

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Шабайкин Равиль Русланович

**Динамическое деформирование тонкого растекающегося
пластического слоя**

Специальность 01.02.04 —
«Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор РАН
Георгиевский Дмитрий Владимирович

Москва — 2021

Оглавление

| | Стр. |
|--|-----------|
| Введение | 4 |
| Глава 1. Сдавливание круглого идеально жесткопластического слоя . | 14 |
| 1.1 Постановка задачи и асимптотические разложения | 14 |
| 1.2 Построение решения | 19 |
| 1.2.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования | 19 |
| 1.2.2 Развитый процесс динамического деформирования | 22 |
| 1.3 Анализ решения | 26 |
| Глава 2. Сдавливание цилиндрического идеально жесткопластического слоя | 28 |
| 2.1 Постановка задачи и асимптотические разложения | 28 |
| 2.2 Построение решения при радиусах цилиндров порядка толщины слоя | 33 |
| 2.2.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования | 33 |
| 2.2.2 Развитый процесс динамического деформирования | 36 |
| 2.3 Анализ решения для случая, когда радиусы цилиндров порядка толщины слоя | 39 |
| 2.4 Построение решения при радиусах цилиндров порядка длины образующей | 41 |
| 2.4.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования | 41 |
| 2.4.2 Развитый процесс динамического деформирования | 44 |
| 2.5 Анализ решения для случая, когда радиусы цилиндров порядка длины образующей | 46 |
| 2.6 Построение решения при радиусах цилиндров “промежуточного” порядка малости | 48 |
| 2.6.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования | 49 |
| 2.6.2 Развитый процесс динамического деформирования | 52 |

| | | |
|---|--|------------|
| 2.7 | Анализ решения для случая, когда радиусы цилиндров “промежуточного” порядка малости | 54 |
| Глава 3. Сдавливание сферического идеально жесткопластического | | |
| | слоя | 57 |
| 3.1 | Постановка задачи и асимптотические разложения | 57 |
| 3.2 | Построение решения | 62 |
| 3.2.1 | Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования | 62 |
| 3.2.2 | Развитый процесс динамического деформирования | 65 |
| 3.3 | Анализ решения | 69 |
| Глава 4. Сдавливание тонкого нелинейно-вязкопластического слоя . . | | |
| 4.1 | Постановка задачи и асимптотические разложения | 72 |
| 4.2 | Построение решения | 77 |
| 4.2.1 | Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования | 77 |
| 4.2.2 | Развитый процесс динамического деформирования | 80 |
| 4.3 | Анализ решения | 83 |
| Заключение | | 85 |
| Список сокращений и условных обозначений | | 87 |
| Словарь терминов | | 88 |
| Список литературы | | 89 |
| Список рисунков | | 99 |
| Список таблиц | | 100 |

Введение

Теория идеальной пластичности является одним из фундаментальных разделов механики твердого деформируемого тела. Главной особенностью соотношений теории пластичности является нелинейность исходных дифференциальных уравнений, что приводит к известным трудностям при решении задач. Данное обстоятельство вынуждает прибегать к численным методам, но, хотя они достаточно эффективны, особый интерес представляет определение точных решений исходных уравнений. Теория пластичности неразрывно связана с технологическими процессами формообразования, такими, как прокатка полосы, выдавливание стержней и труб, волочение проволоки, глубокая вытяжка листа. Начало отсчета развития данного направления справедливо можно отнести к 1864 г., когда Треска опубликовал предварительные итоги экспериментов по штамповке и выдавливанию, которые показали, что металл пластически течет, когда максимальное касательное напряжение достигает критического значения. Позже данное условие текучести было применено Сен-Венаном [1] для определения напряжений в частично пластичном цилиндре, подверженном кручению или изгибу, и в полностью пластичной трубе, расширяющейся под действием внутреннего давления. В 1871 г. М. Леви [2] предложил соотношения между напряжением и скоростью пластической деформации для пространственного течения. Л. Прандтлем [3] в 1923 году были даны решения задач о вдавливании жесткого штампа в пластическое полупространство и полосу, а также дано решение задачи о сжатии слоя из идеального жесткопластического материала между двумя сближающимися параллельными шероховатыми плитами. Согласно последнему, касательное напряжение на поверхностях контакта плит и обжимаемого материала постоянно и равно произведению предела текучести материала на величину сдвига. Существенно, что данное решение является неавтомодельным, оно получено полубратным методом, впервые предложенным Сен-Венаном. В качестве исходного предположения Прандтль использовал линейную зависимость касательного напряжения вдоль толщины пластического слоя, а предельное нормальное давление определил в виде линейной функции по длине слоя. Решение Л. Прандтля широко используется в теории обработки металлов давлением, оно послужило основой для многочисленных обобщений.

А. Надаи [4] дополнил решение Л.Прандтля, построив поле малых перемещений, впоследствии его построению был придан смысл поля скоростей перемещений в рамках теории течения идеальной жесткопластической среды. Решение Прандтля-Надаи имеет место на достаточном удалении от свободного края слоя и носит асимптотический характер. Им обобщено решение Прандтля на случай линейной зависимости максимального касательного напряжения от среднего давления и случай сжатия слоя наклонными шероховатыми плитами, а также плитами, изогнутыми в виде концентрических окружностей. Надаи также отметил ряд случаев, рассмотренных Гартманом, в частности, течение идеального жесткопластического материала в области в виде рожка, ограниченного двумя логарифмическими спиралями. Гартман также обобщил решения Прандтля для теории сыпучих сред (эти результаты приведены в [5]), он же рассмотрел предельное состояние сыпучих сред, сжатых наклонными плитами, изогнутыми плитами и т. д. Все перечисленные результаты относятся к случаю плоской деформации. А. Грин [6] дал геометрический вывод формулы Надаи и построил годограф скоростей.

А. А. Ильюшин в работах [7; 8] дал приближенное математическое описание предельного состояния и пластического течения тел, имеющих форму сравнительно тонкостенных оболочек, подвергающихся обработке давлением. В основе приближения тонкого слоя лежит решения Прандтля и его некоторые кинематические упрощения. Скорости усредняются по толщине и предполагается, что в плоскости, касательной к любой эквидистантной поверхности, касательные напряжения нулевые, а главные напряжения равны между собой (условие полной пластичности). Для сдавливающего усилия установлена песчаная аналогия. Им показана справедливость этого решения при малых и конечных деформациях и его единственность. Им же [9] установлена важность учета инерционных сил при моделировании высокоскоростных пластических течений.

А. И. Кузнецов [10] проанализировал случай переменного по толщине полосы предела текучести. Л. С. Агимирзяном [11] решена задача о продольном и поперечном сжатии пластической полосы, заключенной между двумя параллельными стенками, когда со стороны торца полосе передается равномерно распределенное давление гладкого штампа. Г. И. Быковцевым [12] было получено решение этой задачи для упрочняющегося жесткопластического материала, причем принималось соотношение теории анизотропного упрочнения. Им же [13] решена задача о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами с уче-

том сил инерции. Ю. С. Арутюнов и А. Л. Гонор [14] исследовали обратную задачу об определении формы поверхности необходимой, чтобы к концу процесса течения получить слой заданной толщины, зависящей от одной координаты. Численное решение о продольном и поперечном сжатии многослойных полос из различных материалов приведено Г. Э. Аркулисом [15]. Им получены эпюры для случая сжатия бинарных многослойных пакетов при учете межслойного трения.

Д. Д. Ивлев [16] дал обобщение решения Прандтля на случай пространственного течения четырехгранного прямоугольного бруса при условии пластичности Мизеса, сжатого взаимно противоположными сближающимися шероховатыми и гладкими плитами. Им же [17] решена осесимметричной задачи о сжатии пластической среды шероховатым расширяющимся цилиндром, а позже [18; 19] полученное решение обобщено на случай сдавливания цилиндрического слоя при наличии вращения плит при условии пластичности Мизеса и Треска. В работе [20] предложен ряд обобщений решения Прандтля о пластическом течении материала между шероховатыми параллельными сближающимися плитами. Д. Д. Ивлев и А. В. Романов [21] рассмотрели обобщение решения Прандтля о сжатии слоя из идеального жесткопластического материала параллельными шероховатыми плитами в сферической системе координат. Пространственное напряженно-деформированное состояние при сжатии исследовано в [22]. В работах [23; 24] рассмотрены неавтомодельные решения теории идеальной пластичности в декартовой и цилиндрической системах координат, обобщающие ранее известные решения. Совместно с А. В. Романовым и Л. В. Ершовым [25] Д. Д. Ивлевым рассмотрены обобщения решения Прандтля для сферического деформированного состояния, а также для случая анизотропной среды. Получено, что решение для сферического деформированного состояния содержит, в частности, решение Прандтля для параллельных и изогнутых плит в случае плоской деформации. В работе [26] определены компоненты напряжения для среды, свойства которой зависят от среднего давления, а также получены компоненты тензора напряжения в декартовой, сферической, цилиндрической системах координат. Д. Д. Ивлев и Л. В. Ершов [27] методом малого параметра определили соотношения для плоских и осесимметричных задач теории идеальной пластичности и теории малых упругопластических деформаций. В соавторстве с И. П. Григорьевым [28] дано обобщение решений Прандтля и Гартмана на случай пространственного сжатия сжимаемого идеально пластического слоя жесткими шероховатыми плитами.

Р. Хиллом [29] предложено решение задачи о выдавливании стержня из пластического материала из шероховатой сжимающейся втулки.

Общие результаты в области построения точных решений теории пластичности были получены М. А. Задояном [30–38]. Им дан ряд важных и интересных точных решений теории идеальной пластичности в цилиндрических, сферических и декартовых координатах. В работе [31] дано общее решение для пространственного течения прямоугольной плиты при условии пластичности Мизеса. Этому решению соответствует, в частности, чистый изгиб прямоугольной плиты, пространственное течение пластического материала между шероховатыми плитами и т. д. Для случая цилиндрических координат аналогичные результаты получены в работах [30; 32]. Из решения, полученного в работе [30], как частный случай, следует известный случай плоской деформации пластической массы между наклонными шероховатыми плитами, исследованный А. Надаи, а также некоторые случаи пространственного течения пластического материала между наклонными жесткими плитами, когда они вращаются с данной скоростью вокруг линии пересечения контактных поверхностей. М. А. Задояном [38] рассмотрены течения идеальной жестко-пластической несжимаемой среды, имеющей форму конусообразного тела, при различных внешних воздействиях, причем задача об осесимметричном течении сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых описывают предельное состояние конической трубы под воздействием равномерно распределенных на внутренней и внешней поверхностях кольцевых касательных сил; нормальных и кольцевых касательных сил; нормальных и продольных касательных сил; исследуются совместный изгиб и растяжение конического листа. Им [36; 39] получено решение плоской динамической задачи теории пластичности при условии степенного упрочнения. Упругопластическое течение конусообразных тел исследуется в работе [37].

Решение задачи о сжатии тонкой идеальной упругопластической полосы между жесткими плитами в условиях плоской деформации привел Е. М. Третьяков в работах [40–42]; там определены напряжения и деформации в упругих и пластических слоях; по теореме о разгрузке найдены остаточные напряжения в тонком слое, а в работе [43] определено изменение толщины полосы при ее упругой разгрузке. Когда упругая зона становится пластической, полученное решение переходит в классическое решение Прандтля. Е. М. Третьяков и С. А. Еленев [44; 45] дали решения о пластическом сжатии тонкой полосы при

степенном упрочнении. Решение задачи об упругопластическом сжатии тонкой упрочняющейся полосы при наличии площадки текучести [46] осуществляется при помощи стыковки решения на основе условия непрерывности напряжений и перемещений при переходе через границу раздела упругой и пластической областей. Получены формулы для напряжений и деформаций, построены эпюры остаточных напряжений.

В. В. Дудукаленко [47] рассмотрел линеаризованные соотношения теории плоской деформации анизотропно упрочняющегося материала для случая малых деформаций, на основе которых получено обобщение решения Прандтля о сжатии полосы жесткими шероховатыми плитами.

Г. А. Гениев и В. С. Лейтес [48] исследовали пространственные, осесимметричные и плоские задачи для идеально пластических, сыпучих тел и бетона. Ими приведены решения ряда конкретных задач, имеющих инженерное приложение.

И. А. Кийко [49–51] произвел анализ процессов течения пластического материала по упруго деформируемым поверхностям. Им решена задача о сжатии слоя пластического материала двумя упругими поверхностями, которые, сближаясь, заставляют слой растекаться, а также решена прямая задача, когда поверхности заданы и требуется аналитически определить распределение давления в слое и перемещения в одномерном и осесимметричном случаях. В работе [52] рассмотрено обобщение краевой задачи течения тонкого пластического слоя с учетом упругих деформаций плит. Для случая, когда толщина слоя является функцией координат и времени им [53] было выведено эволюционное уравнение границы и представлены некоторые классы решений подобия этого уравнения. Совместно с В. А. Кадымовым [54] И. А. Кийко исследовано сжатие трехслойной полосы (с симметричным расположением слоев) при условии полного контакта на границах слоев и сжатие полосы с учетом сил инерции.

Р. И. Непершин [55] дал численное решение задачи о сжатии диска между параллельными плитами. Численные решения о сжатии полосы при различных соотношениях длины и толщины были выполнены В. В. Соколовским [56]

А. Ю. Ишлинский [57; 58] исследовал течение вязкопластических тел при малых возмущениях границы.

С. И. Сенашов [59–65] рассмотрел групповую классификацию уравнений теории идеальной пластичности общего вида, а также дал некоторые точные

решения пространственных задач пластического течения неоднородных и анизотропных сред.

Отметим также решения Н. А. Матченко [66; 67] о плоском течении ортотропной полосы, сжатой шероховатыми плитами и о пластическом течении бруса из ортотропного материала, сжимаемого шероховатыми и гладкими плитами.

Модификация решения Прандтля, учитывающая тот факт, что коэффициенты сцепления слоя с каждой из плит могут отличаться друг от друга приведена в работе С. С. Григоряна [68]

А. В. Романов [69; 70] исследовал точные аналитические частные решения теории идеальной пластичности в декартовой и сферической системах координат.

В работе Д. В. Тарлаковского [71] предложена обобщенная модель динамики тонких оболочек постоянной толщины, учитывающая поворот и обжатие нормального к срединной поверхности оболочки волокна.

А. А. Целистова [72] исследовала процесс прессования идеально-пластического сжимаемого слоя параллельными шероховатыми плитами в плоском и пространственном случаях. Е. А. Целистова [73] рассмотрела задачи о сдавливании плоского и пространственного слоя шероховатыми плитами для неоднородного материала, когда свойства материала меняются вдоль по длине плиты. Л. А. Максимова [74] рассмотрела задачу о сдавливании пространственного слоя шероховатыми плитами, в случае, когда результирующее касательное усилие направлено неколлинеарно. Ею установлена зависимость между величиной сдавливающего давления и величиной угла между направлениями результирующих касательных усилий на поверхностях слоя.

Д. В. Георгиевским, посредством асимптотического анализа с малым геометрическим параметром, было получено точное (в смысле конечности ненулевых членов рядов) решение [75] задачи Прандтля, совпадающее с обобщенным решением Прандтля на случай произвольного коэффициента шероховатости плит, без использования дополнительных гипотез. На основе данного метода были произведены обобщения на случаи сжатия круглого тонкого слоя [76], сжатия цилиндрического слоя [77] и сжатия сферического слоя при наличии стока [78]. Совместно с В. С. Юшутиным [79] исследовано течение вязкопластического слоя между сближающимися плитами. Рассмотрена классическая задача

Прандтля в динамической постановке [80], а также её обобщение, учитывающее ускоренное движение плит [81].

В работе А. В. Звягина [82] исследуется один из процессов формообразования в металлообработке: штамповка взрывом. На основе численных методов им проведен анализ необходимой толщины слоя взрывчатого вещества для осуществления штамповки тонкого круглого металлического листа.

М. А. Бодунов, Д. М. Бодунов и И. В. Бородин [83] представили исследование задачи о течении тонкого слоя по поверхности, ограничивающей упругое полупространство, сформулированной в рамках обобщенной теории течения в тонком слое.

Имеются многочисленные обобщения решения Прандтля, собранные в монографиях и учебниках по идеальной пластичности [4; 29; 39; 56; 84—104]

Целью данной работы является исследование течения тонких пластических слоев различных форм в процессах прессования между сближающимися поверхностями при влиянии инерционных эффектов и получение приближенных аналитических выражений для определения полей напряжений и скоростей перемещений.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. На основе метода асимптотического интегрирования провести аналитическое моделирование динамических процессов сдвливания круглого, цилиндрического и сферического идеально жесткопластических слоев.
2. На основе метода асимптотического интегрирования провести аналитическое моделирование динамического процесса сдвливания плоского вязкопластического слоя.
3. Выявить связь между характером внутренних силовых факторов и временной стадией процесса прессования.

Научная новизна:

1. Получены приближенные аналитические решения задач в динамической постановке о прессовании тонких жесткопластических слоев различной формы: круглого, цилиндрического и сферического.
2. Получено приближенное аналитическое решение динамической задачи прессования тонкого вязкопластического слоя.
3. Для рассмотренных задач аналитически подтверждено положение из теории обработки металлов давлением о качественном изменении эпо-

ры давления на динамических стадиях и следующего отсюда изменения суммарной силы, необходимой для осуществления процесса.

Практическая значимость результатов диссертации лежит в области теории и практики расчета технологических процессов обработки материалов давлением. На их основе могут быть рассчитаны как силовые факторы, необходимые для осуществления процесса прессования, так и механические характеристики сжимающих поверхностей. Данные результаты могут найти эффективное применение в научно-исследовательских организациях и конструкторских бюро, специализирующихся на проектировании и расчетах соответствующих технологических процессов, а также могут быть включены в программы спецкурсов для студентов механико-математических факультетов высших учебных заведений.

Методология и методы исследования. В диссертации используются основные положения математической теории пластического течения несжимаемого материала, методы уравнений математической физики, асимптотические методы разложения по малому параметру, а также классические принципы механики деформируемого твердого тела.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Независимо от малости постоянной скорости сближения жестких поверхностей наступает момент времени, когда динамические слагаемые становятся того же порядка, что и слагаемые, связанные с градиентом напряжений.
2. Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования в тонкослойных пластических течениях на каждом временном интервале обусловлен соотношением двух малых безразмерных параметров: постоянной величины, равной обратному числу Эйлера, и меняющегося со временем отношения толщины слоя к его длине по простиранию.
3. В каждой из рассмотренных задач прослеживается два временных этапа: переход от квазистатического к динамическому деформированию и развитое динамическое деформирование вплоть до момента схлопывания, который не входит в область рассмотрения.
4. Анализ напряженно деформированного состояния во всех рассмотренных задачах показывает, что учет динамических слагаемых в уравнениях движения ведет к качественному изменению картины давления и его росту в середине слоя по простиранию, что приводит к

увеличению суммарной силы, необходимой для технологического осуществления процесса.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью постановки краевых задач, основана на использовании строгих математических методов исследования, апробированных моделей механического поведения тел. Результаты соответствуют результатам, полученным другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Всероссийская научно-техническая конференция «Студенческая весна» в МГТУ им. Н. Э. Баумана (2017 г.)
2. Гагаринские чтения – 2018: XLIV Международная молодежная научная конференция (2018 г.)
3. Научно-исследовательский семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д. В. Георгиевского, д.ф.-м.н., проф. М. В. Шамолина, д.ф.-м.н., проф. С. А. Агафонова (2018 г.)
4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019», «Ломоносов-2021» (2019, 2021 г.г.)
5. Научная конференция «Ломоносовские чтения» (2021 г.)
6. VI Зимняя научная школа-конференция по механике композитов имени Б. Е. Победри (2021 г.)
7. Аспирантский семинар и научно-исследовательский семинар имени А. А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д. В. Георгиевского (2017 – 2021 г.г.)
8. Аспирантский семинар имени Б. Е. Победри кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. В. И. Горбачева (2021 г.)
9. Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф., члена-корр. РАН Е. В. Ломакина (2021 г.)
10. Научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

под руководством д.ф.-м.н., проф., академика РАН Р.И. Нигматулина (2021 г.)

Личный вклад. Теоретические результаты, связанные с учетом перехода от квазистатики к динамике и анализом развитого процесса динамического деформирования, были получены соискателем самостоятельно.

Научный руководитель, доктор физико-математических наук Д.В. Георгиевский, предложил постановки задач и обосновал применение метода асимптотического разложения по малому параметру в рассмотренных в диссертации задачах.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, 3 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в международных базах Scopus, Web of Science и RSCI.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 100 страниц, включая 11 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 108 наименований.

Глава 1. Сдавливание круглого идеально жесткопластического слоя

При пластической деформации тонких заготовок в процессах прессования возникает потребность получения изделий заданной точности. Существенное влияние на конечную геометрию детали оказывает деформируемость сдавливающих поверхностей. Вследствие значительных нагрузок на инструмент деформация последнего может оказаться соизмерима с толщиной обрабатываемого слоя. Этим обуславливается важность получения полей распределения силовых факторов в зоне контакта. Для случая сжатия плоской полосы, модельной задачей является классическая задача Прандтля [3]. Её осесимметричным аналогом является задача о сдавливании идеально жесткопластического круглого слоя [76]. В данной постановке задачи исследуется влияние динамических эффектов в процессе формирования изделия методом прессования. Материалы главы содержатся в публикации [105].

1.1 Постановка задачи и асимптотические разложения

Пренебрегая начальными упругими деформациями, вязкостью и незначительным упрочнением, материал, имеющий плотность ρ , полагается несжимаемым идеально жесткопластическим, удовлетворяющим тензорно линейным определяющим соотношениям и скалярному определяющему соотношению – квадратичному критерию Мизеса-Генки $\sigma_u = \sigma_s$, где $\sigma_u = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}}$ – интенсивность напряжения, \underline{s} – девиатор напряжения, σ_s – предел текучести.

Пусть течение происходит в области

$$\Omega_t = \{0 \leq r \leq R(t), -h(t) \leq z \leq h(t), 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad (1.1)$$

с границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, причем $h(t) \ll R(t)$ для любого $t \geq 0$. В начальный момент времени область, занятая материалом, имела вид

$$\Omega_0 = \{0 \leq r \leq R_0, -h_0 \leq z \leq h_0, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad \partial\Omega_0 = \Gamma_0 \quad (1.2)$$

поэтому в силу несжимаемости $R^2 h = R_0^2 h_0$.

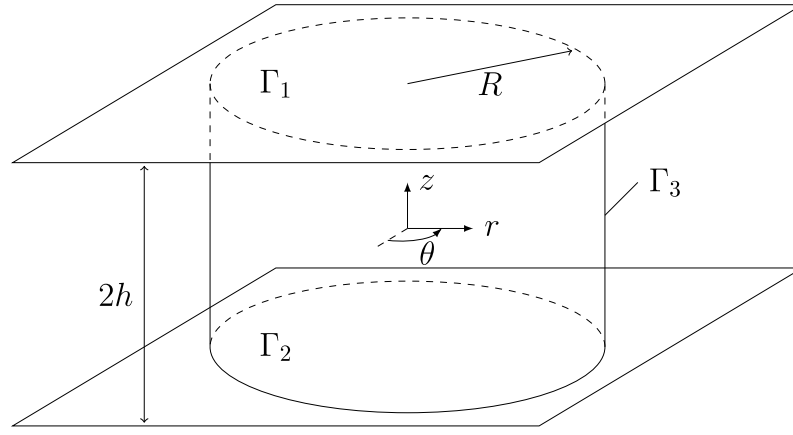


Рисунок 1.1 – Деформируемый круглый слой

Взаимную скорость сближения плит обозначим $2V$, поэтому кинематическое условие непротекания сквозь границы Γ_1 и Γ_2 имеет вид

$$v_z|_{z=\pm h} = \mp V \quad (1.3)$$

Касательная составляющая скорости (в данном случае v_r) на указанных границах идеальной среды, как известно, не задаётся.

В некоторый момент времени $0 < t < h_0/V = t_*$, где t_* – момент схлопывания слоя, относительно шести функций – независимых компонент девиатора напряжений s_{rr} , s_{rz} и $s_{\theta\theta}$, давления p и компонент скорости v_r и v_z – должна выполняться замкнутая система уравнений динамической теории идеальной пластичности для цилиндрических координат:

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + s_{rz,z} + \frac{s_{rr} - s_{\theta\theta}}{r} = \rho (v_{r;t} + v_r v_{r,r} + v_z v_{r,z}) \quad (1.4)$$

$$-p_{,z} + s_{rz,r} + \frac{s_{rz}}{r} - (s_{rr} + s_{\theta\theta})_{,z} = \rho (v_{z;t} + v_r v_{z,r} + v_z v_{z,z}) \quad (1.5)$$

$$s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{rr}s_{\theta\theta} + s_{rz}^2 = \tau_s^2 \quad (1.6)$$

$$s_{rr} \frac{v_r}{r} = s_{\theta\theta} v_{r,r} \quad (1.7)$$

$$s_{rr}(v_{r,z} + v_{z,r}) = 2s_{rz}v_{r,r} \quad (1.8)$$

$$v_{r,r} + \frac{v_r}{r} + v_{z,z} = 0 \quad (1.9)$$

Кроме выполнения условия (1.3) на жестких контактирующих поверхностях потребуем, что бы модуль касательного напряжения s_{rz} достигал на границах Γ_1 и Γ_2 своего максимального значения:

$$|s_{rz}|_{z=\pm h} = m(r)\tau_s, \quad 0 < m \leq 1, \quad (1.10)$$

где m – функция, удовлетворяющая уравнению первого порядка с разделяющимися переменными [76]:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{m}{2r} \left(1 + \frac{m\sqrt{1-m^2}}{\arcsin m} \right) \quad (1.11)$$

Из (1.11) видно, что функция m не может быть тождественно равна отличной от нуля константе. Это существенно усложняет и отличает настоящее решение от соответствующего решения классической задачи Прандтля, в постановке которой $m = \pm m_0$, где параметр m_0 имеет смысл коэффициента шероховатости плит.

В реальном процессе сжатия слоя граница Γ_3 , естественно, свободна от напряжений, однако в математической постановке рассматриваемой здесь краевой задачи в её классическом варианте данное условие не ставится. Поэтому других, помимо (1.3) и (1.10), граничных условий в задаче не предполагается, а область вблизи границы Γ_3 (на расстояниях порядка h) трактуется как зона краевого эффекта.

Введем малый параметр $\alpha = \frac{h(t)}{R(t)} \ll 1$ и проведем разложение всех неизвестных величин, входящих в систему уравнений (1.4) – (1.9), в ряды по целым степеням параметра:

$$v_r(r, z, t) = V \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}}, \quad N \geq 1 \quad (1.12)$$

$$v_z(r, z, t) = V \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_z^{\{k\}} \quad (1.13)$$

$$s_{ij}(r, z, t) = \tau_s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{ij}^{\{k\}}, \quad (ij) \in \{rr, rz, \theta\theta\} \quad (1.14)$$

$$p(r, z, t) = \tau_s \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^k p^{\{k\}}, \quad M \geq 1 \quad (1.15)$$

Коэффициенты рядов (1.12) – (1.15) – безразмерны и являются функциями безразмерных координат ρ, ξ, τ

$$\rho = \frac{r}{R} = \frac{\alpha r}{h}, \quad \xi = \frac{z}{h}, \quad \tau = V \frac{t}{h} \quad (1.16)$$

Наличие в (1.12) – (1.15) членов $\alpha^{-n} v_r^{\{-n\}}$ и $\alpha^{-m} p^{\{-m\}}$ обусловлено стремлением v_r и p к бесконечности, при $\alpha \rightarrow 0$, что ясно из физических соображений. Обратимся к геометрическому условию несжимаемости и выразим малый параметр и координаты (1.16) как эволюционные функции:

$$(R^2 h) \cdot = 0, \quad \dot{R} = -\dot{h} \frac{R}{2h} = V \frac{R}{2h}$$

$$\dot{\alpha} = \left(\frac{h}{R} \right) \cdot = \frac{\dot{h}R - h\dot{R}}{h^2} = -\frac{3V}{2h} \alpha \quad (1.17)$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\alpha r}{h} \right) \cdot = r \frac{\dot{\alpha} h - \alpha \dot{h}}{h^2} = -\frac{V}{2h} \rho \quad (1.18)$$

$$\dot{\xi} = \left(\frac{z}{h} \right) \cdot = -\frac{z\dot{h}}{h^2} = \frac{V}{h} \xi \quad (1.19)$$

$$\dot{\tau} = \left(V \frac{t}{h} \right) \cdot = V \frac{h - t\dot{h}}{h^2} = \frac{V}{h} (1 + \tau) \quad (1.20)$$

Подставляя выражения (1.12) – (1.15) в систему (1.4) – (1.9) и учитывая, что полная производная по времени представляется в виде

$$\{u_{i;t}\} = \{u_{i,\rho}\} \dot{\rho} + \{u_{i,\xi}\} \dot{\xi} + \{u_{i,\tau}\} \dot{\tau}$$

получим следующую систему:

$$- \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^{k+1} \{p_{,\rho}\}^{[k]} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(\alpha \{s_{rr,\rho}\}^{[k]} + \{s_{rz,\xi}\}^{[k]} + \frac{\alpha}{\rho} \left(\{s_{rr}\}^{[k]} - \{s_{\theta\theta}\}^{[k]} \right) \right) =$$

$$= \frac{\rho V^2}{\tau_s} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \left(-\{v_{r,\rho}\}^{[k]} \frac{\rho}{2} + \{v_{r,\xi}\}^{[k]} \xi + \{v_{r,\tau}\}^{[k]} (1 + \tau) - \frac{3k}{2} \{v_r\}^{[k]} \right) + \right. \quad (1.21)$$

$$\left. + \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \{v_r\}^{[k]} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^{k+1} \{v_{r,\rho}\}^{[k]} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_z\}^{[k]} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \{v_{r,\xi}\}^{[k]} \right)$$

$$- \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^k \{p_{,\xi}\}^{[k]} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(\alpha \{s_{rz,\rho}\}^{[k]} + \frac{\alpha}{\rho} \{s_{rz}\}^{[k]} - \left(\{s_{rr,\xi}\}^{[k]} + \{s_{\theta\theta,\xi}\}^{[k]} \right) \right) =$$

$$= \frac{\rho V^2}{\tau_s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(-\{v_{z,\rho}\}^{[k]} \frac{\rho}{2} + \{v_{z,\xi}\}^{[k]} \xi + \{v_{z,\tau}\}^{[k]} (1 + \tau) - \frac{3k}{2} \{v_z\}^{[k]} \right) + \right. \quad (1.22)$$

$$\left. + \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \{v_r\}^{[k]} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} \{v_{z,\rho}\}^{[k]} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_z\}^{[k]} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_{z,\xi}\}^{[k]} \right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{s_{rr}\}^{[k]} \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{s_{\theta\theta}\}^{[k]} \right) + \quad (1.23)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{s_{rr}\}^{[k]} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{s_{\theta\theta}\}^{[k]} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{s_{rz}\}^{[k]} \right)^2 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{s_{rr}\}^{[k]} \frac{\alpha}{\rho} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \{v_r\}^{[k]} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{s_{\theta\theta}\}^{[k]} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^{k+1} \{v_{r,\rho}\}^{[k]} \quad (1.24)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{rr}\}^{(k)} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \{v_{r,\xi}\}^{(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} \{v_{z,\rho}\}^{(k)} \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{rz}\}^{(k)} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^{k+1} \{v_{r,\rho}\}^{(k)} \quad (1.25)$$

$$\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^{k+1} \{v_{r,\rho}\}^{(k)} + \frac{\alpha}{\rho} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \{v_r\}^{(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_{z,\xi}\}^{(k)} = 0 \quad (1.26)$$

Возникший в правой части уравнений (1.21) и (1.22) коэффициент равен обратному числу Эйлера

$$Eu^{-1} = \frac{\varrho V^2}{\tau_s}.$$

Данная величина мала и как видно из её определения фиксирована. По сравнению с ней порядок малости $\alpha(t)$ при течении времени от 0 до t_* растёт до бесконечности. Это позволяет записать

$$Eu^{-1} = O(\alpha^\beta(t)), \text{ причем } \beta \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_*$$

Применительно к динамическому анализу интерес представляет $0 < \beta \leq 2$. Отыскание решений проведем для целочисленных значений входящих в этот диапазон.

Обратимся к системе двух последних уравнений (1.25) и (1.26). Из (1.25) сразу следует, что $\{v_{r,\xi}\}^{(-N)} = 0$, а решая дифференциальное уравнение (1.26) и требуя конечности членов разложения, получаем, что $\{v_r\}^{(-N)} = 0$. Аналогичные рассуждения применимы последовательно для $\{v_r\}^{(-N+1)}$, затем $\{v_r\}^{(-N+2)}$ и далее вплоть до $\{v_r\}^{(-2)}$. Учитывая, что первый ненулевой член радиальной компоненты скорости $\{v_r\}^{(-1)}$, и принимая, что $\beta \geq 1$ определим из уравнений (1.21) и (1.22) порядок малости для функции давления p . Для $M \geq 2$ имеем:

$$\{p_{,\rho}\}^{(-M)} = 0, \quad \{p_{,\xi}\}^{(-M)} = 0 \text{ и, следовательно, } p = p_0(\tau)$$

Здесь p_0 – гидростатическая постоянная, не дающая вклад в уравнение движения и однозначно определяемая заданием внешнего давления. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что $M = 1$.

Аналогично (1.11) введем коэффициент шероховатости поверхности, зависящий от безразмерного радиуса:

$$\mu(\rho) = m(r/R), \quad \frac{d\mu}{d\rho} = \frac{\mu}{2\rho} \left(1 + \frac{\mu\sqrt{1-\mu^2}}{\arcsin \mu} \right) \quad (1.27)$$

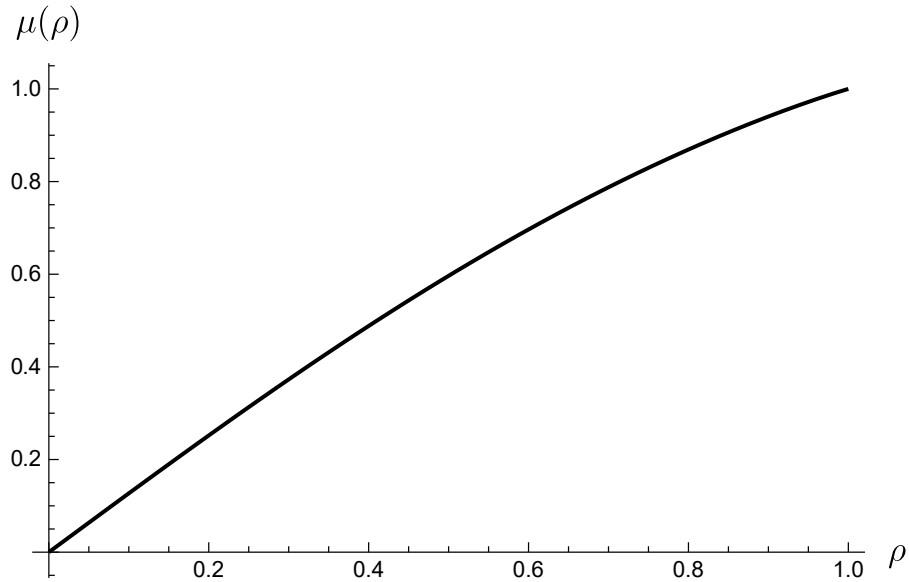


Рисунок 1.2 — Вид функции $\mu(\rho)$, при $\mu(1) = 1$

Вообще говоря, уравнение (1.27) определяет функцию $\mu(\rho)$ с точностью до умножения на константу. Её график, при условии $\mu(1) = 1$, приведен на рисунке ниже:

Вид функции $\mu(\rho)$ при другом граничном условии на правом конце может быть получен масштабированием по оси ρ .

1.2 Построение решения

1.2.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 2$, который соответствует моменту перехода от квазистатического к динамическому режиму деформирования.

Положим $\text{Eu}^{-1} = C_2 \alpha^2$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы (1.21) – (1.26) при a^{-1} и α^0 :

$$-p_{,\xi}^{\{-1\}} = 0 \quad (1.28)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{r,\xi}^{\{-1\}} = 0 \quad (1.29)$$

$$-p_{,\rho}^{\{-1\}} + s_{rz,\xi}^{\{0\}} = 0 \quad (1.30)$$

$$-p_{,\xi}^{\{0\}} - s_{rr,\xi}^{\{0\}} - s_{\theta\theta,\xi}^{\{0\}} = 0 \quad (1.31)$$

$$\left(\begin{matrix} \{0\} \\ s_{rr} \end{matrix} \right)^2 + \left(\begin{matrix} \{0\} \\ s_{\theta\theta} \end{matrix} \right)^2 + s_{rr} \begin{matrix} \{0\} \\ s_{\theta\theta} \end{matrix} + \left(\begin{matrix} \{0\} \\ s_{rz} \end{matrix} \right)^2 = 1 \quad (1.32)$$

$$\begin{matrix} \{0\} \\ s_{rr} \end{matrix} \begin{matrix} \{-1\} \\ v_r/\rho \end{matrix} = \begin{matrix} \{0\} \\ s_{\theta\theta} \end{matrix} \begin{matrix} \{-1\} \\ v_{r,\rho} \end{matrix} \quad (1.33)$$

$$\begin{matrix} \{0\} \\ s_{rr} \end{matrix} \begin{matrix} \{0\} \\ v_{r,\xi} \end{matrix} = 2 \begin{matrix} \{0\} \\ s_{rz} \end{matrix} \begin{matrix} \{-1\} \\ v_{r,\rho} \end{matrix} \quad (1.34)$$

$$\begin{matrix} \{-1\} \\ v_{r,\rho} \end{matrix} + \begin{matrix} \{-1\} \\ v_r/\rho \end{matrix} + \begin{matrix} \{0\} \\ v_{z,\xi} \end{matrix} = 0 \quad (1.35)$$

Граничные условия (1.3) и (1.10) при этом примут вид

$$\begin{matrix} \{0\} \\ v_z \end{matrix} \Big|_{\xi=\pm 1} = \mp 1, \quad \begin{matrix} \{0\} \\ s_{rz} \end{matrix} \Big|_{\xi=\pm 1} = \mu(\rho) \quad (1.36)$$

Из уравнений (1.28) и (1.29) вытекает

$$\begin{matrix} \{-1\} \\ p \end{matrix} = \begin{matrix} \{-1\} \\ f_p \end{matrix}(\rho, \tau), \quad \begin{matrix} \{-1\} \\ v_r \end{matrix} = \begin{matrix} \{-1\} \\ f_{v_r} \end{matrix}(\rho, \tau).$$

Подставив выражение $\begin{matrix} \{-1\} \\ v_r \end{matrix}$ в уравнение (1.35) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $\begin{matrix} \{0\} \\ v_z \end{matrix}$:

$$\begin{matrix} \{0\} \\ v_z \end{matrix} = \begin{matrix} \{0\} \\ f_{v_z} \end{matrix}(\rho, \tau) - \xi \left(\begin{matrix} \{-1\} \\ f_{v_{r,\rho}} \end{matrix} + \begin{matrix} \{-1\} \\ f_{v_r/\rho} \end{matrix} \right)$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (1.36) и использование их линейной комбинации позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{matrix} \{0\} \\ f_{v_z} \end{matrix} = 0$$

$$\begin{matrix} \{-1\} \\ f_{v_{r,\rho}} \end{matrix} + \begin{matrix} \{-1\} \\ f_{v_r/\rho} \end{matrix} = 0$$

Окончательно получаем

$$\begin{matrix} \{-1\} \\ v_r \end{matrix} = \begin{matrix} \{-1\} \\ f_{v_r} \end{matrix} = \rho/2 \quad (1.37)$$

$$\begin{matrix} \{0\} \\ v_z \end{matrix} = -\xi \quad (1.38)$$

Из уравнения (1.30) следует линейность функции $\begin{matrix} \{0\} \\ s_{rz} \end{matrix}$ по ξ , что в силу также естественно требуемой нечетности позволяет записать

$$\begin{matrix} \{0\} \\ s_{rz} \end{matrix} = K_{s_{rz}} \begin{matrix} \{0\} \\ \rho \end{matrix} \xi$$

Функцию $K_{s_{rz}} \begin{matrix} \{0\} \\ \rho \end{matrix}$ определим из силовых граничных условий (1.36):

$$\begin{matrix} \{0\} \\ K_{s_{rz}} \end{matrix} = -\hat{s}\mu(\rho), \quad \hat{s} = \pm 1$$

Таким образом получаем

$$\begin{aligned} s_{rz}^{\{0\}} &= -\mu \hat{s} \xi \\ p^{\{-1\}} = f_p^{\{-1\}} = g_p^{\{-1\}}(\tau) - \hat{s} \int_0^\rho \mu(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

В соответствии с физико-механическим смыслом процесса сжатия и растекания слоя сингулярная составляющая давления $p^{\{-1\}}$ максимальна в центре слоя, то есть в окрестности $\rho = 0$, и убывает до нуля вблизи границы $\rho = 1$. Данное обстоятельство позволяет определить, что $\hat{s} = 1$ и тогда окончательно имеем

$$s_{rz}^{\{0\}} = -\mu \xi \quad (1.39)$$

$$p^{\{-1\}} = g_p^{\{-1\}}(\tau) - \int_0^\rho \mu(\zeta) d\zeta = \int_\rho^1 \mu(\zeta) d\zeta + p_0^{\{-1\}}(\tau) \quad (1.40)$$

С учетом вышесказанного уравнение (1.33) даст равенство $s_{rr}^{\{0\}} = s_{\theta\theta}^{\{0\}}$ и тогда из условия пластичности (1.32) выразим

$$s_{rr}^{\{0\}} = s_{\theta\theta}^{\{0\}} = \sqrt{(1 - \mu^2 \xi^2)/3} \quad (1.41)$$

Подставив все найденные функции в (1.31) и (1.34) и решив дифференциальные уравнения найдем

$$p^{\{0\}} = f_p^{\{0\}}(\rho, \tau) - \frac{2}{3} \sqrt{3(1 - \mu^2 \xi^2)}, \quad v_r^{\{0\}} = f_{v_r}^{\{0\}}(\rho, \tau) + \frac{1}{\mu} \sqrt{3(1 - \mu^2 \xi^2)} \quad (1.42)$$

Для нахождения неизвестных функций $f_p^{\{0\}}$ и $f_{v_r}^{\{0\}}$ выпишем следующее по α приближение уравнений (1.21) и (1.26), а также граничные условия (1.3) и (1.10):

$$-p_{,\rho}^{\{0\}} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} + s_{rz,\xi}^{\{1\}} = C_2 (3\rho/4) \quad (1.43)$$

$$v_{r,\rho}^{\{0\}} + v_r^{\{0\}}/\rho + v_{z,\xi}^{\{1\}} = 0 \quad (1.44)$$

$$v_z^{\{1\}}|_{\xi=\pm 1} = 0, \quad s_{rz}^{\{1\}}|_{\xi=\pm 1} = 0 \quad (1.45)$$

Функция $v_z^{\{1\}}$ является непрерывной, поэтому имеет место равенство

$$\begin{aligned} 0 &= v_z^{\{1\}}|_{\xi=1} - v_z^{\{1\}}|_{\xi=-1} = \int_{-1}^1 v_{z,\xi}^{\{1\}} d\xi = - \int_{-1}^1 \left(v_{r,\rho}^{\{0\}} + v_r^{\{0\}}/\rho \right) d\xi = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\mu^2 \rho} \left(\mu \sqrt{1 - \mu^2} + \left(1 - \frac{2\mu'}{\mu} \right) \arcsin \mu \right) + 2f_{v_r}^{\{0\}}/\rho + 2f_{v_r,\rho}^{\{0\}} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Решая данное дифференциальное уравнение, подставив μ' из (1.27), получим выражение для $f_{v_r}^{\{0\}}$:

$$f_{v_r}^{\{0\}} = g_{v_r}^{\{0\}}(\tau)/\rho, \quad (1.47)$$

причем с учетом требования конечности членов ряда, следует положить $g_{v_r}^{\{0\}} = 0$.

Аналогичные операции проведем над функцией $s_{rz}^{\{1\}}$:

$$\begin{aligned} 0 = s_{rz}^{\{1\}}|_{\xi=1} - s_{rz}^{\{1\}}|_{\xi=-1} &= \int_{-1}^1 s_{rz,\xi}^{\{1\}} d\xi = - \int_{-1}^1 \left(p_{,\rho}^{\{0\}} - s_{rr,\rho}^{\{0\}} + 3C_2\rho/4 \right) d\xi = \\ &= 2 \left(f_{p,\rho}^{\{0\}} + 3C_2\rho/4 \right) - \frac{d}{d\rho} \int_{-1}^1 s_{rr}^{\{0\}} d\xi \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$f_p^{\{0\}} = -\frac{3}{8}C_2\rho^2 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s_{rr}^{\{0\}} d\xi + g_p^{\{0\}}(\tau) = \frac{3}{8}C_2(1 - \rho^2) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s_{rr}^{\{0\}} d\xi + p_0^{\{0\}}(\tau) \quad (1.49)$$

1.2.2 Развитый процесс динамического деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 1$, который соответствует моменту с сильным влиянием динамики в процессе сдавливания слоя.

Положим $Eu^{-1} = C_1\alpha$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы (1.21) – (1.26) при a^{-1} и α^0 :

$$-p_{,\xi}^{\{-1\}} = 0 \quad (1.50)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{r,\xi}^{\{-1\}} = 0 \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} -p_{,\rho}^{\{-1\}} + s_{rz,\xi}^{\{0\}} &= C_1 \left(-\frac{\rho}{2} v_{r,\rho}^{\{-1\}} + \xi v_{r,\xi}^{\{-1\}} + (1 + \tau) v_{r,\tau}^{\{-1\}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} v_r^{\{-1\}} + v_r^{\{-1\}} v_{r,\rho}^{\{-1\}} + v_z^{\{0\}} v_{r,\xi}^{\{-1\}} \right) \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$-p_{,\xi}^{\{0\}} - s_{rr,\xi}^{\{0\}} - s_{\theta\theta,\xi}^{\{0\}} = 0 \quad (1.53)$$

$$\left(s_{rr}^{\{0\}} \right)^2 + \left(s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right)^2 + s_{rr}^{\{0\}} s_{\theta\theta}^{\{0\}} + \left(s_{rz}^{\{0\}} \right)^2 = 1 \quad (1.54)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_r^{\{-1\}}/\rho = s_{\theta\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{-1\}} \quad (1.55)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{r,\xi}^{\{0\}} = 2 s_{rz}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{-1\}} \quad (1.56)$$

$$v_{r,\rho}^{\{-1\}} + v_r^{\{-1\}}/\rho + v_{z,\xi}^{\{0\}} = 0 \quad (1.57)$$

Как и в предыдущем пункте граничные условия (1.3) и (1.10) примут вид

$$v_z^{\{0\}}|_{\xi=\pm 1} = \mp 1, \quad |s_{rz}|_{\xi=\pm 1} = \mu \quad (1.58)$$

Из уравнений (1.50) и (1.51) вытекает

$$\overset{\{-1\}}{p} = \overset{\{-1\}}{f_p}(\rho, \tau), \quad \overset{\{-1\}}{v_r} = \overset{\{-1\}}{f_{v_r}}(\rho, \tau).$$

Подставив выражение $\overset{\{-1\}}{v_r}$ в уравнение (1.57) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $\overset{\{0\}}{v_z}$:

$$\overset{\{0\}}{v_z} = \overset{\{0\}}{f_{v_z}}(\rho, \tau) - \xi \left(\overset{\{-1\}}{f_{v_r, \rho}} + \overset{\{-1\}}{f_{v_r}}/\rho \right)$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (1.58) и использование их линейной комбинации позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned} \overset{\{0\}}{f_{v_z}} &= 0 \\ \overset{\{-1\}}{f_{v_r, \rho}} + \overset{\{-1\}}{f_{v_r}}/\rho &= 0 \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\overset{\{-1\}}{v_r} = \overset{\{-1\}}{f_{v_r}} = \rho/2 \quad (1.59)$$

$$\overset{\{0\}}{v_z} = -\xi \quad (1.60)$$

С учетом (1.59) уравнение (1.52) примет вид

$$-\overset{\{-1\}}{p}_{, \rho} + \overset{\{0\}}{s_{rz, \xi}} = C_1 (3\rho/4)$$

Решая его относительно $\overset{\{0\}}{s_{rz}}$ и используя силовые граничные условия (1.58) приходим к

$$\begin{aligned} \overset{\{0\}}{s_{rz}} &= 3C_1 \xi \rho/4 + \xi \overset{\{-1\}}{f_{p, \rho}} + \overset{\{0\}}{f_{s_{rz}}}(\rho, \tau) \\ \overset{\{0\}}{f_{s_{rz}}} &= 0 \\ 3C_1 \rho/4 + \overset{\{-1\}}{f_{p, \rho}} &= -2\mu \hat{s}, \quad \hat{s} = \pm 1 \\ \overset{\{-1\}}{p} = \overset{\{-1\}}{f_p} &= -\frac{3}{8}C_1 \rho^2 + \overset{\{-1\}}{g_p}(\tau) - \hat{s} \int_0^\rho \mu(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

В силу тех же рассуждений, что приводились в 1.2.1 следует положить $\hat{s} = 1$. Тогда найденные функции можно записать в следующем виде:

$$\overset{\{0\}}{s_{rz}} = -\mu \xi \quad (1.61)$$

$$\overset{\{-1\}}{p} = -\frac{3}{8}C_1 \rho^2 + \overset{\{-1\}}{g_p}(\tau) - \int_0^\rho \mu(\zeta) d\zeta = \frac{3}{8}C_1 (1 - \rho^2) + \int_\rho^1 \mu(\zeta) d\zeta + \overset{\{-1\}}{p_0}(\tau) \quad (1.62)$$

С учетом вышесказанного уравнение (1.55) даст равенство $s_{rr}^{\{0\}} = s_{\theta\theta}^{\{0\}}$ и тогда из условия пластичности (1.54) выразим

$$s_{rr}^{\{0\}} = s_{\theta\theta}^{\{0\}} = \sqrt{(1 - \mu^2 \xi^2) / 3} \quad (1.63)$$

Подставив все найденные функции в (1.53) и (1.56) и решив дифференциальные уравнения найдем

$$p = f_p(\rho, \tau) - \frac{2}{3} \sqrt{3(1 - \mu^2 \xi^2)}, \quad v_r = f_{v_r}(\rho, \tau) + \frac{1}{\mu} \sqrt{3(1 - \mu^2 \xi^2)} \quad (1.64)$$

Для нахождения неизвестных функций f_p и f_{v_r} выпишем следующее по α приближение уравнений (1.21) и (1.26), а также граничные условия (1.3) и (1.10):

$$-p_{,\rho} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} + s_{rz,\xi}^{\{1\}} = C_1 \left(v_r/2 + (1 + \tau) v_{r,\tau}^{\{0\}} \right) \quad (1.65)$$

$$v_{r,\rho} + v_r/\rho + v_{z,\xi}^{\{0\}} = 0 \quad (1.66)$$

$$v_z|_{\xi=\pm 1}^{\{1\}} = 0, \quad |s_{rz}|_{\xi=\pm 1}^{\{1\}} = 0 \quad (1.67)$$

Функция $v_z^{\{1\}}$ является непрерывной, поэтому имеет место равенство

$$\begin{aligned} 0 &= v_z|_{\xi=1}^{\{1\}} - v_z|_{\xi=-1}^{\{1\}} = \int_{-1}^1 v_{z,\xi}^{\{1\}} d\xi = - \int_{-1}^1 \left(v_{r,\rho} + v_r/\rho \right) d\xi = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\mu^2 \rho} \left(\mu \sqrt{1 - \mu^2} + \left(1 - \frac{2\mu'}{\mu} \right) \arcsin \mu \right) + 2f_{v_r}/\rho + 2f_{v_r,\rho}^{\{0\}} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Решая данное дифференциальное уравнение, подставив μ' из (1.27), получим выражение для $f_{v_r}^{\{0\}}$:

$$f_{v_r}^{\{0\}} = g_{v_r}^{\{0\}}(\tau)/\rho, \quad (1.69)$$

причем с учетом требования конечности членов ряда, следует положить $g_{v_r}^{\{0\}} = 0$. Аналогичные операции проведем над функцией $s_{rz}^{\{1\}}$:

$$\begin{aligned} 0 &= s_{rz}|_{\xi=1}^{\{1\}} - s_{rz}|_{\xi=-1}^{\{1\}} = \int_{-1}^1 s_{rz,\xi}^{\{1\}} d\xi = - \int_{-1}^1 \left(p_{,\rho} - s_{rr,\rho}^{\{0\}} + C_1 v_r/2 \right) d\xi = \\ &= 2f_{p,\rho}^{\{0\}} + C_1 \int_{-1}^1 v_r^{\{0\}} d\xi - \frac{d}{d\rho} \int_{-1}^1 s_{rr}^{\{0\}} d\xi \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$f_p^{\{0\}} = -C_1 \int \left(\int_{-1}^1 v_r^{\{0\}} d\xi \right) d\rho + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s_{rr}^{\{0\}} d\xi + g_p^{\{0\}}(\tau) \quad (1.71)$$

Выражение $\int \left(\int_{-1}^1 \overset{\{0\}}{v}_r d\xi \right) d\rho$ может быть вычислено только при задании функции $\mu(\rho)$. Однако возможно упрощение данного выражения:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \overset{\{0\}}{v}_r d\xi &= \frac{\sqrt{3} \arcsin \mu}{\mu^2} \left(1 + \frac{\mu \sqrt{1 - \mu^2}}{\arcsin \mu} \right) = \frac{\sqrt{3} \arcsin \mu}{\mu^2} \frac{2\rho}{\mu} \mu' = f(\rho) \\ \int f d\rho &= \int \frac{\sqrt{3} \arcsin \mu}{\mu^2} \frac{2\rho}{\mu} d\mu = - \int \rho d \frac{\sqrt{3} \arcsin \mu}{\mu^2} \left(1 + \frac{\mu \sqrt{1 - \mu^2}}{\arcsin \mu} \right) \\ \int f d\rho + \int \rho df &= \int \left(f \frac{d\rho}{d\rho} + \frac{df}{d\rho} \rho \right) d\rho = \int \frac{d}{d\rho} (f\rho) d\rho = 0 \\ \frac{d}{d\rho} (f\rho) &= 0 \Rightarrow f\rho = C_p^{\{0\}} \Rightarrow f = C_p^{\{0\}}/\rho, \quad C_p^{\{0\}} = \text{const} \\ \int f d\rho &= \int \frac{C_p^{\{0\}}}{\rho} d\rho = C_p^{\{0\}} \log \rho, \end{aligned}$$

где константа $C_p^{\{0\}}$ определяется по функции μ . Тогда выражение $f_p^{\{0\}}$ можно переписать в виде

$$f_p^{\{0\}} = C_1 \left(1 - C_p^{\{0\}} \log \rho \right) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overset{\{0\}}{s}_{rr} d\xi + \overset{\{0\}}{p}_0(\tau) \quad (1.72)$$

В таблице ниже представлены значения коэффициента $C_p^{\{0\}}$ при различном граничном условии $\mu(\rho)|_{\rho=1}$.

Таблица 1 – Значения коэффициента $C_p^{\{0\}}$

| $\mu(1)$ | $C_p^{\{0\}}$ | $\mu(1)$ | $C_p^{\{0\}}$ |
|----------|---------------|----------|---------------|
| 1.0 | 2.720 | 0.65 | 4.926 |
| 0.95 | 2.974 | 0.6 | 5.405 |
| 0.9 | 3.233 | 0.55 | 5.965 |
| 0.85 | 3.509 | 0.5 | 6.628 |
| 0.8 | 3.809 | 0.45 | 7.4297 |
| 0.75 | 4.139 | 0.4 | 8.423 |
| 0.7 | 4.508 | 0.35 | 9.691 |

1.3 Анализ решения

Полученные решения (1.37) – (1.42) и (1.59) – (1.64) являются приближенными и с точностью $O(\alpha)$ совпадают, за исключением функции давления, с квазистатическим решением [76]:

$$p = p_0 + \frac{\tau_s}{\alpha} \int_{\rho}^1 \mu(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s_{rr} d\xi - \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}} \sqrt{(1 - \mu^2 \xi^2)} + O(\alpha) \quad (1.73)$$

$$s_{rr} = s_{\theta\theta} = \tau_s \sqrt{(1 - \mu^2 \xi^2)} / 3 + O(\alpha) \quad (1.74)$$

$$s_{rz} = -\mu \xi \tau_s + O(\alpha) \quad (1.75)$$

$$v_r/V = \frac{\rho}{2\alpha} + \frac{1}{\mu} \sqrt{3(1 - \mu^2 \xi^2)} + O(\alpha) \quad (1.76)$$

$$v_z = -V\xi + O(\alpha) \quad (1.77)$$

где p_0 имеет смысл гидростатического давления.

При $\rho \rightarrow 0$ функция $\mu(\rho) \rightarrow 0$. Этот предельный переход выдерживают все функции за исключением v_r , ряд которой перестает быть асимптотическим в смысле Пуанкаре в окрестности сечения $\rho = 0$. Следовательно, разложения (1.12) – (1.15) несправедливы вблизи среднего по простиранию сечения слоя. Кроме того, данное решение неприменимо в зоне краевого эффекта, то есть вблизи сечения $\rho = 1$, где необходимо ставить точные граничные условия. Данные ограничения аналогичны трактуемым в анализе решения классической задачи Прандтля.

Обозначим правую часть уравнения (1.73) как p^{KB} . Для случаев $\beta = 2$ и $\beta = 1$ имеем соответственно:

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{KB}} + \frac{3\tau_s}{8} C_2 (1 - \rho^2) \quad (1.78)$$

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{KB}} + \frac{3\tau_s}{8\alpha} C_1 (1 - \rho^2) - C_1 \tau_s C_p^{\{0\}} \log \rho \quad (1.79)$$

При сравнении выражений видно, что в случае динамического сдавливания возникает квадратично зависящее от радиуса слагаемое, причем, чем динамичнее происходит процесс, тем более значима становится данная величина. Наличие такой зависимости качественно меняет эпюру давления в слое и увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на плиты.

На графике ниже приведены эпюры давления для различных стадий процесса при следующих параметрах: $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\mu(1) = 1$.

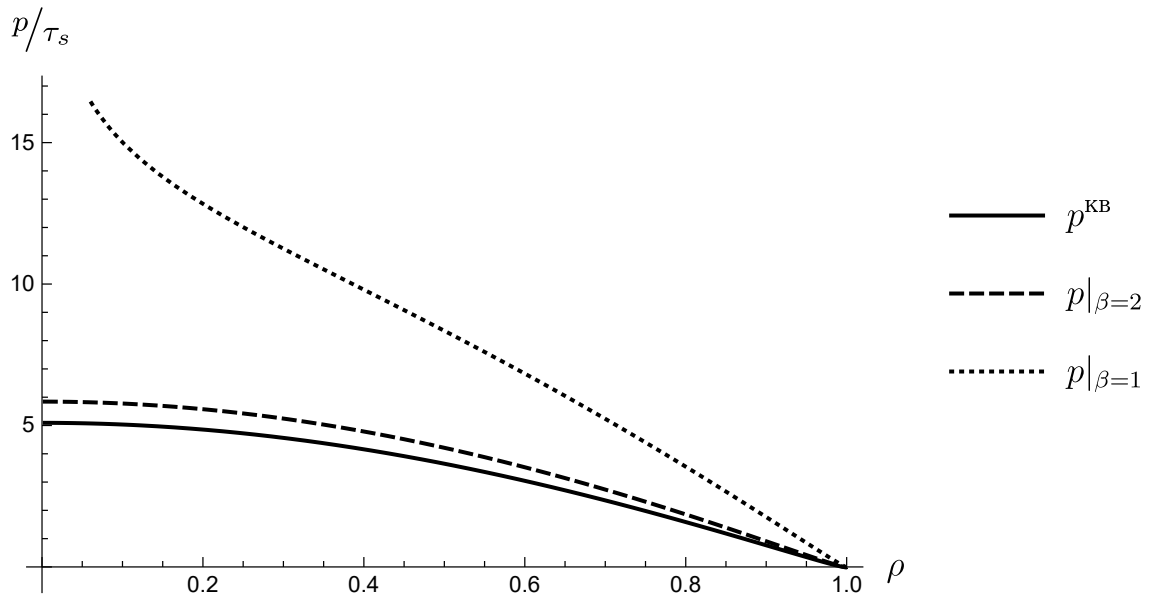


Рисунок 1.3 — Эпюры давления для случая круглого слоя

Используя то, что $\alpha(t) = (V(t_* - t))^{3/2} \sqrt{2\pi/\mathcal{V}_0}$, где \mathcal{V}_0 — объем слоя, можно установить зависимость между временем и стадией прессования:

$$t_* - t \sim \frac{Eu^{-2/3\beta}}{V} \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}_0}{2\pi}} \quad (1.80)$$

Глава 2. Сдавливание цилиндрического идеально жесткопластического слоя

Известное решение Прандтля [3] о сжатии тонкой полосы примечательно тем, что является отправной точкой для построения математических моделей, имеющих непосредственное отношение к технологическим процессам обработки металлов давлением. Одним из обобщений данного решения на случай слоя конечного объема является задача о сдавливании цилиндрического слоя [77]. Её решение находит применение в технологических процессах изготовления тонкостенного трубопровода заданной точности. В отличие от классической задачи Прандтля, случай цилиндрического слоя дополнительно параметризуется отношением радиусов прессующих цилиндров к длине образующей. В данной постановке задачи исследуется влияние динамических эффектов в процессе формирования изделия методом прессования. Материалы главы содержатся в публикации [106].

2.1 Постановка задачи и асимптотические разложения

Рассмотрим плоское течение несжимаемого идеально жесткопластического материала с плотностью ρ и пределом текучести σ_s в тонком цилиндрическом слое:

$$\Omega_t = \{0 \leq r \leq R(t) + h(t), -l(t) \leq z \leq l(t), 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad (2.1)$$

с границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, причем $h(t) \ll l(t)$ для любого $t \geq 0$. В начальный момент времени область, занятая материалом, имела вид

$$\Omega_0 = \{0 \leq r \leq R_0 + h_0, -l_0 \leq z \leq l_0, 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad \partial\Omega_0 = \Gamma_0 \quad (2.2)$$

поэтому в силу несжимаемости $(2R + h)hl = (2R_0 + h_0)h_0l_0$.

Скорость расширения внутреннего цилиндра обозначим V , поэтому кинематическое условие непротекания сквозь границы Γ_1 и Γ_2 имеет вид

$$v_r|_{r=R} = V, \quad v_r|_{r=R+h} = 0 \quad (2.3)$$

Касательная составляющая скорости (в данном случае v_z) на указанных границах идеальной среды, как известно, не задаётся.

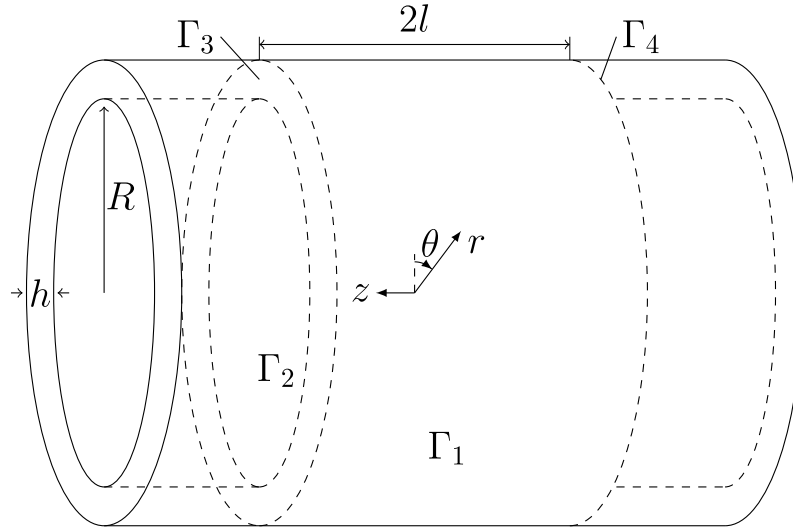


Рисунок 2.1 — Деформируемый цилиндрический слой

В некоторый момент времени $0 < t < h_0/V = t_*$, где t_* – момент схлопывания слоя, относительно шести функций – независимых компонент девиатора напряжений s_{rr} , s_{rz} и $s_{\theta\theta}$, давления p и компонент скорости v_r и v_z – должна выполняться замкнутая система уравнений динамической теории идеальной пластичности для цилиндрических координат:

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + s_{rz,z} + \frac{s_{rr} - s_{\theta\theta}}{r} = \rho(v_{r;t} + v_r v_{r,r} + v_z v_{r,z}) \quad (2.4)$$

$$-p_{,z} + s_{rz,r} + \frac{s_{rz}}{r} - (s_{rr} + s_{\theta\theta})_{,z} = \rho(v_{z;t} + v_r v_{z,r} + v_z v_{z,z}) \quad (2.5)$$

$$s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{rr}s_{\theta\theta} + s_{rz}^2 = \sigma_s^2/2 = \tau_s^2 \quad (2.6)$$

$$s_{rr} \frac{v_r}{r} = s_{\theta\theta} v_{r,r} \quad (2.7)$$

$$s_{rr}(v_{r,z} + v_{z,r}) = 2s_{rz}v_{r,r} \quad (2.8)$$

$$v_{r,r} + \frac{v_r}{r} + v_{z,z} = 0 \quad (2.9)$$

Кроме выполнения условия (2.3) на жестких контактирующих поверхностях потребуем, что бы модуль касательного напряжения s_{rz} достигал на границах Γ_1 и Γ_2 своего максимального значения:

$$|s_{rz}|_{r=R} = |s_{rz}|_{r=R+h} = \mu\tau_s, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (2.10)$$

где μ – шероховатость пресса. Абсолютной шероховатости, или полному сцеплению пресса с материалом, соответствует значение $\mu = 1$.

В реальном процессе сжатия слоя границы Γ_3 и Γ_4 , естественно, свободны от напряжений, однако в математической постановке рассматриваемой здесь краевой задачи в её классическом варианте данное условие не ставится. Поэтому

других, помимо (2.3) и (2.10), граничных условий в задаче не предполагается, а область вблизи границ Γ_3 и Γ_4 (на расстояниях порядка h) трактуется как зона краевого эффекта.

Введем малый параметр $\alpha = \frac{h(t)}{l(t)} \ll 1$ и проведем разложение всех неизвестных величин, входящих в систему уравнений (2.4) – (2.9), в ряды по целым степеням параметра:

$$v_r(r, z, t) = V \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}} \quad (2.11)$$

$$v_z(r, z, t) = V \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_z^{\{k\}}, \quad N \geq 1 \quad (2.12)$$

$$s_{ij}(r, z, t) = \tau_s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{ij}^{\{k\}}, \quad (ij) \in \{rr, rz, \theta\theta\} \quad (2.13)$$

$$p(r, z, t) = \tau_s \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^k p^{\{k\}}, \quad M \geq 1 \quad (2.14)$$

Коэффициенты рядов (2.11) – (2.14) – безразмерны и являются функциями безразмерных координат ρ, ξ, τ :

$$\rho = \frac{r - R}{h}, \quad \xi = \frac{z}{l} = \frac{\alpha z}{h}, \quad \tau = V \frac{t}{h} \quad (2.15)$$

Наличие в (2.11) – (2.14) членов $\alpha^{-n} v_z^{\{-n\}}$ и $\alpha^{-m} p^{\{-m\}}$ обусловлено стремлением v_r и p к бесконечности, при $\alpha \rightarrow 0$, что ясно из физических соображений. Также заметим, что область Ω содержит три геометрических размера: h, l и R , и если отношение первых двух образуют малый параметр, то отношение двух последних может иметь любой “промежуточный” порядок малости:

$$R/l = a\alpha^c, \quad c \in [0, 1], \quad a = O(1) \quad (2.16)$$

Обратимся к геометрическому условию несжимаемости и выразим малый параметр и координаты (2.15) как эволюционные функции:

$$\begin{aligned} ((2r + h)hl)' = 0, \quad \dot{l} &= \frac{2VRl}{(2R + h)h} = \frac{2VR/l}{(2R/l + \alpha)\alpha} = \frac{2V\alpha\alpha^c}{(2a\alpha^c + \alpha)\alpha} \\ \dot{\alpha} &= \left(\frac{h}{l}\right)' = \frac{\dot{h}l - h\dot{l}}{l^2} = -\frac{V\alpha}{h} \left(2 - \frac{\alpha}{2a\alpha^c + \alpha}\right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{r - R}{h}\right)' = \frac{-\dot{R}h - \dot{h}(r - R)}{h^2} = \frac{V}{h}(\rho - 1) \quad (2.18)$$

$$\dot{\xi} = \left(\frac{z}{l}\right)' = -\frac{z\dot{l}}{l^2} = -\frac{V\xi\alpha}{h} \left(1 - \frac{\alpha}{2a\alpha^c + \alpha}\right) \quad (2.19)$$

$$\dot{\tau} = \left(V\frac{t}{h}\right)' = V\frac{h - t\dot{h}}{h^2} = \frac{V}{h}(1 + \tau) \quad (2.20)$$

Подставляя выражения (2.11) – (2.14) в систему (2.4) – (2.9) и учитывая, что полная производная по времени представляется в виде

$${}^{\{k\}}v_{i;t} = {}^{\{k\}}v_{i,\rho}\dot{\rho} + {}^{\{k\}}v_{i,\xi}\dot{\xi} + {}^{\{k\}}v_{i,\tau}\dot{\tau}$$

получим следующую систему:

$$\begin{aligned} - \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^k p_{,\rho}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(s_{rr,\rho}^{\{k\}} + \alpha s_{rz,\xi}^{\{k\}} + \frac{\alpha}{\alpha\rho + a\alpha^c} \left(s_{rr}^{\{k\}} - s_{\theta\theta}^{\{k\}} \right) \right) = \\ = \frac{\rho V^2}{\tau_s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(v_{r,\rho}^{\{k\}}(\rho + 1) - v_{r,\xi}^{\{k\}}\xi\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2a\alpha^c + \alpha} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + v_{r,\tau}^{\{k\}}(1 + \tau) - \left(2 - \frac{\alpha}{2a\alpha^c + \alpha} \right) v_r^{\{k\}} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_{r,\rho}^{\{k\}} + \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_z^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} v_{r,\xi}^{\{k\}} \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^{k+1} p_{,\xi}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(s_{rz,\rho}^{\{k\}} + \frac{\alpha}{\alpha\rho + a\alpha^c} s_{rz}^{\{k\}} - \alpha \left(s_{rr,\xi}^{\{k\}} + s_{\theta\theta,\xi}^{\{k\}} \right) \right) = \\ = \frac{\rho V^2}{\tau_s} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \left(v_{z,\rho}^{\{k\}}(\rho + 1) - v_{z,\xi}^{\{k\}}\xi\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2a\alpha^c + \alpha} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + v_{z,\tau}^{\{k\}}(1 + \tau) - \left(2 - \frac{\alpha}{2a\alpha^c + \alpha} \right) v_z^{\{k\}} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{z,\rho}^{\{k\}} + \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_z^{\{k\}} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^{k+1} v_{z,\xi}^{\{k\}} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{rr}\}^{[k]} \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{\theta\theta}\}^{[k]} \right) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{rr}\}^{[k]} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{\theta\theta}\}^{[k]} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{rz}\}^{[k]} \right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{rr}\}^{[k]} \frac{\alpha}{\alpha\rho + a\alpha^c} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_r\}^{[k]} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{\theta\theta}\}^{[k]} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_{r,\rho}\}^{[k]} \quad (2.24)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{rr}\}^{[k]} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} \{v_{r,\xi}\}^{[k]} + \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \{v_{z,\rho}\}^{[k]} \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{S_{rz}\}^{[k]} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_{r,\rho}\}^{[k]} \quad (2.25)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_{r,\rho}\}^{[k]} + \frac{\alpha}{\alpha\rho + a\alpha^c} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_r\}^{[k]} + \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^{k+1} \{v_{z,\xi}\}^{[k]} = 0 \quad (2.26)$$

Возникший в правой части уравнений (2.21) и (2.22) коэффициент равен обратному числу Эйлера

$$\text{Eu}^{-1} = \frac{\varrho V^2}{\tau_s}$$

Данная величина мала и как видно из её определения фиксирована. По сравнению с ней порядок малости $\alpha(t)$ при течении времени от 0 до t_* растёт до бесконечности. Это позволяет записать

$$\text{Eu}^{-1} = O(\alpha^\beta(t)), \text{ причём } \beta \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_*$$

Применительно к динамическому анализу интерес представляет $0 < \beta \leq 2$. Отыскание решений проведем для целочисленных значений входящих в этот диапазон.

Обратимся к системе двух последних уравнений (2.25) и (2.26). Из них сразу следует, что $\{v_{r,\xi}\}^{\{-N\}} = 0$ и $\{v_{r,\rho}\}^{\{-N\}} = 0$, то есть $\{v_z\}^{\{-N\}} = g_{v_z}(\tau)$ зависит только от τ , обуславливая перемещение вдоль оси z как абсолютно жесткого целого. Исключив данное движение из рассмотрения, можно принять $\{v_z\}^{\{-N\}} = 0$. Аналогичные рассуждения применимы последовательно для $\{v_z\}^{\{-N+1\}}$, затем $\{v_z\}^{\{-N+2\}}$ и далее вплоть до $\{v_z\}^{\{-2\}}$. Учитывая, что первый ненулевой член продольной компоненты скорости $\{v_z\}^{\{-1\}}$, и принимая, что $\beta \geq 1$ определим из уравнений (2.21) и (2.22) порядок малости для функции давления p . Для $M \geq 2$ имеем:

$$\{p,\rho\}^{\{-M\}} = 0, \quad \{p,\xi\}^{\{-M\}} = 0 \text{ и, следовательно, } p = p_0(\tau)$$

Здесь $\overset{\{-M\}}{p_0}$ – гидростатическая постоянная, не дающая вклад в уравнение движения и однозначно определяемая заданием внешнего давления. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что $M = 1$.

В указанном в (2.16) диапазоне параметра c выделим три значения, соответствующие различным математическим и механическим смыслам:

- $c = 1$, когда радиусы цилиндров имеют порядок толщины слоя,
- $c = 0$, когда радиусы цилиндров имеют порядок длины образующей,
- $0 < c < 1$, когда радиусы цилиндров имеют “промежуточный” порядок малости.

2.2 Построение решения при радиусах цилиндров порядка толщины слоя

При данном соотношении дробь $\frac{\alpha}{\alpha\rho + a\alpha^c}$ преобразуется к виду $\frac{1}{\rho+a}$ и не будет зависеть от α , следовательно, будет являться величиной порядка $O(1)$.

2.2.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 2$, который соответствует моменту перехода от квазистатического к динамическому режиму деформирования.

Положим $Eu^{-1} = C_2\alpha^2$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы (2.21) – (2.26) при a^{-1} и α^0 :

$$\overset{\{-1\}}{-p_{,\rho}} = 0 \quad (2.27)$$

$$\overset{\{0\}}{s_{rr}} \overset{\{-1\}}{v_{z,\rho}} = 0 \quad (2.28)$$

$$\overset{\{0\}}{-p_{,\rho}} + \overset{\{0\}}{s_{rr,\rho}} + \left(\overset{\{0\}}{s_{rr}} - \overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}} \right) / (\rho + a) = 0 \quad (2.29)$$

$$\overset{\{-1\}}{-p_{,\xi}} + \overset{\{0\}}{s_{rz,\rho}} + \overset{\{0\}}{s_{rz}} / (\rho + a) = 0 \quad (2.30)$$

$$\left(\overset{\{0\}}{s_{rr}} \right)^2 + \left(\overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}} \right)^2 + \overset{\{0\}}{s_{rr}} \overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}} + \left(\overset{\{0\}}{s_{rz}} \right)^2 = 1 \quad (2.31)$$

$$\overset{\{0\}}{s_{rr}} \overset{\{0\}}{v_r} / (\rho + a) = \overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}} \overset{\{0\}}{v_{r,\rho}} \quad (2.32)$$

$$\overset{\{0\}}{s_{rr}} \overset{\{0\}}{v_{z,\rho}} = 2 \overset{\{0\}}{s_{rz}} \overset{\{0\}}{v_{r,\rho}} \quad (2.33)$$

$$\{^0\}v_{r,\rho} + \{^0\}v_r / (\rho + a) + \{^{-1}\}v_{z,\xi} = 0 \quad (2.34)$$

Граничные условия (2.3) и (2.10) при этом примут вид

$$\{^0\}v_r|_{\rho=0} = 1, \quad \{^0\}v_r|_{\rho=1} = 0, \quad \{^0\}s_{rz}|_{\rho=0} = \{^0\}s_{rz}|_{\rho=1} = \mu \quad (2.35)$$

Из уравнений (2.27) и (2.28) вытекает

$$\{^{-1}\}p = \{^{-1}\}f_p(\xi, \tau), \quad \{^{-1}\}v_z = \{^{-1}\}f_{v_z}(\xi, \tau).$$

Подставив выражение $\{^{-1}\}v_z$ в уравнение (2.34) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $\{^0\}v_r$:

$$\{^0\}v_r = \left(\{^0\}f_{v_r}(\xi, \tau) - \rho(a + \rho/2) \{^{-1}\}f_{v_z,\xi} \right) / (\rho + a)$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (2.35) позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned} \{^0\}f_{v_r} &= a \\ \{^{-1}\}f_{v_z} &= \frac{2a\xi}{2a+1} + \{^{-1}\}g_{v_z}(\tau) \end{aligned}$$

В силу симметрии задачи естественно требовать нечетности продольной компоненты скорости, что позволяет принять $\{^{-1}\}g_{v_z}(\tau) = 0$. Окончательно получаем

$$\{^{-1}\}v_z = \{^{-1}\}f_{v_z} = \frac{2a\xi}{2a+1} \quad (2.36)$$

$$\{^0\}v_r = \frac{a(1-\rho)(2a+\rho+1)}{(2a+1)(\rho+a)} \quad (2.37)$$

Решая (2.30) относительно $\{^0\}s_{rz}$ и используя силовые граничные условия (2.35) придем к

$$\{^0\}s_{rz} = \left(\{^0\}f_{s_{rz}}(\xi, \tau) + \rho(a + \rho/2) \{^{-1}\}f_{p,\xi} \right) / (\rho + a)$$

$$\{^0\}f_{s_{rz}}/a = \mu\hat{s}, \quad \hat{s} = \pm 1$$

$$\left(a\mu\hat{s} + (a + 1/2) \{^{-1}\}f_{p,\xi} \right) / (1 + a) = -\mu\hat{s}$$

$$\{^{-1}\}p = \{^{-1}\}f_p = \{^{-1}\}g_p(\tau) - 2\mu\hat{s}\xi$$

Учитывая геометрическую симметрию задачи, давление должно быть четной функцией ξ , следовательно $\hat{s} = \pm \text{sign } \xi$ и $\hat{s}\xi = \pm|\xi|$. В соответствии с физико-механическим смыслом процесса сжатия и растекания слоя сингулярная составляющая давления $\overset{\{-1\}}{p}$ максимальна в центре слоя, то есть в окрестности $\xi = 0$, и убывает до нуля вблизи границы $\xi = \pm 1$. Данное обстоятельство позволяет определить, что $\hat{s} = \text{sign } \xi$ и тогда окончательно имеем

$$\overset{\{0\}}{s_{rz}} = -\frac{\mu \text{sign } \xi}{\rho + a} (2a\rho - a + \rho^2) \quad (2.38)$$

$$\overset{\{-1\}}{p} = \overset{\{-1\}}{g_p}(\tau) - 2\mu|\xi| = 2\mu(1 - |\xi|) + \overset{\{-1\}}{p_0}(\tau) \quad (2.39)$$

С учетом найденных функций (2.31) и (2.32) представляют собой алгебраическую систему уравнений относительно $\overset{\{0\}}{s_{rr}}$ и $\overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}}$, решив которую, найдем

$$\overset{\{0\}}{s_{rr}} = -\sqrt{1 - \left(\overset{\{0\}}{s_{rz}}\right)^2} \frac{(a+1)^2 + (\rho+a)^2}{\sqrt{(a+1)^4 + 3(\rho+a)^4}} \quad (2.40)$$

$$\overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}} = \sqrt{1 - \left(\overset{\{0\}}{s_{rz}}\right)^2} \frac{(a+1)^2 - (\rho+a)^2}{\sqrt{(a+1)^4 + 3(\rho+a)^4}} \quad (2.41)$$

Выбор знака в (2.40) и (2.41) обусловлен тем, что в процессе сжатия компонента s_{rr} дивергента напряжений в главном по α приближении всюду в слое должна быть отрицательна. Тогда кольцевая компонента $\overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}}$ всюду положительна, а микропрофиль осевой скорости $\overset{\{0\}}{v_z}$ по толщине будет выпуклым в направлении движения частиц. Подставив все найденные функции в (2.29) и (2.33) и решив дифференциальные уравнения найдем:

$$\overset{\{0\}}{v_z} = \frac{2a}{2a+1} \int \frac{\overset{\{0\}}{s_{rz}}}{\sqrt{1 - \left(\overset{\{0\}}{s_{rz}}\right)^2}} \frac{\sqrt{(a+1)^4 + 3(\rho+a)^4}}{(\rho+a)^2} d\rho + \overset{\{0\}}{f_{v_z}}(\xi, \tau), \quad (2.42)$$

$$\overset{\{0\}}{p} = \overset{\{0\}}{s_{rr}} + \int \frac{\overset{\{0\}}{s_{rr}} - \overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}}}{\rho+a} d\rho + \overset{\{0\}}{f_p}(\xi, \tau) \quad (2.43)$$

Для нахождения неизвестных функций $\overset{\{0\}}{f_p}$ и $\overset{\{0\}}{f_{v_z}}$ выпишем следующее по α приближение уравнений (2.22) и (2.26), а также граничные условия (2.3) и (2.10):

$$-\overset{\{0\}}{p}_{,\xi} + \overset{\{1\}}{s_{rz,\rho}} + \overset{\{1\}}{s_{rz}}/(\rho+a) = C_2 \left(2a(1+6a)\xi / (1+2a)^2 \right) \quad (2.44)$$

$$\overset{\{1\}}{v_{r,\rho}} + \overset{\{1\}}{v_r}/(\rho+a) + \overset{\{0\}}{v_{z,\xi}} = 0 \quad (2.45)$$

$$\overset{\{1\}}{v_r}|_{\rho=0} = \overset{\{1\}}{v_r}|_{\rho=1} = 0, \quad \overset{\{1\}}{s_{rz}}|_{\rho=0} = \overset{\{1\}}{s_{rz}}|_{\rho=1} = 0 \quad (2.46)$$

Из уравнения (2.45) с учетом граничных условий (2.46) найдем

$$\begin{aligned} \{1\}v_r &= \left(\{1\}f_{v_r}(\xi, \tau) - \rho(a + \rho/2) \{0\}f_{v_z, \xi} \right) / (\rho + a) \\ \{1\}f_{v_r} &= 0, \quad \{0\}f_{v_z, \xi} = 0 \end{aligned}$$

Применяя рассуждения, использованные при выводе (2.36), получим $\{0\}f_{v_z} = 0$. Оставшееся уравнение (2.44) даст выражение для $\{1\}s_{rz}$:

$$\{1\}s_{rz} = \left(\{1\}f_{s_{rz}}(\xi, \tau) + \rho(a + \rho/2) \{0\}f_{p, \xi} + C_2 a(2\rho + a)(6a + 1)\xi\rho \right) / (\rho + a)$$

С учетом силовых граничных условий (2.46) получим

$$\begin{aligned} \{1\}f_{s_{rz}} &= 0, \quad 2C_2 a(1 + 6a)\xi + (1 + 2a)^2 \{0\}f_{p, \xi} = 0 \\ \{0\}f_p &= \{0\}g_p(\tau) - C_2 \frac{a(1 + 6a)}{(2a + 1)^2} \xi^2 = C_2 \frac{a(1 + 6a)}{(2a + 1)^2} (1 - \xi^2) + \{0\}p_0(\tau) \end{aligned}$$

2.2.2 Развитый процесс динамического деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 1$, который соответствует моменту с сильным влиянием динамики в процессе сдавливания слоя.

Положим $Eu^{-1} = C_1 \alpha$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы (2.21) – (2.26) при a^{-1} и α^0 :

$$-p_{, \rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.47)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z, \rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.48)$$

$$-p_{, \rho}^{\{0\}} + s_{rr, \rho}^{\{0\}} + \left(s_{rr}^{\{0\}} - s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right) / (\rho + a) = 0 \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} -p_{, \xi}^{\{-1\}} + s_{rz, \rho}^{\{0\}} + s_{rz}^{\{0\}} / (\rho + a) &= C_1 \left((\rho - 1) v_{z, \rho}^{\{-1\}} + (1 + \tau) v_{z, \tau}^{\{-1\}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(2 - \frac{1}{2a + 1} \right) v_z^{\{-1\}} + v_r^{\{0\}} v_{z, \rho}^{\{-1\}} + v_z^{\{-1\}} v_{z, \xi}^{\{-1\}} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\left(s_{rr}^{\{0\}} \right)^2 + \left(s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right)^2 + s_{rr}^{\{0\}} s_{\theta\theta}^{\{0\}} + \left(s_{rz}^{\{0\}} \right)^2 = 1 \quad (2.51)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_r^{\{0\}} / (\rho + a) = s_{\theta\theta}^{\{0\}} v_{r, \rho}^{\{0\}} \quad (2.52)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z, \rho}^{\{0\}} = 2 s_{rz}^{\{0\}} v_{r, \rho}^{\{0\}} \quad (2.53)$$

$$v_{r, \rho}^{\{0\}} + v_r^{\{0\}} / (\rho + a) + v_{z, \xi}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.54)$$

Как и в предыдущем пункте граничные условия (2.3) и (2.10) при этом примут вид

$$\{^0\}v_r|_{\rho=0} = 1, \quad \{^0\}v_r|_{\rho=1} = 0, \quad \{^0\}s_{rz}|_{\rho=0} = \{^0\}s_{rz}|_{\rho=1} = \mu \quad (2.55)$$

Из уравнений (2.47) и (2.48) вытекает

$$\{^{-1}\}p = f_p(\xi, \tau), \quad \{^{-1}\}v_z = f_{v_z}(\xi, \tau).$$

Подставив выражение $\{^{-1}\}v_z$ в уравнение (2.54) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $\{^0\}v_r$:

$$\{^0\}v_r = \left(f_{v_r}(\xi, \tau) - \rho(a + \rho/2) f_{v_z, \xi}(\xi, \tau) \right) / (\rho + a)$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (2.55) позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned} \{^0\}f_{v_r} &= a \\ \{^{-1}\}f_{v_z} &= \frac{2a\xi}{2a+1} + \{^{-1}\}g_{v_z}(\tau) \end{aligned}$$

В силу симметрии задачи естественно требовать нечетности продольной компоненты скорости, что позволяет принять $\{^{-1}\}g_{v_z}(\tau) = 0$. Окончательно получаем

$$\{^{-1}\}v_z = f_{v_z} = \frac{2a\xi}{2a+1} \quad (2.56)$$

$$\{^0\}v_r = \frac{a(1-\rho)(2a+\rho+1)}{(2a+1)(\rho+a)} \quad (2.57)$$

С учетом (2.56) уравнение (2.50) примет вид

$$-\{^{-1}\}p_{, \xi} + \{^0\}s_{rz, \rho} + \{^0\}s_{rz} / (\rho + a) = C_1 \left(2a(1+6a)\xi / (1+2a)^2 \right)$$

Решая его относительно $\{^0\}s_{rz}$ и используя силовые граничные условия (2.55) приходим к

$$\{^0\}s_{rz} = \left(f_{s_{rz}}(\xi, \tau) + \rho(a + \rho/2) f_{p, \xi}(\xi, \tau) + C_2 a(2\rho + a)(6a + 1)\xi \right) / (\rho + a)$$

$$\{^0\}f_{s_{rz}} / a = \mu \hat{s}, \quad \hat{s} = \pm 1$$

$$\left(a\mu \hat{s} + (a + 1/2) f_{p, \xi}(\xi, \tau) + C_1 a(2 + a)(6a + 1)\xi \right) / (1 + a) = -\mu \hat{s},$$

$$\{^{-1}\}p = f_p(\xi, \tau) = \{^{-1}\}g_p(\tau) - 2\mu \hat{s} \xi - C_1 \frac{a(1+6a)}{(2a+1)^2} \xi^2$$

В силу тех же рассуждений, что приводились в 2.2.1 следует положить $\hat{s} = \text{sign } \xi$. Тогда найденные функции можно записать в следующем виде:

$$s_{rz}^{\{0\}} = -\frac{\mu \text{sign } \xi}{\rho + a} (2a\rho - a + \rho^2) \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} p^{\{-1\}} &= g_p^{\{-1\}}(\tau) - 2\mu|\xi| - C_1 \frac{a(1+6a)}{(2a+1)^2} \xi^2 = \\ &= 2\mu(1 - |\xi|) + C_1 \frac{a(1+6a)}{(2a+1)^2} (1 - \xi^2) + p_0^{\{-1\}}(\tau) \end{aligned} \quad (2.59)$$

С учетом найденных функций (2.51) и (2.52) представляют собой алгебраическую систему уравнений относительно $s_{rr}^{\{0\}}$ и $s_{\theta\theta}^{\{0\}}$, решив которую, найдем

$$s_{rr}^{\{0\}} = -\sqrt{1 - (s_{rz}^{\{0\}})^2} \frac{(a+1)^2 + (\rho+a)^2}{\sqrt{(a+1)^4 + 3(\rho+a)^4}} \quad (2.60)$$

$$s_{\theta\theta}^{\{0\}} = \sqrt{1 - (s_{rz}^{\{0\}})^2} \frac{(a+1)^2 - (\rho+a)^2}{\sqrt{(a+1)^4 + 3(\rho+a)^4}} \quad (2.61)$$

Подставив все найденные функции в (2.49) и (2.53) и решив дифференциальные уравнения найдем:

$$v_z^{\{0\}} = \frac{2a}{2a+1} \int \frac{s_{rz}^{\{0\}}}{\sqrt{1 - (s_{rz}^{\{0\}})^2}} \frac{\sqrt{(a+1)^4 + 3(\rho+a)^4}}{(\rho+a)^2} d\rho + f_{v_z}^{\{0\}}(\xi, \tau), \quad (2.62)$$

$$p = s_{rr}^{\{0\}} + \int \frac{s_{rr}^{\{0\}} - s_{\theta\theta}^{\{0\}}}{\rho+a} d\rho + f_p^{\{0\}}(\xi, \tau) \quad (2.63)$$

Для нахождения неизвестных функций $f_p^{\{0\}}$ и $f_{v_z}^{\{0\}}$ выпишем следующее по α приближение уравнений (2.22) и (2.26), а также граничные условия (2.3) и (2.10):

$$\begin{aligned} -p_{,\xi}^{\{0\}} + s_{rz,\rho}^{\{1\}} + s_{rz}/(\rho+a) &= C_1 \left((\rho-1) v_{z,\rho}^{\{0\}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4a^2\xi}{(1+2a)^2} + v_r^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{0\}} + \frac{2a}{1+2a} v_z^{\{0\}} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$v_{r,\rho}^{\{1\}} + v_r^{\{1\}}/(\rho+a) + v_{z,\xi}^{\{0\}} = 0 \quad (2.65)$$

$$v_r^{\{1\}}|_{\rho=0} = v_r^{\{1\}}|_{\rho=1} = 0, \quad |s_{rz}^{\{1\}}|_{\rho=0} = |s_{rz}^{\{1\}}|_{\rho=1} = 0 \quad (2.66)$$

Из уравнения (2.65) с учетом граничных условий (2.66) найдем

$$\begin{aligned} v_r^{\{1\}} &= \left(f_{v_r}^{\{1\}}(\xi, \tau) - \rho(a + \rho/2) f_{v_{z,\xi}}^{\{0\}} \right) / (\rho+a) \\ f_{v_r}^{\{1\}} &= 0, \quad f_{v_{z,\xi}}^{\{0\}} = 0 \end{aligned}$$

Применяя рассуждения, использованные при выводе (2.56), получим $f_{v_z}^{\{0\}} = 0$. Оставшееся уравнение (2.64) даст выражение для $s_{rz}^{\{1\}}$:

$$\begin{aligned} s_{rz}^{\{1\}} = & \frac{1}{\rho + a} \left(f_{s_{rz}}^{\{1\}}(\xi, \tau) + \left(a\rho + \frac{\rho^2}{2} \right) f_{p,\xi}^{\{0\}} + C_1 \frac{\rho(\rho - 1)(a + 1)}{2a + 1} v_z^{\{0\}} + \right. \\ & \left. + C_1 \int_0^\rho \frac{2a^2 + a - 2\zeta + 1}{2a + 1} v_z^{\{0\}} d\zeta - C_1 \frac{2a^2(2a\rho + \rho^2)\xi}{(2a + 1)^2} \right) \end{aligned}$$

С учетом силовых граничных условий (2.66) получим

$$\begin{aligned} f_{s_{rz}}^{\{1\}} = 0, \quad & \left(a + \frac{1}{2} \right) f_{p,\xi}^{\{0\}} + C_1 \int_0^1 \frac{2a^2 + a - 2\rho + 1}{2a + 1} v_z^{\{0\}} d\rho - C_1 \frac{2a^2\xi}{2a + 1} = 0 \\ f_p^{\{0\}} = & C_1 \frac{2a^2\xi^2}{(2a + 1)^2} - 2C_1\xi \int_0^1 \frac{2a^2 + a - 2\rho + 1}{(2a + 1)^2} v_z^{\{0\}} d\rho + p_0^{\{0\}}(\tau) \end{aligned} \quad (2.67)$$

2.3 Анализ решения для случая, когда радиусы цилиндров порядка толщины слоя

Полученные решения (2.36) – (2.43) и (2.56) – (2.63) являются приближенными и с точностью $O(\alpha)$ совпадают, за исключением функции давления, с точным квазистатическим решением [77]:

$$p = p_0 + \frac{2\mu}{\alpha} (1 - |\xi|) \tau_s + s_{rr} + \int \frac{s_{rr} - s_{\theta\theta}}{\rho + a} d\rho + O(\alpha) \quad (2.68)$$

$$s_{rr} = -\sqrt{\tau_s^2 - s_{rz}^2} \frac{(a + 1)^2 + (\rho + a)^2}{\sqrt{(a + 1)^4 + 3(\rho + a)^4}} + O(\alpha) \quad (2.69)$$

$$s_{\theta\theta} = \sqrt{\tau_s^2 - s_{rz}^2} \frac{(a + 1)^2 - (\rho + a)^2}{\sqrt{(a + 1)^4 + 3(\rho + a)^4}} + O(\alpha) \quad (2.70)$$

$$s_{rz} = -\frac{\mu \operatorname{sign} \xi}{\rho + a} (2a\rho - a + \rho^2) \tau_s + O(\alpha) \quad (2.71)$$

$$v_r = V \frac{a(1 - \rho)(2a + \rho + 1)}{(2a + 1)(\rho + a)} + O(\alpha) \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} v_z/V = & \frac{1}{\alpha} \frac{2a\xi}{2a + 1} + \frac{2a}{2a + 1} \int \frac{s_{rz}}{\sqrt{\tau_s^2 - s_{rz}^2}} \frac{\sqrt{(a + 1)^4 + 3(\rho + a)^4}}{(\rho + a)^2} d\rho + \\ & + O(\alpha) \end{aligned} \quad (2.73)$$

где p_0 имеет смысл гидростатического давления. Однако, в отличие от квазистатического случая, данное решение не является точным.

Наличие сигнатуры $\text{sign } \xi$ в функции s_{rz} говорит о разрыве решения вблизи сечения $\xi = 0$. Следовательно, разложения (2.11) – (2.14) несправедливы вблизи среднего по простираанию сечения слоя. Кроме того, данное решение неприменимо в зоне краевого эффекта, то есть вблизи сечений $\xi = \pm 1$, где необходимо ставить точные граничные условия. Данные ограничения аналогичны трактуемым в анализе решения классической задачи Прандтля.

Обозначим правую часть уравнения (2.68) как p^{KB} . Для случаев $\beta = 2$ и $\beta = 1$ имеем соответственно:

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{KB}} + C_2 \frac{a(1+6a)}{(2a+1)^2} (1-\xi^2) \tau_s \quad (2.74)$$

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{KB}} + \frac{C_1 a(1+6a)}{\alpha (2a+1)^2} (1-\xi^2) \tau_s + O(1) \quad (2.75)$$

Здесь под $O(1)$ подразумевается выражение при коэффициенте C_1 в уравнении (2.67). При сравнении выражений видно, что в случае динамического сдавливания возникает квадратично зависящее от радиуса слагаемое, причем, чем динамичнее происходит процесс, тем более значима становится данная величина. Наличие такой зависимости качественно меняет эпюру давления в слое и увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на плиты.

Эпюры давления для различных стадий процесса при параметрах $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\mu = 1$ и $a = 1$ представлены ниже (Рисунок 2.2).

Пользуясь тем, что в случае $c = 1$ имеет место равенство $\mathcal{V}_0/\pi = (2a+1)h^3/\alpha$, где \mathcal{V}_0 – объем слоя, а высота слоя h представима в виде $h = V(t_* - t)$, можно установить зависимость между временем и стадией прессования:

$$t_* - t \sim \frac{Eu^{-1/3\beta}}{V} \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}_0}{\pi(2a+1)}} \quad (2.76)$$

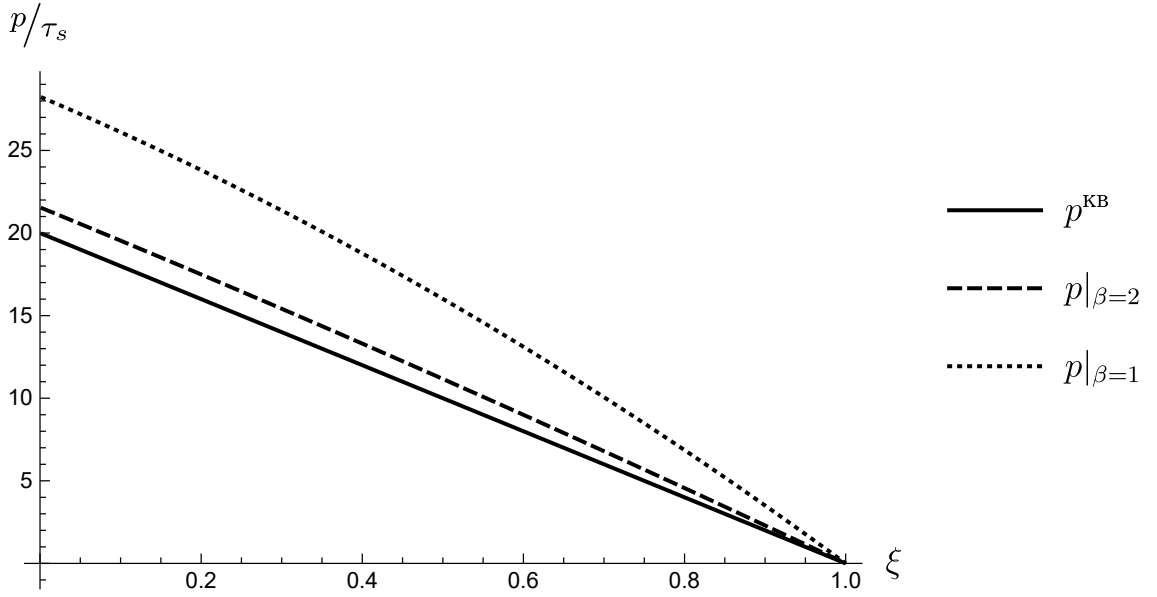


Рисунок 2.2 — Эпюры давления для случая цилиндрического слоя при радиусах цилиндров порядка толщины слоя

2.4 Построение решения при радиусах цилиндров порядка длины образующей

При данном соотношении дробь $\frac{\alpha}{\alpha\rho+a\alpha^c}$ с учетом малости параметра примет вид $\frac{\alpha}{\alpha\rho+a} = \frac{\alpha}{a} \left(1 - \frac{\alpha\rho}{a} + \dots\right) = \frac{\alpha}{a} + O(\alpha^2)$.

2.4.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 2$, который соответствует моменту перехода от квазистатического к динамическому режиму деформирования.

Положим $\text{Eu}^{-1} = C_2\alpha^2$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы (2.21) – (2.26) при a^{-1} и α^0 :

$$-p_{,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.77)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.78)$$

$$-p_{,\rho}^{\{0\}} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} = 0 \quad (2.79)$$

$$-p_{,\xi}^{\{-1\}} + s_{rz,\rho}^{\{0\}} = 0 \quad (2.80)$$

$$\left(\overset{\{0\}}{s_{rr}}\right)^2 + \left(\overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}}\right)^2 + \overset{\{0\}}{s_{rr}} \overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}} + \left(\overset{\{0\}}{s_{rz}}\right)^2 = 1 \quad (2.81)$$

$$0 = \overset{\{0\}}{s_{\theta\theta}} \overset{\{0\}}{v_{r,\rho}} \quad (2.82)$$

$$\overset{\{0\}}{s_{rr}} \overset{\{0\}}{v_{z,\rho}} = 2 \overset{\{0\}}{s_{rz}} \overset{\{0\}}{v_{r,\rho}} \quad (2.83)$$

$$\overset{\{0\}}{v_{r,\rho}} + \overset{\{-1\}}{v_{z,\xi}} = 0 \quad (2.84)$$

Граничные условия (2.3) и (2.10) при этом примут вид

$$\overset{\{0\}}{v_r}|_{\rho=0} = 1, \quad \overset{\{0\}}{v_r}|_{\rho=1} = 0, \quad \overset{\{0\}}{s_{rz}}|_{\rho=0} = \overset{\{0\}}{s_{rz}}|_{\rho=1} = \mu \quad (2.85)$$

Из уравнений (2.77) и (2.78) вытекает

$$\overset{\{-1\}}{p} = \overset{\{-1\}}{f_p}(\xi, \tau), \quad \overset{\{-1\}}{v_z} = \overset{\{-1\}}{f_{v_z}}(\xi, \tau).$$

Подставив выражение $\overset{\{-1\}}{v_z}$ в уравнение (2.84) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $\overset{\{0\}}{v_r}$:

$$\overset{\{0\}}{v_r} = \overset{\{0\}}{f_{v_r}}(\xi, \tau) - \rho \overset{\{-1\}}{f_{v_z,\xi}}$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (2.85) позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$\overset{\{0\}}{f_{v_r}} = 1$$

$$\overset{\{-1\}}{f_{v_z}} = \xi + \overset{\{-1\}}{g_{v_z}}(\tau)$$

В силу рассуждений приведенных в предыдущем пункте можно положить $\overset{\{-1\}}{g_{v_z}}(\tau) = 0$. Окончательно получаем

$$\overset{\{-1\}}{v_z} = \overset{\{-1\}}{f_{v_z}} = \xi \quad (2.86)$$

$$\overset{\{0\}}{v_r} = 1 - \rho \quad (2.87)$$

Решая (2.80) относительно $\overset{\{0\}}{s_{rz}}$ и используя силовые граничные условия (2.85) приходим к

$$\overset{\{0\}}{s_{rz}} = \overset{\{0\}}{f_{s_{rz}}}(\xi, \tau) + \rho \overset{\{-1\}}{f_{p,\xi}}$$

$$\overset{\{0\}}{f_{s_{rz}}} = \mu \hat{s}, \quad \hat{s} = \pm 1$$

$$\mu \hat{s} + \overset{\{-1\}}{f_{p,\xi}} = -\mu \hat{s},$$

$$\overset{\{-1\}}{p} = \overset{\{-1\}}{f_p} = \overset{\{-1\}}{g_p}(\tau) - 2\mu \hat{s} \xi$$

В силу тех же рассуждений, что приводились в 2.2.1 следует положить $\hat{s} = \text{sign } \xi$. Тогда найденные функции можно записать в следующем виде:

$$\{^0\} s_{rz} = -\mu (2\rho - 1) \text{sign } \xi \quad (2.88)$$

$$\{^{-1}\} p = g_p(\tau) - 2\mu|\xi| = 2\mu(1 - |\xi|) + \{^{-1}\} p_0(\tau) \quad (2.89)$$

С учетом найденных функций (2.81) и (2.82) представляют собой алгебраическую систему уравнений относительно $\{^0\} s_{rr}$ и $\{^0\} s_{\theta\theta}$, решив которую, найдем

$$\{^0\} s_{rr} = -\sqrt{1 - \left(\{^0\} s_{rz}\right)^2} = -\sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} \quad (2.90)$$

$$\{^0\} s_{\theta\theta} = 0 \quad (2.91)$$

Подставив все найденные функции в (2.79) и (2.83) и решив дифференциальные уравнения найдем:

$$\{^0\} v_z = \frac{\text{sign } \xi}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} + \{^0\} f_{v_z}(\xi, \tau), \quad (2.92)$$

$$\{^0\} p = \{^0\} s_{rr} + \{^0\} f_p(\xi, \tau) \quad (2.93)$$

Для нахождения неизвестных функций $\{^0\} f_p$ и $\{^0\} f_{v_z}$ выпишем следующее по α приближение уравнений (2.22) и (2.26), а также граничные условия (2.3) и (2.10):

$$-\{^0\} p_{,\xi} + \{^1\} s_{rz,\rho} + \{^0\} s_{rz}/a = C_2 (3\xi) \quad (2.94)$$

$$\{^1\} v_{r,\rho} + \{^0\} v_r/a + \{^0\} v_{z,\xi} = 0 \quad (2.95)$$

$$\{^1\} v_r|_{\rho=0} = \{^1\} v_r|_{\rho=1} = 0, \quad \{^1\} s_{rz}|_{\rho=0} = \{^1\} s_{rz}|_{\rho=1} = 0 \quad (2.96)$$

Из уравнения (2.95) с учетом граничных условий (2.96) найдем

$$\{^1\} v_r = \{^1\} f_{v_r}(\xi, \tau) - \frac{\rho}{a} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) - \rho \{^0\} f_{v_z,\xi}$$

$$\{^1\} f_{v_r} = 0, \quad \{^0\} f_{v_z} = -\xi/2a + \{^0\} g_{v_z}(\tau)$$

Применяя рассуждения, использованные при выводе (2.86), получим $\{^0\} g_{v_z} = 0$. Оставшееся уравнение (2.94) даст выражение для $\{^1\} s_{rz}$:

$$\{^1\} s_{rz} = \{^1\} f_{s_{rz}}(\xi, \tau) + \rho f_{p,\xi} + 3C_2 \xi \rho - \frac{\mu}{a} \rho(1 - \rho) \text{sign } \xi$$

С учетом силовых граничных условий (2.96) получим

$$\{^1\} f_{s_{rz}} = 0, \quad 3C_2 \xi + \{^0\} f_{p,\xi} = 0$$

$$\{^0\} f_p = \{^0\} g_p(\tau) - \frac{3C_2}{2} \xi^2 = \frac{3C_2}{2} (1 - \xi^2) + \{^0\} p_0(\tau)$$

2.4.2 Развитый процесс динамического деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 1$, который соответствует моменту с сильным влиянием динамики в процессе сдвливания слоя.

Положим $Eu^{-1} = C_1 \alpha$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы (2.21) – (2.26) при a^{-1} и α^0 :

$$-p_{,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.97)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.98)$$

$$-p_{,\rho}^{\{0\}} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} = 0 \quad (2.99)$$

$$-p_{,\xi}^{\{-1\}} + s_{rz,\rho}^{\{0\}} = C_1 \left((\rho - 1) v_{z,\rho}^{\{-1\}} + (1 + \tau) v_{z,\tau}^{\{-1\}} + 2 v_z^{\{-1\}} + v_r^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{-1\}} + v_z^{\{-1\}} v_{z,\xi}^{\{-1\}} \right) \quad (2.100)$$

$$\left(s_{rr}^{\{0\}} \right)^2 + \left(s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right)^2 + s_{rr}^{\{0\}} s_{\theta\theta}^{\{0\}} + \left(s_{rz}^{\{0\}} \right)^2 = 1 \quad (2.101)$$

$$0 = s_{\theta\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (2.102)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{0\}} = 2 s_{rz}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (2.103)$$

$$v_{r,\rho}^{\{0\}} + v_{z,\xi}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.104)$$

Граничные условия (2.3) и (2.10) при этом примут вид

$$v_r^{\{0\}}|_{\rho=0} = 1, \quad v_r^{\{0\}}|_{\rho=1} = 0, \quad |s_{rz}|_{\rho=0} = |s_{rz}|_{\rho=1} = \mu \quad (2.105)$$

Из уравнений (2.97) и (2.98) вытекает

$$p^{\{-1\}} = f_p^{\{-1\}}(\xi, \tau), \quad v_z^{\{-1\}} = f_{v_z}^{\{-1\}}(\xi, \tau).$$

Подставив выражение $v_z^{\{-1\}}$ в уравнение (2.104) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $v_r^{\{0\}}$:

$$v_r^{\{0\}} = f_{v_r}^{\{0\}}(\xi, \tau) - \rho f_{v_z,\xi}^{\{-1\}}$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (2.105) позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$f_{v_r}^{\{0\}} = 1$$

$$f_{v_z}^{\{-1\}} = \xi + g_{v_z}^{\{-1\}}(\tau)$$

В силу рассуждений приведенных в предыдущем пункте можно положить $\{^{-1}\}g_{v_z}(\tau) = 0$. Окончательно получаем

$$\{^{-1}\}v_z = \{^{-1}\}f_{v_z} = \xi \quad (2.106)$$

$$\{^0\}v_r = 1 - \rho \quad (2.107)$$

С учетом (2.106) уравнение (2.100) примет вид

$$-p_{,\xi} + s_{rz,\rho} = C_1(3\xi)$$

Решая его относительно $\{^0\}s_{rz}$ и используя силовые граничные условия (2.105) придем к

$$\{^0\}s_{rz} = \{^0\}f_{s_{rz}}(\xi, \tau) + \rho f_{p,\xi} + 3C_1\rho\xi$$

$$\{^0\}f_{s_{rz}} = \mu\hat{s}, \quad \hat{s} = \pm 1$$

$$\mu\hat{s} + f_{p,\xi} + 3C_1\rho\xi = -\mu\hat{s},$$

$$\{^{-1}\}p = \{^{-1}\}f_p = \{^{-1}\}g_p(\tau) - 2\mu\hat{s}\xi - \frac{3C_1}{2}\xi^2$$

В силу тех же рассуждений, что приводились в 2.2.1 следует положить $\hat{s} = \text{sign } \xi$. Тогда найденные функции можно записать в следующем виде:

$$\{^0\}s_{rz} = -\mu(2\rho - 1)\text{sign } \xi \quad (2.108)$$

$$\{^{-1}\}p = \{^{-1}\}g_p(\tau) - 2\mu|\xi| - \frac{3C_1}{2}\xi^2 = 2\mu(1 - |\xi|) + \frac{3C_1}{2}(1 - \xi^2) + \{^{-1}\}p_0(\tau) \quad (2.109)$$

С учетом найденных функций (2.101) и (2.102) представляют собой алгебраическую систему уравнений относительно $\{^0\}s_{rr}$ и $\{^0\}s_{\theta\theta}$, решив которую, найдем

$$\{^0\}s_{rr} = -\sqrt{1 - \left(\{^0\}s_{rz}\right)^2} = -\sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} \quad (2.110)$$

$$\{^0\}s_{\theta\theta} = 0 \quad (2.111)$$

Подставив все найденные функции в (2.99) и (2.103) и решив дифференциальные уравнения найдем:

$$\{^0\}v_z = \frac{\text{sign } \xi}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} + \{^0\}f_{v_z}(\xi, \tau), \quad (2.112)$$

$$\{^0\}p = \{^0\}s_{rr} + \{^0\}f_p(\xi, \tau) \quad (2.113)$$

Для нахождения неизвестных функций $f_p^{\{0\}}$ и $f_{v_z}^{\{0\}}$ выпишем следующее по α приближение уравнений (2.22) и (2.26), а также граничные условия (2.3) и (2.10):

$$-p_{,\xi}^{\{0\}} + s_{rz,\rho}^{\{1\}} + s_{rz}^{\{0\}}/a = C_1 \left(- \left(1 - \frac{1}{2a} \right) \xi + (1 + \tau) v_{z,\tau}^{\{0\}} + v_z^{\{0\}} + \xi v_{z,\xi}^{\{0\}} \right) \quad (2.114)$$

$$v_{r,\rho}^{\{1\}} + v_r^{\{0\}}/a + v_{z,\xi}^{\{0\}} = 0 \quad (2.115)$$

$$v_r^{\{1\}}|_{\rho=0} = v_r^{\{1\}}|_{\rho=1} = 0, \quad |s_{rz}^{\{1\}}|_{\rho=0} = |s_{rz}^{\{1\}}|_{\rho=1} = 0 \quad (2.116)$$

Из уравнения (2.115) с учетом граничных условий (2.116) найдем

$$v_r^{\{1\}} = f_{v_r}^{\{1\}}(\xi, \tau) - \frac{\rho}{a} \left(1 - \frac{\rho}{2} \right) - \rho f_{v_z,\xi}^{\{0\}}$$

$$f_{v_r}^{\{1\}} = 0, \quad f_{v_z}^{\{0\}} = -\xi/2a + g_{v_z}^{\{0\}}(\tau)$$

Применяя рассуждения, использованные при выводе (2.106), получим $g_{v_z}^{\{0\}} = 0$. Оставшееся уравнение (2.114) после подстановки $v_z^{\{0\}}$ даст выражение для $s_{rz}^{\{1\}}$:

$$s_{rz}^{\{1\}} = f_{s_{rz}}^{\{1\}}(\xi, \tau) + \rho f_{p,\xi}^{\{0\}} + \frac{(3 + 2a)C_1\xi\rho}{2a} - \frac{\mu}{a}\rho(1 - \rho) \operatorname{sign} \xi - \\ - \frac{C_1}{4\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} (2\rho - 1)^2 (1 - 2\rho) + \frac{\arcsin(\mu(1 - 2\rho))}{\mu} \right) \operatorname{sign} \xi$$

С учетом силовых граничных условий (2.116) получим

$$f_{s_{rz}}^{\{1\}} - \frac{C_1}{4\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} + \frac{\arcsin(\mu)}{\mu} \right) \operatorname{sign} \xi = 0$$

$$\frac{C_1}{2\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} + \frac{\arcsin(\mu)}{\mu} \right) \operatorname{sign} \xi - \frac{(3 + 2a)C_1\xi}{2a} + f_{p,\xi}^{\{0\}} = 0$$

$$f_p^{\{0\}} = g_p^{\{0\}}(\tau) + \frac{(3 + 2a)C_1\xi^2}{2a} - \frac{C_1|\xi|}{2\mu^2} \left(\mu\sqrt{1 - \mu^2} + \arcsin(\mu) \right)$$

2.5 Анализ решения для случая, когда радиусы цилиндров порядка длины образующей

Полученные решения (2.86) – (2.93) и (2.106) – (2.113) являются приближенными и с точностью $O(\alpha)$ совпадают, за исключением функции давления, с

квазистатическим решением [77]:

$$p = p_0 + \frac{2\mu}{\alpha} (1 - |\xi|) \tau_s + s_{rr} + O(\alpha) \quad (2.117)$$

$$s_{rr} = -\sqrt{\tau_s^2 - s_{rz}^2} + O(\alpha) \quad (2.118)$$

$$s_{\theta\theta} = O(\alpha) \quad (2.119)$$

$$s_{rz} = -\mu (2\rho - 1) \text{sign } \xi \tau_s + O(\alpha) \quad (2.120)$$

$$v_r = V (1 - \rho) + O(\alpha) \quad (2.121)$$

$$v_z/V = \frac{\xi}{\alpha} + \frac{\text{sign } \xi}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} - \frac{\xi}{2a} + O(\alpha) \quad (2.122)$$

где p_0 имеет смысл гидростатического давления.

Наличие сигнатуры $\text{sign } \xi$ в функции s_{rz} говорит о разрыве решения вблизи сечения $\xi = 0$. Следовательно, разложения (2.11) – (2.14) несправедливы вблизи среднего по простираанию сечения слоя. Кроме того, данное решение неприменимо в зоне краевого эффекта, то есть вблизи сечений $\xi = \pm 1$, где необходимо ставить точные граничные условия. Данные ограничения аналогичны трактуемым в анализе решения классической задачи Прандтля.

Обозначим правую часть уравнения (2.117) как p^{KB} . Для случаев $\beta = 2$ и $\beta = 1$ имеем соответственно:

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{KB}} + \frac{3C_2}{2} (1 - \xi^2) \tau_s \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned} (p|_{\beta=1}) / \tau_s = p^{\text{KB}} / \tau_s + \frac{3C_1}{2\alpha} (1 - \xi^2) + \frac{(3 + 2a)C_1 \xi^2}{2a} - \\ - \frac{C_1 |\xi|}{2\mu^2} \left(\mu \sqrt{1 - \mu^2} + \arcsin(\mu) \right) \end{aligned} \quad (2.124)$$

При сравнении выражений видно, что в случае динамического сдавливания возникает квадратично зависящее от радиуса слагаемое, причем, чем динамичнее происходит процесс, тем более значима становится данная величина. Наличие такой зависимости качественно меняет эпюру давления в слое и увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на плиты.

На графике ниже приведены эпюры давления для различных стадий процесса при следующих параметрах: $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\mu = 1$, $a = 1$.

Пользуясь тем, что в случае $c = 0$ имеет место равенство $\mathcal{V}_0/\pi = (2a + \alpha) h^3/\alpha^2$, где \mathcal{V}_0 – объем слоя, а высота слоя h представима в виде $h = V(t_* - t)$, можно установить зависимость между временем и

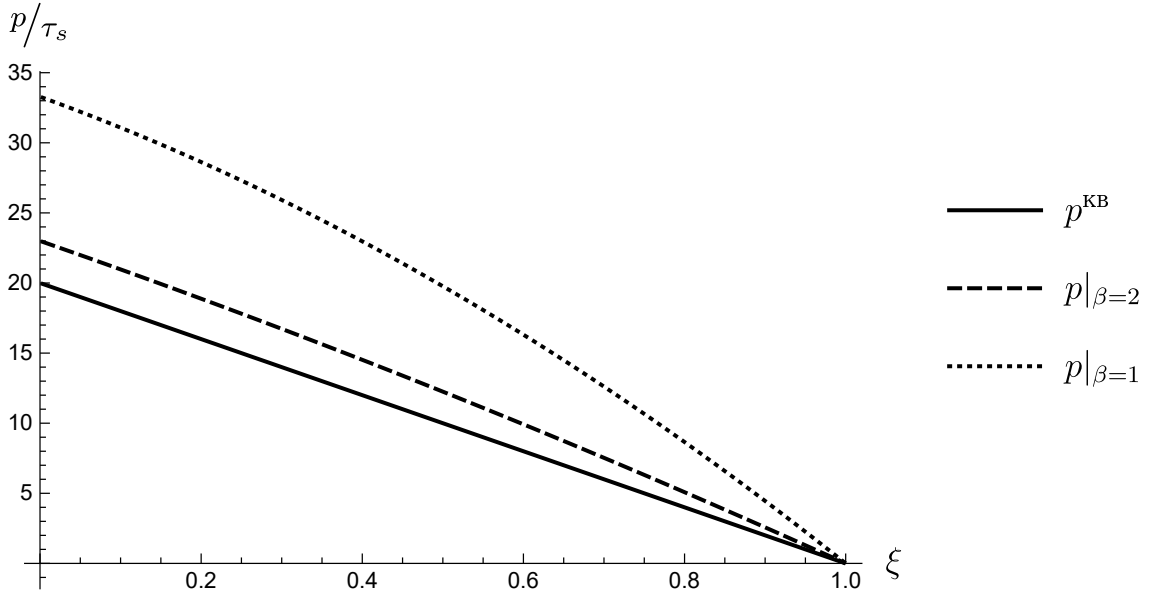


Рисунок 2.3 — Эпюры давления для случая цилиндрического слоя при радиусах цилиндров порядка длины образующей

стадией прессования:

$$t_* - t \sim \frac{\text{Eu}^{-2/3\beta}}{V} \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}_0}{\pi(2a + \text{Eu}^{-1/\beta})}} \quad (2.125)$$

2.6 Построение решения при радиусах цилиндров “промежуточного” порядка малости

При данном соотношении дробь $\frac{\alpha}{\alpha\rho + a\alpha^c}$ с учетом малости параметра примет вид $\frac{\alpha}{\alpha\rho + a\alpha^c} = \frac{\alpha^{1-c}}{a} \left(1 - \frac{\alpha^{1-c}\rho}{a} + \dots\right) = \frac{\alpha^{1-c}}{a} + O(\alpha^{2(1-c)})$. Наличие дробной степени параметра α свидетельствует о неприменимости целочисленных разложений (2.11) — (2.14). В связи с этим первые члены асимптотических разложений должны быть следующие:

$$v_r(r, z, t) = V \left(v_r^{\{0\}} + \alpha^{1-c} v_r^{\{1-c\}} + \dots \right) \quad (2.126)$$

$$v_z(r, z, t) = V \left(\alpha^{-1} v_z^{\{-1\}} + \alpha^{-c} v_z^{\{-c\}} + v_z^{\{0\}} + \alpha^{1-c} v_z^{\{1-c\}} + \dots \right) \quad (2.127)$$

$$s_{ij}(r, z, t) = \tau_s \left(s_{ij}^{\{0\}} + \alpha^{1-c} s_{ij}^{\{1-c\}} + \dots \right), \quad (ij) \in \{rr, rz, \theta\theta\} \quad (2.128)$$

$$p(r, z, t) = \tau_s \left(\alpha^{-1} p^{\{-1\}} + \alpha^{-c} p^{\{-c\}} + p^{\{0\}} + \alpha^{1-c} p^{\{1-c\}} + \dots \right) \quad (2.129)$$

В общем случае, однозначно определить порядок следующего за α^{1-c} члена разложение не представляется возможным: он может быть равен $\alpha^{2(1-c)}$ или α . Вообще говоря, для $c \in (0,1)$ существует счетное количество возможных вариантов разложений, поэтому, не останавливаясь на детальном анализе частных случаев, ограничимся отысканием решений для любого c из заданного интервала для коэффициентов α^{-1} , α^{-c} , α^0 и α^{1-c} .

2.6.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 2$, который соответствует моменту перехода от квазистатического к динамическому режиму деформирования.

Положим $Eu^{-1} = C_2\alpha^2$ и подставим разложения (2.126) – (2.129) в (2.3) – (2.10). Последовательное приравнивание коэффициентов правых и левых частей уравнений полученной системы при a^{-1} и α^0 даст

$$-p_{,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.130)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.131)$$

$$-p_{,\rho}^{\{0\}} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} = 0 \quad (2.132)$$

$$-p_{,\xi}^{\{-1\}} + s_{rz,\rho}^{\{0\}} = 0 \quad (2.133)$$

$$\left(s_{rr}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\theta\theta}^{\{0\}}\right)^2 + s_{rr}^{\{0\}} s_{\theta\theta}^{\{0\}} + \left(s_{rz}^{\{0\}}\right)^2 = 1 \quad (2.134)$$

$$0 = s_{\theta\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (2.135)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{0\}} = 2s_{rz}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (2.136)$$

$$v_{r,\rho}^{\{0\}} + v_{z,\xi}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.137)$$

$$v_r^{\{0\}}|_{\rho=0} = 1, \quad v_r^{\{0\}}|_{\rho=1} = 0, \quad |s_{rz}^{\{0\}}|_{\rho=0} = |s_{rz}^{\{0\}}|_{\rho=1} = \mu \quad (2.138)$$

Процесс решения данной системы полностью приведен в 2.4.1, поэтому не повторяя выкладок приведем лишь финальный результат:

$$v_z^{\{-1\}} = \xi \quad (2.139)$$

$$v_r^{\{0\}} = 1 - \rho \quad (2.140)$$

$$s_{rz}^{\{0\}} = -\mu(2\rho - 1) \text{sign } \xi \quad (2.141)$$

$$\overset{\{-1\}}{p} = 2\mu(1 - |\xi|) + \overset{\{-1\}}{p}_0(\tau) \quad (2.142)$$

$$\overset{\{0\}}{s}_{rr} = -\sqrt{1 - \left(\overset{\{0\}}{s}_{rz}\right)^2} = -\sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} \quad (2.143)$$

$$\overset{\{0\}}{s}_{\theta\theta} = 0 \quad (2.144)$$

$$\overset{\{0\}}{v}_z = \frac{\text{sign } \xi}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} + \overset{\{0\}}{f}_{v_z}(\xi, \tau), \quad (2.145)$$

$$\overset{\{0\}}{p} = \overset{\{0\}}{s}_{rr} + \overset{\{0\}}{f}_p(\xi, \tau) \quad (2.146)$$

Функции $\overset{\{0\}}{f}_{v_z}(\xi, \tau)$ и $\overset{\{0\}}{f}_p(\xi, \tau)$ будут отличаться от ранее найденных и в данном случае останутся неизвестными.

Перейдем к рассмотрению системы при a^{-c} и α^{1-c} :

$$\overset{\{-c\}}{-p}_{,\rho} = 0 \quad (2.147)$$

$$\overset{\{0\}}{s}_{rr} \overset{\{-c\}}{v}_{z,\rho} = 0 \quad (2.148)$$

$$\overset{\{1-c\}}{-p}_{,\rho} + \overset{\{1-c\}}{s}_{rr,\rho} + \left(\overset{\{0\}}{s}_{rr} - \overset{\{0\}}{s}_{\theta\theta}\right)/a = 0 \quad (2.149)$$

$$\overset{\{-c\}}{-p}_{,\xi} + \overset{\{1-c\}}{s}_{rz,\rho} + \overset{\{0\}}{s}_{rz}/a = 0 \quad (2.150)$$

$$\overset{\{1-c\}}{s}_{rr} \left(2 \overset{\{0\}}{s}_{rr} + \overset{\{0\}}{s}_{\theta\theta}\right) + \overset{\{1-c\}}{s}_{\theta\theta} \left(\overset{\{0\}}{s}_{rr} + 2 \overset{\{0\}}{s}_{\theta\theta}\right) + \overset{\{1-c\}}{s}_{rz} \overset{\{0\}}{s}_{rz} = 0 \quad (2.151)$$

$$\overset{\{0\}}{s}_{rr} \overset{\{0\}}{v}_r/a = \overset{\{1-c\}}{s}_{\theta\theta} \overset{\{0\}}{v}_{r,\rho} + \overset{\{0\}}{s}_{\theta\theta} \overset{\{1-c\}}{v}_{r,\rho} \quad (2.152)$$

$$\overset{\{1-c\}}{s}_{rr} \overset{\{0\}}{v}_{z,\rho} + \overset{\{1-c\}}{s}_{rr} \overset{\{0\}}{v}_{z,\rho} = 2 \left(\overset{\{1-c\}}{s}_{rz} \overset{\{0\}}{v}_{r,\rho} + \overset{\{0\}}{s}_{rz} \overset{\{1-c\}}{v}_{r,\rho} \right) \quad (2.153)$$

$$\overset{\{1-c\}}{v}_{r,\rho} + \overset{\{0\}}{v}_r/a + \overset{\{-c\}}{v}_{z,\xi} = 0 \quad (2.154)$$

$$\overset{\{1-c\}}{v}_r|_{\rho=0} = \overset{\{1-c\}}{v}_r|_{\rho=1} = 0, \quad \overset{\{1-c\}}{s}_{rz}|_{\rho=0} = \overset{\{1-c\}}{s}_{rz}|_{\rho=1} = 0 \quad (2.155)$$

Из уравнений (2.147) и (2.148) вытекает

$$\overset{\{-c\}}{p} = \overset{\{-c\}}{f}_p(\xi, \tau), \quad \overset{\{-c\}}{v}_z = \overset{\{-c\}}{f}_{v_z}(\xi, \tau).$$

Подставив выражение $\overset{\{-1\}}{v}_z$ в уравнение (2.154) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $\overset{\{1-c\}}{v}_r$:

$$\overset{\{1-c\}}{v}_r = \overset{\{1-c\}}{f}_{v_r}(\xi, \tau) - \rho \overset{\{-c\}}{f}_{v_z,\xi} - \frac{\rho}{2a} (2 - \rho)$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (2.155) позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$\overset{\{1-c\}}{f}_{v_r} = 0$$

$$\overset{\{-c\}}{f}_{v_z} = -\frac{\xi}{2a} + \overset{\{-c\}}{g}_{v_z}(\tau)$$

В силу рассуждений приведенных в предыдущем пункте можно положить $\{^{-c}\}g_{v_z}(\tau) = 0$. Окончательно получаем

$$\{^{-c}\}v_z = \{^{-c}\}f_{v_z} = -\frac{\xi}{2a} \quad (2.156)$$

$$\{^{1-c}\}v_r = \frac{\rho}{2a}(1 - \rho) \quad (2.157)$$

Решая (2.150) относительно $\{^{1-c}\}s_{rz}$ и используя силовые граничные условия (2.155) приходим к

$$\begin{aligned} \{^{1-c}\}s_{rz} &= \{^{1-c}\}f_{s_{rz}}(\xi, \tau) + \rho \{^{-c}\}f_{p,\xi} - \frac{\mu}{a}\rho(1 - \rho)\text{sign } \xi \\ \{^{1-c}\}f_{s_{rz}} &= 0 \\ \{^{-c}\}f_{p,\xi} &= 0 \end{aligned}$$

и найденные функции запишутся в следующем виде:

$$\{^{1-c}\}s_{rz} = -\frac{\mu}{a}\rho(1 - \rho)\text{sign } \xi \quad (2.158)$$

$$\{^{-c}\}p = \{^{-1}\}f_p = \{^{-c}\}g_p(\tau) = \{^{-c}\}p_0(\tau) \quad (2.159)$$

С учетом найденных функций (2.151) и (2.152) представляют собой алгебраическую систему уравнений относительно $\{^{1-c}\}s_{rr}$ и $\{^{1-c}\}s_{\theta\theta}$, решив которую, найдем

$$\{^{1-c}\}s_{rr} = -\frac{1 - \rho}{2a} \frac{1 - \mu^2(2\rho - 1)(4\rho - 1)}{\sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2}} \quad (2.160)$$

$$\{^{1-c}\}s_{\theta\theta} = \frac{1 - \rho}{a} \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} \quad (2.161)$$

Подставив все найденные функции в (2.149) и (2.153) и решив дифференциальные уравнения найдем:

$$\{^{1-c}\}v_z = \frac{\text{sign } \xi}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} + \{^{1-c}\}f_{v_z}(\xi, \tau), \quad (2.162)$$

$$\begin{aligned} \{^{1-c}\}p &= \frac{1}{4\mu} \left(\mu(2\rho - 1) \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} + \arcsin(\mu(2\rho - 1)) \right) + \\ &\quad + \{^{1-c}\}s_{rr} + \{^{1-c}\}f_p(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (2.163)$$

Для нахождения функций $\{^{1-c}\}f_p$ и $\{^{1-c}\}f_{v_z}$ требуется знание следующего по α приближения, поэтому, аналогично $\{^0\}f_p$ и $\{^0\}f_{v_z}$, они останутся неизвестными.

2.6.2 Развитый процесс динамического деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 1$, который соответствует моменту с сильным влиянием динамики в процессе сдавливания слоя.

Положим $Eu^{-1} = C_1\alpha$ и подставим разложения (2.126) – (2.129) в (2.3) – (2.10). Последовательное приравнивание коэффициентов правых и левых частей уравнений полученной системы при a^{-1} и α^0 даст

$$-p_{,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.164)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.165)$$

$$-p_{,\rho}^{\{0\}} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} = 0 \quad (2.166)$$

$$-p_{,\xi}^{\{-1\}} + s_{rz,\rho}^{\{0\}} = C_1 \left((\rho - 1) v_{z,\rho}^{\{-1\}} + (1 + \tau) v_{z,\tau}^{\{-1\}} + 2 v_z^{\{-1\}} + v_r^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{-1\}} + v_z^{\{-1\}} v_{z,\xi}^{\{-1\}} \right) \quad (2.167)$$

$$\left(s_{rr}^{\{0\}} \right)^2 + \left(s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right)^2 + s_{rr}^{\{0\}} s_{\theta\theta}^{\{0\}} + \left(s_{rz}^{\{0\}} \right)^2 = 1 \quad (2.168)$$

$$0 = s_{\theta\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (2.169)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{0\}} = 2 s_{rz}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (2.170)$$

$$v_{r,\rho}^{\{0\}} + v_{z,\xi}^{\{-1\}} = 0 \quad (2.171)$$

$$v_r^{\{0\}}|_{\rho=0} = 1, \quad v_r^{\{0\}}|_{\rho=1} = 0, \quad |s_{rz}^{\{0\}}|_{\rho=0} = |s_{rz}^{\{0\}}|_{\rho=1} = \mu \quad (2.172)$$

Процесс решения данной системы полностью приведен в 2.4.2, поэтому не повторяя выкладок приведем лишь финальный результат:

$$v_z^{\{-1\}} = \xi \quad (2.173)$$

$$v_r^{\{0\}} = 1 - \rho \quad (2.174)$$

$$s_{rz}^{\{0\}} = -\mu (2\rho - 1) \text{sign } \xi \quad (2.175)$$

$$p^{\{-1\}} = 2\mu (1 - |\xi|) + \frac{3C_1}{2} (1 - \xi^2) + p_0^{\{-1\}}(\tau) \quad (2.176)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} = -\sqrt{1 - \left(s_{rz}^{\{0\}} \right)^2} = -\sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} \quad (2.177)$$

$$s_{\theta\theta}^{\{0\}} = 0 \quad (2.178)$$

$$v_z^{\{0\}} = \frac{\text{sign } \xi}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} + f_{v_z}^{\{0\}}(\xi, \tau), \quad (2.179)$$

$$p^{\{0\}} = s_{rr}^{\{0\}} + f_p^{\{0\}}(\xi, \tau) \quad (2.180)$$

Функции $f_{v_z}^{\{0\}}(\xi, \tau)$ и $f_p^{\{0\}}(\xi, \tau)$ будут отличаться от ранее найденных и в данном случае останутся неизвестными.

Перейдем к рассмотрению системы при a^{-c} и α^{1-c} :

$$-p_{,\rho}^{\{-c\}} = 0 \quad (2.181)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{-c\}} = 0 \quad (2.182)$$

$$-p_{,\rho}^{\{1-c\}} + s_{rr,\rho}^{\{1-c\}} + \left(s_{rr}^{\{0\}} - s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right) / a = 0 \quad (2.183)$$

$$-p_{,\xi}^{\{-c\}} + s_{rz,\rho}^{\{1-c\}} + s_{rz}^{\{0\}} / a = C_1 \left(-\frac{1}{2a} v_z^{\{-1\}} + 2c v_z^{\{-c\}} + v_z^{\{-c\}} v_{z,\xi}^{\{-1\}} + v_z^{\{-1\}} v_{z,\xi}^{\{-c\}} + \right. \\ \left. + (\rho - 1) v_{z,\rho}^{\{-1\}} + v_\rho^{\{1-c\}} v_{z,\rho}^{\{-1\}} + v_\rho^{\{0\}} v_{z,\rho}^{\{-c\}} + (1 + \tau) v_{z,\tau}^{\{-c\}} \right) \quad (2.184)$$

$$s_{rr}^{\{1-c\}} \left(2 s_{rr}^{\{0\}} + s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right) + s_{\theta\theta}^{\{1-c\}} \left(s_{rr}^{\{0\}} + 2 s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right) + s_{rz}^{\{1-c\}} s_{rz}^{\{0\}} = 0 \quad (2.185)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_r^{\{0\}} / a = s_{\theta\theta}^{\{1-c\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} + s_{\theta\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{1-c\}} \quad (2.186)$$

$$s_{rr}^{\{1-c\}} v_{z,\rho}^{\{0\}} + s_{rr}^{\{1-c\}} v_{z,\rho}^{\{0\}} = 2 \left(s_{rz}^{\{1-c\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} + s_{rz}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{1-c\}} \right) \quad (2.187)$$

$$v_{r,\rho}^{\{1-c\}} + v_r^{\{0\}} / a + v_{z,\xi}^{\{-c\}} = 0 \quad (2.188)$$

$$v_r^{\{1-c\}} |_{\rho=0} = v_r^{\{1-c\}} |_{\rho=1} = 0, \quad s_{rz}^{\{1-c\}} |_{\rho=0} = s_{rz}^{\{1-c\}} |_{\rho=1} = 0 \quad (2.189)$$

Из уравнений (2.181) и (2.182) вытекает

$$p = f_p^{\{-c\}}(\xi, \tau), \quad v_z = f_{v_z}^{\{-c\}}(\xi, \tau).$$

Подставив выражение $v_z^{\{-1\}}$ в уравнение (2.188) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $v_r^{\{1-c\}}$:

$$v_r^{\{1-c\}} = f_{v_r}^{\{1-c\}}(\xi, \tau) - \rho f_{v_z,\xi}^{\{-c\}} - \frac{\rho}{2a} (2 - \rho)$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (2.189) позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$f_{v_r}^{\{1-c\}} = 0$$

$$f_{v_z}^{\{-c\}} = -\frac{\xi}{2a} + g_{v_z}^{\{-c\}}(\tau)$$

В силу рассуждений приведенных в предыдущем пункте можно положить $g_{v_z}^{\{-c\}}(\tau) = 0$. Окончательно получаем

$$v_z^{\{-c\}} = f_{v_z}^{\{-1\}} = -\frac{\xi}{2a} \quad (2.190)$$

$$v_r^{\{1-c\}} = \frac{\rho}{2a} (1 - \rho) \quad (2.191)$$

Решая (2.184) относительно $s_{rz}^{\{1-c\}}$ и используя силовые граничные условия (2.189) придем к

$$\begin{aligned} s_{rz}^{\{1-c\}} &= f_{s_{rz}}^{\{1-c\}}(\xi, \tau) + \rho f_{p,\xi}^{\{1-c\}} - \frac{\mu}{a} \rho (1 - \rho) \operatorname{sign} \xi - \frac{C_1}{2a} (3 + 2c) \xi \rho \\ f_{s_{rz}}^{\{1-c\}} &= 0 \\ f_{p,\xi}^{\{1-c\}} - \frac{C_1}{2a} (3 + 2c) \xi &= 0 \end{aligned}$$

и найденные функции запишутся в следующем виде:

$$s_{rz}^{\{1-c\}} = -\frac{\mu}{a} \rho (1 - \rho) \operatorname{sign} \xi \quad (2.192)$$

$$p^{\{1-c\}} = f_p^{\{1-c\}} = \frac{C_1}{2a} (3 + 2c) \xi^2 + g_p^{\{1-c\}}(\tau) = \frac{C_1}{2a} (3 + 2c) \xi^2 + p_0^{\{1-c\}}(\tau) \quad (2.193)$$

С учетом найденных функций (2.185) и (2.186) представляют собой алгебраическую систему уравнений относительно $s_{rr}^{\{1-c\}}$ и $s_{\theta\theta}^{\{1-c\}}$, решив которую, найдем

$$s_{rr}^{\{1-c\}} = -\frac{1 - \rho}{2a} \frac{1 - \mu^2 (2\rho - 1) (4\rho - 1)}{\sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2}} \quad (2.194)$$

$$s_{\theta\theta}^{\{1-c\}} = \frac{1 - \rho}{a} \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} \quad (2.195)$$

Подставив все найденные функции в (2.183) и (2.187) и решив дифференциальные уравнения найдем:

$$v_z^{\{1-c\}} = \frac{\operatorname{sign} \xi}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} + f_{v_z}^{\{1-c\}}(\xi, \tau), \quad (2.196)$$

$$\begin{aligned} p^{\{1-c\}} &= \frac{1}{4\mu} \left(\mu (2\rho - 1) \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} + \arcsin (\mu (2\rho - 1)) \right) + \\ &+ s_{rr}^{\{1-c\}} + f_p^{\{1-c\}}(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (2.197)$$

Для нахождения функций $f_p^{\{1-c\}}$ и $f_{v_z}^{\{1-c\}}$ требуется знание следующего по α приближения, поэтому, аналогично $f_p^{\{0\}}$ и $f_{v_z}^{\{0\}}$, они останутся неизвестными.

2.7 Анализ решения для случая, когда радиусы цилиндров “промежуточного” порядка малости

Полученные решения (2.139) – (2.146), (2.156) – (2.163) и (2.173) – (2.180), (2.190) – (2.197) являются приближенными и с точностью $O(\alpha^{1-c})$

совпадают, за исключением функции давления, с квазистатическим решением [77]:

$$p/\tau_s = p_0 + \frac{2\mu}{\alpha} (1 - |\xi|) - \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} + \alpha^{1-c} \left(\frac{1}{4\mu} \left(\mu (2\rho - 1) \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} + \arcsin (\mu (2\rho - 1)) \right) - \frac{1 - \rho}{2a} \frac{1 - \mu^2 (2\rho - 1) (4\rho - 1)}{\sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2}} \right) + O(\alpha^{1-c}) \quad (2.198)$$

$$s_{rr}/\tau_s = -\sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} - \alpha^{1-c} \frac{1 - \rho}{2a} \frac{1 - \mu^2 (2\rho - 1) (4\rho - 1)}{\sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2}} + O(\alpha^{1-c}) \quad (2.199)$$

$$s_{\theta\theta}/\tau_s = \alpha^{1-c} \frac{1 - \rho}{a} \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} + O(\alpha^{1-c}) \quad (2.200)$$

$$s_{rz}/\tau_s = -\mu (2\rho - 1) \operatorname{sign} \xi - \alpha^{1-c} \frac{\mu}{a} \rho (1 - \rho) \operatorname{sign} \xi + O(\alpha^{1-c}) \quad (2.201)$$

$$v_r/V = 1 - \rho + \alpha^{1-c} \frac{\rho}{2a} (1 - \rho) + O(\alpha^{1-c}) \quad (2.202)$$

$$v_z/V = \frac{\xi}{\alpha} + \frac{\operatorname{sign} \xi}{\mu} \sqrt{1 - \mu^2 (2\rho - 1)^2} - \alpha^{1-c} \frac{\xi}{2a} + O(\alpha^{1-c}) \quad (2.203)$$

где p_0 имеет смысл гидростатического давления.

Наличие сигнатуры $\operatorname{sign} \xi$ в функции s_{rz} говорит о разрыве решения вблизи сечения $\xi = 0$. Следовательно, разложения (2.126) – (2.129) несправедливы вблизи среднего по простираанию сечения слоя. Кроме того, данное решение неприменимо в зоне краевого эффекта, то есть вблизи сечений $\xi = \pm 1$, где необходимо ставить точные граничные условия. Данные ограничения аналогичны трактуемым в анализе решения классической задачи Прандтля.

Обозначим правую часть уравнения (2.198) как p^{KB}/τ_s . Для случаев $\beta = 2$ и $\beta = 1$ имеем соответственно:

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{KB}} \quad (2.204)$$

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{KB}} + \frac{3C_1}{2\alpha} (1 - \xi^2) \tau_s + \frac{C_1}{2a\alpha^c} (3 + 2c) \xi^2 \tau_s \quad (2.205)$$

В силу ограниченности рассматриваемых членов разложения, $p|_{\beta=2}$ совпадает с квазистатическим решением с точностью до неизвестных функций интегрирования в выражении (2.163), однако при более динамичной стадии прессования

$\beta = 1$ возникает квадратично зависящее от радиуса слагаемое. Наличие такой зависимости качественно меняет эпюру давления в слое и увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на плиты.

На графике ниже приведены эпюры давления для различных стадий процесса при следующих параметрах: $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $\mu = 1$, $a = 1$, $c = 0.5$.

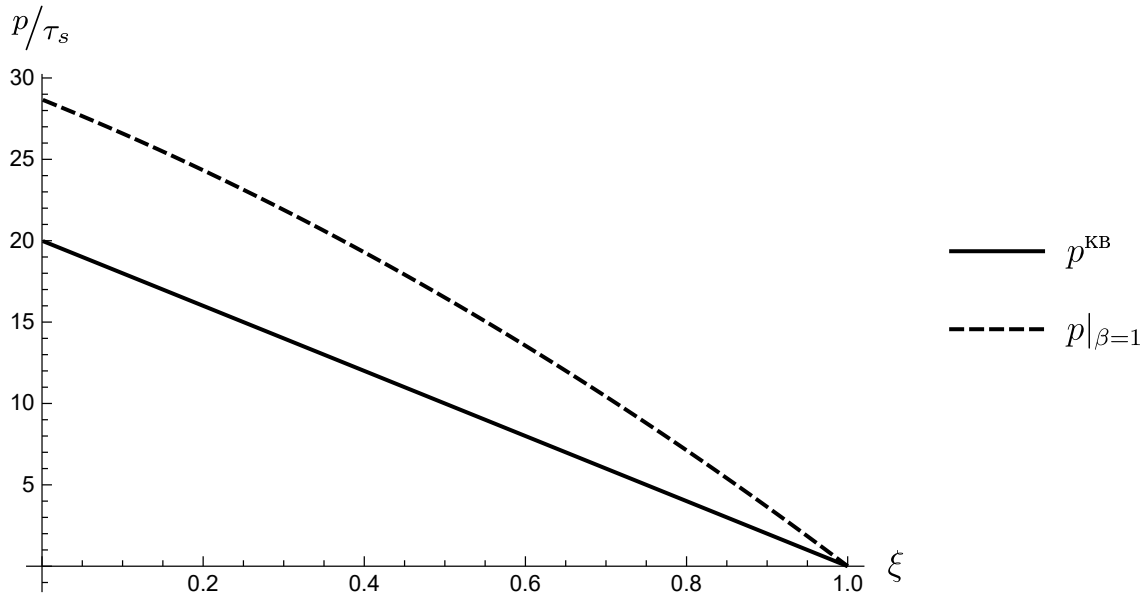


Рисунок 2.4 — Эпюры давления для случая цилиндрического слоя при радиусах “промежуточного” порядка

Пользуясь тем, что в случае $c \in (0,1)$ имеет место равенство $\mathcal{V}_0/\pi = (2a\alpha^c + \alpha)h^3/\alpha^2$, где \mathcal{V}_0 — объем слоя, а высота слоя h представима в виде $h = V(t_* - t)$, можно установить зависимость между временем и стадией прессования:

$$t_* - t \sim \frac{Eu^{-1/3\beta}}{V} \sqrt[3]{\frac{\mathcal{V}_0}{\pi(2aEu^{(1-c)/3\beta} + 1)}} \quad (2.206)$$

Глава 3. Сдавливание сферического идеально жесткопластического слоя

На основе анализа классической задачи Прандтля [3] получены значительные результаты связанные с теорией течения по поверхностям, которые имеют широкое применение для решения технологических задач. Одним из обобщений данной задачи является случай осесимметричного меридионального течения со стоком между двумя концентрическими шероховатыми сферами [78]. Решение данной задачи применимо в различных технологиях изготовления тонких сферических тел, например в штамповке взрывом. В данной постановке задачи исследуется влияние динамических эффектов в процессе формирования изделия методом прессования. Материалы главы содержатся в публикации [107].

3.1 Постановка задачи и асимптотические разложения

Пусть течение слоя заключенного между двумя концентрическими сферами происходит в области

$$\Omega_t = \{0 \leq r \leq R(t) + h(t), 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}, \quad (3.1)$$

с границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем $h(t) \ll R(t)$ для любого $t \geq 0$. Исключая из рассмотрения начальные упругие деформации, вязкость и незначительное уплотнение, материал примем несжимаемым идеально жесткопластическим, удовлетворяющим тензорно линейным определяющим соотношениям и скалярному определяющему соотношению – квадратичному критерию Мизеса-Генки $\sigma_u = \sigma_s$, где $\sigma_u = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}}$ – интенсивность напряжения, \underline{s} – девиатор напряжения, σ_s – предел текучести. В силу несжимаемости его плотность ρ остаётся неизменной.

В процессе прессования внешняя сфера остаётся неподвижной, а внутренняя радиально расширяется с постоянной скоростью, выдавливая материал через сток $\theta = \pi$.

Скорость расширения внутренней сферы обозначим V , поэтому кинематическое условие непротекания сквозь границы Γ_1 и Γ_2 имеет вид

$$v_r|_{r=R} = V, \quad v_r|_{r=R+h} = 0 \quad (3.2)$$

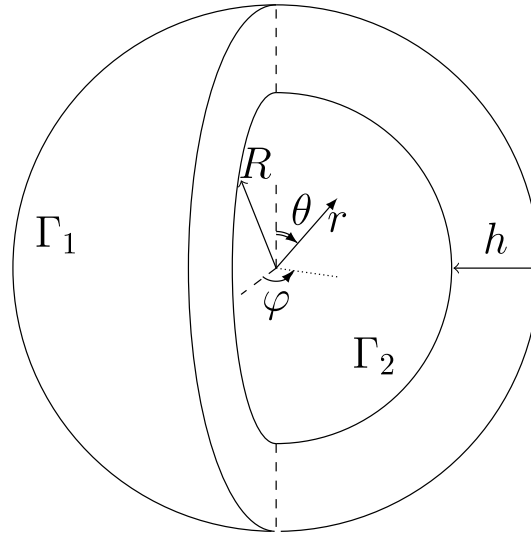


Рисунок 3.1 — Деформируемый сферический слой

Касательная составляющая скорости (в данном случае v_θ) на указанных границах идеальной среды, как известно, не задаётся.

В некоторый момент времени $0 < t < h_0/V = t_*$, где t_* – момент схлопывания слоя, относительно шести функций – независимых компонент девиатора напряжений s_{rr} , $s_{r\theta}$ и $s_{\theta\theta}$, давления p и компонент скорости v_r и v_θ – должна выполняться замкнутая система уравнений динамической теории идеальной пластичности для цилиндрических координат:

$$\begin{aligned} -p_{,r} + s_{rr,r} + \frac{1}{r}(s_{r\theta,\theta} + 3s_{rr} + s_{r\theta} \operatorname{ctg}(\theta)) &= \\ &= \rho \left(v_{r;t} + v_r v_{r,r} + \frac{1}{r} v_\theta v_{r,\theta} - \frac{1}{r} v_\theta^2 \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} p_{,\theta} + s_{r\theta,r} + \frac{1}{r}(s_{\theta\theta,\theta} + 3s_{r\theta} + (s_{rr} + 2s_{\theta\theta}) \operatorname{ctg}(\theta)) &= \\ &= \rho \left(v_{\theta;t} + v_r v_{\theta,r} + \frac{1}{r} v_\theta v_{\theta,\theta} - \frac{1}{r} v_\theta v_r \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$s_{rr}^2 + s_{\theta\theta}^2 + s_{rr} s_{\theta\theta} + s_{r\theta}^2 = \tau_s^2 \quad (3.5)$$

$$s_{rr}(v_{\theta,\theta} + v_r)/r = s_{\theta\theta} v_{r,r} \quad (3.6)$$

$$s_{rr}(v_{\theta,r} + (v_{r,\theta} - v_\theta)/r) = 2s_{r\theta} v_{r,r} \quad (3.7)$$

$$v_{r,r} + (2v_r + v_{\theta,\theta} + v_\theta \operatorname{ctg}(\theta))/r = 0 \quad (3.8)$$

Кроме выполнения условия (3.2) на жестких контактирующих поверхностях потребуем, что бы модуль касательного напряжения $s_{r\theta}$ достигал на границах Γ_1 и Γ_2 своего максимального значения:

$$|s_{r\theta}|_{r=R} = |s_{r\theta}|_{r=R+h} = \mu(\theta)\tau_s, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (3.9)$$

где μ – шероховатость прессы. Абсолютной шероховатости, или полному сцеплению прессы с материалом, соответствует значение $\mu = 1$.

Введем малый параметр $\alpha = \frac{h(t)}{R(t)} \ll 1$ и проведем разложение всех неизвестных величин, входящих в систему уравнений (3.3) – (3.8), в ряды по целым степеням параметра:

$$v_{\theta}(r, \theta, t) = V \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \{v_{\theta}\}^k, \quad N \geq 1 \quad (3.10)$$

$$v_r(r, \theta, t) = V \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_r\}^k \quad (3.11)$$

$$s_{ij}(r, \theta, t) = \tau_s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{s_{ij}\}^k, \quad (ij) \in \{rr, r\theta, \theta\theta\} \quad (3.12)$$

$$p(r, \theta, t) = \tau_s \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^k \{p\}^k, \quad M \geq 1 \quad (3.13)$$

Коэффициенты рядов (3.10) – (3.13) – безразмерны и являются функциями безразмерных координат ρ, θ, τ

$$\rho = \frac{r - R}{h}, \quad \tau = V \frac{t}{h} \quad (3.14)$$

Наличие в (3.10) – (3.13) членов $\alpha^{-n} \{v_{\theta}\}^k$ и $\alpha^{-m} \{p\}^k$ обусловлено стремлением v_r и p к бесконечности, при $\alpha \rightarrow 0$, что ясно из физических соображений. Используя равенство $\dot{R} = -\dot{h} = V$ выразим малый параметр и координаты (3.14) как эволюционные функции:

$$\dot{\alpha} = \left(\frac{h}{R} \right)^{\cdot} = \frac{\dot{h}R - h\dot{R}}{h^2} = -\frac{V}{h} \alpha (1 + \alpha) \quad (3.15)$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{r - R}{h} \right)^{\cdot} = \frac{\dot{R}h - (r - R)\dot{h}}{h^2} = -\frac{V}{h} (1 - \rho) \quad (3.16)$$

$$\dot{\tau} = \left(V \frac{t}{h} \right)^{\cdot} = V \frac{h - t\dot{h}}{h^2} = \frac{V}{h} (1 + \tau) \quad (3.17)$$

Подставляя выражения (3.10) – (3.13) в систему (3.3) – (3.8) и учитывая, что полная производная по времени представляется в виде

$$v_{i;t}^{\{k\}} = v_{i,\rho}^{\{k\}} \dot{\rho} + v_{i,\tau}^{\{k\}} \dot{\tau}$$

получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
& -\sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^k p_{,\rho}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{rr,\rho}^{\{k\}} + \frac{\alpha}{1+\alpha\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(s_{r\theta,\theta}^{\{k\}} + 3 s_{rr}^{\{k\}} + s_{r\theta}^{\{k\}} \operatorname{ctg}(\theta) \right) = \\
& = \frac{\varrho V^2}{\tau_s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left((1-\rho) v_{r,\rho}^{\{k\}} + v_{r,\theta}^{\{k\}} + (1+\tau) v_{r,\tau}^{\{k\}} - (1+\alpha) v_r^{\{k\}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_{r,\rho}^{\{k\}} + \frac{\alpha}{1+\alpha\rho} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{\theta}^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_{r,\theta}^{\{k\}} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{\theta}^{\{k\}} \right)^2 \right) \right) \tag{3.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha}{1+\alpha\rho} \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^k p_{,\theta}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{r\theta,\rho}^{\{k\}} + \frac{\alpha}{1+\alpha\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(s_{\theta\theta,\theta}^{\{k\}} + 3 s_{r\theta}^{\{k\}} + \right. \\
& \quad \left. + \left(s_{rr}^{\{k\}} + 2s_{\theta\theta}^{\{k\}} \right) \operatorname{ctg}(\theta) \right) = \\
& = \frac{\varrho V^2}{\tau_s} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \left((1-\rho) v_{\theta,\rho}^{\{k\}} + v_{\theta,\theta}^{\{k\}} + (1+\tau) v_{\theta,\tau}^{\{k\}} - (1+\alpha) v_{\theta}^{\{k\}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{\theta,\rho}^{\{k\}} + \frac{\alpha}{1+\alpha\rho} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{\theta}^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_{r,\theta}^{\{k\}} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{\theta}^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}} \right) \right) \tag{3.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{rr}^{\{k\}} \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{\theta\theta}^{\{k\}} \right) + \\
& \quad + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{rr}^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{\theta\theta}^{\{k\}} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{r\theta}^{\{k\}} \right)^2 = 1 \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{rr}^{\{k\}} \frac{\alpha}{1+\alpha\rho} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{\theta,\theta}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_r^{\{k\}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{\theta\theta}^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_{r,\rho}^{\{k\}} \tag{3.21}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{rr}^{\{k\}} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{\theta,\rho}^{\{k\}} + \frac{\alpha}{1+\alpha\rho} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_{r,\theta}^{\{k\}} - \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{\theta}^{\{k\}} \right) \right) = \tag{3.22}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{r\theta}^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_{r,\rho}^{\{k\}} \tag{3.23}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_{r,\rho}\}^{(k)} + \frac{\alpha}{1 + \alpha\rho} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \{v_r\}^{(k)} + \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \left(\{v_{\theta,\theta}\}^{(k)} + \{v_{\theta}\}^{(k)} \operatorname{ctg}(\theta) \right) \right) = 0 \quad (3.24)$$

Возникший в правой части уравнений (3.18) и (3.19) коэффициент равен обратному числу Эйлера

$$Eu^{-1} = \frac{\rho V^2}{\tau_s}.$$

Данная величина мала и как видно из её определения фиксирована. По сравнению с ней порядок малости $\alpha(t)$ при течении времени от 0 до t_* растёт до бесконечности. Это позволяет записать

$$Eu^{-1} = O(\alpha^\beta(t)), \text{ причем } \beta \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_*$$

Применительно к динамическому анализу интерес представляет $0 < \beta \leq 2$. Отыскание решений проведем для целочисленных значений входящих в этот диапазон.

Обратимся к системе двух уравнений (3.21) и (3.22). Принимая во внимание малость параметра α и пользуясь разложением в ряд Тейлора

$$\frac{1}{1 + \alpha\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha\rho)^k$$

из (3.21) получаем, что $\{v_{\theta,\theta}\}^{(-N)} = 0$, а из уравнения (3.22) следует $\{v_{\theta,\rho}\}^{(-N)} = 0$. Таким образом $\{v_{\theta}\}^{(-N)} = \text{const}$, и, исключая вращение слоя как твердого тела, окончательно получаем, что $\{v_{\theta}\}^{(-N)} = 0$. Аналогичные рассуждения применимы последовательно для $\{v_{\theta}\}^{(-N+1)}$, затем $\{v_{\theta}\}^{(-N+2)}$ и далее вплоть до $\{v_{\theta}\}^{(-2)}$. Учитывая, что первый ненулевой член компоненты скорости $\{v_{\theta}\}^{(-1)}$, и принимая, что $\beta \geq 1$ определим из уравнений (3.18) и (3.19) порядок малости для функции давления p . Для $M \geq 2$ имеем:

$$\{-p_{,\rho}\}^{(-M)} = 0, \quad \{-p_{,\theta}\}^{(-M)} = 0 \text{ и, следовательно, } \{p\}^{(-M)} = \{p_0\}^{(-M)}(\tau)$$

Здесь $\{p_0\}^{(-M)}$ – гидростатическая постоянная, не дающая вклад в уравнение движения и однозначно определяемая заданием внешнего давления. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что $M = 1$.

3.2 Построение решения

3.2.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 2$, который соответствует моменту перехода от квазистатического к динамическому режиму деформирования.

Положим $E\alpha^{-1} = C_2\alpha^2$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы ф-л. (3.18)–(3.22) и (3.24) при α^{-1} и α^0 :

$$-p_{,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (3.25)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{\theta,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (3.26)$$

$$-p_{,\rho}^{\{0\}} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} = 0 \quad (3.27)$$

$$-p_{,\theta}^{\{-1\}} + s_{r\theta,\rho}^{\{0\}} = 0 \quad (3.28)$$

$$\left(s_{rr}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{\theta\theta}^{\{0\}}\right)^2 + s_{rr}^{\{0\}} s_{\theta\theta}^{\{0\}} + \left(s_{r\theta}^{\{0\}}\right)^2 = 1 \quad (3.29)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} = s_{\theta\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (3.30)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} \left(v_{\theta,\rho}^{\{0\}} - v_{\theta}^{\{-1\}} \right) = 2 s_{r\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (3.31)$$

$$v_{r,\rho}^{\{0\}} + v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} + v_{\theta}^{\{-1\}} \operatorname{ctg}(\theta) = 0 \quad (3.32)$$

Граничные условия (3.2) и (3.9) при этом примут вид

$$v_r^{\{0\}}|_{\rho=0} = 1, \quad v_r^{\{0\}}|_{\rho=1} = 0, \quad |s_{r\theta}^{\{0\}}|_{\rho=0} = |s_{r\theta}^{\{0\}}|_{\rho=1} = \mu(\theta) \quad (3.33)$$

Из уравнений (3.25) и (3.26) вытекает

$$p^{\{-1\}} = f_p^{\{-1\}}(\theta, \tau), \quad v_{\theta}^{\{-1\}} = f_{v_{\theta}}^{\{-1\}}(\theta, \tau).$$

Подставив выражение $v_r^{\{-1\}}$ в уравнение (3.32) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $v_r^{\{0\}}$:

$$v_r^{\{0\}} = f_{v_r}^{\{0\}}(\rho, \tau) - \rho \left(f_{v_{\theta,\theta}}^{\{-1\}} + f_{v_{\theta}}^{\{-1\}} \operatorname{ctg}(\theta) \right)$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (3.33) и использование их линейной комбинации позволяет определить неизвестные

функции интегрирования:

$$\begin{aligned} \{0\} f_{v_z} &= 1 \\ \{^{-1}\} f_{v_{\theta,\theta}} + \{^{-1}\} f_{v_{\theta}} \operatorname{ctg}(\theta) &= 1 \\ \{^{-1}\} f_{v_{\theta}} &= -\operatorname{ctg}(\theta) + \frac{\{^{-1}\} g_{v_{\theta}}(\tau)}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

В силу требования ограниченности членов разложения, следует положить $\{^{-1}\} g_{v_{\theta}} = 1$. Окончательно получаем

$$\{^{-1}\} v_{\theta} = \{^{-1}\} f_{v_{\theta}} = -\operatorname{ctg}(\theta) + \frac{1}{\sin(\theta)} = \operatorname{tg}(\theta/2) \quad (3.34)$$

$$\{0\} v_r = 1 - \rho \quad (3.35)$$

Решая (3.28) относительно $\{0\} s_{r\theta}$ и используя силовые граничные условия (3.33) приходим к

$$\begin{aligned} \{0\} s_{r\theta} &= \{0\} f_{s_{r\theta}}(\theta, \tau) + \rho \{^{-1}\} f_{p,\theta} \\ \{0\} f_{s_{r\theta}} &= \mu \hat{s}, \quad \hat{s} = \pm 1 \\ \mu \hat{s} + \{^{-1}\} f_{p,\xi} &= -\mu \hat{s} \\ \{^{-1}\} p = \{^{-1}\} f_p &= \{^{-1}\} g_p(\tau) - 2\hat{s} \int_0^{\theta} \mu(\xi) d\xi \end{aligned}$$

В соответствии с физико-механическим смыслом процесса сжатия и растекания слоя сингулярная составляющая давления $\{^{-1}\} p$ максимальна в центре слоя, то есть в окрестности $\theta = 0$, и убывает при движении к границе $\theta = \pi$. Данное обстоятельство позволяет определить, что $\hat{s} = 1$ и тогда окончательно имеем

$$\{0\} s_{r\theta} = -\mu(2\rho - 1) \quad (3.36)$$

$$\{^{-1}\} p = \{^{-1}\} g_p(\tau) - 2 \int_0^{\theta} \mu(\xi) d\xi \quad (3.37)$$

С учетом найденных функций (3.29) и (3.30) представляют собой алгебраическую систему уравнений относительно $\{0\} s_{rr}$ и $\{0\} s_{\theta\theta}$, решив которую, найдем

$$\{0\} s_{rr} = -\frac{\sin^2(\theta) \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2}}{\sqrt{1 - \cos(\theta)} \sqrt{1 - \cos^3(\theta)}} \quad (3.38)$$

$$\{0\} s_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)}}{\sqrt{1 - \cos^3(\theta)}} \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} \quad (3.39)$$

Выбор знака в (3.38) и (3.39) обусловлен тем, что в процессе сжатия компонента s_{rr} девиатора напряжений в главном по α приближении всюду в слое должна быть отрицательна. Тогда кольцевая компонента $s_{\theta\theta}^{\{0\}}$ всюду положительна, а микропрофиль осевой скорости $v_\theta^{\{0\}}$ по толщине будет выпуклым в направлении движения частиц. Подставив все найденные функции в (3.27) и (3.31) и решив дифференциальные уравнения найдем:

$$v_\theta^{\{0\}} = \rho \operatorname{tg}(\theta/2) + \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)}\sqrt{1 - \cos^3(\theta)}}{\mu \sin^2(\theta)} \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} + f_{v_\theta}^{\{0\}}(\theta, \tau) \quad (3.40)$$

$$p^{\{0\}} = s_{rr}^{\{0\}} + f_p^{\{0\}}(\theta, \tau) \quad (3.41)$$

Для нахождения неизвестных функций $f_p^{\{0\}}$ и $f_{v_\theta}^{\{0\}}$ выпишем следующее по α приближение уравнений (3.19) и (3.24), а также граничные условия (3.2) и (3.9):

$$-p_{,\theta}^{\{0\}} + \rho p_{,\theta}^{\{-1\}} + s_{r\theta,\rho}^{\{1\}} + s_{\theta\theta,\theta}^{\{0\}} + 3s_{r\theta}^{\{0\}} + (s_{rr}^{\{0\}} + 2s_{\theta\theta}^{\{0\}}) \operatorname{ctg}(\theta) = C_2 (v_\theta^{\{-1\}} + v_\theta^{\{-1\}} v_{\theta,\theta}^{\{-1\}}) \quad (3.42)$$

$$v_{r,\rho}^{\{1\}} + 2v_r^{\{0\}} + v_{\theta,\theta}^{\{0\}} - \rho v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} + (v_\theta^{\{0\}} - \rho v_\theta^{\{-1\}}) \operatorname{ctg}(\theta) = 0 \quad (3.43)$$

$$v_r^{\{1\}}|_{\rho=0} = v_r^{\{1\}}|_{\rho=1} = 0, \quad |s_{r\theta}|_{\rho=0} = |s_{r\theta}|_{\rho=1} = 0 \quad (3.44)$$

Функция $v_r^{\{1\}}$ является непрерывной, поэтому имеет место равенство

$$0 = v_r^{\{1\}}|_{\rho=1} - v_r^{\{1\}}|_{\rho=0} = \int_0^1 v_{r,\rho}^{\{1\}} d\rho = - \int_0^1 \left(2v_r^{\{0\}} + v_{\theta,\theta}^{\{0\}} - \rho v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} + (v_\theta^{\{0\}} - \rho v_\theta^{\{-1\}}) \operatorname{ctg}(\theta) \right) d\rho \quad (3.45)$$

Введем обозначение

$$\zeta = \int_0^1 (v_\theta^{\{0\}} - \rho v_\theta^{\{-1\}}) d\rho = \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)}\sqrt{1 - \cos^3(\theta)}}{\mu \sin^2(\theta)} \left(\arcsin(\mu) + \mu\sqrt{1 - \mu^2} \right) + f_{v_\theta}^{\{0\}}(\theta, \tau)$$

Тогда выражение (3.45) перепишется в виде

$$1 + \zeta_{,\theta} + \zeta \operatorname{ctg}(\theta) = 0,$$

Его решением будет

$$\zeta = \operatorname{ctg}(\theta) + \frac{g_\zeta(\tau)}{\sin(\theta)}$$

В силу требования ограниченности членов разложения, следует положить $g_\zeta = 1$. Таким образом получаем выражение для $f_{v_\theta}^{\{0\}}$:

$$f_{v_\theta}^{\{0\}} = -\frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)}\sqrt{1 - \cos^3(\theta)}}{\mu \sin^2(\theta)} \left(\arcsin(\mu) + \mu\sqrt{1 - \mu^2} \right) - \operatorname{tg}(\theta/2) \quad (3.46)$$

Аналогичные операции проведем над функцией $s_{r\theta}^{\{1\}}$:

$$\begin{aligned} 0 &= s_{r\theta}^{\{1\}}|_{\rho=1} - s_{r\theta}^{\{1\}}|_{\rho=0} = \int_0^1 s_{r\theta,\rho}^{\{1\}} d\rho = \\ &= -\int_0^1 \left(-f_{p,\theta}^{\{0\}} - s_{rr,\theta}^{\{0\}} + s_{\theta\theta,\theta}^{\{0\}} + 2\rho\mu + 3 s_{r\theta}^{\{0\}} + \right. \\ &+ \left. \left(s_{rr}^{\{0\}} + 2 s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right) \operatorname{ctg}(\theta) - C_2 \left(v_\theta^{\{-1\}} + v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} \right) \right) d\rho = \\ &= -f_{p,\theta}^{\{0\}} + \mu - C_2 \left(1 + \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) \operatorname{tg}(\theta/2) + \\ &+ \int_0^1 \left(s_{\theta\theta,\theta}^{\{0\}} - s_{rr,\theta}^{\{0\}} + \left(s_{rr}^{\{0\}} + 2 s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right) \operatorname{ctg}(\theta) \right) d\rho = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Пользуясь тем, что $s_{aa}^{\{0\}} = K_{aa}(\theta)\sqrt{1 - \mu^2}(2\rho - 1)^2$, выразим интегралы от диагональных компонент девиатора напряжений:

$$\int_0^1 s_{aa}^{\{0\}} d\rho = K_{aa}(\theta) \left(\arcsin(\mu) + \mu\sqrt{1 - \mu^2} \right) = \frac{\arcsin(\mu) + \mu\sqrt{1 - \mu^2}}{\sqrt{1 - \mu^2}(2\rho - 1)^2} s_{aa}^{\{0\}}.$$

Окончательно получаем выражение для $f_p^{\{0\}}$:

$$\begin{aligned} f_p^{\{0\}} &= \int_0^\theta \mu(\xi) d\xi + C_2 \left(2 \log(\cos(\theta/2)) - \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) + \\ &+ \int \frac{\arcsin(\mu) + \mu\sqrt{1 - \mu^2}}{\sqrt{1 - \mu^2}(2\rho - 1)^2} \left(s_{\theta\theta,\theta}^{\{0\}} - s_{rr,\theta}^{\{0\}} + \left(s_{rr}^{\{0\}} + 2 s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right) \operatorname{ctg}(\theta) \right) d\theta + \\ &+ g_p^{\{0\}}(\tau) \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.2.2 Развитый процесс динамического деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 1$, который соответствует моменту с сильным влиянием динамики в процессе сдвливания слоя.

Положим $Eu^{-1} = C_1\alpha$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы ф-л. (3.18)–(3.22) и (3.24) при a^{-1} и α^0 :

$$-p_{,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (3.49)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{\theta,\rho}^{\{-1\}} = 0 \quad (3.50)$$

$$-p_{,\rho}^{\{0\}} + s_{rr,\rho}^{\{0\}} = C_1 \left(v_{\theta}^{\{-1\}} \right)^2 \quad (3.51)$$

$$-p_{,\theta}^{\{-1\}} + s_{r\theta,\rho}^{\{0\}} = C_1 \left(v_{\theta}^{\{-1\}} + v_{\theta}^{\{-1\}} v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} + (1 + \tau) v_{\theta,\tau}^{\{-1\}} \right) \quad (3.52)$$

$$\left(s_{rr}^{\{0\}} \right)^2 + \left(s_{\theta\theta}^{\{0\}} \right)^2 + s_{rr}^{\{0\}} s_{\theta\theta}^{\{0\}} + \left(s_{r\theta}^{\{0\}} \right)^2 = 1 \quad (3.53)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} = s_{\theta\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (3.54)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} \left(v_{\theta,\rho}^{\{0\}} - v_{\theta}^{\{-1\}} \right) = 2 s_{r\theta}^{\{0\}} v_{r,\rho}^{\{0\}} \quad (3.55)$$

$$v_{r,\rho}^{\{0\}} + v_{\theta,\theta}^{\{-1\}} + v_{\theta}^{\{-1\}} \operatorname{ctg}(\theta) = 0 \quad (3.56)$$

Как и в предыдущем пункте граничные условия (3.2) и (3.9) примут вид

$$v_r^{\{0\}}|_{\rho=0} = 1, \quad v_r^{\{0\}}|_{\rho=1} = 0, \quad |s_{r\theta}|_{\rho=0}^{\{0\}} = |s_{r\theta}|_{\rho=1}^{\{0\}} = \mu(\theta) \quad (3.57)$$

Из уравнений (3.49) и (3.50) вытекает

$$p^{\{-1\}} = f_p^{\{-1\}}(\theta, \tau), \quad v_{\theta}^{\{-1\}} = f_{v_{\theta}}^{\{-1\}}(\theta, \tau).$$

Подставив выражение $v_r^{\{-1\}}$ в уравнение (3.56) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $v_r^{\{0\}}$:

$$v_r^{\{0\}} = f_{v_r}^{\{0\}}(\rho, \tau) - \rho \left(f_{v_{\theta,\theta}}^{\{-1\}} + f_{v_{\theta}}^{\{-1\}} \operatorname{ctg}(\theta) \right)$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (3.57) и использование их линейной комбинации позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$f_{v_z}^{\{0\}} = 1$$

$$f_{v_{\theta,\theta}}^{\{-1\}} + f_{v_{\theta}}^{\{-1\}} \operatorname{ctg}(\theta) = 1$$

$$f_{v_{\theta}}^{\{-1\}} = -\operatorname{ctg}(\theta) + \frac{g_{v_{\theta}}^{\{-1\}}(\tau)}{\sin(\theta)}$$

Требование ограниченности членов разложения позволяет определить константу интегрирования:

$$\{^{-1}\}v_{\theta} = \{^{-1}\}f_{v_{\theta}} = -\operatorname{ctg}(\theta) + \frac{1}{\sin(\theta)} = \operatorname{tg}(\theta/2) \quad (3.58)$$

$$\{^0\}v_r = 1 - \rho \quad (3.59)$$

С учетом (3.58) уравнение (3.52) примет вид

$$-\{^{-1}\}p_{,\theta} + \{^0\}s_{r\theta,\rho} = C_1 \left(1 + \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) \operatorname{tg}(\theta/2)$$

Решая его относительно $\{^0\}s_{r\theta}$ и используя силовые граничные условия (3.57) приходим к

$$\begin{aligned} \{^0\}s_{r\theta} &= \{^0\}f_{s_{r\theta}}(\theta, \tau) + \rho \{^{-1}\}f_{p,\theta} \rho C_1 \left(1 + \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) \operatorname{tg}(\theta/2) \\ \{^0\}f_{s_{r\theta}} &= \mu \hat{s}, \quad \hat{s} = \pm 1 \\ \mu \hat{s} + \{^{-1}\}f_{p,\xi} + C_1 \left(1 + \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) \operatorname{tg}(\theta/2) &= -\mu \hat{s} \\ \{^{-1}\}p = \{^{-1}\}f_p = \{^{-1}\}g_p(\tau) - 2\hat{s} \int_0^{\theta} \mu(\xi) d\xi + C_1 \left(2 \log(\cos(\theta/2)) - \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему пункту следует положить $\hat{s} = 1$, и тогда окончательно имеем

$$\{^0\}s_{r\theta} = -\mu(2\rho - 1) \quad (3.60)$$

$$\{^{-1}\}p = \{^{-1}\}g_p(\tau) - 2 \int_0^{\theta} \mu(\xi) d\xi + C_1 \left(2 \log(\cos(\theta/2)) - \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) \quad (3.61)$$

С учетом найденных функций (3.53) и (3.54) представляют собой алгебраическую систему уравнений относительно $\{^0\}s_{rr}$ и $\{^0\}s_{\theta\theta}$, решив которую, найдем

$$\{^0\}s_{rr} = -\frac{\sin^2(\theta) \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2}}{\sqrt{1 - \cos(\theta)} \sqrt{1 - \cos^3(\theta)}} \quad (3.62)$$

$$\{^0\}s_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)}}{\sqrt{1 - \cos^3(\theta)}} \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} \quad (3.63)$$

Выбор знака в (3.62) и (3.63) обусловлен тем, что в процессе сжатия компонента s_{rr} девиатора напряжений в главном по α приближении всюду в слое должна быть отрицательна. Тогда кольцевая компонента $\{^0\}s_{\theta\theta}$ всюду положительна, а

микропрофиль осевой скорости $\{0\}v_\theta$ по толщине будет выпуклым в направлении движения частиц. Подставив все найденные функции в (3.51) и (3.55) и решив дифференциальные уравнения найдем:

$$\{0\}v_\theta = \rho \operatorname{tg}(\theta/2) + \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)}\sqrt{1 - \cos^3(\theta)}}{\mu \sin^2(\theta)} \sqrt{1 - \mu^2(2\rho - 1)^2} + \{0\}f_{v_\theta}(\theta, \tau) \quad (3.64)$$

$$\{0\}p = \{0\}s_{rr} - C_1 \rho \operatorname{tg}^2(\theta/2) + \{0\}f_p(\theta, \tau) \quad (3.65)$$

Для нахождения неизвестных функций $\{0\}f_p$ и $\{0\}f_{v_\theta}$ выпишем следующее по α приближение уравнений (3.19) и (3.24), а также граничные условия (3.2) и (3.9):

$$\begin{aligned} -\{0\}p_{,\theta} + \rho \{^{-1}\}p_{,\theta} + \{1\}s_{r\theta,\rho} + \{0\}s_{\theta\theta,\theta} + 3\{0\}s_{r\theta} + \left(\{0\}s_{rr} + 2\{0\}s_{\theta\theta}\right) \operatorname{ctg}(\theta) = \\ = C_1 \left(\{^{-1}\}v_\theta + (\rho - 1)\{0\}v_{\theta,\rho} + (1 + \tau)\{0\}v_{\theta,\tau} + \{0\}v_r v_{\theta,\rho} - \rho \{^{-1}\}\{^{-1}\}v_\theta v_{\theta,\theta} + \right. \\ \left. + \{0\}\{^{-1}\}v_\theta v_{\theta,\theta} + \{^{-1}\}\{0\}v_\theta v_{\theta,\theta} - \{^{-1}\}\{0\}v_r \right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\{1\}v_{r,\rho} + 2\{0\}v_r + \{0\}v_{\theta,\theta} - \rho \{^{-1}\}v_{\theta,\theta} + \left(\{0\}v_\theta - \rho \{^{-1}\}v_\theta\right) \operatorname{ctg}(\theta) = 0 \quad (3.67)$$

$$\{1\}v_r|_{\rho=0} = \{1\}v_r|_{\rho=1} = 0, \quad \{1\}s_{r\theta}|_{\rho=0} = \{1\}s_{r\theta}|_{\rho=1} = 0 \quad (3.68)$$

Пользуясь непрерывностью функции $\{1\}v_r$ повторим алгоритм описанный в предыдущем пункте:

$$\begin{aligned} 0 = \{1\}v_r|_{\rho=1} - \{1\}v_r|_{\rho=0} &= \int_0^1 \{1\}v_{r,\rho} d\rho = \\ &= - \int_0^1 \left(2\{0\}v_r + \{0\}v_{\theta,\theta} - \rho \{^{-1}\}v_{\theta,\theta} + \left(\{0\}v_\theta - \rho \{^{-1}\}v_\theta\right) \operatorname{ctg}(\theta) \right) d\rho \end{aligned} \quad (3.69)$$

Обозначив $\zeta = \int_0^1 \left(\{0\}v_\theta - \rho \{^{-1}\}v_\theta\right) d\rho$, перепишем уравнение (3.69) в виде

$$1 + \zeta_{,\theta} + \zeta \operatorname{ctg}(\theta) = 0.$$

Откуда получим

$$\begin{aligned} \zeta &= \operatorname{ctg}(\theta) - \frac{1}{\sin(\theta)} \Rightarrow \\ \{0\}f_{v_\theta} &= - \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)}\sqrt{1 - \cos^3(\theta)}}{\mu \sin^2(\theta)} \left(\arcsin(\mu) + \mu\sqrt{1 - \mu^2} \right) - \operatorname{tg}(\theta/2) \end{aligned}$$

Применение данного подхода к функции $s_{r\theta}^{\{1\}}$ позволит определить неизвестную функцию $f_p^{\{0\}}$:

$$\begin{aligned} f_p^{\{0\}} = & \int_0^\theta \mu(\xi) d\xi + \frac{C_1}{2} \left(2 \log(\cos(\theta/2)) + \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) + \\ & + C_1 \int \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \left(\int_0^1 (v_\theta^{\{0\}} + v_{\theta,\theta}^{\{0\}} \sin(\theta)) d\rho \right) d\theta + \\ & + \int \frac{\arcsin(\mu) + \mu\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{1-\mu^2}(2\rho-1)^2} \left(s_{\theta\theta,\theta}^{\{0\}} - s_{rr,\theta}^{\{0\}} + (s_{rr}^{\{0\}} + 2s_{\theta\theta}^{\{0\}}) \operatorname{ctg}(\theta) \right) d\theta + \\ & + g_p^{\{0\}}(\tau) \end{aligned} \quad (3.70)$$

3.3 Анализ решения

Полученные решения (3.34) – (3.41) и (3.58) – (3.65) являются приближенными и совпадают, за исключением функции давления, с квазистатическим решением [78]:

$$p = p_0 - \tau_s \frac{2}{\alpha} \int_0^\theta \mu(\xi) d\xi + s_{rr} + O(1) \quad (3.71)$$

$$s_{rr} = - \frac{\sin^2(\theta) \sqrt{\tau_s^2 - s_{r\theta}^2}}{\sqrt{1 - \cos(\theta)} \sqrt{1 - \cos^3(\theta)}} + O(\alpha) \quad (3.72)$$

$$s_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)}}{\sqrt{1 - \cos^3(\theta)}} \sqrt{\tau_s - s_{r\theta}^2} + O(\alpha) \quad (3.73)$$

$$s_{r\theta} = -\mu(2\rho - 1)\tau_s + O(\alpha) \quad (3.74)$$

$$v_r = V(1 - \rho) + O(\alpha) \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} v_\theta/V = & \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}(\theta/2) + \rho \operatorname{tg}(\theta/2) + \\ & + \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)} \sqrt{1 - \cos^3(\theta)}}{\mu \sin^2(\theta) \tau_s} \sqrt{\tau_s - s_{r\theta}^2} + O(1) \end{aligned} \quad (3.76)$$

где p_0 имеет смысл гидростатического давления. Уточнены выражения для функций давления и кольцевой компоненты скорости.

Полученное решение является достоверным вне окрестности $\theta \in [\pi - \varepsilon, \pi]$ стока, в которой члены разложения v_θ и p рядов (3.10) – (3.13) теряют асимптотичность, а также вне окрестности $\theta \in [0, \varepsilon]$ на противоположном полюсе

сфер. Данные ограничения аналогичны трактуемым в анализе решения классической задачи Прандтля.

Обозначим правую часть уравнения (3.71) как p^{KB} . Для случаев $\beta = 2$ и $\beta = 1$ имеем соответственно:

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{KB}} + \tau_s C_2 \left(2 \log(\cos(\theta/2)) - \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) \quad (3.77)$$

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{KB}} + \frac{\tau_s}{\alpha} C_1 \left(2 \log(\cos(\theta/2)) - \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \right) + O(1) \quad (3.78)$$

Здесь под $O(1)$ подразумевается выражение при коэффициенте C_1 в уравнении (3.70). При сравнении выражений видно, что в случае динамического сдавливания возникает дополнительное слагаемое, причем, чем динамичнее происходит процесс, тем более значима становится данная величина. Функция

$$2 \log(\cos(\theta/2)) - 1/(1 + \cos(\theta))$$

является выпуклой вверх при $\theta \in [0, \pi]$, причем её максимум достигается при $\theta = 0$. Наличие такого слагаемого качественно меняет эпюру давления в слое и увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на плиты.

На графике ниже приведены эпюры давления для различных стадий процесса при следующих параметрах: $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\mu = 1$.

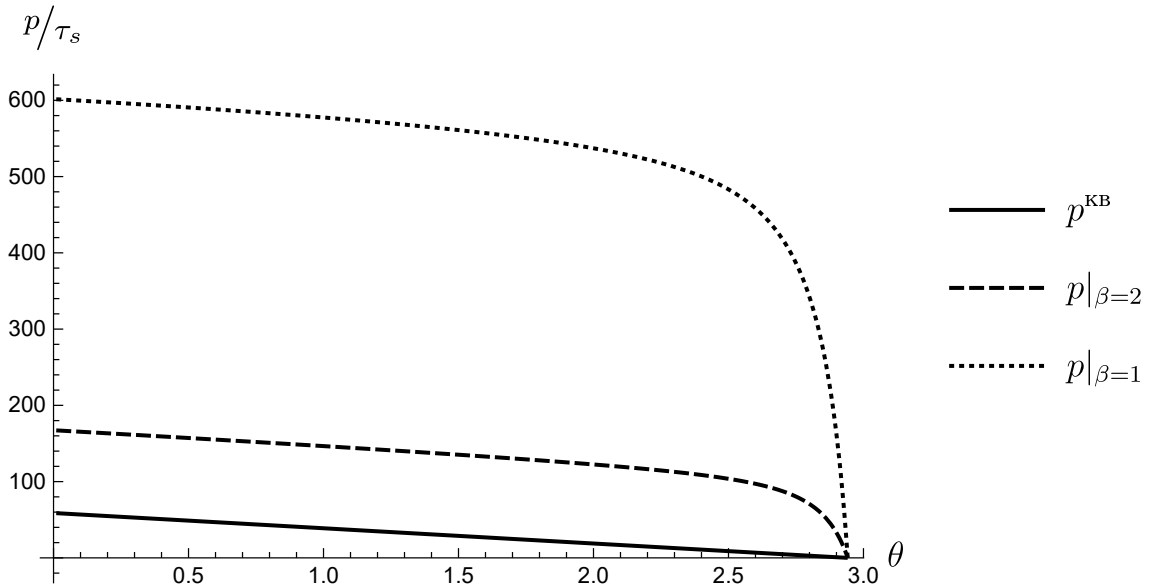


Рисунок 3.2 — Эпюры давления для случая сферического слоя

Используя то, что $\alpha(t) = h(t)/(\mathcal{R}_0 - h(t))$, где \mathcal{R}_0 — радиус внешней сферы и $h(t) = V(t_* - t)$, можно установить зависимость между временем и стадией

прессования:

$$t_* - t \sim \frac{\mathcal{R}_0}{V} \frac{1}{1 + \text{Eu}^{1/\beta}} \quad (3.79)$$

Глава 4. Сдавливание тонкого нелинейно-вязкопластического слоя

Важная группа обобщений классической задачи Прандтля [3] связана с усложнением свойств деформируемой среды. Классическая теория пластичности не оперирует физическим временем, его роль играет некоторый неубывающий параметр. Однако реальные процессы неупругого деформирования происходят по нескольким механизмам, и для описания некоторых из них физическое время является необходимым. Одним из них является процесс вязкопластического деформирования, в котором отклик материала зависит от скорости нагружения. В работе [79] обобщено решение классической задачи Прандтля на случай течения вязкопластического материала, характеризующегося пределом текучести и функцией упрочнения. В данной постановке задачи исследуется влияние динамических эффектов в процессе прессования тонкого слоя между сближающимися плитами. Материалы главы содержатся в публикации [108].

4.1 Постановка задачи и асимптотические разложения

Пусть материал слоя имеет плотность ρ , является несжимаемым вязкопластическим и удовлетворяет определяющему соотношению $\sigma_u = \sigma_s + F(v_u)$, где $\sigma_u = \sqrt{\underline{s} : \underline{s}}$ – интенсивность напряжения, \underline{s} – девиатор напряжения, σ_s – предел текучести, v_u – интенсивность скоростей деформации, а функция F характеризует нелинейно-вязкопластические свойства материала, причем

$$\lim_{v_u \rightarrow 0} F(v_u) = 0. \quad (4.1)$$

В случае линейного упрочнения $F(v_u) = 2mv_u$ получаем двухконстантный материал Бингама с динамической вязкостью m .

Рассмотрим течение происходящее в области

$$\Omega_t = \{-l(t) \leq x_1 \leq l(t), -h(t) \leq x_2 < h(t)\}, \quad (4.2)$$

с границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, причем $h(t) \ll l(t)$ для любого $t \geq 0$. В начальный момент времени область, занятая материалом, имела вид

$$\Omega_0 = \{-l_0 \leq x_1 \leq l_0, -h_0 \leq x_2 \leq h_0\}, \quad \partial\Omega_0 = \Gamma_0 \quad (4.3)$$

поэтому в силу несжимаемости $hl = h_0l_0$.

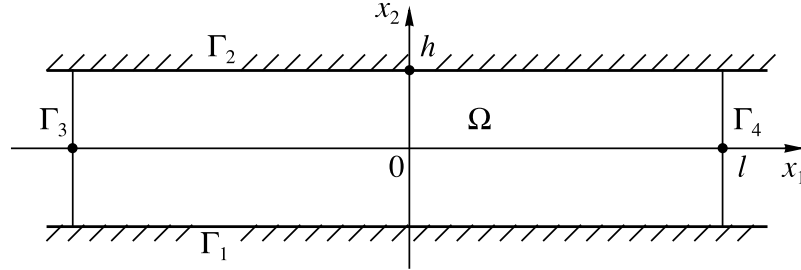


Рисунок 4.1 — Деформируемый плоский слой

Взаимную скорость сближения плит обозначим $2V$, поэтому кинематическое условие непротекания сквозь границы Γ_1 и Γ_2 имеет вид

$$v_2|_{x_2=\pm h} = \mp V \quad (4.4)$$

Касательная составляющая скорости (в данном случае v_1) на указанных границах идеальной среды, как известно, не задаётся.

В некоторый момент времени $0 < t < h_0/V = t_*$, где t_* — момент схлопывания слоя, относительно шести функций — независимых компонент девиатора напряжений s_{11} и s_{12} , давления p и компонент скорости v_1 и v_2 — должна выполняться замкнутая система уравнений динамической теории вязкопластичности:

$$-p_{,1} + s_{11,1} + s_{12,2} = \rho(v_{1,t} + v_1v_{1,1} + v_2v_{1,2}) \quad (4.5)$$

$$-p_{,2} - s_{11,2} + s_{12,1} = \rho(v_{2,t} + v_1v_{2,1} + v_2v_{2,2}) \quad (4.6)$$

$$\sqrt{2(s_{11}^2 + s_{12}^2)} = \sigma_s + F(v_u), \quad v_u = \sqrt{2v_{1,1}^2 + (v_{1,2} + v_{2,1})^2} / 2 \quad (4.7)$$

$$s_{11}(v_{1,2} + v_{2,1}) = 2s_{12}v_{1,1} \quad (4.8)$$

$$v_{1,1} + v_{2,2} = 0 \quad (4.9)$$

Кроме выполнения условия (4.4) на жестких контактирующих поверхностях потребуем, что бы модуль касательного напряжения s_{rz} достигал на границах Γ_1 и Γ_2 своего максимального значения:

$$|s_{12}|_{x_2=\pm h} = \mu(x_1)\tau_s, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (4.10)$$

где μ – шероховатость прессы. Абсолютной шероховатости, или полному сцеплению прессы с материалом, соответствует значение $\mu = 1$.

В реальном процессе сжатия слоя границы Γ_3 и Γ_4 , естественно, свободны от напряжений, однако в математической постановке рассматриваемой здесь краевой задачи в её классическом варианте данное условие не ставится. Поэтому других, помимо (1.3) и (1.10), граничных условий в задаче не предполагается, а область вблизи границ Γ_3 и Γ_4 (на расстояниях порядка h) трактуется как зона краевого эффекта.

Введем малый параметр $\alpha = \frac{h(t)}{l(t)} \ll 1$ и проведем разложение всех неизвестных величин, входящих в систему уравнений (4.5) – (4.9), в ряды по целым степеням параметра:

$$v_1(x_1, x_2, t) = V \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_1^{(k)}, \quad N \geq 1 \quad (4.11)$$

$$v_2(x_1, x_2, t) = V \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_2^{(k)} \quad (4.12)$$

$$s_{ij}(x_1, x_2, t) = \tau_s \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{ij}^{(k)}, \quad (ij) \in \{11, 12\} \quad (4.13)$$

$$p(x_1, x_2, t) = \tau_s \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^k p^{(k)}, \quad M \geq 1 \quad (4.14)$$

Коэффициенты рядов (4.11) – (4.14) – безразмерны и являются функциями безразмерных координат ξ_1, ξ_2, τ

$$\xi_1 = x_1/l = \alpha x_1/h, \quad \xi_2 = x_2/h, \quad \tau = V \frac{t}{h} \quad (4.15)$$

Наличие в (4.11) – (4.14) членов $\alpha^{-n} v_1^{(-n)}$ и $\alpha^{-m} p^{(-m)}$ обусловлено стремлением v_1 и p к бесконечности, при $\alpha \rightarrow 0$, что ясно из физических соображений. Обратимся к геометрическому условию несжимаемости и выразим малый параметр и координаты (4.15) как эволюционные функции:

$$\dot{\alpha} = \left(\frac{h}{l} \right) \cdot = \frac{\dot{h}l - h\dot{l}}{l^2} = -2 \frac{V\alpha}{h} \quad (4.16)$$

$$\dot{\xi}_1 = \left(\frac{x_1}{l} \right) \cdot = -\frac{x_1 \dot{l}}{l^2} = -\frac{V\xi_1}{h} \quad (4.17)$$

$$\dot{\xi}_2 = \left(\frac{x_2}{h} \right) \cdot = -\frac{x_2 \dot{h}}{h^2} = \frac{V\xi_2}{h} \quad (4.18)$$

$$\dot{\tau} = \left(V \frac{t}{h} \right)' = V \frac{h - t\dot{h}}{h^2} = \frac{V}{h} (1 + \tau) \quad (4.19)$$

Подставляя выражения (4.11) – (4.14) в систему (4.5) – (4.9) и учитывая, что полная производная по времени представляется в виде

$$v_{i;t}^{\{k\}} = v_{i,1}^{\{k\}} \dot{\xi}_1 + v_{i,2}^{\{k\}} \dot{\xi}_2 + v_{i,\tau}^{\{k\}} \dot{\tau}$$

получим следующую систему:

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^{k+1} p_{,1}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} s_{11,1}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{12,2}^{\{k\}} = \\ & = \frac{\rho V^2}{\tau_s} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k \left(-\xi_1 v_{1,1}^{\{k\}} + \xi_2 v_{1,2}^{\{k\}} + (1 + \tau) v_{1,\tau}^{\{k\}} - 2k v_1^{\{k\}} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_1^{\{k\}} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^{k+1} v_{1,1}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_2^{\{k\}} \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{1,2}^{\{k\}} \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=-M}^{\infty} \alpha^k p_{,2}^{\{k\}} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{11,2}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} s_{12,1}^{\{k\}} = \\ & = \frac{\rho V^2}{\tau_s} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(-\xi_1 v_{2,1}^{\{k\}} + \xi_2 v_{2,2}^{\{k\}} + (1 + \tau) v_{2,\tau}^{\{k\}} - 2k v_2^{\{k\}} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_1^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} v_{2,1}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_2^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_{2,2}^{\{k\}} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{11}^{\{k\}} \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{12}^{\{k\}} \right)^2} = 1 + \frac{1}{S\sqrt{2}}. \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & \cdot f \left(\frac{1}{2} \sqrt{4 \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{1,1}^{\{k\}} \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(\alpha^{-N} v_{1,2}^{\{k\}} + v_{2,1}^{\{k\}} \right) \right)^2} \right) \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{11}^{\{k\}} \left(\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^k v_{1,2}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} v_{2,1}^{\{k\}} \right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k s_{12}^{\{k\}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+1} v_{1,1}^{\{k\}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\sum_{k=-N}^{\infty} \alpha^{k+1} v_{1,1}^{\{k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k v_{2,2}^{\{k\}} = 0 \quad (4.24)$$

Здесь f – безразмерная функция упрочнения, связанная с размерной равенством

$$F(v_u) = \tau_s f(\tilde{v}_u) / S, \quad S = \tau_s h / (mV) \gg 1, \quad (4.25)$$

где m – характерная динамическая вязкость, \tilde{v}_u – безразмерная интенсивность скоростей деформации, а S – число Сен-Венана. В рамках исследуемой задачи рассмотрим случай степенного упрочнения $F(v_u) = 2av_u^\gamma$, $\gamma \in (0,1]$. Тогда для безразмерной функции имеем

$$f(\tilde{v}_u) = 2\tilde{v}_u^\gamma, \quad m = a(h/V)^{1-\gamma}, \quad S = (\tau_s/a)(h/V)^\gamma \quad (4.26)$$

Возникший в правой части уравнений (4.20) и (4.21) коэффициент равен обратному числу Эйлера

$$Eu^{-1} = \frac{\rho V^2}{\tau_s}.$$

Данная величина мала и как видно из её определения фиксирована. По сравнению с ней порядок малости $\alpha(t)$ при течении времени от 0 до t_* растёт до бесконечности. Это позволяет записать

$$Eu^{-1} = O(\alpha^\beta(t)), \quad \text{причем } \beta \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_*$$

Применительно к динамическому анализу интерес представляет $0 < \beta \leq 2$. Отыскание решений проведем для целочисленных значений входящих в этот диапазон.

Обратимся к системе двух последних уравнений (4.23) и (4.24). Из них сразу следует, что $\overset{\{-N\}}{v}_{1,2} = 0$ и $\overset{\{-N\}}{v}_{1,1} = 0$, то есть $\overset{\{-N\}}{v}_1 = \overset{\{-N\}}{g}_{v_1}(\tau)$ зависит только от τ , обуславливая перемещение вдоль оси z как абсолютно жесткого целого. Исключив данное движение из рассмотрения, можно принять $\overset{\{-N\}}{v}_1 = 0$. Аналогичные рассуждения применимы последовательно для $\overset{\{-N+1\}}{v}_1$, затем $\overset{\{-N+2\}}{v}_1$ и далее вплоть до $\overset{\{-2\}}{v}_1$. Учитывая, что первый ненулевой член продольной компоненты скорости $\overset{\{-1\}}{v}_1$, и принимая, что $\beta \geq 1$ определим из уравнений (4.20) и (4.21) порядок малости для функции давления p . Для $M \geq 2$ имеем:

$$\overset{\{-M\}}{-p}_{,1} = 0, \quad \overset{\{-M\}}{-p}_{,2} = 0 \text{ и, следовательно, } \overset{\{-M\}}{p} = \overset{\{-M\}}{p}_0(\tau)$$

Здесь $\overset{\{-M\}}{p}_0$ – гидростатическая постоянная, не дающая вклад в уравнение движения и однозначно определяемая заданием внешнего давления. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что $M = 1$.

4.2 Построение решения

4.2.1 Переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 2$, который соответствует моменту перехода от квазистатического к динамическому режиму деформирования.

Положим $\text{Eu}^{-1} = C_2\alpha^2$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы (4.20) – (4.24) при a^{-1} и α^0 :

$$-p_{,2}^{\{-1\}} = 0 \quad (4.27)$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{1,2}^{\{-1\}} = 0 \quad (4.28)$$

$$-p_{,1}^{\{-1\}} + s_{12,2}^{\{0\}} = 0 \quad (4.29)$$

$$-p_{,2}^{\{0\}} + s_{11,2}^{\{0\}} = 0 \quad (4.30)$$

$$\sqrt{\left(s_{11}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{12}^{\{0\}}\right)^2} = 1 + \frac{2^{(1-\gamma)/2}}{\mathbf{S}} \left(4 + \left(v_{1,2}^{\{0\}}\right)^2\right)^{\gamma/2} \quad (4.31)$$

$$s_{11}^{\{0\}} v_{1,2}^{\{0\}} = 2s_{12}^{\{0\}} v_{1,1}^{\{-1\}} \quad (4.32)$$

$$v_{1,1}^{\{-1\}} + v_{2,2}^{\{0\}} = 0 \quad (4.33)$$

Граничные условия (4.4) и (4.10) при этом примут вид

$$v_2^{\{0\}}|_{\xi_2=\pm 1} = \mp 1, \quad |s_{12}^{\{0\}}|_{\xi_2=\pm 1} = \mu(\theta) \quad (4.34)$$

Из уравнений (4.27) и (4.28) вытекает

$$p^{\{-1\}} = f_p^{\{-1\}}(\xi_1, \tau), \quad v_1^{\{-1\}} = f_{v_1}^{\{-1\}}(\xi_1, \tau).$$

Подставив выражение $v_1^{\{-1\}}$ в уравнение (4.33) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $v_2^{\{0\}}$:

$$v_2^{\{0\}} = f_{v_2}^{\{0\}}(\xi_1, \tau) - \xi_2 f_{v_1,1}^{\{-1\}}$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (4.34) и использование их линейной комбинации позволяет определить неизвестные

функции интегрирования:

$$\begin{aligned} \{0\} f_{v_z} &= 0 \\ \{-1\} f_{v_1,1} &= 1 \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\{-1\} v_1 = \xi_1 \quad (4.35)$$

$$\{0\} v_2 = -\xi_2 \quad (4.36)$$

Решая (4.30) относительно $\{0\} s_{12}$ и используя силовые граничные условия (4.34) придем к

$$\begin{aligned} \{0\} s_{12} &= \{0\} f_{s_{12}}(\xi_1, \tau) + \xi_2 \{-1\} f_{p,1} \\ \{0\} f_{s_{12}} &= 0 \\ \{-1\} f_{p,\xi} &= -\mu \hat{s} \\ \{-1\} p = \{-1\} f_p &= \{-1\} g_p(\tau) - \hat{s} \int_0^{\xi_1} \mu(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

В соответствии с физико-механическим смыслом процесса сжатия и растекания слоя сингулярная составляющая давления $\{-1\} p$ максимальна в центре слоя, то есть в окрестности $\xi_1 = 0$, и убывает к нулю при движении к границе $\xi_1 = 1$. Данное обстоятельство позволяет определить, что $\hat{s} = \text{sign } \xi_1$ и тогда окончательно имеем

$$\{0\} s_{12} = -\mu \hat{s} \xi_2 \quad (4.37)$$

$$\{-1\} p = \int_{|\xi_1|}^1 \mu(\zeta) d\zeta \quad (4.38)$$

С учетом найденных функций (4.31) и (4.32) представляют собой систему уравнений относительно $\{0\} s_{11}$ и $\{0\} v_{1,2}$. Пользуясь малостью величины будем искать решение в виде регулярных разложений по $1/S$:

$$\{0\} s_{11} = \sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2} + \frac{A(\xi_1, \xi_2, \tau)}{S} + \dots, \quad (4.39)$$

$$\{0\} v_{1,2} = -\frac{2\mu \xi_2}{\sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2}} + \frac{B(\xi_1, \xi_2, \tau)}{S} + \dots \quad (4.40)$$

Подставив данные выражения в условие соосности и определяющее соотношение найдем

$$A = \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(1+\gamma)/2}, \quad B = \mu \xi_2 \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(3+\gamma)/2} \quad (4.41)$$

Окончательно получаем

$$s_{11}^{\{0\}} = \sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2} + \frac{1}{S} \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(1+\gamma)/2} + O\left(\frac{1}{S^2}\right) \quad (4.42)$$

$$v_1^{\{0\}} = \frac{2}{\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2} + \frac{1}{S(1+\gamma)} \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(1+\gamma)/2} + O\left(\frac{1}{S^2}\right) \right) + f_{v_1}^{\{0\}}(\xi_1, \tau) \quad (4.43)$$

Подставив все найденные функции в (4.30) и решив дифференциальное уравнение найдем:

$$p^{\{0\}} = -s_{11}^{\{0\}} + f_p^{\{0\}}(\xi_1, \tau) \quad (4.44)$$

Для нахождения неизвестных функций $f_p^{\{0\}}$ и $f_{v_1}^{\{0\}}$ выпишем следующее по α приближение уравнений (4.21) и (4.24), а также граничные условия (4.4) и (4.10):

$$-p_{,1}^{\{0\}} + s_{11,1}^{\{0\}} + s_{12,2}^{\{1\}} = 2C_2 \xi_1 \quad (4.45)$$

$$v_{1,1}^{\{0\}} + v_{2,2}^{\{1\}} = 0 \quad (4.46)$$

$$v_2^{\{1\}}|_{\xi_2=\pm 1} = 0, \quad |s_{12}|_{\xi_2=\pm 1} = 0 \quad (4.47)$$

Функция $v_2^{\{1\}}$ является непрерывной, поэтому имеет место равенство

$$\begin{aligned} 0 &= v_2^{\{1\}}|_{\xi_2=1} - v_2^{\{1\}}|_{\xi_2=-1} = \int_{-1}^1 v_{2,2}^{\{1\}} d\xi_2 = - \int_{-1}^1 v_{1,1}^{\{0\}} d\xi_2 = - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_{-1}^1 v_1^{\{0\}} d\xi_2 = \\ &= - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{2}{\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} + \frac{\arcsin(\mu)}{\mu} + \frac{2^{(3+\gamma)/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\gamma}{2}, \frac{3}{2}, \mu^2\right)}{S(1+\gamma)} + \mu f_{v_1}^{\{0\}} \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$ - гипергеометрическая функция.

Ограничивая продольное движение слоя как целого, получаем выражение для $f_{v_1}^{\{0\}}$:

$$f_{v_1}^{\{0\}} = \frac{-1}{\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} + \frac{\arcsin(\mu)}{\mu} + \frac{2^{(3+\gamma)/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\gamma}{2}, \frac{3}{2}, \mu^2\right)}{S(1+\gamma)} \right) \quad (4.49)$$

Аналогичные операции проведем над функцией $s_{12}^{\{1\}}$:

$$\begin{aligned}
0 &= s_{12}^{\{1\}}|_{\xi_2=1} - s_{12}^{\{1\}}|_{\xi_2=-1} = \int_{-1}^1 s_{12,\rho}^{\{1\}} d\xi_2 = \\
&= - \int_{-1}^1 \left(-f_{p,1}^{\{0\}} + 2s_{11,1}^{\{0\}} - 2C_2\xi_1 \right) d\xi_2 = \\
&= - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(-2f_p^{\{0\}} + 2 \int_{-1}^1 s_{11}^{\{0\}} d\xi_2 - C_2\xi_1^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Откуда окончательно получаем

$$f_p^{\{0\}} = \int_{-1}^1 s_{11}^{\{0\}} d\xi_2 + C_2 (1 - \xi_1^2) + g_p^{\{0\}}(\tau) \tag{4.51}$$

4.2.2 Развитый процесс динамического деформирования

Рассмотрим случай $\beta = 1$, который соответствует моменту с сильным влиянием динамики в процессе сдвливания слоя.

Положим $Eu^{-1} = C_1\alpha$ и последовательно приравняем коэффициенты правых и левых частей уравнений системы (4.20) – (4.24) при a^{-1} и α^0 :

$$-p_{,2}^{\{-1\}} = 0 \tag{4.52}$$

$$s_{rr}^{\{0\}} v_{1,2}^{\{-1\}} = 0 \tag{4.53}$$

$$-p_{,1}^{\{-1\}} + s_{12,2}^{\{0\}} = -\xi_1 v_{1,1}^{\{-1\}} + 2 v_1^{\{-1\}} + v_1^{\{-1\}} v_{1,1}^{\{-1\}} \tag{4.54}$$

$$-p_{,2}^{\{0\}} + s_{11,2}^{\{0\}} = 0 \tag{4.55}$$

$$\sqrt{\left(s_{11}^{\{0\}}\right)^2 + \left(s_{12}^{\{0\}}\right)^2} = 1 + \frac{2^{(1-\gamma)/2}}{S} \left(4 + \left(v_{1,2}^{\{0\}}\right)^2\right)^{\gamma/2} \tag{4.56}$$

$$s_{11}^{\{0\}} v_{1,2}^{\{0\}} = 2s_{12}^{\{0\}} v_{1,1}^{\{-1\}} \tag{4.57}$$

$$v_{1,1}^{\{-1\}} + v_{2,2}^{\{0\}} = 0 \tag{4.58}$$

Граничные условия (4.4) и (4.10) при этом примут вид

$$v_2^{\{0\}}|_{\xi_2=\pm 1} = \mp 1, \quad |s_{12}^{\{0\}}|_{\xi_2=\pm 1} = \mu(\theta) \tag{4.59}$$

Из уравнений (4.52) и (4.53) вытекает

$$p^{\{-1\}} = f_p^{\{-1\}}(\xi_1, \tau), \quad v_1^{\{-1\}} = f_{v_1}^{\{-1\}}(\xi_1, \tau).$$

Подставив выражение $\{^{-1}\}v_1$ в уравнение (4.58) и решив дифференциальное уравнение, получим выражение для $\{^0\}v_2$:

$$\{^0\}v_2 = f_{v_2}^{\{0\}}(\xi_1, \tau) - \xi_2 f_{v_1,1}^{\{-1\}}$$

Подстановка данного равенства в кинематические граничные условия (4.59) и использование их линейной комбинации позволяет определить неизвестные функции интегрирования:

$$\begin{aligned} f_{v_z}^{\{0\}} &= 0 \\ f_{v_1,1}^{\{-1\}} &= 1 \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\{^{-1}\}v_1 = \xi_1 \quad (4.60)$$

$$\{^0\}v_2 = -\xi_2 \quad (4.61)$$

Подставив выражение (4.60) в (4.55) и решая его относительно $\{^0\}s_{12}$ с учетом силовых граничных условий (4.59) придем к

$$\begin{aligned} \{^0\}s_{12} &= f_{s_{12}}^{\{0\}}(\xi_1, \tau) + \xi_2 f_{p,1}^{\{-1\}} + 2C_1 \xi_1 \xi_2 \\ f_{s_{12}}^{\{0\}} &= 0 \\ f_{p,\xi}^{\{-1\}} + 2C_1 \xi_1 &= -\mu \hat{s} \\ p &= f_p^{\{-1\}} = g_p^{\{-1\}}(\tau) - \hat{s} \int_0^{\xi_1} \mu(\zeta) d\zeta - C_1 \xi_1^2 \end{aligned}$$

В силу тех же рассуждений, что приводились в 4.2.1 следует положить $\hat{s} = 1$. Тогда найденные функции можно записать в следующем виде:

$$\{^0\}s_{12} = -\mu \hat{s} \xi_2 \quad (4.62)$$

$$p = \int_{|\xi_1|}^1 \mu(\zeta) d\zeta + C_1 (1 - \xi_1^2) \quad (4.63)$$

С учетом найденных функций (4.56) и (4.57) представляют собой систему уравнений относительно $\{^0\}s_{11}$ и $\{^0\}v_1$. Аналогично предыдущему пункту будем искать решение в виде регулярных разложений по $1/S$:

$$\{^0\}s_{11} = \sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2} + \frac{A(\xi_1, \xi_2, \tau)}{S} + \dots, \quad (4.64)$$

$$\{^0\}v_{1,2} = -\frac{2\mu \xi_2}{\sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2}} + \frac{B(\xi_1, \xi_2, \tau)}{S} + \dots \quad (4.65)$$

Подставив данные выражения в условие соосности и определяющее соотношение найдем

$$A = \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(1+\gamma)/2}, \quad B = \mu \xi_2 \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(3+\gamma)/2} \quad (4.66)$$

Окончательно получаем

$$s_{11}^{\{0\}} = \sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2} + \frac{1}{S} \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(1+\gamma)/2} + O\left(\frac{1}{S^2}\right) \quad (4.67)$$

$$v_1^{\{0\}} = \frac{2}{\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2} + \frac{1}{S(1+\gamma)} \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(1+\gamma)/2} + O\left(\frac{1}{S^2}\right) \right) + f_{v_1}^{\{0\}}(\xi_1, \tau) \quad (4.68)$$

Подставив все найденные функции в (4.55) и решив дифференциальное уравнение найдем:

$$p^{\{0\}} = -s_{11}^{\{0\}} + f_p^{\{0\}}(\xi_1, \tau) \quad (4.69)$$

Для нахождения неизвестных функций $f_p^{\{0\}}$ и $f_{v_1}^{\{0\}}$ выпишем следующее по α приближение уравнений (4.21) и (4.24), а также граничные условия (4.4) и (4.10):

$$-p_{,1}^{\{0\}} + s_{11,1}^{\{0\}} + s_{12,2}^{\{1\}} = C_1 v_1^{\{0\}} \quad (4.70)$$

$$v_{1,1}^{\{0\}} + v_{2,2}^{\{1\}} = 0 \quad (4.71)$$

$$v_2^{\{1\}}|_{\xi_2=\pm 1} = 0, \quad |s_{12}|_{\xi_2=\pm 1}^{\{1\}} = 0 \quad (4.72)$$

Функция $v_2^{\{1\}}$ является непрерывной, поэтому имеет место равенство

$$\begin{aligned} 0 &= v_2^{\{1\}}|_{\xi_2=1} - v_2^{\{1\}}|_{\xi_2=-1} = \int_{-1}^1 v_{2,2}^{\{1\}} d\xi_2 = - \int_{-1}^1 v_{1,1}^{\{0\}} d\xi_2 = - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_{-1}^1 v_1^{\{0\}} d\xi_2 = \\ &= - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{2}{\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} + \frac{\arcsin(\mu)}{\mu} + \frac{2^{(3+\gamma)/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\gamma}{2}, \frac{3}{2}, \mu^2\right)}{S(1+\gamma)} + \mu f_{v_1}^{\{0\}} \right) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Ограничивая продольное движение слоя как целого, получаем выражение для $f_{v_1}^{\{0\}}$:

$$f_{v_1}^{\{0\}} = \frac{-1}{\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} + \frac{\arcsin(\mu)}{\mu} + \frac{2^{(3+\gamma)/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\gamma}{2}, \frac{3}{2}, \mu^2\right)}{S(1+\gamma)} \right) \quad (4.74)$$

Аналогичные операции проведем над функцией $s_{12}^{\{1\}}$:

$$\begin{aligned}
0 &= s_{12}^{\{1\}}|_{\xi_2=1} - s_{12}^{\{1\}}|_{\xi_2=-1} = \int_{-1}^1 s_{12,\rho}^{\{1\}} d\xi_2 = \\
&= - \int_{-1}^1 \left(-f_{p,1}^{\{0\}} + 2s_{11,1}^{\{0\}} - C_1 v_1^{\{0\}} \right) d\xi_2 = \\
&= - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(-2f_p^{\{0\}} + 2 \int_{-1}^1 s_{11}^{\{0\}} d\xi_2 - C_1 \int v_1^{\{0\}} d\xi_1 \right)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Откуда окончательно получаем

$$f_p^{\{0\}} = \int_{-1}^1 s_{11}^{\{0\}} d\xi_2 + C_1 \int v_1^{\{0\}} d\xi_1 + g_p^{\{0\}}(\tau) \tag{4.76}$$

4.3 Анализ решения

Полученные решения (4.35) – (4.38), (4.42) – (4.44) и (4.60) – (4.63), (4.67) – (4.69) являются приближенными и совпадают, за исключением функции давления, с квазистатическим решением [79]:

$$p = p_0 + \frac{\tau_s}{\alpha} \int_{|\xi_1|}^1 \mu(\xi) d\xi - s_{11} + \int_{-1}^1 s_{11} d\xi_2 + O(\alpha) \tag{4.77}$$

$$s_{11} = \tau_s \sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2} + \frac{\tau_s}{S} \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(1+\gamma)/2} + O(\alpha) \tag{4.78}$$

$$s_{12} = -\tau_s \mu \xi_2 \operatorname{sign} \xi_1 + O(\alpha) \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
v_1/V &= \frac{1}{\alpha} \xi_1 + \frac{2}{\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2 \xi_2^2} + \frac{1}{S(1+\gamma)} \left(\frac{2}{1 - \mu^2 \xi_2^2} \right)^{(1+\gamma)/2} \right) - \\
&- \frac{1}{\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} + \frac{\arcsin(\mu)}{\mu} + \frac{2^{(3+\gamma)/2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\gamma}{2}, \frac{3}{2}, \mu^2\right)}{S(1+\gamma)} \right) + O(\alpha)
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$v_2 = V \xi_2 \tag{4.81}$$

где p_0 имеет смысл гидростатического давления. Наличие сигнатуры $\operatorname{sign} \xi$ в функции s_{12} говорит о разрыве решения вблизи сечения $\xi_1 = 0$. Следовательно, разложения (4.11) – (4.14) несправедливы вблизи среднего по простиранию сечения слоя. Кроме того, данное решение неприменимо в зоне краевого эффекта, то есть вблизи сечений $\xi_1 = \pm 1$, где необходимо ставить точные граничные

условия. Данные ограничения аналогичны трактуемым в анализе решения классической задачи Прандтля. Помимо этого, вид функций s_{11} и v_1 свидетельствует о том, что разложения справедливы вне окрестности точек, для которых выполнено $\mu^2 \xi_2^2 \geq 1$, и, следовательно, решение неприменимо на границах контакта с плитами при $\mu = 1$.

Обозначим правую часть уравнения (4.77) как p^{KB} . Для случаев $\beta = 2$ и $\beta = 1$ имеем соответственно:

$$p|_{\beta=2} = p^{\text{KB}} + \tau_s C_2 (1 - \xi_1^2) \quad (4.82)$$

$$p|_{\beta=1} = p^{\text{KB}} + \frac{\tau_s}{\alpha} C_1 (1 - \xi_1^2) + O(1) \quad (4.83)$$

Здесь под $O(1)$ подразумевается выражение при коэффициенте C_1 в уравнении (4.76). При сравнении выражений видно, что в случае динамического сдавливания возникает квадратично зависящее от радиуса слагаемое, причем, чем динамичнее происходит процесс, тем более значима становится данная величина. Наличие такой зависимости качественно меняет эпюру давления в слое и увеличивает суммарную силу, действующую со стороны слоя на плиты.

На графике ниже приведены эпюры давления для различных стадий процесса при следующих параметрах: $\alpha = 0.1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\mu = 0.9$, $S = 10$.

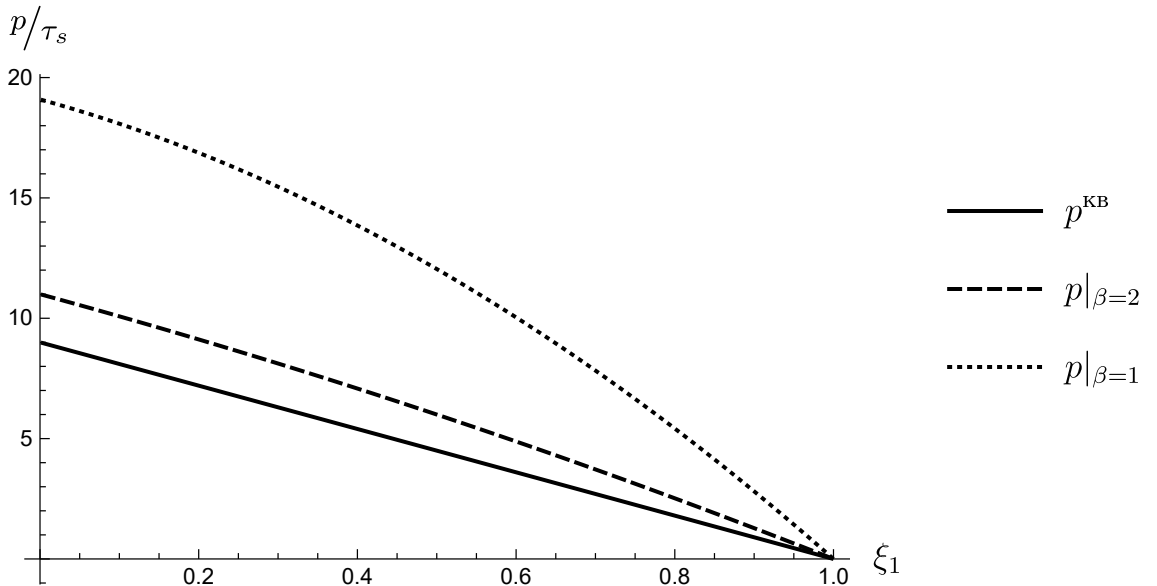


Рисунок 4.2 — Эпюры давления для случая плоского вязкопластического слоя

Используя то, что $\alpha(t) = V^2 (t_* - t)^2 / S_0$, где S_0 — площадь сечения слоя, можно установить зависимость между временем и стадией прессования:

$$t_* - t \sim \frac{1}{Eu^{1/2\beta}} \frac{\sqrt{S_0}}{V} \quad (4.84)$$

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получены приближенные аналитические решения задачи о сдавливании круглого идеально жесткопластического тонкого слоя в динамической постановке. Рассмотрены две стадии процесса, соответствующие переходу от квазистатического к динамическому режиму деформирования и развитому динамическому деформированию.
2. Получены приближенные аналитические решения задачи о сдавливании цилиндрического идеально жесткопластического тонкого слоя в динамической постановке. В данной задаче естественно возникает дополнительный параметр, отвечающий за соотношение радиусов и длины образующей сжимающих цилиндров. Рассмотрены случаи, когда радиусы цилиндров имеют тот же порядок, что и толщина слоя, когда радиусы цилиндров порядка длины образующей, и случай “промежуточного” порядка. Для указанных случаев исследованы две стадии процесса прессования: переход от квазистатического к динамическому режиму деформирования и развитое динамическое деформирование.
3. Получены приближенные аналитические решения задачи о сдавливании сферического идеально жесткопластического тонкого слоя при наличии стока в динамической постановке. Показано что процесс прессования разбивается по времени на качественно различные стадии: этап, соответствующий переходу от квазистатического к динамическому режиму деформирования, и этап развитого динамического деформирования.
4. Получены приближенные аналитические решения задачи о сдавливании вязкопластического тонкого слоя со степенной функцией упрочнения в динамической постановке для режимов прессования, соответствующих стадии перехода от квазистатического к динамическому режиму деформирования и стадии развитого динамического деформирования.
5. Анализ напряженно-деформированного состояния на исследуемых стадиях показал качественное изменение эпюры давления и увеличение суммарной силы действующей со стороны материала на прессующие поверхности: в функции давления возникло зависящее от продольной координаты слагаемое (выпуклая вверх функция с центром в северном

полюсе в случае сферического слоя и квадратичная функция в остальных задачах), причем с приближением к моменту “схлопывания” слоя вклад данного слагаемого растет.

6. Определена область применимости найденных решений и построен явный критерий, устанавливающий зависимость между временем и стадией процесса прессования. Согласно последнему независимо от малости постоянной скорости сближения жестких прессующих поверхностей наступает временной интервал, когда влияние динамических слагаемых становится соизмеримым с градиентами напряжений.
7. Развита математические аспекты метода асимптотического интегрирования применительно к динамическим задачам пластического течения при прессовании асимптотически тонких слоев.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Георгиевскому Д. В. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство.

Список сокращений и условных обозначений

- ρ плотность материала
 σ_{ij} тензор напряжений
 s_{ij} компоненты девиатора тензора напряжений
 p шаровая часть тензора напряжений
 σ_s предел текучести материала
 σ_u интенсивность напряжений
 v_u интенсивность скоростей деформации
 r, z, θ цилиндрические координаты
 r, θ, φ сферические координаты
 α малый геометрический параметр
Eu число Эйлера
S число Сен-Венана

Словарь терминов

пластическая деформация : Остаточная деформация без макроскопических нарушений сплошности материала, образовавшаяся в результате воздействия силовых факторов

пластическое течение : Нарастание пластических деформаций без возрастания нагрузки

предел текучести : Напряжение, при котором начинает развиваться пластическая деформация

квазистатический процесс : Идеализированный процесс, состоящие из непрерывно следующих друг за другом состояний равновесия

развитый процесс динамического деформирования : Процесс деформирования, при котором силовые факторы, возникающие вследствие приложения внешних нагрузок, соизмеримы с силами, обусловленными инерционными эффектами

Список литературы

1. *Todhunter, I.* A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials: From Galilei to the Present Time. Vol. 2 / I. Todhunter, K. Pearson. — University Press, 1893. — 759 p.
2. *Levi, M.* Extrait du memoire sur les equantions generates de mouvements interieurs des corps solides dustiles au de lades limites ou l'elastique pourrait les ramener a leur premier etat / M. Levi // J. de Math oures et appl. — 1871. — Vol. 16. — P. 369—372. — (2nd ser.)
3. *Прандтль, Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел / Л. Прандтль // Теория пластичности. — М. : Иностр. лит., 1948. — С. 102—113.
4. *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1 / А. Надаи. — М. : Иностр. лит., 1954. — 648 с.
5. *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2 / А. Надаи. — М. : Иностр. лит., 1969. — 863 с.
6. *Green, A.* On the use of hodographs in problems plane plastic strain / A. Green // J. Mech. Phys. Solids. — 1954. — Т. 2, № 2. — С. 73—80.
7. *Ильюшин, А. А.* Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям / А. А. Ильюшин // Прикл. мат. и мех. — 1954. — Т. 18, № 3. — С. 265—388.
8. *Ильюшин, А. А.* Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения / А. А. Ильюшин // Прикл. мат. и мех. — 1955. — Т. 19, № 6. — С. 675—683.
9. *Ильюшин, А. А.* Труды. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. Т. 4 / А. А. Ильюшин. — М. : Физматлит, 2009. — 526 с.
10. *Кузнецов, А. И.* Задача о неоднородном пластическом слое / А. И. Кузнецов // Arch. Mech. Stos. — 1960. — Т. 12, № 2. — С. 163—172.
11. *Агамирзян, Л. С.* Продольное и поперечное сжатие пластической полосы / Л. С. Агамирзян // Инженерный журнал. — 1962. — Т. 2, № 6. — С. 311—324.

12. *Быковцев, Г. И.* О сжатии анизотропного упрочняющегося пластического слоя шероховатыми плитами / Г. И. Быковцев // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157, № 1. — С. 66—68.
13. *Быковцев, Г. И.* О сжатии пластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом сил инерции / Г. И. Быковцев // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. — 1960. — № 6. — С. 1082—1084.
14. *Арутюнов, Ю. С.* Осаживание тонких поковок произвольной формы в плане / Ю. С. Арутюнов, А. Л. Гонор // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. — 1963. — № 1. — С. 166—171.
15. *Аркулис, Г. Э.* Совместная пластическая деформация разных металлов / Г. Э. Аркулис. — М. : Металлургия, 1964. — 271 с.
16. *Ивлев, Д. Д.* Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — № 1. — С. 107—109.
17. *Ивлев, Д. Д.* Некоторые частные решения уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности и обобщения решения Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами / Д. Д. Ивлев // Прикл. мат. и мех. — 1958. — Т. 22, № 5. — С. 673—678.
18. *Ивлев, Д. Д.* Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах / Д. Д. Ивлев // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 123, № 6. — С. 1105—1108.
19. *Ивлев, Д. Д.* Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска / Д. Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. — 1959. — № 1. — С. 132—133.
20. *Ивлев, Д. Д.* Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния / Д. Д. Ивлев // Труды НИИ математики ВГУ. — Воронеж, 1973. — № 10. — С. 1—3.
21. *Ивлев, Д. Д.* Об обобщении решения Прандтля в сферической системе координат / Д. Д. Ивлев, А. В. Романов // Прикл. мат. и мех. — 1982. — Т. 46, № 5. — С. 869—871.
22. *Ивлев, Д. Д.* О пространственном течении идеальнопластического материала, сжатого шероховатыми плитами / Д. Д. Ивлев // Изв. РАН. МТТ. — 1998. — № 1. — С. 5—12.

23. *Ивлев, Д. Д.* Об одном точном неавтомодельном решении теории идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев, А. В. Романов // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, № 5. — С. 1080—1083.
24. *Ивлев, Д. Д.* Об одном классе точных неавтомодельных задач теории идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев, А. В. Романов // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. — М. : Наука, 1984. — С. 90—97.
25. *Ершов, Л. В.* Об обобщении решения Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами / Л. В. Ершов, Д. Д. Ивлев, А. В. Романов // Современные проблемы механики и авиации. — М. : Машиностроение, 1982. — С. 137—144.
26. *Ивлев, Д. Д.* Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. — М. : Наука, 1966. — 232 с.
27. *Ивлев, Д. Д.* Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. — М. : Наука, 1978. — 208 с.
28. *Ивлев, Д. Д.* О сдавливании круглого в плане идеально пластического слоя шероховатыми плитами / Д. Д. Ивлев, И. П. Григорьев // Изв. РАН. МТТ. — 2000. — № 1. — С. 129—140.
29. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. — М. : Гос. изд. технико-теоретической лит-ры, 1956. — 407 с.
30. *Задоян, М. А.* Частное решение уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах / М. А. Задоян // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157, № 1. — С. 73—75.
31. *Задоян, М. А.* Об одном частом решении уравнений теории идеальной пластичности / М. А. Задоян // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 156, № 1. — С. 38—39.
32. *Задоян, М. А.* Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности / М. А. Задоян // Докл. АН Арм. ССР. — 1964. — Т. 39, № 5. — С. 265—269.
33. *Задоян, М. А.* О пространственном напряженном состоянии пластического слоя, сжатого между шероховатыми плитами / М. А. Задоян // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. н. — 1964. — Т. 17, № 4. — С. 63—70.
34. *Задоян, М. А.* Плоское и осесимметричное течение пластической массы между шероховатыми подвижными поверхностями / М. А. Задоян // Изв. АН Арм. ССР. Сер. механика. — 1966. — Т. 19, № 5. — С. 22—36.

35. *Задоян, М. А.* О некоторых решениях уравнений пластического течения анизотропной среды / М. А. Задоян // Изв. АН СССР. МТТ. — 1966. — № 2. — С. 91—96.
36. *Задоян, М. А.* Об одном классе решений плоской динамической задачи теории пластичности / М. А. Задоян // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 260, № 1. — С. 47—50.
37. *Задоян, М. А.* Упругопластическое состояние конической трубы / М. А. Задоян // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 271, № 1. — С. 56—60.
38. *Задоян, М. А.* Пластическое течение конусообразных тел / М. А. Задоян // Прикл. мат. и мех. — 1983. — Т. 47, № 2. — С. 209—219.
39. *Задоян, М. А.* Пространственные задачи теории пластичности / М. А. Задоян. — М. : Наука, 1992. — 384 с.
40. *Третьяков, М. Е.* Упругопластическое сжатие тонкой полосы между плоскими жесткими плитами / М. Е. Третьяков, В. М. Луговской // Расчеты процессов пластического формоизменения металлов. — М. : Изд-во АН СССР, 1966. — С. 48—51.
41. *Третьяков, М. Е.* Упругопластическое сжатие тонкой пластически упрочняющейся полосы / М. Е. Третьяков // Расчеты процессов пластического течения металлов. — М. : Наука, 1973. — С. 21—37.
42. *Третьяков, М. Е.* Упругие деформации в процессах пластического формоизменения / М. Е. Третьяков // Исследование процессов пластической деформации металлов. — М. : Наука, 1965. — С. 31—34.
43. *Третьяков, М. Е.* Исследование процессов пластического формоизменения с учетом упругих деформаций инструмента и изделия / М. Е. Третьяков // Пластическое течение металлов. — М. : Наука, 1968. — С. 25—36.
44. *Третьяков, М. Е.* Анализ процесса пластического сжатия тонких заготовок из упрочняющегося материала / М. Е. Третьяков, С. А. Еленев // Машиноведение. — 1966. — № 1. — С. 65—68.
45. *Третьяков, М. Е.* Влияние упрочнения в процессах пластического сжатия тонкой полосы / М. Е. Третьяков, С. А. Еленев // Пластическое формоизменение металлов. — М. : Наука, 1967. — С. 68—72.
46. *Третьяков, М. Е.* Упругопластическое сжатие тонкой упрочняющейся полосы при наличии площадки текучести / М. Е. Третьяков // Пластическое деформирование металлов. — М. : Наука, 1974. — С. 14—19.

47. *Дудукаленко, В. В.* О сжатии полосы из упрочняющегося пластического материала жесткими шероховатыми плитами / В. В. Дудукаленко, Д. Д. Ивлев // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 5. — С. 1024—1026.
48. *Гениев, Г. Л.* Вопросы механики неупругих тел / Г. Л. Гениев, В. С. Лейтес. — М. : Стройиздат, 1981. — 160 с.
49. *Кийко, И. А.* О воздействии сжатого пластического тонкого слоя на упругие поверхности / И. А. Кийко // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и машиностр. — 1961. — № 6. — С. 1082—1085.
50. *Кийко, И. А.* Деформация инструментов в процессах течения тонкого слоя пластического вещества / И. А. Кийко // Инженерный журнал. — 1963. — Т. 3, № 1. — С. 115—126.
51. *Кийко, И. А.* Вариационный принцип в задачах течения тонкого слоя пластического материала / И. А. Кийко // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 157, № 3. — С. 551—554.
52. *Кийко, И. А.* Теория пластического течения / И. А. Кийко. — М. : Изд-во МГУ, 1978. — 74 с.
53. *Кийко, И. А.* Пластические течения металлов / И. А. Кийко // Научные основы прогрессивной техники и технологии. — М. : Машиностроение, 1985. — С. 102—133.
54. *Кийко, И. А.* Обобщения задачи Л. Прандтля о сжатии полосы / И. А. Кийко, В. А. Кадымов // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 2003. — № 4. — С. 50—56.
55. *Непершин, Р. И.* Обобщения задачи Л. Прандтля о сжатии полосы / Р. И. Непершин // Машиноведение. — 1968. — № 1. — С. 97—100.
56. *Соколовский, В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. — 3-е изд. — М. : Высшая школа, 1969. — 608 с.
57. *Ишлинский, А. Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута / А. Ю. Ишлинский // Прикл. мат. и мех. — 1943. — Т. 7, № 2. — С. 109—130.
58. *Ишлинский, А. Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины / А. Ю. Ишлинский // Прикл. мат. и мех. — 1943. — Т. 7, № 6. — С. 405—412.
59. *Сенашов, С. И.* Групповые свойства уравнений идеальной пластичности с условием текучести Мизеса / С. И. Сенашов // Динамика сплошной

- среды. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. Вып. 28. — Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1977. — С. 109—117.
60. *Сенашов, С. И.* Групповая классификация уравнений идеальной пластичности с условием текучести общего вида / С. И. Сенашов // Динамика сплошной среды. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. Вып. 37. — Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1978. — С. 101—112.
61. *Сенашов, С. И.* Точные пространственные решения уравнений, описывающих пластическое течение анизотропных и неоднородных сред / С. И. Сенашов // Динамика сплошной среды. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. Вып. 43. — Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1979. — С. 98—107.
62. *Сенашов, С. И.* Групповые свойства и точные решения уравнений пространственных задач пластичности : Дисс. канд. физ.-мат. наук / Сенашов С. И. — Новосибирск : Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1980. — 140 с.
63. *Сенашов, С. И.* Инвариантные решения пространственной задачи идеальной пластичности / С. И. Сенашов // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1980. — № 3. — С. 159—163.
64. *Сенашов, С. И.* Поля скоростей в задаче Прандтля о сжатии пластического слоя / С. И. Сенашов // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1984. — № 1. — С. 155—156.
65. *Сенашов, С. И.* Одно точное решение пространственной задачи идеальной пластичности / С. И. Сенашов // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1984. — № 4. — С. 153—155.
66. *Матченко, Н. М.* К теории плоского пластического течения ортотропных материалов / Н. М. Матченко, Л. А. Толоконников // Прикладная механика. — 1973. — Т. 9, № 6. — С. 113—116.
67. *Матченко, Н. М.* Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности ортотропных материалов / Н. М. Матченко, С. Д. Фейгин // Работы по механике сплошных сред. — Тула : Изд-во Тульск. политех. ин-та, 1974. — С. 165—172.
68. *Григорян, С. С.* Об одной задаче Л. Прандтля и теории течения пластического вещества по поверхностям / С. С. Григорян // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 257, № 5. — С. 1075—1076.

69. *Романов, А. В.* Некоторые вопросы течения пластического материала сжатого шероховатыми плитами / А. В. Романов // *Динамика сплошной среды с границами раздела*. — Чебоксары : ЧувГУ, 1982. — С. 87–92.
70. *Романов, А. В.* О некоторых частных решениях теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах / А. В. Романов // *Изв. АН СССР. МТТ*. — 1984. — № 6. — С. 157–159.
71. *Михайлова, Е. Ю.* Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек / Е. Ю. Михайлова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ-матем. науки*. — 2018. — Т. 160, № 3. — С. 561–577.
72. *Целистова, А. А.* Задачи определения предельного состояния слоя из идеального сжимаемого жесткопластического материала, сжатого шероховатыми плитами : Дисс. канд. физ.-мат. наук / Целистова А. А. — Чебоксары : ЧГПУ им И. Я. Яковлева, 1999. — 71 с.
73. *Целистова, Е. А.* Некоторые задачи определения напряженно-деформированного состояния слоя из неоднородного идеальнопластического материала, сжатого шероховатыми плитами : Дисс. канд. физ.-мат. наук / Целистова Е. А. — Чебоксары : ЧГПУ им И. Я. Яковлева, 2000. — 90 с.
74. *Максимова, Л. А.* О влиянии сдвигающих усилий на предельное состояние полосы, сжатой шероховатыми плитами / Л. А. Максимова // *Известия ИТА ЧР*. — 1999. — С. 17–19.
75. *Георгиевский, Д. В.* Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля / Д. В. Георгиевский // *Изв. РАН. МТТ*. — 2009. — № 1. — С. 83–93.
76. *Георгиевский, Д. В.* Об осесимметричном аналоге задачи Прандтля / Д. В. Георгиевский // *Докл. РАН*. — 2008. — Т. 422, № 3. — С. 331–333.
77. *Георгиевский, Д. В.* Асимптотический анализ пластического течения вдоль образующей в тонком цилиндрическом слое / Д. В. Георгиевский // *Журн. прикл. механики и техн. физики*. — 2010. — Т. 51, № 5. — С. 111–119.
78. *Георгиевский, Д. В.* Сжатие-сток асимптотически тонкого идеально жесткопластического сферического слоя / Д. В. Георгиевский // *Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика*. — 2011. — № 6. — С. 65–67.
79. *Георгиевский, Д. В.* Квазистатическое сжатие и растекание асимптотически тонкого нелинейно-вязкопластического слоя / Д. В. Георгиевский,

- В. С. Юшутин // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 2012. — Т. 53, № 3. — С. 150—157.
80. *Георгиевский, Д. В.* Асимптотическое интегрирование задачи Прандтля в динамической постановке / Д. В. Георгиевский // Изв. РАН. МТТ. — 2013. — № 1. — С. 97—105.
81. *Georgievskii, D.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem / D. Georgievskii, W. Mueller, B. Abali // ZAMM. — 2019. — Vol. 99, no. 12. — P. 1—11.
82. *Богданов, В. И.* Штамповка взрывом / В. И. Богданов, А. В. Звягин // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 42—46.
83. *Бодунов, М. А.* Течение тонкого слоя пластически анизотропного материала по поверхности упругого полупространства / М. А. Бодунов, Д. М. Бодунов, И. В. Бородин // Известия МГТУ. — 2013. — Т. 15, № 1. — С. 13—18.
84. *Быковцев, Г. И.* Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. — Владивосток : Дальнаука, 1998. — 528 с.
85. *Бровман, М. Я.* Применение теории пластичности в прокатке / М. Я. Бровман. — М. : Metallurgiya, 1965. — 265 с.
86. *Громов, Н. П.* Теория обработки металлов давлением / Н. П. Громов. — М. : Metallurgiya, 1978. — 360 с.
87. *Губкин, С. И.* Основы теории обработки металлов давлением / С. И. Губкин. — М. : Mashgiz, 1959. — 540 с.
88. *Ишлинский, А. Ю.* Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. — М. : Fizmatlit, 2001. — 704 с.
89. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 1 / Д. Д. Ивлев. — М. : Fizmatlit, 2001. — 448 с.
90. *Ивлев, Д. Д.* Механика пластических сред : в 2 т. Т. 2 / Д. Д. Ивлев. — М. : Fizmatlit, 2002. — 448 с.
91. *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.
92. *Колмогоров, В. Л.* Механика обработки металлов давлением / В. Л. Колмогоров. — Екатеринбург : Изд-во Урал. гос. техн. ун-та, 2001. — 835 с.
93. *Королев, А. А.* Конструкция и расчет машин и механизмов прокатных станков / А. А. Королев. — М. : Metallurgiya, 1969. — 464 с.

94. *Михин, Н. М.* Трение в условиях пластического контакта / Н. М. Михин. — М. : Наука, 1968. — 103 с.
95. *Павлов, И. М.* Теория прокатки / И. М. Павлов. — М. : Metallurgizdat, 1950. — 612 с.
96. *Перлин, И. Л.* Теория прессования металлов / И. Л. Перлин. — М. : Metallurgizdat, 1964. — 344 с.
97. *Прагер, В.* Теория идеально пластических тел / В. Прагер, Ф. Г. Ходж. — М. : Иностран. лит., 1956. — 398 с.
98. *Сторожев, М. И.* Теория обработки металлов давлением / М. И. Сторожев, Е. А. Попов. — М. : Машиностроение, 1977. — 423 с.
99. *Тарновский, И. Я.* Теория обработки металлов давлением / И. Я. Тарновский. — М. : Metallurgizdat, 1963. — 672 с.
100. *Томленов, А. Д.* Механика процессов обработки металлов давлением / А. Д. Томленов. — М. : Mashgiz, 1963. — 235 с.
101. *Томленов, А. Д.* Теория пластического деформирования металлов / А. Д. Томленов. — М. : Metallurgiya, 1972. — 408 с.
102. *Tomsen, E. C.* Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing / E. C. Tomsen, C. T. Yang, S. Kabayaschi. — N.Y. : Macmillan, 1965. — 486 p.
103. *Целиков, А. И.* Основы теории прокатки / А. И. Целиков. — М. : Metallurgiya, 1965. — 248 с.
104. *Унксов, Е. П.* Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением / Е. П. Унксов. — М. : Mashgiz, 1955. — 280 с.
105. *Георгиевский, Д. В.* Квазистатическое и динамическое сдавливание плоского круглого идеальнопластического слоя жёсткими плитами / Д. В. Георгиевский, Р. Р. Шабайкин // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твёрдого тела. Т. 1. — Тверь : Изд-во ТвГТУ, 2017. — С. 56—63.
106. *Шабайкин, Р. Р.* Динамические эффекты деформирования тонкого пластического слоя между сближающимися жесткими цилиндрами / Р. Р. Шабайкин // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 2020. — № 4. — С. 29—37. — Импакт-фактор: 0.153.
107. *Шабайкин, Р. Р.* Динамические эффекты деформирования при сжатии-столке асимптотически тонкого идеально жесткопластического сферического

слоя / Р. Р. Шабайкин // Изв. РАН. МТТ. — 2020. — № 2. — С. 22–27. —
Импакт-фактор: 0.695.

108. *Шабайкин, Р. Р.* Динамическое сдавливание нелинейно вязкопластиче-
ского тонкого слоя / Р. Р. Шабайкин // Материалы Международного
молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» [Электронный ре-
сурс]. — М. : МАКС Пресс, 2021.

Список рисунков

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Деформируемый круглый слой | 15 |
| 1.2 | Вид функции $\mu(\rho)$, при $\mu(1) = 1$ | 19 |
| 1.3 | Эпюры давления для случая круглого слоя | 27 |
| 2.1 | Деформируемый цилиндрический слой | 29 |
| 2.2 | Эпюры давления для случая цилиндрического слоя при радиусах цилиндров порядка толщины слоя | 41 |
| 2.3 | Эпюры давления для случая цилиндрического слоя при радиусах цилиндров порядка длины образующей | 48 |
| 2.4 | Эпюры давления для случая цилиндрического слоя при радиусах “промежуточного” порядка | 56 |
| 3.1 | Деформируемый сферический слой | 58 |
| 3.2 | Эпюры давления для случая сферического слоя | 70 |
| 4.1 | Деформируемый плоский слой | 73 |
| 4.2 | Эпюры давления для случая плоского вязкопластического слоя | 84 |

Список таблиц

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Значения коэффициента $C_p^{\{0\}}$ | 25 |
|---|---|----|