МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Проскурнин Иван Андреевич

МИНИМАЛЬНЫЕ ЭКВИВАРИАНТНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Гусейн-Заде Сабир Меджидович,**
доктор физико–математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Богаевский Илья Александрович
доктор физико–математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Московский университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет, кафедра теории динамических систем, профессор

Буряк Александр Юрьевич
кандидат физико–математических наук,
доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики, доцент

Седых Вячеслав Дмитриевич
доктор физико–математических наук,
профессор, ФГБОУ ВО «Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина», факультет автоматики и вычислительной техники, кафедра высшей математики, профессор

Защита диссертации состоится 15 октября 2021 года в 16.45. на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: **VGChdissovet@yandex.ru**

С диссертацией, а также со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме защиты можно ознакомиться на сайте ИАС “Истина” **https://istina.msu.ru/dissertations/376134550/**

Автореферат разослан 15 сентября 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.01.17 при МГУ
доктор физико-математических наук,
доцент В.Г. Чирский

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности

Работа посвящена теории деформаций критических точек аналитических функций, а точнее, задаче о возможном числе критических точек, рождающихся при такой деформации.

Определение: *k-параметрической деформацией* ростка аналитической функции $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ называется росток аналитической функции $F(x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_k), F : (\mathbb{C}^{n+k}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ такой, что $F(x_1, x_2, ..., x_n, 0..., 0) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если исходная функция f имела в начале координат сложно устроенную критическую точку, то функции семейства F будут при достаточно малых значениях параметров иметь в окрестности начала координат более простые критические точки — критическая точка при малом шевелении "распадается"на менее вырожденные. Это позволяет исследовать сложные критические точки функций, исходя из того, на какие простые критические точки они распадаются при шевелении. В частности, оказывается, что при общем выборе деформации при общих значениях параметров критические точки функций семейства оказваются невырожденными.

Определение: Деформация называется *морсификацией*, если все критические точки функций F при достаточно малых значениях параметра невырожденные, т.е. морсовские.

При любом числе параметров морсификации будут деформациями общего положения в пространстве всех деформаций данной функции с данным числом параметров. Как известно, любая комплексно-аналитическая функция в окрестности невырожденной критической точки может быть приведена к нормальной форме $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ заменой координат, т.е. все невырожденные комплексные критические точки устроены одинаково.

Определение: *числом Милнора ростка f* называется число комплексных критических точек его морсификации.

Число Милнора обозначается $\mu(f)$. Оказывается, что у всех морсификаций данного ростка функции f будет одно и то же число критических точек. Поэтому все морсификации данной функции f с комплексной точки зрения устроены одинаково — у них всех одно и то же число одинаковых критических точек. Совсем другая картина получается при рассмотрении вещественных деформаций вещественно-аналитических функций: невырожденные вещественные критические точки делятся на попарно неизоморфные типы (минимумы, максимумы и сёдла различных видов), и число вещественных критических точек в разных морсификациях может быть различным. Так, например, у функции $x^3 + y^2$ есть морсификация $x^3 + y^2 + tx^2$, имеющая две критические точки, а есть морсификация $x^3 + y^2 + tx, t > 0$, не имеющая критических точек вовсе. Поэтому появляется вопрос о наличиии у данного ростка функции морсификации с данным числом и типами вещественных критических точек. Наиболее хорошо исследованным этот вопрос является в случае функций двух переменных. Этот случай и рассматраивается в данной работе.

Существуют нижние границы для возможного числа критических точек морсификации функции, следующие из топологических свойств этой функции: значения индекса градиента функции и топологии локального множества уровня (например, если индекс градиента функции в критической точке равен k, то при невырожденной деформации этой критической точки появляется не менее $|k|$ новых критических точек). Естественно спросить, достижимы ли эти границы.

Исторически сначала была поставлена задача о возможности удаления критических точек, т.е. о топологических условиях, которые надо наложить на функцию для того, чтобы у неё была деформация без вещественных критических точек. Впервые эта задача, по-видимому, была поставлена Генри Кингом[1] для гладких функций. Кинг решил её в случае большого числа переменных ($n \geq 6$). Решение оказалось частично положительным и частично отрицательным: с одной стороны, было доказано, что любой полином f, для которого множество $\{f \leq 0\} \cap S_\varepsilon^{n-1}$ стягиваемо, может быть приближен в C^0-топологии функцией без критических точек, но с другой стороны, существуют полиномы f, для которых множество $\{f \leq 0\} \cap S_\varepsilon^{n-1}$ стягиваемо, но, тем не менее, любая достаточно близкая в C^k - топологии при $k \geq 2$ функция имеет критическую точку. Результаты Кинга были развиты во многих других работах. Следует учитывать, что работы Кинга и его последователей были посвящены гладким, а не аналитическим объектам, так что деформация функции в них понималась в смысле дифференциальной топологии (т.е., просто как функция, близкая в некоторой топологии к исходной), а не в смысле приведенного выше определения. Поэтому эти результаты не могут быть прямо перенесены в аналитическую теорию особенностей.

Для аналитических функций вопрос об удалении критических точек был поставлен Б. Тесье[2]. Сам Тесье приписывал эту задачу М. Эрману, но работ Эрмана, посвященных этому вопросу, автору найти не удалось. Задача ставилась в следующей форме: пусть ростки множеств $\{f = \alpha\}$ гомеоморфны при всех малых вещественных α . Существует ли семейство функций $F_\lambda, F_0 = f$ такое, что при всех достаточно малых λ функции семейства не имеют критических точек?

Эта задача заинтересовала В. И. Арнольда и стала одной из задач его семинара[3]. Положительное решение этой задачи для функций двух переменных было дано Гусейн-Заде[4] . Доказательство Гусейн-Заде не было конструктивным и не давало метода эф-

[1]King H. The number of critical points in Morse approximations // Compositio Mathematica. — 1977 — Vol.34, №3. — P. 285-288.

[2]Teissier B. Autour d'une question de Michel Herman // Preprint — 1992.

[3]Севрюк М. Б., Филипов В. Б. Задачи Арнольда. — М.: ФАЗИС. — 2000. Задача 1992-1

[4]Gusein-Zade S. M. On a problem of B.Teissier // In Topics in Singularity Theory: V. I. Arnold's 60th

фективного вычисления минимальной морсификации. Такой метод в некоторых частных случаях был дан Гонсалесом-Рамиресом и Луэнго[5].

Условие задачи Тесье для функции двух переменных эквивалентно тому, что множество $\{f = 0\} \cap \mathbb{R}^2$ неприводимо, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что индекс градиента ростка f в критической точке равен 0. Таким образом, на данный момент задача об удалении критических точек для функции двух переменных полностью решена при самых слабых предположениях: если индекс градиента ростка f в критической точке равен 0, то существует семейство функций $F_\lambda, F_0 = f$ такое, что при всех достаточно малых λ функции семейства не имеют критических точек.

Задачу об удалении критической точки естественно расширить до задачи о минимально возможном числе критических точек морсификации данной функции: пусть индекс градиента ростка f в критической точке равен k. Верно ли, что тогда у функции f есть морсификация с $|k|$ критическими точками? Если нет, то существует ли достижимая нижняя граница для числа критических точек морсификации, формулируемая в топологических терминах? Такая задача ставилась Васильевым [6] и Гусейн-Заде. Именно эта задача и являлась отправным пунктом данной работы.

Таким образом, основная задача, стоявшая перед автором, заключалась в построении для функций двух переменных деформаций с минимально возможным числом вещественных критических точек (равным индексу градиента). По мере работы над этой задачей возникали ответвления от основной темы: построение аналогичных деформаций (с минимально возможным числом нулей) для векторных полей и аналогичная задача в эквивариантной теории особенностей (т.е. для функций, инвариантных относительно действия группы).

Основные результаты работы:

Определение: *Минимальная морсификация* аналитической функции $f(x, y)$ — аналитическая функция $F(x, y, \lambda) : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, такая, что:

1)$F(x, y, 0) = f(x, y)$.

2)Для любого достаточно малого λ все критические точки $F(x, y, \lambda)$ невырождены.

3)Для любого достаточно малого λ число критических точек $F(x, y, \lambda)$ равно модулю индекса градиента функции f.

Теорема 1. *Пусть $f(x, y)$ — росток аналитической функции такой, что все компоненты мн-ва $\{f = 0\}$, пересекающиеся с $\mathbb{R}^2$ — гладкие кривые. Тогда при подходящем*

Anniversary Collection. — 1997. — P. 117-125.

Гусейн-Заде С. М. О существовании деформаций без критических точек (задача Тесье для функций двух переменных) // Функц. анализ и его прил. — 1997. — 31:1. — С. 74–77.

[5]Gonzalez-Ramirez J.A., Luengo I. Deformations of functions without real critical points // Communications in Algebra. — 2003. — 31:9. — P. 42-55.

[6]Vassiliev V.A. A Few Problems on Monodromy and Discriminants // Arnold Math J. — 2015. — №1.—P. 201–209.

выборе линейной функции $l(x,y)$ деформация $f_\lambda = f + \lambda l(x,y)$ будет минимальной морсификацией функции f. Функции l, для которых эта деформация является минимальной морсификацией, составляют открытое всюду плотное множество в пространстве всех линейных функций от двух переменных.

Теорема 2. *Пусть $f(x,y)$ — росток полуквазиоднородной функции. Тогда существуют такие аналитические функции $a(\lambda), b(\lambda), a(0) = b(0) = 0$ такие, что $f_\lambda = f + a(\lambda)x + b(\lambda)y$ — минимальная морсификация f.*

Определение:*Минимальной деформацией* ростка векторного поля v называется деформация с невырожденными нулями, количество нулей которой равно модулю индекса векторного поля v.

Теорема 3. *Любой росток полуоднородного векторного поля на плоскости имеет минимальную деформацию.*

Определение: Кольцом Бёрнсайда конечной группы G называется кольцо Гротендика, построенное по полукольцу классов G-изоморфизма конечных G-множеств с операциями дизъюнктного объединения и декартова произведения.

Определение:Эквивариантным индексом G-инвариантного векторного поля X называется элемент кольца Бёрнсайда группы G, равный классу множества критических точек подходящей деформации $\tilde{X}$, взятых с кратностями, равными индексу $\tilde{X}$ в каждой точке.

Определение:

Минимальная инвариантная морсификация $f(x,y)$ — функция $F(x,y,\lambda) : (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, имеющая следующие свойства:

1)$F(x,y,0) = f(x,y)$.

2)$F(x,y,\lambda)$ инвариантна относительно действия на x, y.

3)Для любого достаточно малого λ все критические точки $F(x,y,\lambda)$ невырождены.

4)Для любого достаточно малого λ число орбит критических точек $F(x,y,\lambda)$ данного типа равно модулю коэффициента при данном типе орбит в эквивариантном индексе градиента функции f.

Теорема 4. *Пусть на $(\mathbb{R}^2, 0)$ действует произвольная конечная группа G. Тогда любая полуоднородная инвариантная функция на $(\mathbb{R}^2, 0)$ имеет минимальную инвариантную морсификацию.*

Цели и задачи диссертации

Главными целями диссертации являются:

1. Получение достаточных условий для наличия у функции двух переменных морсификаций с данным числом вещественных критических точек.
2. Явное построение морсификаций с минимально возможным числом критических точек.
3. Изучение топологического и аналитического строения инвариантных морсификаций инвариантных функций.
4. Построение деформаций векторных полей с минимально топологически возможным числом критических точек.

Объект и предмет исследования

Диссертация посвящена изучению деформаций вещественно-аналитических функций и векторных полей, зависящих от двух переменных, в частности, деформациям, имеющим только невырожденные критические точки. Исследуется минимально возможно число критических точек такой деформации и решается вопрос о заданности этого числа топологическими свойствами деформируемого объекта. Также исследуются свойства инвариантных деформаций вещественно-аналитических функций, имеющих нетривиальную группу симметрии.

Научная новизна

Результаты, выносимые на защиту являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Получена явная конструкция минимальной морсификации функции двух переменных с гладкими ветвями множества уровня.
2. Получена явная конструкция минимальной морсификации полуквазиоднородной функции двух переменных.
3. Получена явная конструкция минимальной деформации полуоднородного векторного поля на плоскости.
4. Доказана эквивариантная версия леммы Морса с параметрами и теоремы о нормальных формах полуквазиоднородных функций.
5. Получена классификация эквивариантно простых ростков функций многих переменных относительно неприводимых действий произвольных конечных групп.
6. Получена явная конструкция минимальной инвариантной морсификации для полуоднородной функции двух переменных, инвариантной относительно действия произвольной конечной группы.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Автором разработанные новые методы построения и исследования деформаций вещественных функций и векторных полей на плоскости. Впервые были получены примеры минимальных морсификаций для функций двух переменных с приводимым множеством уровня.

Результаты диссертации могут найти применение при решении задач эквивариантной топологии и теории особенностей и теории динамических систем.

Результаты диссертации могут быть использованы для чтения спецкурсов по теории алгебраических кривых, теории особенностей и эквивариантной теории особенностей.

Методы исследования

В работе используются результаты и методы топологической теории особенностей. Результаты диссертации опираются на работы С.М. Гусейн-Заде о деформациях функций двух переменных, работы Дж. Милнора, Э. Касаса-Альверо и Дж. Деймона о топологии алгебраических кривых, работы М.А. Краснопольского, А.И. Поволоцкого, А.И. Перова, П.П. Забрейко по теории векторных полей на плоскости, работы В. И. Арнольда, М. Робертса и С. Т. С. Уолла по теории особенностей эквивариантных функций, методы теории Морса, а также на некоторые результаты и методы теории особенностей, изложенные в работах В. И. Арнольда, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде.

Положения, выносимые на защиту

1. Исследованы минимальные морсификации функций двух переменных с гладкими ветвями множества уровня и методы явного построения таких морсификаций.

2. Исследованы минимальные морсификации полуквазиоднородных функций двух переменных и методы явного построения таких морсификаций.

3. Исследованы минимальные деформации полуоднородных векторных полей на плоскости и методы явного построения таких деформаций.

4. Изучены способы распространить лемму Морса с параметрами и теорему о нормальных формах полуквазиоднородных функций на эквивариантный случай.

5. Рассмотрена классификация эквивариантно простых ростков функций многих переменных относительно неприводимых действий произвольных конечных групп.

6. Исследованы минимальные инвариантные морсификации полуоднородных функций двух переменных, инвариантных относительно действия произвольной конечной группы, и методы явного построения таких морсификаций.

Степень достоверности и апробация работы

Результаты диссертации обоснованы при пмощи строгих математических доказательств и докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. Семинар «Топология особенностей» кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (многократно);

2. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019», Москва, 8-12 апреля 2019 года;

3. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020», Москва, 10-27 ноября 2020 года;

4. Международная научная конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики», Казахстан, Нур-Султан, 4 июня 2021 года.

Результаты диссертации полностью и своевременно опубликованы в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ и входящих в международные базы данных Web of Science и/или Scopus. Список публикаций (3 статьи) приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из оглавления, введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего список публикаций по теме диссертации.

Содержание работы

Содержание главы 1

В первой главе, являющейся введением, описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов, определяется область исследования, обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов, формулируются основные результаты диссертации.

Содержание главы 2

Во второй главе доказывается существование минимальной деформации полуоднородного векторного поля на плоскости. Описывается метод вычисления индекса полуоднородного векторного поля на плоскости по топологии множеств нулей его компонент. При помощи этого метода строится деформация векторного поля к наиболее топологически простому полю. При помощи этого наиболее простого поля строится минимальная деформация векторного поля.

Содержание главы 3

В третьей главе доказывается существование минимальных морсификаций полуквазиоднородных функций. Сначала доказывается существование таких морсификаций у квазиоднородных функций. Этот этап разделяется на два: для функций с “хорошими квазистепенями”, для которых минимальную морсификацию можно построить сравнительно простым способом, и для функций “плохих квазистепеней”, для которых требуются некоторые дополнительные построения. Затем при помощи построенных деформаций для квазиоднородных функций строятся деформации полуквазиоднородных.

Содержание главы 4

Четвертая глава посвящена функциям, множество нулей которых состоит из гладких ветвей. Доказывается, что градиентное векторное поле таких функций является наиболее топологически простым векторным полем в смысле главы 2. При помощи этого факта доказывается существование минимальной морсификации у функции, ветви множества уровня которой — гладкие.

Содержание главы 5

Пятая глава наиболее обширна и посвящена минимальным деформациям эквивариантных функций. Первые два раздела посвящены теоремам о нормальных формах для эквивариантных ростков, необходимым для дальнейшего исследования. В третьем разделе в качестве приложения теорем о нормальных формах доказывается теорема об особенностях, эквивариантно простых относительно неприводимого действия конечной группы. В четвертом и пятом разделе обсуждается понятие эквивариантного индекса векторного поля и применение этого понятия в случае инвариантных функций двух переменных. В пятом доказывается существование минимальной инвариантной морсификации для полуоднородных инвариантных функций двух переменных.

Заключение

В заключении еще раз перечислены основные результаты работы, а также возможные направления дальнейшего исследования:

1. Построение минимальных морсификаций для произвольных функций двух переменных.

2. Построение морсификаций с произвольным числом критических точек.

3. Распространие метода вычисления индекса полуоднородных векторных полей, описанного у Красносельского и других, на произвольные векторные поля.

4. Задача Васильева: можно ли продеформировать произвольную морсификацию в минимальную так, чтобы число критических точек в процессе деформации только уменьшалось?

5. Вычисление достижимой нижней оценки для числа критических точек морсификации для функций многих переменных.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Сабиру Меджидовичу Гусейн-Заде за постановку задачи, помощь и советы на всех этапах работы над диссертацией, многочисленные полезные обсуждения. Автор благодарен к.ф.-м.н. Евгению Александровичу Асташову, к.ф.-м.н. Григорию Дмитриевичу Соломадину и Анне-Марии Раух за интерес к работе и полезные обсуждения.

Автор выражает благодарность участникам семинара «Топология особенностей» за полезные замечания, комментарии и дискуссии. Автор выражает благодарность всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механикоматематического факультета МГУ за дружелюбную атмосферу, всестороннюю поддержку и интерес к работе.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.04 — геометрия и топология и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

[1] И. А. Проскурнин. Эквивариантная достаточность и устойчивость //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех .— 2018 — № 4 —С. 56–60.

Индексируется в Scopus и Web of Science.

[2] И. А. Проскурнин. Нормальные формы эквивариантных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2020. — № 2 — С. 51–55.

Индексируется в Scopus и Web of Science.

[3] И. А. Проскурнин. Минимальные морсификации функций двух вещественных переменных // Чебышевский сб. — 2020. — 21:1. — С. 360–366.

Индексируется в Scopus и Web of Science.