

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Казахстанский филиал

Библиотека Первого Президента Республики Казахстан – Елбасы



ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

*Материалы
юбилейных конференций*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Казахстанский филиал

Библиотека Первого Президента Республики Казахстан – Елбасы

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Материалы Международной научно-практической конференции,
посвященной 30-летию Независимости Республики Казахстан
и 20-летию Казахстанского филиала Московского университета

4 июня 2021 г.

Нур-Султан, 2021

УДК 51
ББК 22.1
П78

*Подготовлено к печати
Казахстанским филиалом Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова*

Редакционный совет материалов юбилейных конференций

Председатель: А. В. Сидорович

*Члены редакционного совета: Р. Ж. Абдильдина, К. А. Бекмаганбетов,
В. Р. Битюкова, Г. И. Власова*

Редакционная коллегия сборника

Ответственный редактор: К. А. Бекмаганбетов

Члены редакционной коллегии: С. В. Богомолов, А. Б. Муканов, Е. Д. Нурсултанов

П78 **Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики:**
материалы Международной научно-практической конференции, посвященной
30-летию Независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского
филиала Московского университета (4 июня 2021 г.). – Нур-Султан:
Казахстанский филиал Московского государственного университета имени
М. В. Ломоносова, 2021. – 293 с.

ISBN 978-601-7804-98-5

В сборник вошли материалы Международной научно-практической конференции, которая была проведена Казахстанским филиалом МГУ совместно с Библиотекой Первого Президента Республики Казахстан – Елбасы в рамках цикла международных научно-практических конференций по проблемам экономики, филологии, экологии, математики и истории развития Республики Казахстан, посвященных 30-летию Независимости Казахстана и 20-летию Казахстанского филиала МГУ в соответствии с Планом мероприятий, утвержденным ректором Московского университета академиком В. А. Садовничим.

В сборнике приведены тезисы докладов, в которых описаны проблемы высшей алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, теории функций, функционального анализа, теории операторов, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории уравнений с частными производными, теории случайных процессов, математической статистики, компьютерного и математического моделирования.

Издание адресовано специалистам в области математики, магистрантам, студентам, а также широкому кругу лиц, интересующихся проблемами современной теоретической и прикладной математики.

Опубликованные материалы отражают авторскую позицию

ISBN 978-601-7804-98-5

© Казахстанский филиал МГУ
имени М. В. Ломоносова, 2021
© Коллектив авторов, 2021

К спектральной теории краевых задач для дифференциальных операторов с инволюцией

Л.В. Крицков¹

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
г. Москва, Россия
kritskov@cs.msu.ru

Предметом исследования являются операторы вида

$$Lu = Au + JBu,$$

где A и B – обыкновенные дифференциальные операторы, заданные на отрезке $[-1, 1]$, а J – оператор отражения, определяемый равенством $(Jf)(x) = f(-x)$ и являющийся простейшим примером инволюции ($J^2 = \text{id}$).

Спектральные свойства оператора L существенно зависят от соотношения между порядками n_A и n_B дифференциальных операций A и B (см. [1]).

Наиболее сложным оказался случай, когда эти порядки совпадают: $n_A = n_B$. Эффект неустойчивости спектральных свойств был обнаружен для расширений оператора L второго порядка простейшего вида

$$L_\alpha u = -u''(x) + \alpha u''(-x), \quad x \in (-1, 1),$$

где параметр $\alpha \in (-1, 1)$, $\alpha \neq 0$.

С одной стороны, этот оператор оказался близким к оператору двукратного дифференцирования. Например, для оператора L_α (даже с младшими членами) верна теорема о безусловной базисности (см. [4]). С другой стороны, конкретные примеры расширений оператора L_α с двухточечными краевыми условиями показывают, что аналогия здесь не полная, операторы A и B здесь входят в своеобразный «резонанс» и имеется неустойчивость свойства базисности корневых функций при малых возмущениях параметра α .

Для задачи 1:

$$\begin{cases} L_\alpha u(x) = \lambda u(x), \\ u(-1) = 0, u'(-1) = u'(1), \end{cases}$$

справедливы следующие утверждения [3].

Теорема 1. Если число $\kappa = \sqrt{(1-\alpha)/(1+\alpha)}$ иррационально, то спектр задачи простой, при этом система собственных функций полна и минимальна в $L_p(-1, 1)$ при любом $p > 1$, но не образует базиса.

Теорема 2. Если число κ рационально, то в спектре, наряду с простыми, есть бесконечно много двукратных собственных значений, при этом

систему собственных функций можно дополнить присоединенными функциями так, чтобы вся система образовывала базис в $L_p(-1, 1)$ при любом $p > 1$ (для $p = 2$ этот базис будет безусловным).

Для задачи 2:

$$\begin{cases} L_\alpha u(x) = \lambda u(x), \\ u(-1) = u'(-1) = 0, \end{cases}$$

оказались верными аналогичные утверждения [2].

Теорема 3. Если число $\kappa = \sqrt{(1 - \alpha)/(1 + \alpha)}$ иррационально, то спектр задачи простой, при этом система собственных функций полна и минимальна в $L_2(-1, 1)$, но не образует базиса.

Теорема 4. Если число κ рационально, то

– при $\kappa \neq \frac{2m_0}{2k_0-1}$, $m_0, k_0 \in N$, спектр задачи простой, при этом система собственных функций образует безусловный базис в $L_2(-1, 1)$,

– при $\kappa = \frac{2m_0}{2k_0-1}$, $m_0, k_0 \in N$, спектр содержит, наряду с простыми, бесконечно много трехкратных собственных значений, при этом в системе корневых функций можно выбрать присоединенные функции так, чтобы вся система образовывала безусловный базис в $L_2(-1, 1)$.

Отметим, что аналогичные утверждения можно получить и для целого семейства краевых условий периодического типа:

– для условий

$$u(-1) = \gamma u(1), u'(-1) = -\gamma u'(1),$$

где $\gamma \neq \pm 1$,

– для условий

$$u(-1) = \gamma u(1), (1 + \alpha\gamma)u'(-1) = -(\alpha + \gamma)u'(1),$$

где γ произвольно, а α – параметр из дифференциального оператора L_α .

Данная работа была выполнена при поддержке гранта Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан АР 05131225.

Список литературы

- [1] Владыкина В.Е., Шкаликов А.А., Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 484, № 1. – С. 12–17.

- [2] Крицков Л.В., Иоффе В.Л., *Спектральные свойства задачи Коши для оператора второго порядка с инволюцией* // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 1. – С. 4–13.
- [3] Крицков Л.В., Сарсенби А.М., *Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией* // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 990–996.
- [4] Крицков Л.В., Сарсенби А.М., *Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией* // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 35–48.