

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи



Шабайкин Равиль Русланович

**Динамическое деформирование тонкого растекающегося
пластического слоя**

Специальность 01.02.04 —
«Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Георгиевский Дмитрий Владимирович**,
доктор физико-математических наук, профессор РАН

Официальные оппоненты: **Земсков Андрей Владимирович**,
доктор физико-математических наук, доцент,
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),

Зингерман Константин Моисеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Тверской государственный университет,

Захаров Дмитрий Дмитриевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Российский университет транспорта РУТ-МИИТ,

Защита состоится 29 октября 2021 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.14 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д.1, к. 208.

E-mail: pvchist60@gmail.com.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/389216314/>.

Автореферат разослан 27 сентября 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.01.14,
кандидат физ.-мат. наук



Чистяков Петр Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория идеальной пластичности является одним из фундаментальных разделов механики твердого деформируемого тела. Главной особенностью соотношений теории пластичности является нелинейность исходных дифференциальных уравнений, что приводит к известным трудностям при решении задач. Данное обстоятельство вынуждает прибегать к численным методам, но, хотя они достаточно эффективны, особый интерес представляет определение точных решений исходных уравнений. Теория пластичности неразрывно связана с технологическими процессами формообразования, такими, как прокатка полосы, выдавливание стержней и труб, волочение проволоки, глубокая вытяжка листа. Начало отсчета развития данного направления справедливо можно отнести к 1864 г., когда Треска опубликовал предварительные итоги экспериментов по штамповке и выдавливанию, которые показали, что металл пластически течет, когда максимальное касательное напряжение достигает критического значения. Позже данное условие текучести было применено Сен-Венаном [1] для определения напряжений в частично пластичном цилиндре, подверженном кручению или изгибу, и в полностью пластичной трубе, расширяющейся под действием внутреннего давления. В 1871 г. М. Леви [2] предложил соотношения между напряжением и скоростью пластической деформации для пространственного течения. Л. Прандтлем [3] в 1923 году были даны решения задач о вдавливании жесткого штампа в пластическое полупространство и полосу, а также дано решение задачи о сжатии слоя из идеального жесткопластического материала между двумя сближающимися параллельными шероховатыми плитами. Согласно последнему, касательное напряжение на поверхностях контакта плит и обжимаемого материала постоянно и равно произведению предела текучести материала на величину сдвига. Существенно, что данное решение является неавтомодельным, оно получено полуобратным методом, впервые предложенным Сен-Венаном. В качестве исходного предположения Прандтль использовал линейную зависимость касательного напряжения вдоль толщины пластического слоя, а предельное нормальное давление определил в виде линейной функции по длине слоя. Решение Л. Прандтля широко используется в теории обработки металлов давлением, оно послужило основой для многочисленных обобщений.

Данная работа посвящена исследованию динамических эффектов, возникающих в процессах прессования тонких пластических слоев.

При пластической деформации тонких заготовок в процессах прессования возникает потребность получения изделий заданной точности. Одним из факторов, оказывающих существенное влияние на конечную геометрию детали, является сопротивление материала деформированию, которое, помимо прочего, зависит от скорости протекания процесса. Решение задач прессования в динамической постановке является одной из важных проблем теории обработки

металлов давлением, исследованию этих задач посвящено множество научных трудов [4–9].

В диссертационной работе обобщается метод асимптотического интегрирования на задачи прессования тонких идеально жесткопластических и вязкопластических слоев различных форм. На основе анализа полученных приближенных аналитических решений процесс деформирования разбивается на стадии с качественно разным проявлением динамических эффектов, и определяются соответствующие им временные интервалы.

Целью данной работы является исследование течения тонких пластических слоев различных форм в процессах прессования между сближающимися поверхностями при влиянии инерционных эффектов и получение приближенных аналитических выражений для определения полей напряжений и скоростей перемещений.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. На основе метода асимптотического интегрирования провести аналитическое моделирование динамических процессов сдавливания круглого, цилиндрического и сферического идеально жесткопластических слоев.
2. На основе метода асимптотического интегрирования провести аналитическое моделирование динамического процесса сдавливания плоского вязкопластического слоя.
3. Выявить связь между характером внутренних силовых факторов и временной стадией процесса прессования.

Научная новизна:

1. Получены приближенные аналитические решения задач в динамической постановке о прессовании тонких жесткопластических слоев различной формы: круглого, цилиндрического и сферического.
2. Получено приближенное аналитическое решение динамической задачи прессования тонкого вязкопластического слоя.
3. Для рассмотренных задач аналитически подтверждено положение из теории обработки металлов давлением о качественном изменении эпюры давления на динамических стадиях и следующего отсюда изменения суммарной силы, необходимой для осуществления процесса.

Практическая значимость результатов диссертации лежит в области теории и практики расчета технологических процессов обработки металлов давлением. На их основе могут быть рассчитаны как силовые факторы, необходимые для осуществления процесса прессования, так и механические характеристики сжимающих поверхностей. Данные результаты могут найти эффективное применение в научно-исследовательских организациях и конструкторских бюро, специализирующихся на проектировании и расчетах соответствующих технологических процессов, а также могут быть включены

в программы спецкурсов для студентов механико-математических факультетов высших учебных заведений.

Методология и методы исследования. В диссертации используются основные положения математической теории пластического течения несжимаемого материала, методы уравнений математической физики, асимптотические методы разложения по малому параметру, а также классические принципы механики деформируемого твердого тела.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Независимо от малости постоянной скорости сближения жестких поверхностей наступает момент времени, когда динамические слагаемые становятся того же порядка, что и слагаемые, связанные с градиентом напряжений.
2. Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования в тонкослойных пластических течениях на каждом временном интервале обусловлен соотношением двух малых безразмерных параметров: постоянной величины, равной обратному числу Эйлера, и меняющегося со временем отношения толщины слоя к его длине по простиранию.
3. В каждой из рассмотренных задач прослеживается два временных этапа: переход от квазистатического к динамическому деформированию и развитие динамическое деформирование вплоть до момента схлопывания, который не входит в область рассмотрения.
4. Анализ напряженно деформированного состояния во всех рассмотренных задачах показывает, что учет динамических слагаемых в уравнениях движения ведет к качественному изменению картины давления и его росту в середине слоя по простиранию, что приводит к увеличению суммарной силы, необходимой для технологического осуществления процесса.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью постановки краевых задач, основана на использовании строгих математических методов исследования, апробированных моделей механического поведения тел. Результаты соответствуют результатам, полученным другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Всероссийская научно-техническая конференция «Студенческая весна» в МГТУ им. Н. Э. Баумана (2017 г.)
2. Гагаринские чтения – 2018: XLIV Международная молодежная научная конференция (2018 г.)
3. Научно-исследовательский семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н., проф. М. В. Шамолина, д.ф.-м.н., проф. С. А. Агафонова (2018 г.)

4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019», «Ломоносов-2021» (2019, 2021 г.г.)
5. Научная конференция «Ломоносовские чтения» (2021 г.)
6. VI Зимняя научная школа-конференция по механике композитов имени Б. Е. Победри (2021 г.)
7. Аспирантский семинар и научно-исследовательский семинар имени А. А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д. В. Георгиевского (2017 – 2021 г.г.)
8. Аспирантский семинар имени Б. Е. Победри кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. В. И. Горбачева (2021 г.)
9. Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф., члена-корр. РАН Е. В. Ломакина (2021 г.)
10. Научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф., академика РАН Р. И. Нигматулина (2021 г.)

Личный вклад. Теоретические результаты, связанные с учетом перехода от квазистатики к динамике и анализом развитого процесса динамического деформирования, были получены соискателем самостоятельно.

Научный руководитель, доктор физико-математических наук Д.В. Георгиевский, предложил постановки задач и обосновал применение метода асимптотического разложения по малому параметру в рассмотренных в диссертации задачах.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, 3 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в международных базах Scopus, Web of Science и RSCI.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы. В последующих главах рассматриваются процессы прессования тонких пластических слоев различной геометрии. Исследуются две качественно разные стадии деформирования: переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования и развитый процесс динамического деформирования.

Первая глава посвящена исследованию влияния динамических эффектов в процессе сдвигания круглого идеально жесткопластического слоя [A4].

Рассматривается течение несжимаемого материала плотности ρ , удовлетворяющего тензорно-линейным соотношениям и скалярному определяющему соотношению – квадратичному критерию Мизеса-Генки, заключенного между двумя шероховатыми плитами, сближающимися с постоянной скоростью V (Рис. 1). Течение происходит в области

$$\Omega_t = \{0 \leq r \leq R(t), -h(t) \leq z \leq h(t), 0 \leq \theta < 2\pi\} \quad (1)$$

с границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, причем $h(t) \ll R(t)$ для любого $t \geq 0$. В начальный момент времени материал занимал область

$$\Omega_0 = \{0 \leq r \leq R_0, -h_0 \leq z \leq h_0, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad \partial\Omega_0 = \Gamma_0. \quad (2)$$

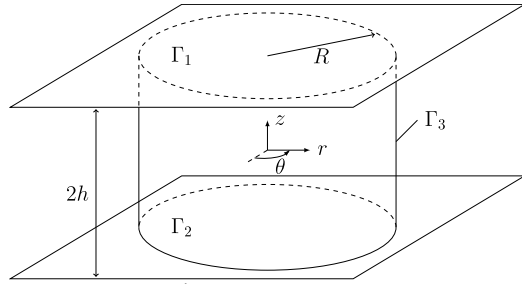


Рис. 1 – Деформируемый круглый слой

Система уравнений идеальной пластичности в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + s_{rz,z} + \frac{s_{rr} - s_{\theta\theta}}{r} = \rho(v_{r;t} + v_r v_{r,r} + v_z v_{r,z}), \quad (3)$$

$$-p_{,z} + s_{rz,r} + \frac{s_{rz}}{r} - (s_{rr} + s_{\theta\theta})_{,z} = \rho(v_{z;t} + v_r v_{z,r} + v_z v_{z,z}), \quad (4)$$

$$s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{rr}s_{\theta\theta} + s_{rz}^2 = \tau_s^2, \quad s_{rr} \frac{v_r}{r} = s_{\theta\theta} v_{r,r}, \quad (5)$$

$$s_{rr}(v_{r,z} + v_{z,r}) = 2s_{rz}v_{r,r}, \quad v_{r,r} + \frac{v_r}{r} + v_{z,z} = 0. \quad (6)$$

На границах контакта Γ_1 и Γ_2 задаются кинематические и силовые граничные условия:

$$v_z|_{z=\pm h} = \mp V, \quad |s_{rz}|_{z=\pm h} = m(r)\tau_s, \quad 0 < m \leq 1, \quad (7)$$

где m – функция, удовлетворяющая уравнению первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{m}{2r} \left(1 + \frac{m\sqrt{1-m^2}}{\arcsin m} \right). \quad (8)$$

Решение получено с помощью процедуры асимптотического интегрирования. Вводятся малый параметр $\alpha = \frac{h(t)}{R(t)} \ll 1$ и безразмерные координаты

$$\rho = \frac{r}{R} = \frac{\alpha r}{h}, \quad \xi = \frac{z}{h}, \quad \tau = V \frac{t}{h}. \quad (9)$$

Неизвестные функции представляются в виде степенных рядов, коэффициенты которых безразмерны и являются функциями безразмерных координат:

$$v_r(r, z, t) = V \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}}, \quad v_z(r, z, t) = V \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_z^{\{k\}}, \quad (10)$$

$$s_{ij}(r, z, t) = \tau_s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{ij}^{\{k\}}, \quad p(r, z, t) = \tau_s \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha^k p^{\{k\}}. \quad (11)$$

При подстановке данных разложений в уравнения движения возникает множитель $\text{Eu}^{-1} = \rho V^2 / \tau_s$, равный обратному числу Эйлера. Соотношение малого геометрического параметра и данного множителя $\text{Eu}^{-1} \sim O(\alpha^\beta)$ определяет степень влияния динамики в процессе прессования. Применительно к динамическому анализу интерес представляют стадии процесса, при которых $\beta \in \{1, 2\}$. На данных стадиях заметно меняется только функция давления, выражение которой в квазистатическом случае имеет вид

$$p^{\text{кв}} = p_0 + \frac{\tau_s}{\alpha} \int_{\rho}^1 \mu(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s_{rr} d\xi - \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}} \sqrt{(1 - \mu^2 \xi^2)} + O(\alpha), \quad (12)$$

где p_0 – гидростатическая постоянная.

Моменту перехода от квазистатического процесса деформирования к динамическому соответствует $\text{Eu}^{-1} \sim O(\alpha^2)$. Функция давления при этом выражается формулой

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{кв}} + \frac{3\tau_s}{8} C_2 (1 - \rho^2), \quad C_2 = O(1). \quad (13)$$

Развитым процессом деформирования называется стадия прессования, при которой $\text{Eu}^{-1} \sim O(\alpha)$. В данном случае выражение функции давления примет следующий вид:

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{кв}} + \frac{3\tau_s}{8\alpha} C_1 (1 - \rho^2) - C_1 \tau_s C_p^{\{0\}} \log \rho, \quad C_1 = O(1), \quad C_p^{\{0\}} = \text{const}. \quad (14)$$

При сравнении выражений видно, что в случае динамического сдавливания возникает квадратично зависящее от радиуса слагаемое, причем его вклад возрастает на стадии развитого динамического деформирования. Наличие такой зависимости качественно меняет эпюру давления в слое и увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на плиты. Эпюры давления для различных стадий процесса при следующих параметрах: $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\mu(1) = 1$ приведены на **Рис. 2**.

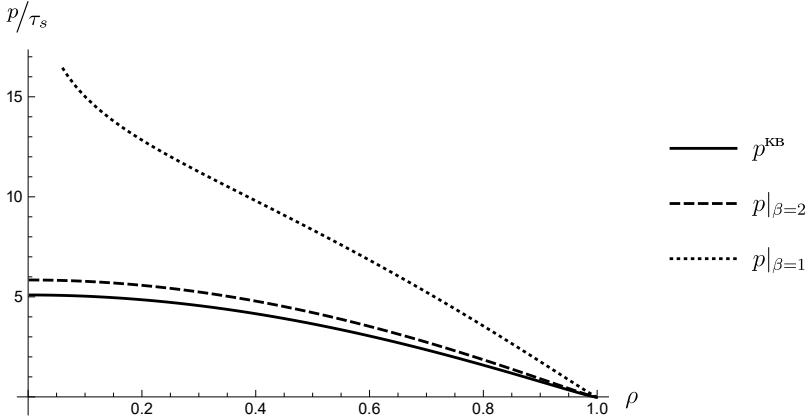


Рис. 2 — Эпюры давления для случая круглого слоя

Вторая глава посвящена исследованию влияния динамических эффектов в процессе сдавливания цилиндрического идеально жесткопластического слоя [A2].

Исследуется процесс деформирования идеально жесткопластического материала заключенного между двумя соосными абсолютно жесткими цилиндрами. Материал полагается несжимаемым, имеет плотность ρ и предел текучести σ_s . В процессе прессования внешний цилиндр остаётся неподвижным, а внутренний радиально расширяется с постоянной скоростью V (**Рис. 3**). Течение происходит в области:

$$\Omega_t = \{0 \leq r \leq R(t) + h(t) = \text{const}, -l(t) \leq z \leq l(t), 0 \leq \theta < 2\pi\} \quad (15)$$

с границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, причем $h(t) \ll l(t)$ для любого $t \geq 0$. В начальный момент времени область, занятая материалом, имела вид

$$\Omega_0 = \{0 \leq r \leq R_0 + h_0, -l_0 \leq z \leq l_0, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad \partial\Omega_0 = \Gamma_0. \quad (16)$$

Методом асимптотического интегрирования ищется решение системы идеальной пластичности (3) — (6) со следующими граничными условиями на контактирующих поверхностях Γ_1 и Γ_2 :

$$v_r|_{r=R} = V, \quad v_r|_{r=R+h} = 0, \quad |s_{rz}|_{r=R} = |s_{rz}|_{r=R+h} = \mu\tau_s, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (17)$$

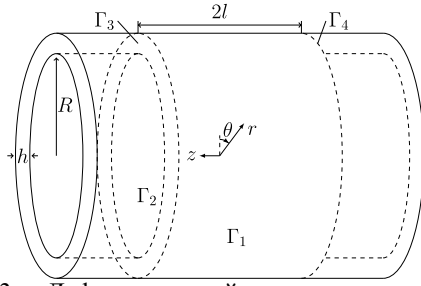


Рис. 3 – Деформируемый цилиндрический слой

где μ – шероховатость пресса. Абсолютной шероховатости, или полному сцеплению пресса с материалом, соответствует значение $\mu = 1$.

Неизвестные функции раскладываются в степенные ряды по малому геометрическому параметру $\alpha = \frac{h(t)}{l(t)} \ll 1$:

$$v_r(r, z, t) = V \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_r^{(k)}, \quad v_z(r, z, t) = V \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_z^{(k)}, \quad (18)$$

$$s_{ij}(r, z, t) = \tau_s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{ij}^{(k)}, \quad p(r, z, t) = \tau_s \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha^k p^{(k)}. \quad (19)$$

Коэффициенты данных рядов безразмерны и являются функциями безразмерных координат ρ, ξ, τ :

$$\rho = \frac{r - R}{h}, \quad \xi = \frac{z}{l} = \frac{\alpha z}{h}, \quad \tau = V \frac{t}{h}. \quad (20)$$

При подстановке данных разложений в уравнения движения возникает два параметра: множитель $Eu^{-1} = \rho V^2 / \tau_s$ равный обратному числу Эйлера, который характеризует соотношение между градиентами давления и инерционными силами, и определяющий форму цилиндров показатель c , такой что $R/l \sim \alpha^c$. Для последнего рассмотрены три значения, соответствующие различным математическим и механическим смыслам:

- $c = 1$, когда радиусы цилиндров имеют порядок толщины слоя,
- $c = 0$, когда радиусы цилиндров имеют порядок длины образующей,
- $0 < c < 1$, когда радиусы цилиндров имеют “промежуточный” порядок малости.

С помощью соотношения $Eu^{-1} O(\alpha^\beta)$ выделяются две стадии процесса: этап перехода от квазистатического к динамическому деформированию ($\beta = 2$) и этап развитого динамического деформирования ($\beta = 1$). Для каждой из конфигураций цилиндров на данных стадиях построены приближенные аналитические решения. Сравнительный анализ с квазистатическими решениями показывает качественное изменение функции давления.

Когда радиусы цилиндров соизмеримы с толщиной слоя, функция давления имеет следующий вид:

$$p^{\text{KB}} = p_0 + \frac{2\mu}{\alpha} (1 - |\xi|) \tau_s + s_{rr} + \int \frac{s_{rr} - s_{\theta\theta}}{\rho + a} d\rho + O(\alpha), \quad (21)$$

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{KB}} + C_2 \frac{a(1+6a)}{(2a+1)^2} (1 - \xi^2) \tau_s, \quad (22)$$

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{KB}} + \frac{C_1}{\alpha} \frac{a(1+6a)}{(2a+1)^2} (1 - \xi^2) \tau_s + O(1), \quad (23)$$

где $a = R/l$.

В случае радиусов цилиндров порядка длины образующей получены выражения

$$p^{\text{KB}} = p_0 + \frac{2\mu}{\alpha} (1 - |\xi|) \tau_s + s_{rr} + O(\alpha), \quad (24)$$

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{KB}} + \frac{3C_2}{2} (1 - \xi^2) \tau_s, \quad (25)$$

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{KB}} + \frac{3C_2}{2\alpha} (1 - \xi^2) \tau_s + O(1). \quad (26)$$

На графиках ниже приведены эпюры давления для упомянутых случаев при следующих параметрах: $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\mu = 1$ и $a = 1$.

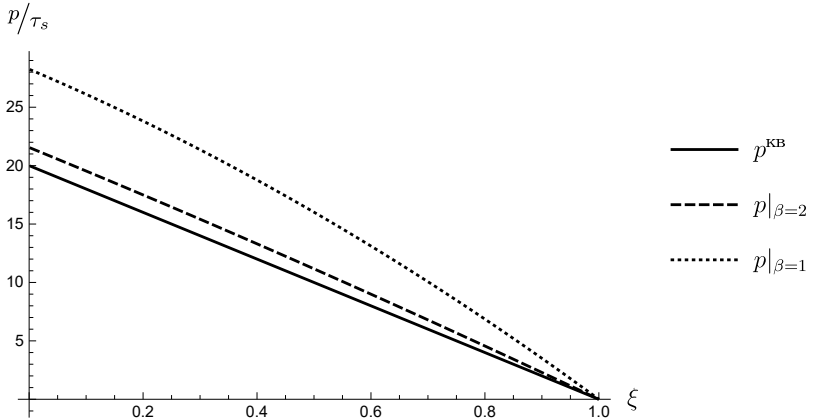


Рис. 4 — Эпюры давления для случая цилиндрического слоя при радиусах цилиндров порядка толщины слоя

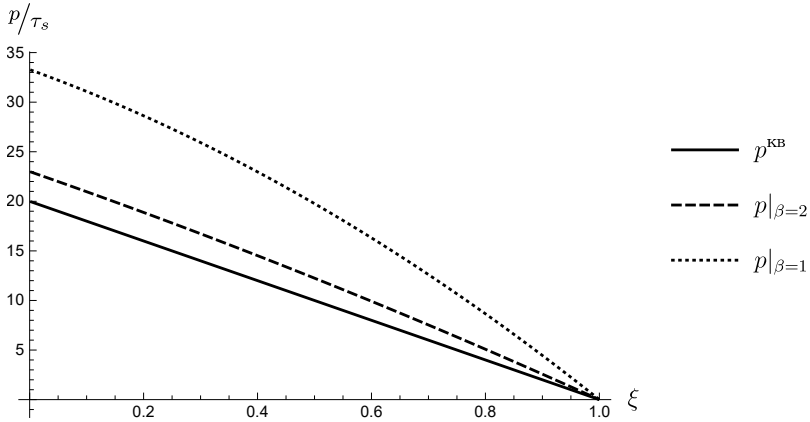


Рис. 5 — Эпюры давления для случая цилиндрического слоя при радиусах цилиндров порядка длины образующей

Последний из рассматриваемых случаев, в силу наличия в уравнениях членов с дробными степенями параметра α , требует использования иных разложений:

$$v_r(r, z, t) = V \left(v_r^{\{0\}} + \alpha^{1-c\{1-c\}} v_r^{\{1-c\}} + \dots \right), \quad (27)$$

$$v_z(r, z, t) = V \left(\alpha^{-1\{-1\}} v_z^{\{-1\}} + \alpha^{-c\{-c\}} v_z^{\{-c\}} + v_z^{\{0\}} + \alpha^{1-c\{1-c\}} v_z^{\{1-c\}} + \dots \right), \quad (28)$$

$$s_{ij}(r, z, t) = \tau_s \left(s_{ij}^{\{0\}} + \alpha^{1-c\{1-c\}} s_{ij}^{\{1-c\}} + \dots \right), \quad (29)$$

$$p(r, z, t) = \tau_s \left(\alpha^{-1\{-1\}} p^{\{-1\}} + \alpha^{-c\{-c\}} p^{\{-c\}} + p^{\{0\}} + \alpha^{1-c\{1-c\}} p^{\{1-c\}} + \dots \right). \quad (30)$$

Поскольку однозначно определить порядок следующего за α^{1-c} члена не представляется возможным, поиск решения ограничен определением коэффициентов при α^{-1} , α^{-c} , α^0 и α^{1-c} . В силу данного ограничения падает точность искомых решений, и функция давления претерпевает изменения только в процессе развитого динамического деформирования:

$$p^{\text{KB}}/\tau_s = p_0 + \frac{2\mu}{\alpha} (1 - |\xi|) - \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} + \alpha^{1-c} \left(\frac{1}{4\mu} \left(\mu (2\rho - 1) \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} + \arcsin (\mu (2\rho - 1)) \right) - \right. \quad (31)$$

$$\left. - \frac{1 - \rho}{2a} \frac{1 - \mu^2 (2\rho - 1) (4\rho - 1)}{\sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2}} \right) + O(\alpha^{1-c}),$$

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{KB}} + \frac{3C_1}{2\alpha} (1 - \xi^2) \tau_s + \frac{C_1}{2a\alpha^c} (3 + 2c) \xi^2 \tau_s. \quad (32)$$

На Рис. 6 представлены эпюры давления для различных стадий процесса при $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $c = 0.5$, $\mu = 1$ и $a = 1$.

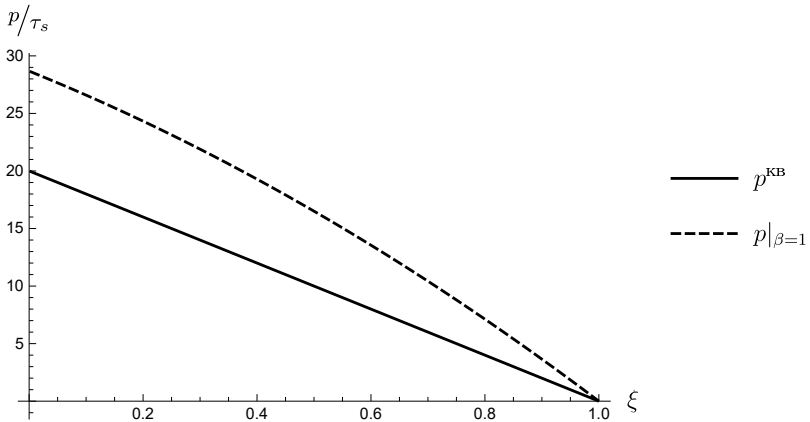


Рис. 6 — Эпюры давления для случая цилиндрического слоя при радиусах “промежуточного” порядка

Во всех рассмотренных случаях прослеживается качественное изменение функции давления: возникает квадратично зависящее от продольной координаты слагаемое, причем порядок данной величины растёт с приближением к моменту “схлопывания” слоя.

Третья глава посвящена исследованию влияния динамических эффектов в процессе сдавливания сферического идеально жесткопластического слоя [A1].

Рассматривается течение несжимаемого слоя плотности ϱ , заключенного между двумя концентрическими сферами, в области

$$\Omega_t = \{0 \leq r \leq R(t) + h(t), 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi\} \quad (33)$$

с границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем $h(t) \ll R(t)$ для любого $t \geq 0$.

В процессе прессования, внешняя сфера остаётся неподвижной, а внутренняя радиально расширяется с постоянной скоростью, выдавливая материал через сток $\theta = \pi$ (Рис. 7).

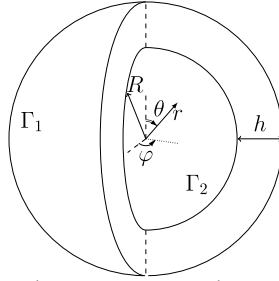


Рис. 7 — Деформируемый сферический слой

Система уравнений идеальной пластичности для данной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} -p_{,r} + s_{rr,r} + \frac{1}{r}(s_{r\theta,\theta} + 3s_{rr} + s_{r\theta} \cot(\theta)) &= \\ &= \rho \left(v_{r;t} + v_r v_{r,r} + \frac{1}{r} v_\theta v_{r,\theta} - \frac{1}{r} v_\theta^2 \right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} p_{,\theta} + s_{r\theta,r} + \frac{1}{r}(s_{\theta\theta,\theta} + 3s_{r\theta} + (s_{rr} + 2s_{\theta\theta}) \cot(\theta)) &= \\ &= \rho \left(v_{\theta;t} + v_r v_{\theta,r} + \frac{1}{r} v_\theta v_{\theta,\theta} - \frac{1}{r} v_\theta v_r \right), \end{aligned} \quad (35)$$

$$s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{rr} s_{\theta\theta} + s_{r\theta}^2 = \tau_s^2, \quad s_{rr}(v_{\theta,\theta} + v_r)/r = s_{\theta\theta} v_{r,r}, \quad (36)$$

$$s_{rr}(v_{\theta,r} + (v_{r,\theta} - v_\theta)/r) = 2s_{r\theta} v_{r,r}, \quad v_{r,r} + (2v_r + v_{\theta,\theta} + v_\theta \cot(\theta))/r = 0. \quad (37)$$

На границах контакта Γ_1 и Γ_2 задаются кинематические и силовые граничные условия:

$$v_r|_{r=R} = V, \quad v_r|_{r=R+h} = 0, \quad |s_{r\theta}|_{r=R} = |s_{r\theta}|_{r=R+h} = \mu(\theta)\tau_s, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (38)$$

где μ – шероховатость прессы. Абсолютной шероховатости, или полному сцеплению прессы с материалом, соответствует значение $\mu = 1$.

Поиск решения осуществляется посредством метода асимптотического интегрирования. Вводятся малый параметр $\alpha = \frac{h(t)}{R(t)} \ll 1$ и безразмерные координаты

$$\rho = \frac{r - R}{h}, \quad \tau = V \frac{t}{h}. \quad (39)$$

Неизвестные функции представляются в виде степенных рядов, коэффициенты которых безразмерны и являются функциями безразмерных координат:

$$v_\theta(r, \theta, t) = V \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha^k v_\theta^{\{k\}}, \quad v_r(r, \theta, t) = V \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}}, \quad (40)$$

$$s_{ij}(r, \theta, t) = \tau_s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{ij}^{\{k\}}, \quad p(r, \theta, t) = \tau_s \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha^k p^{\{k\}}. \quad (41)$$

При подстановке данных разложений в уравнения движения возникает множитель $\text{Eu}^{-1} = \rho V^2 / \tau_s$ равный обратному числу Эйлера. Степень влияния учета динамики на протекание процесса определяется соотношением $\text{Eu}^{-1} \sim O(\alpha^\beta)$. В рамках исследуемых стадий ($\beta = 2$ и $\beta = 1$) качественно меняется только функция давления. В случае квазистатической постановки она выражается в следующем виде:

$$p^{\text{KB}} = p_0 - \tau_s \frac{2}{\alpha} \int_0^\theta \mu(\xi) d\xi + s_{rr} + O(1), \quad (42)$$

где постоянная p_0 имеет гидростатический смысл.

Для стадии перехода от квазистатического режима к динамическому у стадии развитой динамики имеем соответственно выражения:

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{KB}} + \tau_s C_2 \left(2 \log(\cos(\theta/2)) - \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right), \quad (43)$$

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{KB}} + \frac{\tau_s}{\alpha} C_1 \left(2 \log(\cos(\theta/2)) - \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) + O(1). \quad (44)$$

При сравнении выражений видно, что в случае динамического сдавливания возникает дополнительное слагаемое, причем с уменьшением показателя β его вклад возрастает. Функция

$$2 \log(\cos(\theta/2)) - 1/(1 + \cos(\theta))$$

является выпуклой вверх при $\theta \in [0, \pi]$, причем её максимум достигается при $\theta = 0$. Наличие такого слагаемого качественно меняет эпюру давления в слое и увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на плиты. Графики функции давления при $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\mu = 1$ приведены на [Рис. 8](#).

В [четвертой главе](#) исследуется влияние динамических эффектов в процессе сдавливания плоского нелинейно вязкопластического слоя со степенной функцией упрочнения [\[A7\]](#).

Рассматривается течение несжимаемого вязкопластического материала, происходящее в тонком прямоугольном слое

$$\Omega_t = \{-l(t) \leq x_1 \leq l(t), -h(t) \leq x_2 < h(t)\} \quad (45)$$

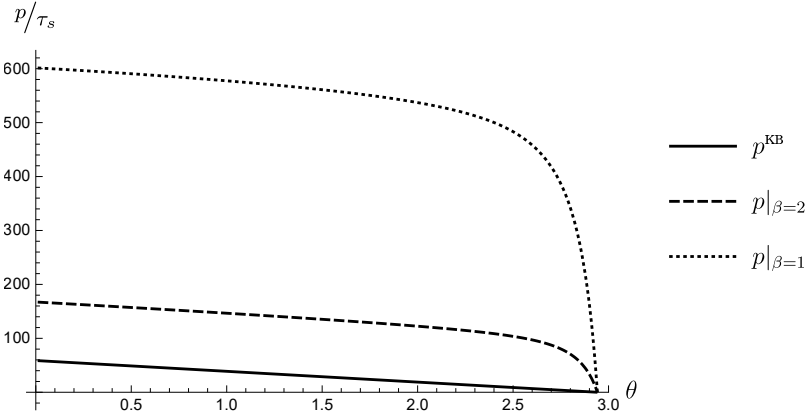


Рис. 8 – Эпюры давления для случая сферического слоя

с границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, причем $h(t) \ll l(t)$ для любого $t \geq 0$. В начальный момент времени область, занятая материалом, имела вид

$$\Omega_0 = \{-l_0 \leq x_1 \leq l_0, -h_0 \leq x_2 \leq h_0\}, \quad \partial\Omega_0 = \Gamma_0. \quad (46)$$

Длинные стороны слоя соприкасаются с движущимися навстречу друг другу с постоянной скоростью V плитами с коэффициентом шероховатости μ (Рис. 9).

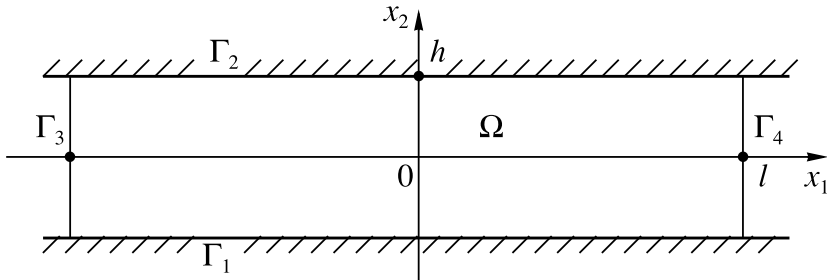


Рис. 9 – Деформируемый слой

Замкнутая система плоской динамической теории вязкопластического течения состоит из пяти уравнений:

$$-p_{,1} + s_{11,1} + s_{12,2} = \rho(v_{1;t} + v_1 v_{1,1} + v_2 v_{1,2}), \quad (47)$$

$$-p_{,2} - s_{11,2} + s_{12,1} = \rho(v_{2;t} + v_1 v_{2,1} + v_2 v_{2,2}), \quad (48)$$

$$\sqrt{2(s_{11}^2 + s_{12}^2)} = \sigma_s + 2av_u^\gamma, \quad v_u = \sqrt{2v_{1,1}^2 + (v_{1,2} + v_{2,1})^2} / 2, \quad (49)$$

$$s_{11}(v_{1,2} + v_{2,1}) = 2s_{12}v_{1,1}, \quad v_{1,1} + v_{2,2} = 0, \quad (50)$$

где ϱ – плотность материала, a – коэффициент нелинейной вязкости и γ – экспонента упрочнения.

На границах контакта Γ_1 и Γ_2 задаются кинематические и силовые граничные условия:

$$v_2|_{x_2=\pm h} = \mp V, \quad |s_{12}|_{x_2=\pm h} = \mu(x_1)\tau_s, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (51)$$

Вводится малый геометрический параметр $\alpha = \frac{h(t)}{l(t)} \ll 1$, и неизвестные функции раскладываются в ряды по целым степеням параметра:

$$v_1(x_1, x_2, t) = V \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha^k \{v_1\}^k, \quad v_2(x_1, x_2, t) = V \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_2\}^k \quad (52)$$

$$s_{ij}(x_1, x_2, t) = \tau_s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{s_{ij}\}^k, \quad p(x_1, x_2, t) = \tau_s \sum_{k=-1}^{\infty} \alpha^k \{p\}^k, \quad (53)$$

где коэффициенты рядов безразмерны и являются функциями безразмерных координат ξ_1, ξ_2, τ :

$$\xi_1 = x_1/l = \alpha x_1/h, \quad \xi_2 = x_2/h, \quad \tau = V \frac{t}{h}. \quad (54)$$

Подстановка данных разложений в уравнения движения порождает два параметра: малый физический параметр $Eu^{-1} = \varrho V^2/\tau_s$, равный обратному числу Эйлера – ключевому безразмерному критерию в динамических задачах механики сплошных сред, и другой критерий подобия, число Сен-Венана $S = (\tau_s/a)(h/V)^\gamma \gg 1$, описывающий отношение пластических и вязких свойств тела. Посредством асимптотического интегрирования, с учетом соотношения $Eu^{-1} \sim O(\alpha^\beta)$, строятся решения для двух стадий процесса: этапа перехода от квазистатического к динамическому деформированию ($\beta = 2$) и этапа развитого динамического деформирования ($\beta = 1$).

Полученные приближенные решения качественно отличаются от квазистатического случая только функцией давления:

$$p^{KB} = p_0 + \frac{\tau_s}{\alpha} \int_{|\xi_1|}^1 \mu(\xi) d\xi - s_{11} + \int_{-1}^1 s_{11} d\xi_2 + O(\alpha), \quad (55)$$

$$p|_{\beta=2} = p^{KB} + \tau_s C_2 (1 - \xi_1^2), \quad (56)$$

$$p|_{\beta=1} = p^{KB} + \frac{\tau_s}{\alpha} C_1 (1 - \xi_1^2) + O(1). \quad (57)$$

При сравнении выражений видно (Рис. 10), что в случае динамического сдавливания возникает квадратично зависящее от радиуса слагаемое, причем чем меньше показатель β , тем более значима становится данная величина. Наличие такой зависимости качественно меняет эпюру давления в слое и увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на плиты.

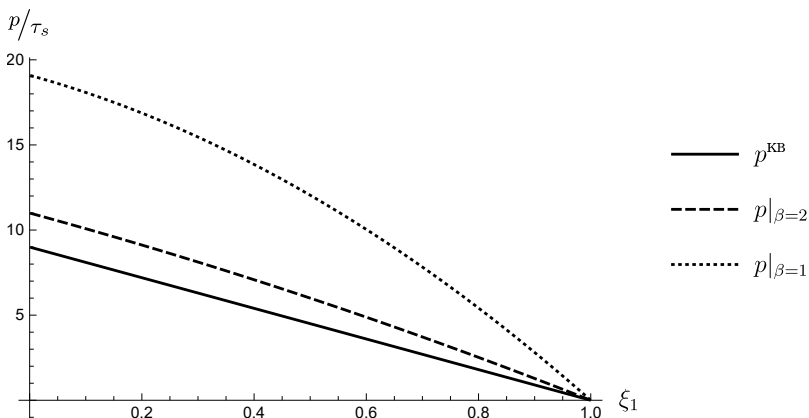


Рис. 10 — Эпюры давления для случая плоского вязкопластического слоя при параметрах $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\mu = 0.9$, $S = 10$

В **заключении** кратко излагаются основные результаты проделанной работы, а именно:

1. Получены приближенные аналитические решения задачи о сдавливании круглого идеально жесткопластического тонкого слоя в динамической постановке. Рассмотрены две стадии процесса, соответствующие переходу от квазистатического к динамическому режиму деформирования и развитому динамическому деформированию.
2. Получены приближенные аналитические решения задачи о сдавливании цилиндрического идеально жесткопластического тонкого слоя в динамической постановке. В данной задаче естественно возникает дополнительный параметр, отвечающий за соотношение радиусов и длины образующей сжимающих цилиндров. Рассмотрены случаи, когда радиусы цилиндров имеют тот же порядок, что и толщина слоя, когда радиусы цилиндров порядка длины образующей, и случай “промежуточного” порядка. Для указанных случаев исследованы две стадии процесса прессования: переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования и развитое динамическое деформирование.
3. Получены приближенные аналитические решения задачи о сдавливании сферического идеально жесткопластического тонкого слоя при наличии стока в динамической постановке. Показано что процесс прессования разбивается по времени на качественно различные стадии: этап, соответствующий переходу от квазистатического к динамическому режиму деформирования, и этап развитого динамического деформирования.
4. Получены приближенные аналитические решения задачи о сдавливании вязкопластического тонкого слоя со степенной функцией

- упрочнения в динамической постановке для режимов прессования, соответствующих стадии перехода от квазистатического к динамическому режиму деформирования и стадии развитого динамического деформирования.
5. Анализ напряженно-деформированного состояния на исследуемых стадиях показал качественное изменение эпюры давления и увеличение суммарной силы действующей со стороны материала на прессующие поверхности: в функции давления возникло зависящее от продольной координаты слагаемое (выпуклая вверх функция с центром в северном полюсе в случае сферического слоя и квадратичная функция в остальных задачах), причем с приближением к моменту “схлопывания” слоя вклад данного слагаемого растет.
 6. Определена область применимости найденных решений и построен явный критерий, устанавливающий зависимость между временем и стадией процесса прессования. Согласно последнему независимо от малости постоянной скорости сближения жестких прессующих поверхностей наступает временной интервал, когда влияние динамических слагаемых становится соизмеримым с градиентами напряжений.
 7. Развита математические аспекты метода асимптотического интегрирования применительно к динамическим задачам пластического течения при прессовании асимптотически тонких слоев.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в международных базах Scopus, Web of Science и RSCI

- A1. *Шабайкин, Р. Р.* Динамические эффекты деформирования при сжатии-стоке асимптотически тонкого идеально жесткопластического сферического слоя / Р. Р. Шабайкин // Изв. РАН. МГТТ. — 2020. — № 2. — С. 22–27. — Импакт-фактор: 0.695.
- A2. *Шабайкин, Р. Р.* Динамические эффекты деформирования тонкого пластического слоя между сближающимися жесткими цилиндрами / Р. Р. Шабайкин // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 2020. — № 4. — С. 29–37. — Импакт-фактор: 0.153.
- A3. *Georgievskii, D.* Quasistatic and Dynamic Deformation of an Asymptotically Thin Perfectly Rigid-Plastic Spherical Layer / D. Georgievskii, R. Shabaykin // Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials. Vol. 141. — 2021. — P. 155–161. — Impact factor: 1.

В прочих изданиях

- A4. *Георгиевский, Д. В.* Квазистатическое и динамическое сдавливание плоского круглого идеальнопластического слоя жёсткими плитами / Д. В. Георгиевский, Р. Р. Шабайкин // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твёрдого тела. Т. 1. — Тверь : Изд-во ТвГТУ, 2017. — С. 56—63.
- A5. *Шабайкин, Р. Р.* Внутреннее разложение в осесимметричной задаче Прандтля и возможность его сшивки с внешним / Р. Р. Шабайкин // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твёрдого тела. Т. 2. — Тверь : Изд-во ТвГТУ, 2018. — С. 103—106.
- A6. *Шабайкин, Р. Р.* Динамические эффекты деформирования пластического слоя между жесткими цилиндрами / Р. Р. Шабайкин // Гагаринские чтения — 2018: XLIV Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов. Т. 3. — 2018. — С. 434.
- A7. *Шабайкин, Р. Р.* Динамическое сдавливание нелинейно вязкопластического тонкого слоя / Р. Р. Шабайкин // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» [Электронный ресурс]. — М. : МАКС Пресс, 2021.

Список литературы

1. *Todhunter, I.* A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials: From Galilei to the Present Time. Vol. 2 / I. Todhunter, K. Pearson. — University Press, 1893. — 759 p.
2. *Levi, M.* Extrait du memoire sur les equantions generates de mouvements interieurs des corps solides dustiles au de lades limites ou l'elasticate pourrait les ramener a leur premier etat / M. Levi // J. de Math oures et appl. — 1871. — Vol. 16. — P. 369—372. — (2nd ser.)
3. *Прандтль, Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел / Л. Прандтль // Теория пластичности. — М. : Иностран. лит., 1948. — С. 102—113.
4. *Ильюшин, А. А.* Труды. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. Т. 4 / А. А. Ильюшин. — М. : Физматлит, 2009. — 526 с.
5. *Кийко, И. А.* Обобщения задачи Л. Прандтля о сжатии полосы / И. А. Кийко, В. А. Кадымов // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 2003. — № 4. — С. 50—56.
6. *Быковцев, Г. И.* О сжатии пластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом сил инерции / Г. И. Быковцев // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. — 1960. — № 6. — С. 1082—1084.

7. *Георгиевский, Д. В.* Асимптотическое интегрирование задачи Прандтля в динамической постановке / Д. В. Георгиевский // Изв. РАН. МТТ. — 2013. — № 1. — С. 97–105.
8. *Задоян, М. А.* Об одном классе решений плоской динамической задачи теории пластичности / М. А. Задоян // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 260, № 1. — С. 47–50.
9. *Богданов, В. И.* Штамповка взрывом / В. И. Богданов, А. В. Звягин // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 42–46.

Шабайкин Равиль Русланович

Динамическое деформирование тонкого растекающегося пластического слоя

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 50 экз.

Типография _____