

В Диссертационный совет МГУ.01.17
МГУ имени М. В. Ломоносова
119234, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ГЗ МГУ,
механико-математический факультет

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук, доцента Рябова Павла Евгеньевича на диссертационную работу Кибкало Владислава Александровича «Топология интегрируемых многопараметрических аналогов системы Ковалевской на алгебрах Ли», представленную в диссертационный совет МГУ.01.17 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – Геометрия и топология.

Диссертация В. А. Кибкало посвящена изучению топологии слоения многопараметрического семейства интегрируемой системы динамики твердого тела, распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской ($A = B = 2C$). Как оказалось, интегрируемый случай в динамике твердого тела, который был найден С.В. Ковалевской в 1888 г., имеет многочисленные обобщения, например, при добавлении гироскопических сил или на различные алгебры Ли. Появление новых параметров при таких обобщениях приводит к новым топологическим эффектам, например, наглядным примерам расщепления неустойчивых атомов (бифуркаций) или, наоборот, подтверждению их нерасщепляемости. Диссертационная работа В. А. Кибкало является естественным продолжением таких исследований. Объектом исследований диссертационной работы В.А. Кибкало являются интегрируемые аналоги классического волчка Ковалевской в случае алгебр Ли $so(3,1)$ и $so(4)$, отличных от алгебры Ли $e(3)$. В диссертационной работе В.А. Кибкало также изучаются псевдоевклидов аналог указанного семейства. Поэтому полезность и актуальность диссертационной работы В. А. Кибкало не вызывает сомнений.

Диссертационная работа состоит из введения и четырех глав. Работа напечатана на 177 страницах. Библиография содержит 130 наименований, в

том числе пять публикаций автора, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности.

Во введении и первой главе диссертации приводятся актуальность темы исследования, основные определения и теоремы для дальнейшего изложения результатов диссертации, приводится описание модели волчка (тяжелого твердого тела с закрепленной точкой) при условиях Ковалевской на распределение масс. Достаточно подробно освещена история вопроса исследования фазовой топологии интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $e(3)$ (раздел 1.2.2.1, стр. 71–75), аналога системы Ковалевской на пучке алгебр Ли $so(3,1) - e(3) - so(4)$ (раздел 1.3, стр. 76 – 98) и ее псевдо-евклидова аналога (раздел 1.3.5, стр. 99 – 100).

Со второй главы (стр. 101) начинается изложение основных результатов диссертационной работы компактного случая Ковалевской в случае алгебры Ли $so(4)$. Как оказалось, в системе Ковалевской на $so(4)$ имеется ровно 27 классов неэквивалентных слоений на связных компонентах неособых изоэнергетических поверхностей (Теорема 2.1., стр. 101). Таблицы 2.5, 2.6 (стр. 138–139) содержат список инвариантов Фоменко – Цишанга (меченные молекулы) компактного случая Ковалевской на $so(4)$, таблицы 2.8 и 2.9 (стр. 140–141) содержат список из 32 различных графов Фоменко с именованными атомами (терминология автора диссертации) слоений на неособых $Q_{a,b,h}^3$. Компактный случай Ковалевской на $so(4)$, как было уже сказано, относится к параметрическому семейству. Автору диссертации удалось найти разделяющее множество Θ и произвести стратификацию пространства параметров системы на двумерные и трехмерные страты. Разделяющие множество Θ , качественно различные виды бифуркационных диаграмм представлены в виде рисунков (Рис. 2.1, 2.2, стр. 108–109; Рис. 2.5 – 2.27, стр. 132–137). На мой взгляд, это главный результат второй главы диссертации, поскольку такое разбиение позволяет классифицировать бифуркационные диаграммы отображения момента, описать слоения Лиувилля и, в итоге, составить полный список меченных молекул Фоменко – Цишанга.

Третья глава связана с лиувиллевым анализом аналога волчка Ковалевской на алгебре Ли $so(3,1)$ в случае нулевой постоянной площадей. Для этого случая построены бифуркационные диаграммы (Рис.3.1, стр. 148), которые получаются путем предельного перехода бифуркационных диаграмм случая Ковалевской–Соколова и приводится обоснование такого предельного перехода. Здесь также наблюдается расщепление седловых особенностей $B \times C_2$ на две особенности $B \times B$. Для тонкой лиувиллевой классификации указаны в явном виде допустимые базисы в виде λ –циклов, необходимые для вычисления меченных молекул (топологических инвариантов Фоменко – Цишанга). Новые инварианты системы Ковалевской на алгебре Ли $so(3,1)$ представлены на рис.3.5, стр. 155 рассматриваемой диссертации.

Наконец, *четвертая глава* диссертации посвящена исследованию псевдоевклидова аналога системы Ковалевской. Как оказалось, при некоторых начальных данных, связанных с выбором значений интеграла энергии и функций Казимира, возможны некомпактные связные компоненты совместного уровня первых четырех интегралов (Теорема 4.5., стр.159).

Теперь о замечаниях работы.

- Как было сказано выше, работа напечатана на 177 страницах, а изложение основных результатов диссертационной работы, собственно, начинается со второй главы (стр. 101). Конечно, это связано с историей вопроса исследования и здесь можно было бы немного сократить, ведь же это не обзор, а диссертационная работа.
- В разделе 1.2.1.3 приводится физическая реализация системы Ковалевской со ссылкой на работу Richter P. H., Dullin H. R., Wittek A., “Kovalevskaya Top” // Publ. Wiss. Film, Sect. Techn. Wiss./Naturw. 13 (1997), 33–96. Но есть более ранние модели физической реализации волчка Ковалевской. Например, работа известного русского ученого, Николая Борисовича Делоне: Н. Б. Делоне, «Къ вопросу о геометриче-

скомъ истолкованіи интеграловъ движенія твердаго тѣла около неподвижной точки, данныхъ С. В. Ковалевскою», Матем. сб., 1892, том 16, номер 2, 346–351, находящейся в открытом доступе по ссылке http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=7242&option_lang=rus.

См. также «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки»: Сб., посвящ. памяти С. В. Ковалевской. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. 185 с.

- Во второй главе приведены все меченые молекулы для волчка Ковалевской на $so(4)$, но без указания топологического типа изоэнергетического многообразия $Q_{a,b,h}^3$, где они реализуются. Такие исследования все-таки были проведены автором и представлены в статье <https://arxiv.org/abs/1912.05536>.
- Такое же замечание относится к списку меченных молекул, представленному в третьей главе на рис. 3.5, стр. 155 диссертации. Нет указания, к какому топологическому типу изоэнергетического многообразия они относятся.
- На стр. 112 диссертационной работы предложена стратификация параметров в виде графа, выполненного в одном черно-сером цвете, а в тексте самой диссертационной работы приведены его цветовые обозначения и пояснения (стр. 111–112): описаны «синие» вершины графа, «красные», «фиолетовые», «зеленые», «синие» ребра графа. Можно было бы рис.2.3 (стр. 112) действительно сделать цветным для лучшего понимания описания такого графа.

Имеется ряд орфографических и стилистических ошибок по тексту диссертации.

- Отсутствует пробел в подстрочной подписи к рис.1.18 на стр. 98.
- В первой части приведены таблицы и рисунки, но отсутствуют подстрочные подписи к некоторым таблицам и рисункам (например, на стр. 27–31 вообще нет таких подстрочных подписей).

- На бифуркационных диаграммах, приведенных на стр. 133, рис.2.11, ясно указаны атомы, что нельзя сказать о бифуркационных диаграммах, которые приведены на стр. 148, рис. 3.1. Лишь только можно догадываться, к каким участкам бифуркационных кривых относятся мелкие буквы, перемешенные с другими. Здесь же, не ясно, есть ли касание в точках y_8, w_1 . Наверное, все-таки есть, поскольку это вырожденные особенности. Ведь речь идет о тех новых бифуркационных диаграммах, которые получаются предельным переходом в случае нулевой постоянной площадей по сравнению со случаем Ковалевской–Соколова.

Отмеченные выше замечания носят исключительно рекомендательный характер и не снижают ценность диссертационной работы В. А. Кибкало. Автор диссертации уверенно владеет современными методами исследования динамических систем, умело сочетает аналитические вычисления и компьютерное моделирование.

Заключение. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, подтверждается прежде всего публикациями в высокорейтинговых журналах, выступлениями на престижных конференциях и семинарах. Все основные результаты диссертации являются новыми, снабжены строгими доказательствами. По автореферату и опубликованным работам автора можно оценить диссертационную работу «Топология интегрируемых многопараметрических аналогов системы Ковалевской на алгебрах Ли», как актуальное, законченное научное исследование, удовлетворяющее критериям, определенным пп.2.1 – 2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова от 28 марта 2018 г., а также оформлено согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова от 28 марта 2018 г. По моему

мнению, автор диссертации, Кибкало Владислав Александрович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – Геометрия и топология.

Официальный оппонент,
профессор Департамента анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших данных
федерального государственного образовательного
бюджетного учреждения высшего образования
«Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.02.01 – Теоретическая механика,
доцент

Павел Евгеньевич Рябов

125993, Ленинградский проспект, 49
Тел.: +7 (495) 249-5222
E-mail: **PERyabov@fa.ru**



Рябова П. Э.

ЗАВЕРЯЮ

секретарь Ученого совета
Финансового университета

В.В. Звягинцева
сентября 2021 г.