

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Шамина Анастасия Александровна**

**Взаимное влияние системы трещин в трехмерном  
упругом теле**

Специальность 01.02.04 —  
механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена на кафедре волновой и газовой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Звягин Александр Васильевич**

*доктор физико-математических наук, профессор*

**Официальные оппоненты: Бондарь Валентин Степанович,**

*доктор физико-математических наук, профессор.*

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский политехнический университет», кафедра «Техническая механика», профессор*

**Димитриенко Юрий Иванович,**

*доктор физико-математических наук, Федеральное*

*Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», кафедра «Вычислительная математика и математическая физика», заведующий кафедрой*

**Федулов Борис Никитович,**

*доктор физико-математических наук,*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова механико-математический факультет, кафедра теории пластичности, профессор*

Защита состоится 12 ноября 2021 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.14 Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, к. 208.

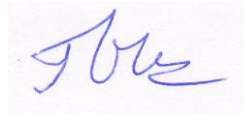
E-mail: pvchist60@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/392070720/>

Автореферат разослан «07» октября 2021 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета МГУ.01.14,  
кандидат физико-математических наук



П.В. Чистяков

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Актуальность темы**

Одним из основных объектов изучения в механике разрушения является локальное нарушение сплошности среды на некоторой части поверхности внутри тела. Этот дефект принято называть трещиной. Эволюция трещины под действием внешнего поля напряжений является одной из основных задач механики разрушения. Для анализа возможности роста поверхности трещины используется выбранный критерий. Он, как правило, тесно связан с коэффициентами интенсивности напряжений (КИН). Если с ростом размеров трещины выбранный критерий продолжает выполняться при отсутствии изменений внешнего поля напряжений, трещина называется неустойчивой. В этом случае возможен её непрогнозируемый рост и макроразрушение тела. В том случае, когда с ростом трещины, критерий перестает выполняться, трещина считается устойчивой.

Нужны современные вычислительные методы, позволяющие достаточно эффективно определять основные параметры механики разрушения (коэффициенты интенсивности напряжений, поля напряжений, поля перемещений, раскрытие берегов трещин) для систем большого количества произвольно ориентированных пространственных трещин. Это позволит ответить на многие вопросы практики. Например, на вопрос взаимного влияния трещин, в зависимости от их размеров и ориентации в пространстве.

Для некоторых технологий основой является создание самой трещины. Например, создание трещины гидроразрыва для увеличения нефтеотдачи пласта. Не менее важной задачей является оптимизация затрат на измельчение материала путём макроразрушения.

Для решения перечисленных задач необходимо проведение предсказательного моделирования критериев роста трещин, направления роста, а в некоторых случаях условия остановки этого роста.

В данной работе предложен численный метод математического моделирования системы произвольно ориентированных трещин в трёхмерном упругом теле. Метод реализован пакетом прикладных программ. Он позволяет проводить расчеты необходимых характеристик механики разрушения для большой системы пространственно ориентированных трещин, как в бесконечной упругой среде, так и в конечном упругом теле. В частном случае одной пространственной трещины пакет может быть использован для исследования и моделирования пространственной задачи гидроразрыва.

Надёжность метода была проверена сравнением с имеющимися аналитическими решениями и численными результатами других авторов. Получено хорошее качественное и количественное совпадение.

### **Цели диссертационной работы**

Одной из основных целей работы является вычисление коэффициентов интенсивности напряжений для плоских трещин. Это связано с тем, что

коэффициенты интенсивности напряжений участвуют в силовых критериях возможного роста трещины. В простейшем случае считается, что если при нагрузке тела коэффициент интенсивности напряжений превышает некоторое критическое значение, то трещина начинает расти. Таким образом, знание распределения коэффициентов интенсивности напряжений вдоль границы трёхмерной трещины позволяют прогнозировать её рост и возможные направления движения.

Для системы трещин важной характеристикой является коэффициент влияния. Это отношение коэффициента интенсивности напряжений, полученное для системы трещин под заданной нагрузкой к коэффициенту интенсивности напряжений для одиночной трещины под действием той же внешней нагрузки. Знание коэффициентов влияния позволяет сделать физические выводы о прочности материала, содержащего систему трещин.

Исследование области взаимного влияния трещин позволяет на основе анализа конечной системы делать выводы о бесконечной периодической системе трещин. На основе предложенной методики исследованы периодические и двояко периодические системы трещин.

Одними из мало исследованных вопросов механики разрушения являются особенности полей напряжений и перемещений для трещин ветвления. В работе рассмотрены пространственные трещины ветвления и исследован вопрос определения наиболее вероятных углов ветвления.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Диссертация имеет как теоретическую, так и практическую ценность. Полученные результаты могут быть использованы в учебных целях, как пример разработки метода решения трёхмерных задач теории упругости для среды с трещинами. Прикладная ценность работы связана с возможностью её использования при оценке влияния микродефектов в форме трещин на прочность конкретных тел.

### **Методология и методы исследования**

В диссертации используются методы аналитической и вычислительной математики и математического моделирования. Программа написана на языке C++.

### **Научная новизна**

В работе впервые численно исследованы задачи взаимного влияния круглых и эллиптических трещин в трёхмерном упругом пространстве. Рассмотрены разные случаи их взаимного расположения (трещины в одной плоскости, трещины, находящиеся в параллельных плоскостях). Исследованы зависимости КИН от радиусов трещин, от расстояния между ними, от взаимного сдвига центров трещин.

Предложен метод, позволяющий исследовать бесконечную периодическую систему трещин. Метод верифицирован сравнением с имеющимися

аналитическими решениями. Впервые были рассмотрены пространственные трещины с изломом и трещины ветвления.

### **Достоверность**

. Предложенный метод численного расчета упругой среды, ослабленной системой трещин, является методом граничных элементов. В его основе лежит разложение решения в виде линейной комбинации по некоторой системе аналитически заданных функций. В качестве таких функций в данной работе выбраны решения трёх независимых задач уравнений упругости. Такой выбор гарантирует точное выполнение уравнений теории упругости внутри области. Коэффициенты разложения определяются при выполнении граничных условий в конечном множестве точек границы.

Достоверность полученных результатов установлена путём сравнения с имеющимися аналитическими решениями пространственных задач и результатами других авторов. Во всех случаях показано хорошее совпадение численных характеристик, как по полям перемещений и напряжений, так и по коэффициентам интенсивности напряжений. Проведенная верификация показала надёжность и достоверность результатов предложенного численного метода.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Создан новый численный метод, позволяющий вычислять напряженно деформированное состояние в трехмерном упругом теле, содержащем систему произвольно ориентированных трещин. Метод позволяет решать основные задачи механики разрушения: определение коэффициентов интенсивности напряжений (КИН); потоки энергии на образование новых свободных поверхностей в случае роста трещин; коэффициенты взаимного влияния трещин.
2. В задаче о двух параллельных трещинах установлено, что определяющую роль для взаимного влияния трещин играет теневая область (если через верхнюю трещину пропустить свет, то на нижнюю будет падать тень, область тени будем называть «теневой» областью). В случае если эта область невырождена КИН в точках границы, лежащих в тени, уменьшается при сближении трещин, при этом минимальное значение КИН достигается в точке границы, которая соответствует направлению к центру другой трещины. В точках границы, удаленных от теневой области, при сближении трещин КИН возрастает. В случае вырожденной теневой области во всех точках границы КИН возрастает при уменьшении расстояния между трещинами, при этом его максимальное значение достигается в точке, соответствующей теневой области.
3. Для трещин с линией излома максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений реализуется в точках границы в окрестности линии излома. То есть, при заданных параметрах нагрузки, возможный рост будет происходить вдоль линии излома. Активная трещина с изломом более устойчива к росту, чем пассивная.

4. Для ветвящихся трещин раскрытие в точках ветвления терпит скачок, причем его величина зависит от геометрии ветвления. Толщина ветви трещины при переходе через точку ветвления может, как уменьшаться, так и увеличиваться. Проведенные расчеты позволили выявить наиболее вероятные углы ветвления для заданных параметров задачи.
5. Наличие параллельных трещин менее опасно (с точки зрения разрушения), по сравнению с единичной трещиной тех же размеров. В двоякопериодической системе трещин, когда есть в наличии и параллельные трещины и трещины, лежащие в одной плоскости, коэффициент влияния может оказаться как меньше 1, так и больше 1, в зависимости от взаимного расположения.

### **Личный вклад**

Научным руководителем были предложены постановки задач и методы их исследования.

Представленные в диссертации результаты получены лично соискателем.

### **Апробация работы**

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика РАН Р.И. Нигматулина (2021 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. В.И. Горбачева (2021 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Д.В. Георгиевского (2021 г.).
- ◆ научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2021 г.).
- ◆ 2021 Численное моделирование поведения упругой среды, ослабленной трещинами (Устный) Авторы: Удалов А.С., Шамина А.А. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021». Секция «Математика и механика», Москва, Россия, 12-23 апреля 2021
- ◆ 2020 Алгоритмы вычисления коэффициентов интенсивности напряжений с исследованием силовых критериев роста трещин (Устный) Авторы: Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А. Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Октябрь 2020 года, Москва, НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 26-30 октября

- ◆ 2020 Исследование трехмерных трещин с изломом (Устный) Авторы: Шамина А.А., Звягин А.В., Акулич А.В. Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Октябрь 2020 года, Москва, НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 26-30 октября 2020
- ◆ 2020 Stress intensity coefficients for elliptic and round cracks (Устный) Авторы: Shamina A.A., Zvyaguin A.V. 71st International Astronautical Congress - CyberSpace Edition, Дубай, О.А.Э., 12-14 октября 2020
- ◆ 2020 Elliptic cracks in three-dimensional space (Устный) Авторы: Shamina A.A., Zvyaguin A.V. XLVIII International Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics", г. Санкт-Петербург, Online, Россия, 21-26 июня 2020
- ◆ 2019 Метод разрывных смещений для системы пространственных трещин (Устный) Авторы: Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А. VIII Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов», ИМЕТ РАН, Россия, 19-22 ноября 2019
- ◆ 2019 Трехмерные трещины в упругой среде (Устный) Авторы: Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А. VIII Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов», ИМЕТ РАН, Россия, 19-22 ноября
- ◆ 2019 Взаимное влияние трёхмерных трещин в упругом теле (Стендовый) Авторы: Шамина А.А., Лужин А.А., Звягин А.В. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, Россия, 19-24 августа 2019
- ◆ 2019 Взаимное влияние трехмерных трещин в параллельных плоскостях (Стендовый) Автор: Шамина А.А. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, Россия, 19-24 августа
- ◆ 2019 Взаимное влияние трёхмерных трещин в упругом теле (Устный) Авторы: Звягин А.В., Шамина А.А., Лужин А.А. 5-ая Международная конференция «Триггерные эффекты в геосистемах», Институт динамики геосфер РАН, г.Москва, Россия, 4-7 июня 2019
- ◆ 2019 Трехмерный метод разрывных смещений в линейной механике разрушения (Устный) Автор: Шамина А.А. Международная конференция «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе», посвященная дню рождения великого русского математика академика П.Л. Чебышёва, г. Обнинск, Россия, 14-16 мая 2019
- ◆ 2019 Трехмерные трещины в упругом теле (Устный) Авторы: Звягин А.В., Шамина А.А., Лужин А.А. Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 13-15 мая 2019

- ◆ 2019 Трёхмерная трещина около границы упругого тела (Устный) Авторы: Звягин А.В., Шамина А.А., Лужин А.А. «Ломоносовские чтения - 2019». Секция «Механика», Москва, МГУ, Россия, 15-25 апреля 2019
- ◆ 2019 Взаимодействие эллиптических трещин с границей упругого тела (Устный) Авторы: Лужин А.А., Звягин А.В., Шамина А.А. XXV Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова., Калужская область, г. Кременки, Россия, 18-22 марта 2019
- ◆ 2018 Численное моделирование взаимодействия дискообразных трещин в трёхмерном упругом пространстве. (Устный) Авторы: Звягин А.В., Шамина А.А., Акулич А.В. XVII Международная конференция «Супервычисления и математическое моделирование», г. Саров, Россия, 15-19 октября 2018
- ◆ 2018 Фундаментальные аспекты вычислительного моделирования трещины гидроразрыва (Устный) Авторы: Пестов Д.А., Киселев А.Б., Тюренкова В.В., Звягин А.В., Шамина А.А., Акулич А.В. Семинар «Цифровые месторождения: математическое моделирование гидроразрыва пласта и геомеханических задач при разработке месторождений», Уфа, Россия, 17-18 мая 2018
- ◆ 2018 Взаимное влияние дискообразных трещин в упругом пространстве (Устный) Авторы: Звягин А.В., Панфилов Д.И., Шамина А.А. Ломоносовские чтения 2018 (секция механики), НИИ механики МГУ, Россия, 16 - 27 апреля
- ◆ 2018 Вычислительное моделирование взаимодействия трещины гидроразрыва с естественными разломами различных характерных размеров (Устный) Авторы: Акулич А.В., Звягин А.В., Панфилов Д.И., Пестов Д.А., Шамина А.А. Ломоносовские чтения 2018 (Секция механики. 16-27 апреля 2018. Москва. МГУ имени М.В. Ломоносова), МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 16-27 апреля
- ◆ 2018 Взаимное влияние дискообразных трещин в трёхмерном упругом пространстве (Устный) Автор: Шамина А.А. «Ломоносов 2018», Москва, Россия, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 9-13 апреля 2018

### **Публикации**

Основное содержание диссертации представлено в 14 научных статьях (9 статей в журналах, 5 в сборниках), 7 из которых опубликованы в рецензируемых научных журналах, индексируемых в базах данных RSCI, Web of Science, Scopus. Также часть результатов представлена в главе коллективной монографии. Список публикаций приведен в конце автореферата.



## Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа представлена на 130 страницах, содержит 104 иллюстрации и 8 таблиц. Список литературы включает 139 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы, указывается цель работы, дается характеристика научной новизны диссертации и приводится обзор литературы по исследуемой теме.

Расчет прочности конструкции является одной из важнейших инженерных задач. Уже в середине XIX века инженеры столкнулись с проблемой возникновения концентрации напряжений в окрестности технологических отверстий, люков и т.п. Во всех этих случаях граница тела имела области с малым радиусом кривизны поверхности. Оказалось, что локальные напряжения в окрестности отверстий или инородных включений, могут многократно превышать номинальные напряжения характерные для тела без такого рода нарушений однородности. Максимальное значение отношения локального напряжения к номинальному принято называть коэффициентом концентрации напряжений. Во второй половине XX века развитие математики, в особенности теории функций комплексного переменного, позволили решить аналитически множество плоских задач теории упругости о телах с трещинами. Но в огромном количестве реальных задач механики прочности трещины являются трёхмерными. Нужны современные вычислительные методы, позволяющие достаточно эффективно определять основные параметры механики разрушения (коэффициенты интенсивности напряжений, поля напряжений, поля перемещений, раскрытие берегов трещин) для систем большого количества произвольно ориентированных пространственных трещин.

Основными параметрами, характеризующими рост трещин являются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). В зависимости от вида приложения нагрузки выделяют соответственно первый, второй и третий коэффициенты интенсивности напряжений и обозначают  $K_I, K_{II}, K_{III}$ . Трещина начинает распространяться, если коэффициент интенсивности больше какого-то критического значения для данного материала. Исследования в фундаментальных задачах математики и механики XX века позволили получить аналитические решения основных краевых задач, таких как задачи Неймана, Дирихле, Римана-Гильберта и других. Аналитические методы решения пространственных задач известны лишь для трещин с простыми геометрическими свойствами и определенным характером напряженно-деформируемого состояния тела. Наиболее широко изучен круг

задач с дискообразными трещинами, большинство из которых решаются с помощью интегрального преобразования Ханкеля.

Существуют два различных подхода к решению пространственных задач численным способом: решать уравнения теории упругости во всем трехмерном теле (метод конечных элементов) или сводить уравнения теории упругости на границу и решать уже там граничные уравнения (метод граничных элементов). Несмотря на относительную простоту и популярность МКЭ, решения при помощи него динамических трехмерных задач о трещинах на данный момент не получено, также нет и результатов использования МКЭ в задачах с двумя и более трещинами.

В настоящее время нет эффективного метода вычисления коэффициентов интенсивности напряжений. В основном определяются параметры трещин. Таким образом, несмотря на многолетние исследования задач о трещинах и большое количество опубликованных работ, в этой теме остается еще много нерешенных проблем, связанных с точностью решений, недостатком оперативной памяти при численном счете и других.

В **первой главе** излагается и обосновывается численный метод решения задачи о теле, содержащем систему произвольно ориентированных трещин. В **разделах 1.1 и 1.2** приводятся постановка задачи и аналитический метод решения.

Рассматривается линейно упругая среда, ослабленная системой трещин. На бесконечности приложено растягивающее напряжение, перпендикулярное плоскостям трещин. Под трещингой мы понимаем поверхность, на которой терпят разрыв перемещения. Граничные условия: если совместить плоскость основной трещины с плоскостью  $xoy$ , то на берегах трещин должны быть выполнены условия равенства нулю компонент тензора напряжений:  $\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_{zz} = 0$ , а на бесконечности задается одно ненулевое растягивающее напряжение:  $\sigma_{zz} = P > 0$ . Решение строится при помощи представления Треффца и с использованием потенциалов простого и двойного слоев.

Одним из общих решений уравнений теории упругости является представление Треффца, когда функция перемещений представляется в виде комбинации двух гармонических функций  $\varphi$  и  $\psi$ :  $u_i = \varphi_i + x_3 \psi_{,i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

После подстановки этого представления в уравнение Ламе, оно тождественно выполнится, если функции связаны соотношением  $\psi_{,3} = -\Lambda \varphi_{,k,k}$ ,  $\Lambda = (\lambda + \mu) / (\lambda + 3\mu) = 1 / (3 - 4\nu)$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  - коэффициенты Ламе,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

В нашей задаче перемещение терпит разрыв на поверхности трещины,

поэтому в качестве функции  $\varphi$  выбирается потенциал двойного слоя. С помощью потенциалов простого  $g$  и двойного слоя мы получаем три независимых решения:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \varphi^{(1)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_1}, & u_2^{(1)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_2}, & u_3^{(1)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_3}; \\ u_1^{(2)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_1}, & u_2^{(2)} &= \varphi^{(2)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_2}, & u_3^{(2)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_3}; \\ u_1^{(3)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_1}, & u_2^{(3)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_2}, & u_3^{(3)} &= \varphi^{(3)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_3} \end{aligned}$$

В первом терпиге разрыв первая компонента вектора перемещения, во втором – вторая компонента, в третьем – третья компонента. Зная перемещения можно найти деформации, а зная деформации и используя закон Гука можно найти напряжения

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}^{(1)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda) + 1] \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1^3}; & \frac{\sigma_{22}^{(1)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \\ \frac{\sigma_{33}^{(1)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda) - \Lambda] \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{12}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1^2 \partial x_2}; \\ \frac{\sigma_{13}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_3} + \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1^2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}; & \frac{\sigma_{23}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}. \\ \frac{\sigma_{11}^{(2)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_1^2 \partial x_2}; & \frac{\sigma_{22}^{(2)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda) + 1] \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_2^3}; \\ \frac{\sigma_{33}^{(2)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda) - \Lambda] \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_2 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{12}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \\ \frac{\sigma_{13}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2}; & \frac{\sigma_{23}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_3} + \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_2^2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_2^2}. \\ \frac{\sigma_{11}^{(3)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1^2}; & \frac{\sigma_{22}^{(3)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_2^2}; \\ \frac{\sigma_{33}^{(3)}}{2\mu} &= (\Lambda_1 + 1)(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_3^2}; & \frac{\sigma_{12}^{(3)}}{2\mu} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ \frac{\sigma_{13}^{(3)}}{2\mu} &= \frac{1-\Lambda}{2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{23}^{(3)}}{2\mu} &= \frac{1-\Lambda}{2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_2 \partial x_3}. \end{aligned}$$

Построенные решения для перемещений стремятся к нулю на бесконечности и являются линейно независимыми. В некоторых случаях потенциалы простого и двойного слоя можно вычислить аналитически. Например, в случае постоянной единичной плотности и заданной формы граничного элемента они

соответственно равны:

$$g(\mathbf{x}) = \left\{ \left[ g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) \right] \Big|_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \right\} \Big|_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \left\{ \left[ \varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) \right] \Big|_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \right\} \Big|_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2}$$

В формулах использовано символическое равенство

$$f(\eta) \Big|_{\eta=a}^{\eta=b} = f(b) - f(a),$$

а функции  $g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)$ ,  $\varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)$  соответственно представлены в аналитической форме

$$\varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) = -\frac{\partial g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)}{\partial x_3}, \text{ где}$$

$$g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) = \iint \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \Big|_{\xi_3=0} d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= (x_1 - \xi_1) \log(r + x_2 - \xi_2) + (x_2 - \xi_2) \log(r + x_1 - \xi_1) - z \operatorname{arctg} \left( \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r x_3} \right),$$

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}.$$

Аналитическое представление базисных решений в методе граничных элементов позволяет значительно упростить процедуру решения, поскольку отпадает необходимость вычисления сингулярных интегралов в системе граничных интегральных уравнений.

В разделе 1.3 излагается численный метод решения краевой задачи. Выбирается метод разрывных смещений (модификация метода граничных элементов). В центре каждого граничного элемента вводится локальная система координат. Все граничные элементы вносят свои напряжения и перемещения. Суммируя с неопределенными коэффициентами все вклады, которые вносят все элементы в центр элемента с номером  $n$ , получаем систему линейных уравнений. После ее решения, решение задачи представляется в виде конечного ряда по известным функциям. Таким образом мы знаем напряжения и перемещения в каждой точке.

В разделе 1.4 приведено вычисление коэффициентов интенсивности с помощью асимптотических формул напряжений и перемещений.

Во второй главе проводится верификация программного кода. В разделе 2.1 проводится сравнения с физическими результатами. Исследуются задачи о квадратной кольцевой трещине, круглой кольцевой трещине, вогнутой трещине и о двух трещинах, находящихся в одной плоскости. На границе одной из трещин задано давление.

В разделе 2.2 проведена верификация с известными аналитическими

результатами. Сравнение проводилось с задачами об одной круглой трещине, одной эллиптической трещине, с задачей о системе двух круглых трещин, системе двух эллиптических трещинах, а также с задачами о двух трещинах в одной плоскости под действием как нормальной, так и касательной нагрузки. Максимальное значение ошибки на мелкой сетке не превосходит 13%.

Пример сравнения для одной круглой трещины представлен на рис. 1

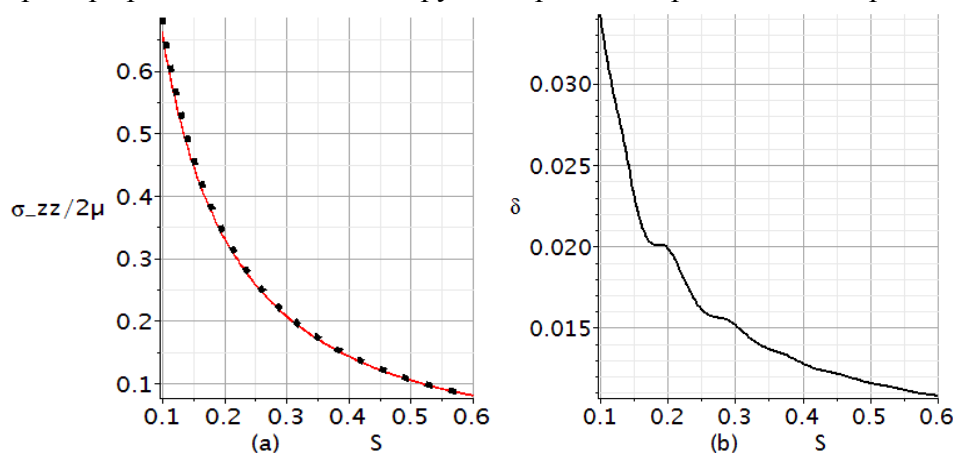


Рис. 1. а) сравнение численных и аналитических результатов: сплошная кривая-аналитическое решение, точечная-численная; б) относительная ошибка на мелкой сетке, ошсравнение ошибка не превосходит 3,5%.

В таблице 1 приведено сравнение для двух круглых трещин, находящихся в одной плоскости под нормальной нагрузкой для расстояния  $0,2a$ , где  $a$  – радиус трещин. В строке « $k_f$ » аналитические результаты Фабкиканта, в строке « $k_n$ » численные результаты. В строке % относительная ошибка в процентах.

Таблица 1.

У г о	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	175°	180°
$k_f$	1.167	1.138	1.092	1.060	1.042	1.031	1.024	1.0198	1.017	1.015	1.014	1.013	1.013
$k_n$	1.192	1.151	1.083	1.053	1.035	1.023	1.020	1.016	1.015	1.014	1.011	1.014	1.015
%	2.14	1.14	0.82	0.66	0.67	0.77	0.39	0.37	0.20	0.09	0.29	0.099	0.197

**В третьей главе** по изложенному методу решаются новые задачи. **В разделе 3.1** приведены результаты решения задачи для системы двух трещин, находящихся в параллельных плоскостях. Изучено влияние сдвига геометрического центра одной из трещин. Показано как зависят коэффициенты интенсивности напряжений от сдвига трещин, от расстояния между плоскостями трещин и от отношения радиусов трещин.

**В разделе 3.2** изучена система из двух эллиптических трещин, находящихся в параллельных плоскостях. Исследовано влияние сдвига центра второй трещины и расстояния между плоскостями трещин на коэффициенты интенсивности напряжений.

**В разделе 3.3** исследованы активна и пассивная трещины с изломом. Рассматриваются 2 задачи, которые отличаются граничными условиями. Во всех задачах трещины имеют форму круга, с изломом по диаметру.

**В разделе 3.4** исследована трещина ветвления. Изучаются трещины разных

форм и определяется наиболее вероятный угол ветвления. Моделируется сложная трещина ветвления как комбинация простых. Исследована зависимость раскрытия трещины от угла излома. В качестве исследуемой выбирается величина коэффициента влияния, по определению равная отношению КИН для двух трещин к КИН для одиночной трещины.

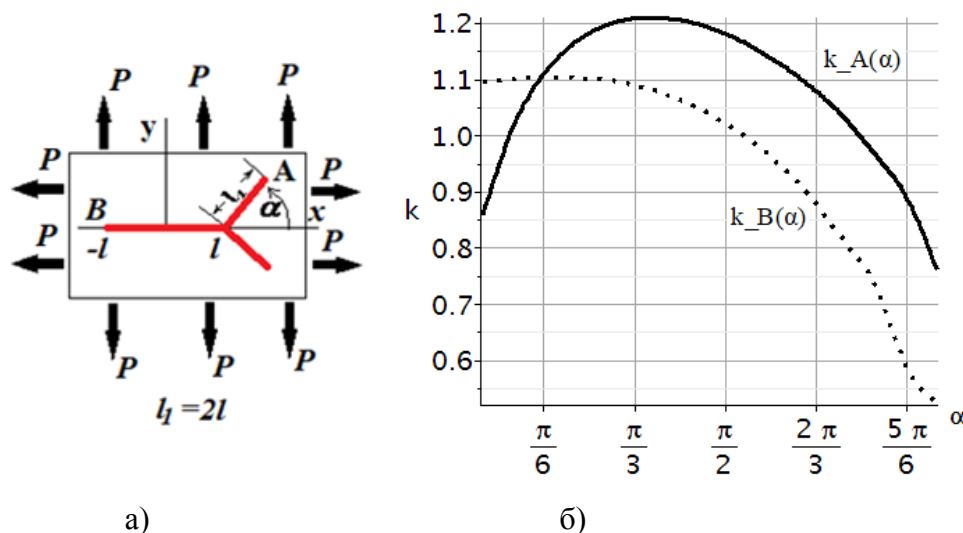


Рис. 2. а) трещина ветвления. А и В – точки, в которых считаются значения коэффициента влияния; б) зависимость коэффициента влияния от угла ветвления  $\alpha$  для двух точек А и В.

Угол, при котором коэффициент влияния имеет максимум, мы будем называть наиболее вероятным углом ветвления.

**В разделе 3.5** исследуются периодические системы трещин. Решаются 3 различные задачи: цепочка трещин в одной плоскости, соосные трещины в пространстве, и двояко-периодическая система трещин. Вводится предположение, что бесконечную систему трещин можно считать как конечную, но достаточно большую систему. Для всех трех задач найдено количество трещин, которого достаточно, чтобы считать, что найден коэффициент интенсивности напряжений для бесконечной системы трещин.

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы:

1. Разработан метод, который позволяет вычислять напряжения и перемещения в произвольной точке области тела. Для вычисления КИН использованы асимптотические представления напряжений и перемещений. Преимуществом метода является то, что после решения системы линейных уравнений, перемещения и напряжения представляются в виде конечных рядов по неортогональным функциям. Метод позволяет решать любые краевые задачи (в напряжениях, в перемещениях и смешанные).
2. Проведен качественный анализ влияния формы контура трещин на возможные направления ее роста. Показано, что в случае вогнутых участков границы, они спрямляются и трещина стремится стать выпуклой. В случае многосвязных областей схлопывание происходит внутрь (область стремится стать односвязной).

3. Проведен качественный анализ влияния формы контура трещин на возможные направления ее роста. Показано, что в случае вогнутых участков границы, они спрямляются и трещина стремится стать выпуклой. В случае многосвязных областей схлопывание происходит внутрь (область стремится стать односвязной).
4. Тестовые расчеты по верификации работы программы проведены для одиночных трещин (круглых и эллиптических), для системы двух параллельных одноосных круглых трещин, для круглых и эллиптических трещин, находящихся в одной плоскости. Расчеты проводились как для нормальной, так и для касательной нагрузки. В проведенных расчетах максимальное значение ошибки не превосходит 13%.
5. Во всех случаях формы и расположения трещин расчеты показали вполне удовлетворительное количественное и качественное совпадение численных и аналитических результатов, как для напряжений, так и для коэффициентов интенсивности напряжений.
6. Для верификации потребовалось проведение большой серии расчетов. Проведенная работа показала высокую эффективность по скорости расчетов и обработке полученных численных результатов.
7. В случае линейно возрастающего внутреннего давления максимум раскрытия трещины смещается в сторону большего давления, причем ошибка по КИН на грубой сетке порядка 10% в проведенных расчетах. Программа хорошо отслеживает симметрию задачи.

Для системы двух параллельных круглых и эллиптических трещин:

8. При одноосном расположении трещин коэффициент влияния меньше 1. То есть ситуация становится менее опасной, чем для одиночной трещины. С уменьшением расстояния коэффициент влияния уменьшается, стремясь к некоторой предельной величине.
9. В случае если теневая область не вырождена, КИН в точках, принадлежащих теневой области, уменьшается при сближении трещин, при этом минимальное значение КИН достигается в точке теневой области, которая соответствует направлению к центру другой трещины. В точках, удаленных от теневой области, при сближении трещин КИН возрастает.
10. В случае вырожденной теневой области во всех точках КИН возрастает при уменьшении расстояния между трещинами, при этом максимальное значение КИН достигается в точке, соответствующей теневой области.

Трещины с изломом.

11. Во всех проведенных расчетах максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений реализуется в точках границы в окрестности линии излома. То есть возможный рост будет происходить вдоль линии излома, независимо от вида нагрузки.
12. Если трещина с изломом находится под давлением, то ее раскрытие слабо зависит от угла излома (оно чуть больше при большем угле излома).

13. Поле напряжений существенно зависит от характера приложенной внешней нагрузки (трещина активна или пассивна).
14. Трещина под нагрузкой, приложенной на бесконечности, менее устойчива. Это следует из сравнения величины комбинации коэффициентов интенсивности напряжений для трещины под давлением и для трещины в пространстве, подвергнутой растяжению на бесконечности.

Ветвящиеся трещины.

15. В пространственных задачах ветвящихся трещин достаточно четко проявляется область взаимного влияния отдельных частей. «Дальние» ветви по отношению к выделенным ветвям практически не влияют на поле напряжений и перемещений контролируемой окрестности.
16. Раскрытие на отрезках ветвления терпит скачок, причем его величина зависит от геометрии ветвления. Толщина ветви трещины при переходе через точку ветвления может, как уменьшаться, так и увеличиваться. Это особенно важно для трещин гидравлического разрыва.
17. Проведенные расчеты позволили выявить наиболее вероятные углы ветвления, которые зависят от материала, формы и геометрии трещины.

Периодические системы трещин.

18. Расчеты показали возможность определения коэффициента влияния для бесконечной системы периодических трещин, из рассмотрения конечной, но достаточно большой системы трещин.
19. Наличие параллельных трещин менее опасно (с точки зрения разрушения), по сравнению с единичной трещиной тех же размеров.
20. В двоякопериодической системе трещин, когда есть в наличии и параллельные и трещины, лежащие в одной плоскости, коэффициент влияния может оказаться как меньше 1, так и больше 1, в зависимости от параметров задачи.

### **Список публикаций в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, Web of Science, RSCI:**

1. 2021 Computational modeling of cracks different forms in three-dimensional space Shamina A.A., Zvyagin A.V., Smirnov N.N., Luzhin A.A., Panfilov D.I., Udalov A.S. в журнале Acta Astronautica, издательство Pergamon Press Ltd. (United Kingdom) DOI 10.1016/j.actaastro.2021.05.041, V.186, p. 289-302. Impact Factor 2019 2,830 5-Year Impact Factor 2019 2,690 SJR 2019 1,065
2. 2021 Stress intensity factors for branching cracks in space structures Zvyagin A.V., Luzhin A.A., Smirnov N.N., Shamina A.A., Shamin A.Y. в журнале Acta Astronautica, издательство Pergamon Press Ltd. (United Kingdom), том 180, с. 66-72 DOI 10.1016/j.actaastro.2020.12.007 Impact Factor 2019 2,830 5-Year Impact Factor 2019 2,690 SJR 2019 1,065
3. 2020 The study of the strength of structures weakened by a system of cracks Shamina A.A., Zvyaguin A.V., Akulich A.V., Tyurenkova V.V., Smirnov



- N.N. в журнале Acta Astronautica, издательство Pergamon Press Ltd. (United Kingdom), том 176, с. 620-627 DOI <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.02.021> Impact Factor 2019 2,830 5-Year Impact Factor 2019 2,690 SJR 2019 1,065
4. 2021 Метод определения коэффициентов интенсивности напряжений для пространственных трещин Звягин А.В., Панфилов Д.И., Лужин А.А., Шамина А.А. в журнале Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, издательство Изд-во Моск. ун-та (М.), № 2, с. 16-22 Impact Factor 1999 0,010 SJR 2008 0,111 RINC 2019 0,478
  5. 2021 Численный метод разрывных смещений в пространственных задачах механики трещин Звягин А.В., Лужин А.А., Панфилов Д.И., Шамина А.А. в журнале Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, № 1, с. 148-162 RINC 2019 1,058
  6. 2020 Изучение систем, ослабленных трещинами с изломом Шамина А.А., Звягин А.В., Акулич А.В., Тюренкова В.В., Смирнов Н.Н. в журнале Успехи кибернетики, издательство Научно-исследовательский институт системных исследований РАН (Москва), том 1, № 2, с. 29-38
  7. 2019 Взаимное влияние дискообразных трещин в трехмерном упругом пространстве Звягин А.В., Панфилов Д.И., Шамина А.А. в журнале Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, издательство Изд-во Моск. ун-та (М.), № 4, с. 34-41 Impact Factor 1999 0,010 SJR 2008 0,111 RINC 2019 0,478

#### **Прочие публикации автора по теме диссертации.**

8. 2018 Метод граничных элементов для численного решения трехмерных задач механики трещин Звягин А.В., Смирнов Н.Н., Панфилов Д.И., Шамина А.А. в журнале Вестник кибернетики, издательство СурГУ (Сургут), том 30, № 2, с. 18-31
9. 2018 Фундаментальные аспекты численного моделирования трещины гидроразрыва Пестов Д.А., Акулич А.В., Звягин А.В., Шамина А.А., Тюренкова В.В. в журнале Вестник кибернетики, издательство СурГУ (Сургут), том 32, № 4 с. 59-66
10. 2020 Stress intensity coefficients for elliptic and round cracks. Shamina A.A., Zvyaguin A.V., Luzhin A.A. в сборнике Proceedings of 71st International Astronautical Congress (IAC) – The CyberSpace Edition, 12-14 October 2020, с. IAC-20-A2.2.16. x58860
11. 2019 Displacement discontinuity method in 3-D problems of fracture mechanics. Zvyaguin A.V., Smirnov N.N., Luzhin A.A., Shamina A.A. в сборнике Bulletin of Xiangtan University, издательство Xinghua University Press (China), том 6
12. 2019 Взаимное влияние трёхмерных трещин в упругом теле. Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А. в сборнике Сборник трудов 5-й международной конференции "Триггерные эффекты в геосистемах", место издания Москва, с. 272-281. DOI: 10.26006/IDG.2019.5.34073
13. 2019 Трёхмерные трещины в упругом теле. Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А. в сборнике Современные проблемы математики и

механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, издательство ООО "МАКС Пресс" (Москва), том 2, с. 701-703

14. 2018 Численное моделирование влияния дискообразных трещин в трехмерном упругом пространстве. Звягин А.В., Акулич А.В., Шамина А.А. в сборнике Супервычисления и математическое моделирование. Сборник научных трудов XVII Международной конференции, место издания ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ" Саров, с. 274-285
15. 2021 Цифровые технологии предсказательного моделирования в подземной гидродинамике. Смирнов Н.Н., Звягин А.В., Стамов Л.И., Никитин В.Ф., Скрылева Е.И., Пестов Д.А., Шамина А.А. Москва ISBN 978-5-93838-087-5, 144с.