_n)_i \to c_i,\ \forall i \in I.$$

Рассмотрим на $\mathcal{L}$ следующие частичные порядки. Для любых векторов $c, c' \in \mathcal{L}$:

1. $c \leq c' \;\Leftrightarrow\; \forall i \in I : c_i \leq (c')_i \;\Leftrightarrow\; c' - c \in \mathcal{C}$.

2. $c \ll c' \;\Leftrightarrow\; \forall i \in I : c_i < (c')_i$.

Тогда $(\mathcal{L}, \leq)$ — хаусдорфова локально выпуклая векторная решетка.

Отметим, что если $c \ll c'$, тогда $c \leq c'$ и $c \neq c'$. Однако если $c \leq c'$ и $c \neq c'$, то не обязательно $c \ll c'$. Действительно:

$$c \ll c' \;\Leftrightarrow\; \forall i \in I : c_i < (c')_i$$

$$c \leq c',\ c \neq c' \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \forall i \in I : c_i \leq (c')_i, \\ \exists i \in I : c_i < (c')_i. \end{cases}$$

Для любого вектора $c \in \mathcal{L}$ будем обозначать $|c| := \sup\{c, -c\} = (|c_i|)_{i\in I} \in \mathcal{C}$. Тогда, если $c_n \to c$, то $|c_n| \to |c|$.

Перечислим свойства $\mathcal{C}$, которые нам понадобятся. Доказательство заключается в непосредственной покомпонентной проверке их выполнимости.

1. Если $c_1 \le c_2$ и $c'_1 \le c'_2$, то $c_1 + c'_1 \le c_2 + c'_2$.

2. Если $c_1 \le c_2$ и $c'_1 \ll c'_2$, то $c_1 + c'_1 \ll c_2 + c'_2$.

3. Вектор c обратим в том и только том случае, если $c \gg 0$. Причем, $c^{-1} = (\frac{1}{c_i})_{i\in I}$.

4. Если $c_1 \le c_2$, то $c_1 \cdot c \le c_2 \cdot c$.

5. Если $c' \ll c$, то $c^{-1} \cdot c' \ll 1$.

6. Если $c \ll 1$, то $c^n \ll 1$ и $c^n \to 0$.

7. Если $c_n \to c$ и $c'_n \to c'$, то $c_n \cdot c'_n \to c \cdot c'$.

8. Если $c'_n \le c_n \le c''_n$, $c_n \to c$, $c'_n \to c'$, $c''_n \to c''$, то $c' \le c \le c''$.

9. Если $c'_n \le c_n \le c''_n$, $c'_n \to c$ и $c''_n \to c$, то $c_n \to c$.

10. Если $c \ll 1$, то $1 + c + \cdots + c^n = (1-c)^{-1} \cdot (1 - c^{n+1})$.

11. Если $c \le c'$ и $c' \ll c''$, то $c \ll c''$. Если $c \ll c'$ и $c' \le c''$, то $c \ll c''$.

12. Если $0 \ll c \le c'$, то $c' - c \ll c'$.

13. Если $0 \ll c_1 \le c_2$ и $c'_1 \ll c'_2$, то $c_1 \cdot c'_1 \ll c_2 \cdot c'_2$.

14. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, $\beta > 1$ и $c \gg 0$, то $\alpha c \ll c \ll \beta c$.

Пусть $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i\in I}$ — разделяющее семейство псевдометрик. Пусть $d : X \times X \to \mathcal{C}$ — отображение, задаваемое равенством

$$d(x, x') := (d_i(x, x'))_{i\in I}.$$

Тогда d — коническая метрика на X (см. [38]), то есть удовлетворяет следующим условиям:

1. Для всех $x, x' \in X$, $x = x' \;\Leftrightarrow\; d(x, x') = 0$.

2. Для всех $x, x' \in X$, $d(x, x') = d(x', x)$.

3. Для всех $x, x', x'' \in X$, $d(x, x'') \le d(x, x') + d(x', x'')$.

Пусть снова $B(x, R) := \{yx' \in X \mid d(x, x') \ll R\}$ и $\overline{B}(x, R) := \{x' \in X \mid d(x, x') \le R\}$ — «открытый» и замкнутый шары с центром в точке x вектор-радиуса $R \gg 0$. Слово «открытый» берется в кавычки, поскольку оно не означает открытость в топологии калибровочного пространства. Замкнутый шар в свою очередь является замкнутым множеством в данной топологии.

Замечание 3.3.1. Калибровочное пространство $(X, \mathcal{D})$ не является коническим метрическим пространством (см. [38]), поскольку его топология не задается базой
$$\{B(x, R) \mid x \in X,\ R \gg 0\}.$$

Полученная коническая метрика d удовлетворяет следующим свойствам. Доказательство следует непосредственно из определения и свойств тихоновской топологии.

Утверждение 3.3.1.

1. *d — непрерывное отображение по каждой компоненте.*

2. *$x_n \to x$ в том и только том случае, если $d(x_n, x) \to 0$.*

3. *Последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальна в том и только том случае, когда $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ при $n, p \to \infty$.*

Кроме того, нам понадобятся следующие свойства, выполнимость которых проверяется покомпонентно.

Утверждение 3.3.2. *Пусть X_0, X_1 и X_2 — непустые подмножества в X. Пусть $d(x, X_0) := (d_i(x, X_0))_{i\in I}$, $d(X_1, X_2) := (d_i(X_1, X_2))_{i\in I}$ и $D(X_1, X_2) := (D_i(X_1, X_2))_{i\in I}$. Тогда*

1. *$x \in X_0 \;\Leftrightarrow\; d(x, X_0) = 0$, если X_0 замкнуто, непусто и $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$.*

2. *$d(x, X_0) \le d(x, x_0)$ для каждого $x \in X$ и каждого $x_0 \in X_0$.*

3. $d(x_1, X_2) \le D(X_1, X_2)$ *для каждого* $x_1 \in X_1$.

4. $d(X_1, X_2) \le d(x_1, x_2)$ *для каждого* $x_1 \in X_1$ *и каждого* $x_2 \in X_2$.

5. $d(x, X_0) \le d(x, x') + d(x', X_0)$ *для каждого* $x, x' \in X$.

6. $d(x, X_1) \le d(x, X_2) + D(X_1, X_2)$ *для каждого* $x \in X$.

3.4 Существование нулей однозначных поисковых вектор-функций в калибровочных пространствах

Перенесем однозначную версию принципа поиска нулей функционалов на случай калибровочных пространств.

Определение 3.4.1. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Вектор-функция $\varphi : X \to \mathcal{C}$ называется (α, β)-*поисковой*, если для каждой точки $x \in X$ существует точка $x' \in X$ такая, что $d(x, x') \le \alpha^{-1} \cdot \varphi(x)$ и $\varphi(x') \le \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \varphi(x)$.

Определение 3.4.2. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство. Точка $\xi \in X$ называется *нулем* вектор-функции $\varphi : X \to \mathcal{C}$, если $\varphi(\xi) = 0$.

Определение 3.4.3. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ вектор-функции $\varphi : X \to \mathcal{C}$ является *секвенциально* $\{0\}$*-полным*, если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, \varphi(x_n))\} \subset \mathrm{Graph}(\varphi)$ такой, что $\varphi(x_n) \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и ξ – нуль вектор-функции φ.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *– калибровочное пространство,* $\varphi : X \to \mathcal{C}$ *–* (α, β)*-поисковая вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$, *с секвенциально* $\{0\}$*-полным графиком. Тогда для любой точки* x_0 *существует последовательность* $\{x_n\} \subset X$, *сходящаяся к некоторой точке* ξ, *такой,* ξ *– нуль вектор-функции* φ *и* $d(x_0, \xi) \le (\alpha - \beta)^{-1} \cdot \varphi(x_0)$.

Доказательство. Доказательтсво вполне аналогично метрическому случаю. Пусть $x_0 \in X$. Тогда существует $x_1 \in X$ такая, что

$$d(x_0, x_1) \leq \alpha^{-1} \cdot \varphi(x_0),$$
$$\varphi(x_1) \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \varphi(x_0).$$

Таким образом по индукции построим последовательность $\{x_n\} \subset X$ такую, что

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^{-1} \cdot \varphi(x_n),$$
$$\varphi(x_{n+1}) \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \varphi(x_n),$$

откуда

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^{-1} \cdot (\beta \cdot \alpha^{-1})^n \cdot \varphi(x_0),$$
$$\varphi(x_n) \leq (\beta \cdot \alpha^{-1})^n \cdot \varphi(x_0).$$

Из второго неравенства получаем, что $\varphi(x_n) \to 0$. В силу же первого неравенства, имеем

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq \alpha^{-1} \cdot (\beta \cdot \alpha^{-1})^n \cdot \varphi(x_0) + \dots + \alpha^{-1} \cdot (\beta \cdot \alpha^{-1})^{n+p-1} \cdot \varphi(x_0) \leq \\ &\leq \left(1 + \beta \cdot \alpha^{-1} + \dots + (\beta \cdot \alpha^{-1})^{p-1}\right) \cdot \alpha^{-1} \cdot (\beta \cdot \alpha^{-1})^n \cdot \varphi(x_0) \leq \\ &\leq (1 - \beta \cdot \alpha^{-1})^{-1} \cdot (1 - (\beta \cdot \alpha^{-1})^p) \cdot \alpha^{-1} \cdot (\beta \cdot \alpha^{-1})^n \cdot \varphi(x_0) \to 0. \end{aligned}$$

Т.е. $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность. Поскольку график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ секвенциально $\{0\}$-полный, то существует $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и $\varphi(\xi) = 0$. Также из последнего неравенства имеем:

$$d(x_0, x_n) \leq (\alpha - \beta)^{-1} \cdot (1 - (\beta \cdot \alpha^{-1})^n) \cdot \varphi(x_0).$$

Предельным переходом при $n \to \infty$ получаем:

$$d(x_0, \xi) \leq (\alpha - \beta)^{-1} \cdot \varphi(x_0),$$

что и требовалось доказать. $\square$

3.5 Проблема обобщения на многозначный случай, многозначная почти поисковая вектор-функция в калибровочных пространствах

Рассмотрим снова многозначную версию поисковых функционалов в метрическом случае.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $T : X \to \mathrm{CB}(X)$ — многозначное λ-сжимающее отображение, $\lambda \in [0; 1)$, т.е.

$$D(T(x), T(x')) \leq \lambda d(x, x'), \ \forall x, x' \in X.$$

Рассмотрим многозначный функционал $\Phi : X \rightrightarrows [0; +\infty)$, задаваемый по формуле

$$\Phi(x) := \{d(x, x') \mid x' \in T(x)\}.$$

Пусть $x \in X$ и $c \in \Phi(x)$. Значению c соответствует некоторая точка $x' \in T(x)$, для которой $c = d(x, x')$. Пусть $1 < q < \frac{1}{\lambda}$. Тогда в силу леммы 1.4.1 существует точка $x'' \in T(x')$ такая, что

$$d(x', x'') \leq qD(T(x), T(x')) \leq q\lambda d(x, x').$$

Откуда, если положить $c' := d(x', x'') \in \Phi(x')$, то

$$d(x, x') = c \leq qc, \ c' \leq q\lambda c.$$

Т.е. Φ является многозначным $(\frac{1}{q}, \lambda)$-поисковым.

Здесь мы пользовались леммой 1.4.1. Отметим, что следующие условия, приведенные в следствиях 1.4.1 и 1.4.2, эквивалентны и выполняются всегда в метрическом случае:

1. Для каждого $x \in X_0$ и каждого $\varepsilon > 0$, существует точка $x' \in X_1$ такая, что $d(x, x') \leq d(x, X_1) + \varepsilon$.

2. Для каждого $x \in X_0$ и каждого $q > 1$, существует точка $x' \in X_1$ такая, что $d(x, x') \leq qd(x, X_1)$.

Их выполнимость следует из следствий 1.4.1 и 1.4.2. Покажем эквивалентность.

Если $x \in X_1$, то в обоих случаях достаточно взять $x' := x$. Если $x \notin X_1$. То

- Пусть выполнено 1. Тогда для каждого $q > 1$ положим $\varepsilon := (q-1)d(x, X_1) > 0$, откуда выполнено 2.
- Пусть выполнено 2. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ положим $q := 1 + \frac{\varepsilon}{d(x,X_1)} > 1$, откуда выполнено 1.

Перейдем теперь к случаю калибровочного пространства. Рассмотрим аналогичные условия:

1. Для каждого $x \in X_0$ и каждого $\varepsilon \gg 0$, существует точка $x' \in X_1$ такая, что $d(x, x') \leq d(x, X_1) + \varepsilon$.
2. Для каждого $x \in X_0$ и каждого $q \gg 1$, существует точка $x' \in X_1$ такая, что $d(x, x') \leq q \cdot d(x, X_1)$.

Доказать эквивалентность условий 1 и 2 таким же образом, как и в метрическом случае не получится. Это связано с тем, что из факта $x \notin X_1$ следует лишь, что $d(x, X_1) \neq 0$. Но это не означает, что $d(x, X_1) \gg 0$. При этом, из условия 2 следует условие 1. Действительно, пусть выполнено условие 2. Тогда для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon \gg 0$ положим $q \gg 1$, $q = (q_i)_{i \in I}$,

$$q_i := \begin{cases} 1 + \frac{\varepsilon_i}{d_i(x,X_1)}, & d_i(x, X_1) \neq 0, \\ 2, & d_i(x, X_1) = 0. \end{cases}$$

Тогда в силу условия 2 существует $x' \in X$ такая, что $d(x, x') \leq qd(x, X_1)$.

Тогда если $d_i(x, X_1) \neq 0$, то

$$d_i(x, x') \leq q_i d_i(x, X_1) = \left(1 + \frac{\varepsilon_i}{d_i(x, X_1)}\right) d_i(x, X_1) = d_i(x, X_1) + \varepsilon_i.$$

Если $d_i(x, X_1) = 0$, то

$$d_i(x, x') \leq q_i d_i(x, X_1) = 0 \leq \varepsilon_i = d_i(x, X_1) + \varepsilon_i.$$

Т.е. $d(x, x') \leq d(x, X_1) + \varepsilon$, откуда условие 1 также выполнено.

С учетом верности этой импликации и условия 2 определения 3.2.2, нас будет интересовать именно условие 1.

Введем по аналогии с метрическим пространством следующее понятие.

Определение 3.5.1. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Многозначная вектор-функция $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ называется (α, β)-*поисковой*, если для каждой точки $x \in X$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существуют точка $x' \in X$ и значение $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot c$ и $c' \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c$.

Данное определение оказывается неудобным даже в случае допустимого λ-сжимающего многозначного отображения. Поэтому рассмотрим следующую модификацию.

Определение 3.5.2. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Многозначная вектор-функция $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ называется *почти* (α, β)-*поисковой*, если для каждого $\varepsilon \gg 0$, каждой точки $x \in X$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существуют точка $x' \in X$ и значение $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot c$ и $c' \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c + \varepsilon$.

Рассмотрим связь этих определений. Напрямую из определения получаем, что многозначная поисковая вектор-функция является почти-поисковой. В метрическом случае оказывается, что многозначный почти-поисковый функционал является поисковым. Более точно, верно следующее утверждение.

Утверждение 3.5.1. *Пусть* (X, d) — *метрическое пространство,* $\Phi : X \rightrightarrows [0; +\infty)$ — *многозначный почти* (α, β)*-поисковый функционал,* $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha$. *Тогда* Φ — (α, β')*-поисковый для каждого* $\beta' \in [0; +\infty)$, $\beta < \beta' < \alpha$.

Доказательство. Пусть $\beta' \in [0; +\infty)$, $\beta < \beta' < \alpha$. Рассмотрим $x \in X$ и $c \in \Phi(x)$. Если $c = 0$, то положим просто $x' = x$, $c' = c = 0$. Тогда $d(x, x') = 0 \leq 0 = \frac{1}{\alpha} c$ и $c' = 0 \leq 0 = \frac{\beta'}{\alpha} c$. Если $c \neq 0$, положим $\varepsilon := \frac{\beta' - \beta}{\alpha} c > 0$. Тогда существует $x' \in X$ и $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \leq \frac{1}{\alpha} c$ и $c' \leq \frac{\beta}{\alpha} c + \frac{\beta' - \beta}{\alpha} c = \frac{\beta'}{\alpha} c$. Таким образом, Φ — (α, β')-поисковый, что и требовалось доказать. $\square$

В калибровочном пространстве это вообще говоря не верно даже для однозначной вектор-функции. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 3.5.1. Пусть $I = (0; +\infty)$ и $X_0 = (0; +\infty)^I$. Пусть $\xi \in [0; +\infty)^I$, $\xi = (\xi_i)_{i \in I}$,

$$\xi_i = \begin{cases} 0, & i = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & i = 2, \\ 1, & i \neq \frac{1}{2}, i \neq 2. \end{cases}$$

Пусть $X = X_0 \cup \{\xi\}$. Для каждого $i \in I$, пусть $d_i : X \to [0;+\infty)$ — отображение, задаваемое равенством $d_i(x,x') = |x_i - x'_i|$. Тогда $\mathcal{D} := \{d_i\}_{i\in I}$ — разделяющее семейство псевдометрик, что означает, что $(X,\mathcal{D})$ — калибровочное пространство.

Рассмотрим однозначную вектор-функцию. Пусть $\varphi : X \to [0;+\infty)^I$ — отображение, задаваемое соотношением:

$$\varphi(x) = \{\varphi_i(x)\}_{i\in I},\ \varphi_i(x) = \begin{cases} \min\left\{x_i, x_{\frac{1}{i}}\right\}, & x \in X_0, \\ 0, & x = \xi,\ i = 2, \\ 1, & x = \xi,\ i \neq 2. \end{cases}$$

Покажем, что φ — почти $\left(1, \left\{\frac{1}{2}\right\}_{i\in I}\right)$ — поисковая вектор-функция.

Для каждого $x \in X$ и каждого $\varepsilon \gg 0$, положим в качестве $x' \in X$ такую точку $x' = (x'_i)_{i\in I}$, что

$$x'_i : \begin{cases} x'_i = x_i - \frac{1}{2}x_{\frac{1}{i}},\ x'_{\frac{1}{i}} = \frac{1}{2}x_{\frac{1}{i}}, & x_i \geq x_{\frac{1}{i}} \\ x'_i = \frac{1}{2}x_i,\ x'_{\frac{1}{i}} = x_{\frac{1}{i}} - \frac{1}{2}x_i, & x_i < x_{\frac{1}{i}} \end{cases},\ \text{если } x \in X_0$$

и

$$x'_i = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i \neq \frac{1}{2}, \\ \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon_2\right\}, & i = \frac{1}{2} \end{cases},\ \text{если } x = \xi.$$

Рассмотрим следующие случаи для $d_i(x,x')$ и $\varphi_i(x')$:

- Пусть $x \in X_0$, $i \in I$. Тогда $\varphi_i(x) = \min\left\{x_i, x_{\frac{1}{i}}\right\}$ и

$$d_i(x,x') = |x_i - x'_i| = \begin{cases} \frac{1}{2}x_{\frac{1}{i}}, & x_i \geq x_{\frac{1}{i}} \\ \frac{1}{2}x_i, & x_i < x_{\frac{1}{i}} \end{cases} = \frac{1}{2}\min\left\{x_i, x_{\frac{1}{i}}\right\} = \frac{1}{2}\varphi_i(x) \leq \varphi_i(x).$$

$$\varphi_i(x') = \min\left\{x'_i, x'_{\frac{1}{i}}\right\} = \begin{cases} \min\left\{x_i - \frac{1}{2}x_{\frac{1}{i}}, \frac{1}{2}x_{\frac{1}{i}}\right\}, & x_i \geq x_{\frac{1}{i}} \\ \min\left\{\frac{1}{2}x_i, x_{\frac{1}{i}} - \frac{1}{2}x_i\right\}, & x_i < x_{\frac{1}{i}} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}x_{\frac{1}{i}}, & x_i \geq x_{\frac{1}{i}} \\ \frac{1}{2}x_i, & x_i < x_{\frac{1}{i}} \end{cases} = \frac{1}{2}\min\left\{x_i, x_{\frac{1}{i}}\right\} = \frac{1}{2}\varphi_i(x) \leq \frac{1}{2}\varphi_i(x) + \varepsilon_i.$$

- Пусть $x=\xi$, $i\in I$, $i\neq\frac{1}{2}$, $i\neq 2$. Тогда $\varphi_i(x)=1$ и

$$d_i(x,x')=|x_i-{x'}_i|=\left|1-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\le 1=\varphi_i(x),$$
$$\varphi_i(x')=\min\left\{{x'}_i,{x'}_{\frac{1}{i}}\right\}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\varphi_i(x)\le\frac{1}{2}\varphi_i(x)+\varepsilon_i.$$

- Пусть $x=\xi$, $i=\frac{1}{2}$. Тогда $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)=1$ и

$$d_{\frac{1}{2}}(x,x')=\left|x_{\frac{1}{2}}-{x'}_{\frac{1}{2}}\right|=\left|0-\min\left\{\frac{1}{2},\varepsilon_2\right\}\right|=\min\left\{\frac{1}{2},\varepsilon_2\right\}\le\frac{1}{2}\le 1=\varphi_{\frac{1}{2}}(x),$$
$$\varphi_{\frac{1}{2}}(x')=\min\left\{{x'}_{\frac{1}{2}},{x'}_2\right\}=\min\left\{\min\left\{\frac{1}{2},\varepsilon_2\right\},\frac{1}{2}\right\}\le\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\varphi_{\frac{1}{2}}(x)\le$$
$$\le\frac{1}{2}\varphi_{\frac{1}{2}}(x)+\varepsilon_{\frac{1}{2}}.$$

- Пусть $x=\xi$, $i\in I$, $i=2$. Тогда $\varphi_2(x)=0$ и

$$d_2(x,x')=|x_2-{x'}_2|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=0=\varphi_2(x),$$
$$\varphi_2(x')=\min\left\{{x'}_2,{x'}_{\frac{1}{2}}\right\}=\min\left\{\frac{1}{2},\min\left\{\frac{1}{2},\varepsilon_2\right\}\right\}\le\varepsilon_2=\frac{1}{2}\varphi_2(x)+\varepsilon_2.$$

Т.е.
$$d(x,x')\le\varphi(x),$$
$$\varphi(x')\le\left(\frac{1}{2}\right)_{i\in I}\cdot\varphi(x).$$

Это означает, что φ — почти $\left(1,\left(\frac{1}{2}\right)_{i\in I}\right)$-поисковая вектор-функция.

Пусть теперь для некоторых $\alpha,\beta\in\mathcal{C}$, $\beta\ll\alpha$, φ — (α,β)-поисковая вектор-функция. Тогда для точки ξ существует $x'\in X$ такая, что $d(x,x')\le\alpha^{-1}\cdot\varphi(\xi)$ и $\varphi(x')\le\beta\cdot\alpha^{-1}\cdot\varphi(\xi)$. Тогда, в частности,

$$d_2(\xi,x')\le\frac{1}{\alpha_2}\varphi_2(\xi)=0,$$
$$\varphi_2(x')\le\frac{\beta_2}{\alpha_2}\varphi_2(\xi)=0.$$

Откуда

$$0 = d_2(\xi, x') = |\xi_2 - x'_2| = \left|\frac{1}{2} - x'_2\right| \Rightarrow x'_2 = \frac{1}{2},$$
$$0 = \varphi_2(x') = \min\left\{x'_2, x'_{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Т.е. $x'_2 = \frac{1}{2}$, $x'_{\frac{1}{2}} = 0$. Это возможно лишь когда $x' = \xi$. Но тогда

$$\varphi_1(\xi) \le \frac{\beta_1}{\alpha_1}\varphi_1(\xi),$$

т.е. $\varphi_1(\xi) = 0$ — противоречие.

Итак, φ - почти $\left(1, (\frac{1}{2})_{i\in I}\right)$-поисковая вектор-функция, однако φ не является (α, β)-поисковой вектор-функцией для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$.

3.6 Существование нулей многозначных почти поисковых вектор-функций в калибровочных пространствах

Сформулируем теперь и докажем локальную и глобальную версии многозначного принципа поиска нулей вектор-функций в калибровочных пространствах.

Определение 3.6.1. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство. Точка $\xi \in X$ называется *нулем* многозначной вектор-функции $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$, если $0 \in \Phi(\xi)$.

Определение 3.6.2. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ многозначной вектор-функции $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ является *секвенциально* $\{0\}$*-полным*, если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi)$ такой, что $c_n \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и ξ — нуль вектор-функции Φ.

Теорема 3.6.1. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ — многозначная почти (α, β)-поисковая вектор-функция, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, с секвенциально $\{0\}$-полным графиком. Тогда для любой пары $(x_0, c_0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$ и каждого $\delta \gg 0$ существует последовательность $\{x_n\} \subset X$, сходящаяся к некоторой точке ξ, такой, что ξ — нуль вектор-функции Φ и $d(x_0, \xi) \le (\alpha - \beta)^{-1} \cdot c_0 + \delta$.*

Доказательство. Пусть $\delta \gg 0$ и $R := (1-\beta\cdot\alpha^{-1})^{-1}\cdot c_0 + \alpha\cdot\delta \geq \alpha\cdot\delta \gg 0$. Тогда

$$c_0 = (1-\beta\cdot\alpha^{-1})\cdot(R-\alpha\cdot\delta) \ll (1-\beta\cdot\alpha^{-1})\cdot R.$$

По индукции построим $\{x_n\}\subset X$, $\{\varepsilon_n\}\subset\mathcal{C}$ и $\{c_n\}\subset\mathcal{C}$, $c_n\in\Phi(x_n)$ такие, что

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \frac{1}{2}\beta\cdot\alpha^{-1}\cdot((\beta\cdot\alpha^{-1})^{n-1}\cdot(1-\beta\cdot\alpha^{-1})\cdot R - c_{n-1}) \gg 0,\\
d(x_{n-1},x_n) &\leq \alpha^{-1}\cdot(\beta\cdot\alpha^{-1})^{n-1}\cdot(1-\beta\cdot\alpha^{-1})\cdot R,\\
c_n &\leq \beta\cdot\alpha^{-1}\cdot c_{n-1}+\varepsilon_n \ll (\beta\cdot\alpha^{-1})^{n}\cdot(1-\beta\cdot\alpha^{-1})\cdot R.
\end{aligned}$$

По аналогии с некоторыми шагами доказательства теоремы 3.4.1 доказывается, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность и $c_n\to 0$. Кроме того,

$$d(x_0,x_n) \leq (\alpha-\beta)^{-1}\cdot(1-(\beta\cdot\alpha^{-1})^{n})\cdot(1-\beta\cdot\alpha^{-1})\cdot R. \tag{3.6.1}$$

Поскольку $\mathrm{Graph}(\Phi)$ секвенциально $\{0\}$-полный, то существует точка $\xi\in X$ такая, что $x_n\to\xi$, $0\in\Phi(\xi)$.

Предельным переходом при $n\to\infty$ в 3.6.1 получим

$$\begin{aligned}
d(x_0,\xi) &\leq (\alpha-\beta)^{-1}\cdot(1-\beta\cdot\alpha^{-1})\cdot R = \\
&= (\alpha-\beta)^{-1}\cdot(1-\beta\cdot\alpha^{-1})\cdot((1-\beta\cdot\alpha^{-1})^{-1}\cdot c_0+\alpha\cdot\delta) = \\
&= (\alpha-\beta)^{-1}\cdot(c_0+(1-\beta\cdot\alpha^{-1})\cdot\alpha\cdot\delta) \leq \\
&\leq (\alpha-\beta)^{-1}\cdot c_0+\delta,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 3.6.2. *Пусть* $(X,\mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $\Phi: X\rightrightarrows\mathcal{C}$ *— многозначная* (α,β)*-поисковая вектор-функция,* $\alpha,\beta\in\mathcal{C}$, $\beta\ll\alpha$, *с секвенциально* $\{0\}$*-полным графиком. Тогда для любой пары* $(x_0,c_0)\in\mathrm{Graph}(\Phi)$ *такой, что* $c_0\ll(\alpha-\beta)\cdot R$, $R\gg 0$, *существует* $\xi\in\overline{B}(x_0,R)$ *— нуль вектор-функции* Φ.

Доказательство. По индукции построим $\{x_n\}\subset X$, $\{\varepsilon_n\}\subset\mathcal{C}$ и $\{c_n\}\subset\mathcal{C}$,

$c_n \in \Phi(x_n)$ такие, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = \frac{1}{2}\beta \cdot \alpha^{-1} \cdot ((\beta \cdot \alpha^{-1})^{n-1} \cdot (\alpha - \beta) \cdot R - c_{n-1}) \gg 0, \\ d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha^{-1} \cdot (\beta \cdot \alpha^{-1})^{n-1} \cdot (\alpha - \beta) \cdot R, \\ c_n \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c_{n-1} + \varepsilon_n \ll (\beta \cdot \alpha^{-1})^n \cdot (\alpha - \beta) \cdot R. \end{aligned}$$

Тогда $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, $c_n \to 0$. Также

$$d(x_0, x_n) \leq (1 - (\beta \cdot \alpha^{-1})^n) \cdot R.$$

В итоге, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$, $0 \in \Phi(\xi)$ и $d(x_0, \xi) \leq R$, т.е. $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$. □

3.7 Сохранение существования нулей у параметрического семейства многозначных почти поисковых вектор-функций на подмножестве калибровочного пространства

Рассмотрим задачу сохранения существования на некотором подмножестве калибровочного пространства нулей для некоторого семейства многозначных поисковых вектор-функций при изменении параметра.

Определение 3.7.1. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $X_0 \subset X$ и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Многозначная вектор-функция $\Phi : X_0 \rightrightarrows \mathcal{C}$ называется *почти* (α, β)*-поисковой на* X_0, если для каждой точки $x \in X_0$, каждого значения $c \in \Phi(x)$, каждых $\varepsilon \gg 0$ и $R \gg 0$ таких, что $\overline{B}(x, R) \subset X_0$, $c \leq (\alpha - \beta) \cdot R$, существует такая точка $x' \in X_0$ и такое значение $c' \in \Phi(x')$, что $d(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot c$ и $c' \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c + \varepsilon$.

Теорема 3.7.1. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $X_0 \subset X$*, и* $\Phi : X_0 \rightrightarrows \mathcal{C}$ *— многозначная почти* (α, β)*-поисковая на* X_0 *вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$*,* $\beta \ll \alpha$*, с секвенциально* $\{0\}$*-полным графиком. Пусть заданы* $x_0 \in X_0$*,* $c_0 \in \Phi(x_0)$ *и* $R \gg 0$ *такие, что*

1. $\overline{B}(x_0, R) \subset X_0$.

2. $c_0 \ll (\alpha - \beta) \cdot R$.

Тогда существует $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$ *— нуль вектор-функции* Φ.

Доказательство. По индукции построим $\{x_n\} \subset \overline{B}(x_0, R)$, $\{\varepsilon_n\} \subset \mathcal{C}$ и $\{c_n\} \subset \mathcal{C}$, $c_n \in \Phi(x_n)$ такие, что $\overline{B}(x_n, R_n) \subset X_0$, $R_n = (\beta \cdot \alpha^{-1})^n \cdot R$, и

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{2}\beta \cdot \alpha^{-1} \cdot ((\beta \cdot \alpha^{-1})^{n-1} \cdot (\alpha - \beta) \cdot R - c_{n-1}) \gg 0, \\ d(x_{n-1}, x_n) &\leq \alpha^{-1} \cdot (\beta \cdot \alpha^{-1})^{n-1} \cdot (\alpha - \beta) \cdot R, \\ c_n &\leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c_{n-1} + \varepsilon_n \ll (\beta \cdot \alpha^{-1})^n \cdot (\alpha - \beta) \cdot R. \end{aligned}$$

Тогда, как и в теореме 3.4.1, покажем, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность и $c_n \to 0$.

В итоге, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$, $0 \in \Phi(\xi)$. Т.к. $x_n \in \overline{B}(x_0, R)$, а $\overline{B}(x_0, R)$ замкнуто, то $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$, что и требовалось доказать. $\square$

Для любого подмножества $X_0 \subset X$, и семейства многозначных вектор-функций $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t \in [0;1]}$ введем следующее обозначение:

$$M_{X_0}(\Phi) := \{(t, x) \in [0; 1] \times X_0 \mid 0 \in \Phi_t(x)\}.$$

Определение 3.7.2. Вектор-функция $\theta : [0; 1] \to \mathcal{L}$ называется *строго изотонной*, если для любых $t, t' \in [0; 1]$ верно:

$$t < t' \;\Rightarrow\; \theta(t) \ll \theta(t').$$

Определение 3.7.3. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство. Пусть $\theta : [0; 1] \to \mathcal{L}$ — непрерывная строго изотонная вектор-функция. Однопараметрическое семейство многозначных вектор-функций $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t \in [0;1]}$ будем называть *θ-непрерывным на $M_X(\Phi)$*, если для каждой пары $(t, x) \in M_X(\Phi)$ и любого $t' \in [0; 1]$ существует $c' \in \Phi_{t'}(x)$ такое, что $c' \leq |\theta(t) - \theta(t')|$.

Утверждение 3.7.1. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $U \subset X$ — некоторое открытое подмножество в X, $\theta : [0; 1] \to \mathcal{L}$ — непрерывная строго изотонная вектор-функция. Пусть задано однопараметрическое θ-непрерывное на $M_{\overline{U}}(\Phi)$ семейство $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t \in [0;1]}$ многозначных вектор-функций с секвенциально $\{0\}$-полными графиками. Тогда если $M_{\partial U}(\Phi) = \varnothing$, то множество $M_U(\Phi)$ секвенциально замкнуто.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{(t_n, x_n)\} \subset M_U(\Phi)$ сходится к точке $(\tau, \xi) \in \overline{U} \times [0;1]$. Покажем, что $(\tau, \xi) \in M_U(\Phi)$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке ξ. Так как $0 \in \Phi_{t_n}(x_n)$, то в силу θ-непрерывности на $M_{\overline{U}}(\Phi)$ существует значение $c_n \in \Phi_\tau(x_n)$ такое, что $c_n \le |\theta(\tau) - \theta(t_n)| \to 0$. Т.е. последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi_t)$ сходится к некоторому элементу $(\xi, 0)$. В силу секвенциальной $\{0\}$-полноты $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ получаем $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\Phi_t)$, т.е. $0 \in \Phi_t(\xi)$. Так как $M_{\partial U}(\Phi) = \varnothing$, то $\xi \notin \partial U$. Это означает, что $(\tau, \xi) \in M_U(\Phi)$. □

Теорема 3.7.2. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $U \subset X$ — некоторое открытое подмножество в X, $\theta : [0;1] \to \mathcal{L}$ — непрерывная строго изотонная вектор-функция, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Пусть задано однопараметрическое θ-непрерывное на $M_{\overline{U}}(\Phi)$ семейство $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t \in [0;1]}$ многозначных почти (α, β)-поисковых на $\overline{U}$ вектор-функций с секвенциально $\{0\}$-полными графиками. Пусть также множество $M = M_U(\Phi)$ — секвенциально замкнуто. Тогда, если существует элемент вида $(0, x_0) \in M$, то существует и элемент $(1, x_1) \in M$.*

Доказательство. Отметим, что некоторые рассуждения, которые приводятся ниже, аналогичны соответствующим фрагментам доказательства теоремы 3.2.3.

Шаг 1. Первый шаг полностью аналогичен первому шагу доказательства в метрическом случае. Рассмотрим $\preceq$ — частичный порядок на M, задаваемое по правилу:

$$(t, x) \preceq (t', x') \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t \le t' \\ d(x, x') \le 2(\alpha - \beta)^{-1} \cdot [\theta(t') - \theta(t)] \end{cases}$$

Тогда всякая цепь в M имеет верхнюю грань.

Шаг 2. Пусть существует $(0, x_0) \in M$. В силу шага 1 по лемме Куратовского-Цорна в $(M, \preceq)$ существует максимальный элемент (τ, ξ), причем такой, что $(0, x_0) \preceq (\tau, \xi)$. Покажем, что $\tau = 1$. Это завершит доказательство: достаточно будет положить $x_1 := \xi$.

Рассуждаем от противного. Пусть $\tau < 1$. Поскольку U — открыто, то в силу 1 утверждения 3.1.1 существует число $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, и $i_1, \ldots, i_m \in I$ такие, что

$$\bigcap_{k=1}^{m} B_{i_k}(\xi, \rho) \subset U.$$

В силу непрерывности функции θ существует такое t, $\tau < t < 1$, для которого

$$\theta_{i_k}(t) - \theta_{i_k}(\tau) \leq (\alpha_{i_k} - \beta_{i_k})\frac{\rho}{4}$$

для каждого k, $1 \leq k \leq m$. Пусть $R := 2(\alpha - \beta)^{-1} \cdot [\theta(t) - \theta(\tau)] \gg 0$. Тогда $R_{i_k} \leq \frac{\rho}{2} < \rho$. Отсюда

$$\overline{B}(\xi, R) \subset \bigcap_{k=1}^{m} \overline{B}_{i_k}(\xi, R_{i_k}) \subset \bigcap_{k=1}^{m} B_{i_k}(\xi, \rho) \subset U.$$

В силу θ-непрерывности на $M_{\overline{U}}(\Phi)$ семейства Φ и того, что $0 \in \Phi_\tau(\xi)$, существует такое значение $c \in \Phi_t(\xi)$, что $c \leq \theta(t) - \theta(\tau)$. Следовательно,

$$c \leq \theta(t) - \theta(\tau) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cdot R \ll (\alpha - \beta) \cdot R.$$

Тогда по теореме 3.6.2 существует точка $x \in \overline{B}(\xi, R) \subset U$, такая, что $0 \in \Phi_t(x)$. Отсюда $(t, x) \in M$ и

$$d(x, \xi) \leq R = 2(\alpha - \beta)^{-1} \cdot [\theta(t) - \theta(\tau)]\,.$$

Поскольку $\tau < t$, получаем $(\tau, \xi) \prec (t, x)$, что противоречит максимальности (τ, ξ).

Итак, $\tau = 1$, что и требовалось доказать. □

Замечание 3.7.1. Теорема 3.7.2 может быть обобщена. Как и в теореме 3.2.3, можно рассматривать не открытое подмножество $U \subset X$, а произвольное подмножество $X_0 \subset X$. Приведем соответствующую формулировку.

Теорема 3.7.3. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $X_0 \subset X$ — некоторое подмножество в X, $\theta : [0;1] \to \mathcal{L}$ — непрерывная строго изотонная вектор-функция, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Пусть задано однопараметрическое θ-непрерывное на $M_{X_0}(\Phi)$ семейство $\Phi = \{\Phi_t : X_0 \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t\in[0;1]}$ многозначных почти (α, β)-поисковых на X_0 вектор-функций с секвенциально $\{0\}$-полными* *графиками. Пусть также для любой пары $(t, x) \in M_{X_0}(\Phi)$, $t < 1$ существует $t' \in (t, 1]$ такое, что*

$$\overline{B}(x, 2(\alpha - \beta)^{-1} \cdot [\theta(t') - \theta(t)]) \subset X_0.$$

Тогда, если существует элемент вида $(0, x_0) \in M_{X_0}(\Phi)$, то существует и элемент $(1, x_1) \in M_{X_0}(\Phi)$.

3.8 Приложения к теории неподвижных точек и совпадений отображений калибровочных пространств

Рассмотрим теперь, как и в метрическом случае, ряд применений в теории неподвижных точек и совпадений.

Пусть X, Y, I — непустые множества и пусть $\mathcal{R} = \{r_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i \in I}$ — разделяющие семейства псевдометрик на X и Y соответственно. Пусть $r : X \times X \to \mathcal{C}$, $d : Y \times Y \to \mathcal{C}$ — соответствующие им конические метрики.

Теорема 3.8.1. *Пусть $(X, \mathcal{R})$, $(Y, \mathcal{D})$ — калибровочные пространства и $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$. Пусть для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$, $\gamma \geq 1$, многозначные отображения $S : X \to \mathrm{C}(Y)$, $T^k : X \to \mathrm{C}(Y)$, $1 \leq k \leq m$, удовлетворяют следующим условиям:*

1. *График отображения S секвенциально полный. Кроме того, для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subset X$, любая последовательность $\{y_n\} \subset Y$, $y_n \in S(x_n)$, также фундаментальная.*
2. *$T^m(X) \subset S(X)$.*
3. *Для любых $x, x' \in X$,*

$$D(T^m(x), T^m(x')) \leq \gamma^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot d(S(x), S(x')).$$

4. *Для всех $x \in X$, каждого $y^0 \in S(x)$ и каждого k, $1 \leq k \leq m - 1$,*

$$d(y^0, T^k(x)) \leq \gamma \cdot d(y^0, T^m(x)).$$

5. Для любых $x, x' \in X$,

$$r(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot d(S(x), S(x')).$$

6. Для всех k, $1 \leq k \leq m$, каждого $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, каждых $x \in X$ и $y^0 \in S(x)$, существует $y^k \in T^k(x)$ такое, что

$$d(y^0, y^k) \leq d(y^0, T^k(x)) + \varepsilon.$$

Тогда существует точка совпадения $\xi \in \operatorname{Coin}(S, T^1, \ldots, T^m)$.

Доказательство. Зададим многозначную вектор-функцию $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$,

$$\Phi(x) := \left\{ \max_{1 \leq k \leq m} d(y^0, y^k) \mid y^0 \in S(x), y^k \in T^k(x) \right\}.$$

Отметим, что $0 \in \Phi(\xi)$ в том и только том случае, если $\xi \in \operatorname{Coin}(S, T^1, \ldots, T^m)$.

Покажем, что Φ — почти (α, β)-поисковая вектор-функция с секвенциально $\{0\}$-полным графиком.

Покажем, что Φ — почти (α, β)-поисковая. Пусть $x \in X$, $c \in \Phi(x)$ и $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$. Значению c соответствует $y^0 \in S(x)$ и $y^k \in T^k(x)$, $1 \leq k \leq m$, для которых $c = \max\limits_{1 \leq k \leq m} d(y^0, y^k)$. В силу условия 2 $T^m(X) \subset S(X)$, откуда существует точка $x' \in X$ такая, что $y^m \in S(x')$. Тогда

$$r(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot d(S(x), S(x')) \leq \alpha^{-1} \cdot d(y^0, y^m) \leq \alpha^{-1} \cdot c.$$

Пусть $(y')^0 = y^m$. Тогда в силу условия 6 для каждого $1 \leq k \leq m$ существует $(y')^k \in T^k(x')$ такая, что

$$\begin{aligned} d((y')^0, (y')^k) &\leq d((y')^0, T^k(x')) + \varepsilon \leq \\ &\leq \gamma \cdot d((y')^0, T^m(x')) + \varepsilon \leq \\ &\leq \gamma \cdot D(T^m(x), T^m(x')) + \varepsilon \leq \\ &\leq \gamma \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \gamma^{-1} \cdot d(S(x), S(x')) + \varepsilon \leq \\ &\leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c + \varepsilon. \end{aligned}$$

Положим $c' := \max\limits_{1 \leq k \leq m} d((y')^0, (y')^k) \in \Phi(x')$. Тогда $c' \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c + \varepsilon$.

Таким образом Φ — почти (α, β)-поисковая вектор-функция.

Покажем, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ является секвенциально $\{0\}$-полный. Пусть $\{x_n\} \subset X$ — фундаментальная последовательность в X и пусть $c_n \to 0$, $c_n \in \Phi(x_n)$. Каждому значению c_n, $n \in \mathbb{N}$, соответствуют точки $y_n^0 \in S(x_n)$ и $y_n^k \in T^k(x_n)$, $1 \le k \le m$, для которых $c_n = \max\limits_{1 \le k \le m} d(y_n^0, y_n^k)$. Отсюда следует, что $\{y_n^0\}$ — также фундаментальная. Поскольку в силу условия 1 график $\mathrm{Graph}(S)$ секвенциально полный, то существует пара $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(S)$, для которой $x_n \to \xi$ и $y_n^0 \to \eta$. Из неравенства

$$d(y_n^k, \eta) \le d(y_n^k, y_n^0) + d(y_n^0, \eta) \le c_n + d(y_n^0, \eta) \to 0$$

следует, что $y_n^k \to \eta$. Поскольку

$$\begin{aligned} d(\eta, T^k(\xi)) &\le \gamma \cdot d(\eta, T^m(\xi)) \le \\ &\le \gamma \cdot d(\eta, y_n^m) + \gamma \cdot d(y_n^m, T^m(x_n)) + \gamma \cdot D(T^m(x_n), T^m(\xi)) \le \\ &\le \gamma \cdot d(\eta, y_n^m) + \gamma \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \gamma^{-1} \cdot d(y_n^0, \eta) \to 0, \end{aligned}$$

то $\eta \in T^k(\xi)$ для каждого $1 \le k \le m$. Таким образом, $0 \in \Phi(\xi)$. Это означает, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ является секвенциально $\{0\}$-полным.

Итак, выполнены условия теоремы 3.6.1. Тогда существует точка $\xi \in X$ — нуль вектор-функции Φ, что означает существование точки совпадения отображений $S, T^1, \ldots, T^m$. $\square$

Пусть $X = Y$, $\mathcal{R} = \mathcal{D}$ и $(X, \mathcal{D})$ — секвенциально полное калибровочное пространство. Пусть также $S = Id_X$, $\alpha \le 1$ и $\lambda = \beta \cdot \alpha^{-1}$. Тогда в качестве следствия из теоремы 3.8.1 получаем теорему о существовании общей неподвижной точки набора многозначных отображений.

Теорема 3.8.2. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — секвенциально полное калибровочное пространство и $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$. Пусть для некоторых $\lambda, \gamma \in \mathcal{C}$, $\lambda \ll 1$, $\gamma \ge 1$, набор многозначных отображений $T^k : X \to \mathrm{C}(X)$, $1 \le k \le m$, удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Для любых $x, x' \in X$,*

$$D(T^m(x), T^m(x')) \le \lambda \cdot \gamma^{-1} \cdot d(x, x').$$

2. *Для любых $x \in X$ и каждого k, $1 \leq k \leq m-1$,*

$$d(x, T^k(x)) \leq \gamma \cdot d(x, T^m(x)).$$

3. *Для любых k, $1 \leq k \leq m$, каждого $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, и всех $x \in X$, существует $y^k \in T^k(x)$ такое, что*

$$d(x, y^k) \leq d(x, T^k(x)) + \varepsilon.$$

Тогда существует общая неподвижная точка $\xi \in \mathrm{Comfix}(T^1, \dots, T^m)$.

Замечание 3.8.1. Теорема 3.8.2 является обобщением теоремы 3.2.1 и 3.2.2. Кроме того, условие 3 теоремы 3.8.1 и условие 1 теоремы 3.8.2 можно ослабить. Так, в теореме 3.8.1 условие 3 можно заменить на условие:

3^*. Существуют $a_1, a_2, a_3 \ll \alpha$ такие, что $x, x' \in X$,

$$\begin{aligned} D(T^m(x), T^m(x')) \leq (\gamma \cdot \alpha)^{-1} \cdot \max\{ & a_1 \cdot d(S(x), S(x')), \\ & \frac{1}{2} a_2 \cdot [d(S(x), T^m(x)) + d(S(x'), T^m(x'))], \\ & \frac{1}{2} a_3 \cdot [d(S(x), T^m(x')) + d(S(x'), T^m(x))]\}. \end{aligned}$$

Это условие аналогично понятию пары типа Замфиреску многозначных отображений в метрическом случае.

3^{**}. Для любых $x, x' \in X$,

$$\begin{aligned} D(T^m(x), T^m(x')) \leq (\gamma \cdot \alpha)^{-1} \cdot \beta \cdot \max\{ & d(S(x), S(x')), \\ & d(S(x), T^m(x)), \\ & d(S(x'), T^m(x')), \\ & \frac{1}{2}[d(S(x), T^m(x')) + d(S(x'), T^m(x))]\}. \end{aligned}$$

Это условие аналогично условию 1 теоремы 3.2.4. Оно слабее условия 3^*, если $a_1, a_2, a_3 \leq \beta$.

Теорема 3.8.3. *Пусть $(X, \mathcal{R})$, $(Y, \mathcal{D})$ — калибровочные пространства, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$ и $U \subset X$ — открытое подмножество. Пусть для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$,*

$\beta \ll \alpha$, $\gamma \geq 1$, и некоторой непрерывной строго изотонной вектор-функции $\theta : [0;1] \to \mathcal{L}$, семейства $S = \{S_t : X \to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$, $T^k = \{T^k_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$, $1 \leq k \leq m$, удовлетворяют следующим условиям:

1. *Для каждого $t \in [0;1]$, график $S_t|_{\overline{U}}$ секвенциально полон. Кроме того, для каждой фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subset \overline{U}$ последовательность $\{y_n\} \subset Y$, $y_n \in S_t(x_n)$, $\{y_n\}$ также фундаментальная.*

2. *$T^m_t(\overline{U}) \subset S_t(X)$, для любого $t \in [0;1]$.*

3. *Для любого $t \in [0;1]$ и всех $x, x' \in \overline{U}$,*
$$D(T^m_t(x), T^m_t(x')) \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \gamma^{-1} \cdot d(S_t(x), S_t(x')).$$

4. *Для любого $t \in [0;1]$, любых k, $1 \leq k \leq m-1$, каждых $x \in \overline{U}$ и $y^0 \in S_t(x)$*
$$d(y^0, T^k_t(x)) \leq \gamma \cdot d(y^0, T^m_t(x)).$$

5. *Для любого $t \in [0;1]$ и всех $x, x' \in X$,*
$$r(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot d(S_t(x), S_t(x')).$$

6. *Для любого $t \in [0;1]$, любого k, $1 \leq k \leq m$, каждого $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, каждых $x \in \overline{U}$ и $y^0 \in S_t(x)$, существует $y^k \in T^k_t(x)$ такая, что*
$$d(y^0, y^k) \leq d(y^0, T^k_t(x)) + \varepsilon.$$

7. *Для любых $t, t' \in [0;1]$, каждого $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, каждых $x \in \overline{U}$ и $y \in S_t(x)$, существует $y' \in S_{t'}(x)$ такая, что*
$$d(y, y') \leq d(y, S_{t'}(x)) + \varepsilon.$$

8. *Для любых $t, t' \in [0;1]$ и каждого $x \in \mathrm{Coin}(S_t, T^1_t, \ldots, T^m_t)$,*
$$D(T^m_t(x), T^m_{t'}(x)) + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \leq |\theta(t') - \theta(t)|.$$

9. *Для любого $t \in [0;1]$, $\mathrm{Coin}(S_t, T^1_t, \ldots, T^m_t) \cap \partial U = \varnothing$.*

Тогда если $\operatorname{Coin}(S_0, T_0^1, \dots, T_0^m) \neq \varnothing$, *то* $\operatorname{Coin}(S_1, T_1^1, \dots, T_1^m) \neq \varnothing$.

Доказательство. Зададим семейство многозначных вектор-функций $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t\in[0;1]}$,

$$\Phi_t(x) := \left\{ \max_{1\le k\le m} d(y^0, y^k) \mid y^0 \in S_t(x), y^k \in T_t^k(x) \right\}.$$

Отметим, что $0 \in \Phi_t(\xi)$ в том и только том случае, если $\xi \in \operatorname{Coin}(S_t, T_t^1, \dots, T_t^m)$.

Покажем, что Φ — 3θ-непрерывное на $M_{\overline{U}}(\Phi)$ семейство почти (α, β)-поисковых на $\overline{U}$ вектор-функций с секвенциально $\{0\}$-полными графиками.

Тот факт, что для любого $t \in [0; 1]$ вектор функция Φ_t является почти (α, β)-поисковых на $\overline{U}$ вектор-функций с секвенциально $\{0\}$-полным графиком, доказывается по аналогией с теоремой 3.8.1.

Покажем, что семейство Φ — 3θ-непрерывное на $M_{\overline{U}}(\Phi)$.

Пусть $t, t' \in [0; 1]$ и $x \in \overline{U}$, $0 \in \Phi_t(x)$. Если $t = t'$, то $c' := 0 \le |\theta(t') - \theta(t)|$. Пусть $t \neq t'$. Поскольку $0 \in \Phi_t(x)$, то $x \in \operatorname{Coin}(S_t, T_t^1, \dots, T_t^m)$. Тогда существует $\eta \in S_t(x) \cap T_t^1(x) \cap \dots \cap T_t^m(x)$. Положим $\varepsilon = |\theta(t') - \theta(t)| \gg 0$.

Тогда из условия 7 существует $(y')^0 \in S_{t'}(x)$ такая, что

$$d(\eta, (y')^0) \le d(\eta, S_{t'}(x)) + \varepsilon.$$

Также, для каждого $1 \le k \le m$, существует $(y')^k \in T_{t'}^k(x)$ такая, что

$$d((y')^0, (y')^k) \le d((y')^0, T_{t'}^k(x)) + \varepsilon.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} d((y')^0, (y')^k) &\le d((y')^0, T_{t'}^k(x)) + \varepsilon \le d((y')^0, T_{t'}^m(x)) + \varepsilon \le \\ &\le d((y')^0, \eta) + d(\eta, T_{t'}^m(x)) + \varepsilon \le \\ &\le d(\eta, S_{t'}(x)) + \varepsilon + D(T_t^m(x), T_{t'}^m(x)) + \varepsilon \le \\ &\le D(S_t(x), S_{t'}(x)) + D(T_t^m(x), T_{t'}^m(x)) + 2\varepsilon \le \\ &\le 3|\theta(t') - \theta(t)|. \end{aligned}$$

Отсюда $c' := \max\limits_{1\le k\le m} d((y')^0, (y')^k) \le 3|\theta(t') - \theta(t)|$. Таким образом, Φ — 3θ-непрерывное семейство на $M_{\overline{U}}(\Phi)$.

Наконец, условие $\mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \dots, T_t^m) \cap \partial U = \varnothing$ означает, что $M_{\partial U}(F) = \varnothing$. В силу утверждения 3.7.1, $M_U(F)$ — секвенкциально замкнуто.

Итак, выполнены все условия теоремы 3.7.2. Пусть $\mathrm{Coin}(S_0, T_0^1, \dots, T_0^m) \neq \varnothing$. Тогда $(0, x_0) \in M_U(F)$ для некоторого $x_0 \in U$. По теореме 3.7.2, существует $(1, x_1) \in M_U(F)$, т.е. $\mathrm{Coin}(S_1, T_1^1, \dots, T_1^m) \neq \varnothing$, что и требовалось доказать. □

Из теоремы 3.8.3 вытекает следующий результат о сохранении существования общей неподвижной точки.

Теорема 3.8.4. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — секвенциально полное калибровочное пространство, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$ и $U \subset X$ — открытое подмножество. Пусть для некоторых $\lambda, \gamma \in \mathcal{C}$, $\lambda \ll 1$, $\gamma \geq 1$, и некоторой строго изотонной непрерывной вектор-функции $\theta : [0;1] \to \mathcal{L}$, семейства $T^k = \{T_t^k : \overline{U} \to \mathrm{C}(X)\}_{t \in [0;1]}$, $1 \leq k \leq m$, удовлетворяют следующим условиям:*

1. *Для любого $t \in [0;1]$ и каждых $x, x' \in \overline{U}$,*

$$D(T_t^m(x), T_t^m(x')) \leq \lambda \cdot \gamma^{-1} \cdot d(x, x').$$

2. *Для любого $t \in [0;1]$, любых k, $1 \leq k \leq m-1$, и каждого $x \in \overline{U}$*

$$d(x, T_t^k(x)) \leq \gamma \cdot d(x, T_t^m(x)).$$

3. *Для любого $t \in [0;1]$, любого k, $1 \leq k \leq m$, каждого $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$ и каждого $x \in \overline{U}$, существует $y^k \in T_t^k(x)$ такая, что*

$$d(x, y^k) \leq d(x, T_t^k(x)) + \varepsilon.$$

4. *Для любых $t, t' \in [0;1]$ и каждого $x \in \mathrm{Comfix}(T_t^1, \dots, T_t^m)$,*

$$D(T_t^m(x), T_{t'}^m(x)) \leq |\theta(t') - \theta(t)|.$$

5. *Для любого $t \in [0;1]$, $\mathrm{Comfix}(T_t^1, \dots, T_t^m) \cap \partial U = \varnothing$.*

Тогда если $\mathrm{Comfix}(T_0^1, \dots, T_0^m) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Comfix}(T_1^1, \dots, T_1^m) \neq \varnothing$.

Замечание 3.8.2. Теоремы 3.8.3 и 3.8.4 могут быть обобщены. Например, в теореме 3.8.3 можно ослабить следующие условия.

1. Условие 3 может быть ослаблено так же, как описано в замечании 3.8.1. Это позволит получить обобщение теоремы 3.2.4.

2. Условие 9 можно заменить, предположив

$$M = \{(x,t) \in U \times [0;1] \mid S(x) \cap T^1(x) \cap \cdots \cap T^m(x) \neq \varnothing\}$$

секвенциально замкнутым. Тогда из $\mathrm{Coin}(S_0, T_0^1, \ldots, T_0^m) \cap U \neq \varnothing$ будет следовать $\mathrm{Coin}(S_1, T_1^1, \ldots, T_1^m) \cap U \neq \varnothing$

3. Замыкание открытого множества $U \subset X$ может быть заменено на произвольное подмножество $X_0 \subset X$. В этом случае, условие 9 необходимо заменить на *Для любого* $t \in [0;1)$ *и каждого* $x \in \mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m)$, *существует* $t' \in (t,1]$ *такое, что*

$$\overline{B}(x, 2(\alpha - \beta)^{-1} \cdot (\theta(t') - \theta(t))) \subset X_0.$$

Сравним это с теоремой 3.2.3. Это ослабление позволяет получить обобщение теоремы 3.2.3.

Заключение

Заключение

В диссертации поставлены и решены актуальные задачи. Получены следущие основные результаты. Доказана теорема о существовании точки совпадения для пары типа Замфиреску многозначных отображений, показана ее связь с принципом поиска нулей функционалов. Доказана модификация локальной версии принципа поиска нулей многозначных функционалов для случая, когда функционал является (α, β)-поисковым не на всем пространстве, а на некотором его подмножестве.

Получены достаточные условия, гарантирующие сохранение существования нулей многозначных функционалов при изменении параметра для параметрического семейства многозначных (α, β)-поисковых функционалов.

Полученные результаты применены для следующих задач: о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства для семейства многозначных отображений метрических пространств; о сохранении существования точек совпадения для семейства наборов многозначных отображений метрических пространств; о сохранении существования общих неподвижных точек для семейства наборов многозначных отображений метрических пространств в себя; о сохранении существования точек совпадения для семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

Дополнительно результаты, связанные с принципом поиска нулей функционалов, распространены на случай калибровочных пространств. Получены аналоги соответствующих метрических теорем и описаны некоторые различия в понятиях и подходах.

Литература

[1] *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады академии наук. 2007. Т. 416. № 2. с. 151–155.

[2] *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений. Успехи математических наук. 1980. Т. 35. № 1(211). с. 59–126.

[3] *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений. Москва: URSS, 2005. — 216 с.

[4] *Семенов П. В.* О неподвижных точках многозначных сжатий // Функциональный анализ и его приложения. 2002. Т. 36. № 2. с. 89–92.

[5] *Фоменко Т. Н.* О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 1. с. 110–125.

[6] *Фоменко Т. Н.* К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. с. 304–309.

[7] *Фоменко Т. Н.* Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии // Математические заметки. 2013. Т. 93. № 1. с. 127–143.

[8] *Фоменко Т. Н.* Поиск нулей функционалов, неподвижные точки и совпадения отображений в квазиметрических пространствах // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2019. № 6. с. 14–22.

[9] *Фоменко Т. Н., Ястребов К. С.* Метод поиска нулей функционалов в коническом метрическом пространстве и вопросы его устойчивости // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2020. № 2. с. 8–15.

[10] *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. Москва: Мир, 1971 — 360 с.

[11] *Agarwal R. P., O'Regan D.* The homotopic invariance for fixed points and fuzzy fixed points of multivalued generalized contractive maps // Nonlinear Studies. 2003. V. 10. N. 2. pp. 187–194.

[12] *Agarwal R. P., Cho Y. J., O'Regan D.* Homotopy invariant results on a complete gauge spaces // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 2003. V. 67. N. 2. pp. 241–248.

[13] *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Mathematicae. 1922. V. 3. N. 1. pp. 133–181.

[14] *Bianchini R. M. T.* Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi // Bollettino Unione Matematica Italiana. Serie 4. 1972. V. 5. pp. 103–108.

[15] *Boyd D. W., Wong J. S. W.* On nonlinear contractions // Proceedings of the American Mathematical Society. 1969. V. 20. N. 2. pp. 458–464.

[16] *Browder F. E.* On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations // Indagationes Mathematicae (Proceedings). 1968. V. 71. pp. 27–35.

[17] *Brown R. F., Furi M., Górniewicz L., Jiang B.* Handbook of Topological Fixed Point Theory. Dordrecht: Springer, 2005. — 972 pp.

[18] *Caccioppoli R.* Una teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale // Della Accademia Nazionale Dei Lincei Rendiconti. Serie 6. 1932. V. 11. pp. 794–799.

[19] *Cain G. L. Jr., Nashed M. Z.* Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces // Pacific Journal of Mathematics. 1971. V. 39. N. 3. pp. 581–592.

[20] *Chatterjea S. K.* Fixed-point theorems // Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences. 1972. V. 25. pp. 727–730.

[21] *Chiş A., Precup R.* Continuation theory for general contractions in gauge space // Fixed Point Theory and Applications. 2004. N. 4. pp. 173–185.

[22] *Ćirić Lj. B.* Generalized contractions and fixed-point theorems // Publications de l'Institut Mathématique. 1971. V. 26. pp. 19–26.

[23] *Ćirić Lj. B.* A generalization of Banach's contraction principle // Proceedings of the American Mathematical Society. 1974. V. 45. N. 2. pp. 267–273.

[24] *Covitz H., Nadler S. B.* Multi-valued contraction mappings in generalized metric spaces // Israel Journal of Mathematics. 1970. V. 8. pp. 5–11.

[25] *Dugundji J.* Topology. Boston: Allyn and Bacon, 1966. — 447 pp.

[26] *Edelstein M.* On fixed and periodic points under contractive mappings // Journal of the London Mathematical Society. 1962. V. 37. N. 1. pp. 74–79.

[27] *Fierro R.* A noncompatness measure for tvs-metric cone spaces and some applications // Journal of Nonlinear Science and Applications. 2016. V. 9. N. 5. pp. 2680–2687.

[28] *Fomenko T. N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings // Topology and its Applications. 2010. V. 157. N. 4. pp. 760–773.

[29] *Frigon M., Granas A.* Résultats du type de Leray-Schauder pour des contractions multivoques // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1994. V. 4. pp. 197–208.

[30] *Frigon M., Granas A., Guennoun Z. E. A.* Alternative non linéare pour les applications contractantes // Annales mathématiques du Québec. 1995. V. 19. N. 1. pp. 65–68.

[31] *Frigon M.* Fixed point results for generalized contractions in gauge spaces and applications // Proceedings of the American Mathematical Society. 2000. V. 128. N. 10. pp. 2957–2965.

[32] *Frigon M.* Fixed point results for multivalued contractions on gauge spaces // Set Valued Mappings with Applications in Nonlinear Analysis. Series in mathematical analysis and applications. London: Taylor and Francis. 2002. V. 4. pp. 175–181.

[33] *Frigon M., O'Regan D.* Fuzzy contractive maps and fuzzy fixed points // Fuzzy Sets Systems. 2002. V. 129. N. 1. pp. 39–45.

[34] *Geraghty M. A.* On contractive mappings // Proceedings of the American Mathematical Society. 1973. V. 40. N. 2. pp. 604–608.

[35] *Granas A.* Continuation methods for contractive maps // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1994. V. 3. pp. 375–379.

[36] *Granas A., J. Dugundji* Fixed point theory. New York: Springer-Verlag, 2003. — 690 pp.

[37] *Hardy G. E., Rogers T. D.* A generalization of fixed point theorem of Reich // Canadian Mathematical Bulletin. 1973. V. 16. N. 2. pp. 201–206.

[38] *Huang L. G., Zhang X.* Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. V. 332. pp. 1468–1476.

[39] *Jachymski J.* Continuation dependence of attractors of iterated function systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1996. V. 198. pp. 221–226.

[40] *Kannan R.* Some results on fixed points // Bulletin of the Calcutta Mathematical Society. 1968. V. 60. pp. 71–76.

[41] *Kirk W. A., Sims B.* Handbook of metric fixed point theory. Dordrecht: Springer, 2001. — 704 pp.

[42] *Knill R. J.* Fixed points of uniform contractions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1965. V. 12. pp. 449–455.

[43] *Nadler S. B.* Multi-valued contraction mappings // Notices of the American Mathematical Society. 1967. V. 14. p. 930.

[44] *Nadler S. B.* Multi-valued contraction mappings // Pacific Journal of Mathematics. 1969. V. 30. pp. 475–488.

[45] *Neammanee K., Kaevkhao A.* Fixed point theorems of multi-valued Zamfirescu mappings // Journal of Mathematics Research. 2010. V. 2. N. 2. pp. 150–156.

[46] *Nussbaum R.* The fixed point index and asymptotic fixed point theorems for k-set contractions. Ph. D. Thesis. University of Chicago. 1969.

[47] *Precup R.* Discrete continuation method for boundary value problems on bounded sets in Banach spaces // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. V. 113. N. 1–2 pp. 267–281.

[48] *Rakotch E.* A note on contractive mappings // Proceedings of the American Mathematical Society. 1962. V. 13. pp. 459–465.

[49] *Reich S.* Some remarks concerning contraction mappings // Canadian Mathematical Bulletin. 1971. V. 14. N. 1. pp. 121–124.

[50] *Reich S.* Kannan's fixed point theorem // Bollettino Unione Matematica Italiana. Serie 4. 1971. V. 4. pp. 1–11.

[51] *Reich S.* A fixed point theorem for locally contractive multi-valued functions // Revue Roumaine des Mathématiques Pures et Appliquées. 1972. V. 17. pp. 569–572.

[52] *Reich S.* Fixed points of contractive functions // Bollettino Unione Matematica Italiana. Serie 4. 1972. V. 5. pp. 26–42.

[53] *Rhoades B. E.* A comparison of various definitions of contractive mappings // Transactions of the American Mathematical Society. 1977. V. 226. pp. 257–290.

[54] *Sehgal V. M.* On fixed and periodic points for a class of mappings // Journal of the London Mathematical Society. 1972. V. 5. N. 3. pp. 571–576.

[55] *Suzuki T.* A new type of fixed point theorem in metric spaces // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Application. 2009. V. 71. N. 11. pp. 5313-5317.

[56] *Tarafdar E.* An approach to fixed-point theorems on uniform spaces // Transactions of the American Mathematical Society. 1974. V. 191. pp. 209–225.

[57] *Zamfirescu T.* Fix point theorems in metric spaces // Archiv der Mathematik. 1972. V. 23. pp. 292–298.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.04 — «Геометрия и топология» и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

[58] *Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н.* О точках совпадения пары многозначных отображений типа Замфиреску // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2020. № 6. с. 26–33.

[59] *Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н.* Сохранение существования нулей у семейства многозначных функционалов и некоторые следствия // Математические заметки. 2020. Т. 108. № 6. с. 837–850.

[60] *Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н.* Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. № 1. с. 13–17.

[61] *Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н.* Исправление к статье: Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 496. № 1. с. 79.

[62] *Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н.* О сохранении совпадений у однопараметрического семейства пар многозначных отображений типа Замфиреску // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2021. № 1. с. 28–34.

Другие публикации

[63] *Захарян Ю. Н.* Сохранение нулей семейства поисковых функционалов // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы»: Воронеж, 9–11 ноября 2020. Сер. 10. Т. 1. С. 73–74.

[64] *Захарян Ю. Н.* О существовании совпадения пары многозначных отображений типа Замфиреску [Электронный ресурс] // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». Москва, 10–27 ноября 2020. https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020_2/data/19355/118413_uid240193_report.pdf (дата обращения 12.05.2021).

[65] *Захарян Ю. Н.* Связь калибровочных пространств с коническими метриками [Электронный ресурс] // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021». Москва, 12–23 апреля 2021. https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/22108/130603_uid240193_report.pdf (дата обращения 12.05.2021).

Статьи, принятые к печати

[66] *Zakharyan Yu. N.* Search for vector-function zeros in gauge spaces // Journal of Nonlinear and Convex Analysis (положительная рецензия 03.02.2021, принята к печати 22.04.2021, ожидаемый год публикации 2022)