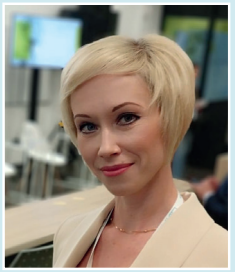

Зайцева Наталья Владимировна (род. 04.06.1980) — старший преподаватель кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова с 2020 года.

Область научных интересов: уравнения математической физики, начально-граничные задачи для гиперболических уравнений с оператором Бесселя, нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений с частными производными с сингулярными коэффициентами, нелокальные задачи для гиперболических дифференциально-разностных уравнений.

ISBN 978-5-19-011637-3

Н. В. Зайцева Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя

Н. В. Зайцева

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Издательство Московского университета

Н. В. Зайцева

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Монография

Издательство Московского университета
2021

УДК 517.95
ББК 22.161.6
З-12

Печатается по решению Ученого совета
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор факультета
ВМК МГУ *И. С. Ломов*;
доктор физико-математических наук, профессор факультета
ВМК МГУ *И. В. Садовничая*

Зайцева, Н. В.

З-12 Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя : монография / Н. В. Зайцева. — Москва : Издательство Московского университета, 2021. — 118, [2] с.

ISBN 978-5-19-011637-3

Книга посвящена исследованию нелокальных задач с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя, постановка которых существенно зависит от промежутков изменения параметра, входящего в дифференциальный оператор. Исследование на корректность поставленных задач проводится по единой схеме, основанной на классическом методе разделения переменных, которая применяется и для исследования неклассических задач с интегральными условиями для уравнений эллиптико-гиперболического типа, также содержащих оператор Бесселя по одной или двум переменным.

Полученные результаты вносят вклад в обобщение классических краевых задач для уравнений математической физики и разработку методов исследования разрешимости задач для уравнений с сингулярными коэффициентами.

Книга будет полезна научным работникам и преподавателям по математике, студентам старших курсов и аспирантам математических специальностей университетов.

УДК 517.95
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-19-011637-3

© Н. В. Зайцева, 2021
© Издательство Московского университета, 2021

Оглавление

Введение 5

Теоретический материал 10

Глава 1. Смешанные задачи с интегральными условиями первого рода для *B*-гиперболического уравнения 16

1.1. Смешанная задача с интегральным условием первого рода для уравнения (1.0) при $k \geqslant 1$ 17

1.1.1. Постановка задачи. Единственность решения 17

1.1.2. Существование решения задачи 23

1.1.3. Устойчивость решения задачи 31

1.2. Смешанная задача с интегральным условием первого рода для уравнения (1.0) при $|k| < 1$, $k \neq 0$ 32

1.2.1. Постановка задачи. Единственность решения 32

1.2.2. Существование и устойчивость решения задачи . . . 35

1.3. Смешанная задача с интегральным условием первого рода для уравнения (1.0) при $k \leqslant -1$ 35

1.3.1. Постановка задачи. Единственность решения 35

1.3.2. Существование решения задачи 40

1.3.3. Устойчивость решения задачи 43

Глава 2. Смешанные задачи с интегральными условиями второго рода для *B*-гиперболического уравнения 45

2.1. Смешанная задача с интегральным условием второго рода для уравнения (1.0) при $k \geqslant 1$ 45

2.1.1. Постановка задачи. Единственность решения 45

2.1.2. Существование решения задачи 48

2.1.3. Устойчивость решения задачи 56

2.2. Смешанная задача с интегральным условием второго рода для уравнения (1.0) при $|k| < 1$, $k \neq 0$ 57

2.2.1. Постановка задачи. Единственность решения 57

2.2.2. Существование и устойчивость решения задачи . . . 57

2.3. Смешанная задача с интегральным условием второго рода для уравнения (1.0) при $k \leqslant -1$ 59

2.3.1. Постановка задачи. Единственность решения 59

2.3.2. Существование решения задачи 68

2.3.3. Устойчивость решения задачи 73

Глава 3. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для уравнений гиперболического и смешанного типов с оператором Бесселя 75
3.1. Задача типа Келдыша с интегральным условием для уравнения (1.0) в прямоугольной области 75
3.1.1. Постановка задачи. Единственность решения 75
3.1.2. Существование решения задачи 79
3.2. Нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с оператором Бесселя . 83
3.2.1. Постановка задачи при $p \geqslant 1$. Единственность решения 83
3.2.2. Существование решения задачи при $p \geqslant 1$ 90
3.2.3. Устойчивость решения задачи при $p \geqslant 1$ 96
3.2.4. Постановка задачи $|p| < 1$, $p \neq 0$. Единственность, существование и устойчивость решения 97
3.3. Нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в прямоугольной области 100
3.3.1. Постановка задачи. Единственность решения 100

Библиографический список 109

Введение

В настоящее время теория краевых задач для вырождающихся и сингулярных уравнений представляет собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений в частных производных, что обусловлено ее многочисленными приложениями в газовой динамике, теории оболочек, магнитной гидродинамике и других областях науки и техники. Первые граничные задачи для вырождающихся уравнений эллиптического типа с переменными коэффициентами впервые изучены в работе Мстислава Всеволодовича Келдыша [43] (задачи D и E). С этой совсем небольшой по объему фундаментальной работы началось изучение вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных. Аналог краевых задач D и E для более общих эллиптических уравнений был изучен С. М. Никольским [84], Л. Д. Кудрявцевым [53], А. В. Бицадзе [3, 4], М. М. Смирновым [111] и многими другими авторами. Интерес к вырождающимся и сингулярным уравнениям вызван не только необходимостью решения прикладных задач, но и интенсивным развитием теории уравнений смешанного типа. Сингулярные, вырождающиеся и тесно связанные с ними уравнения смешанного (или переменного) типа В. Н. Врагов [11] предложил объединить в один класс — неклассические уравнения математической физики. Теория для уравнений этого класса разрабатывалась Ф. Трикоми [116], И. Н. Векуа [8], В. Ф. Волкодавовым [10], В. П. Глушко [14], Г. В. Джаяни [20, 21], В. И. Жегаловым [26], А. А. Килбасом [69], О. А. Ладыженской [54], И. С. Ломовым [58–60, 62], Е. И. Моисеевым [71], А. М. Нахушевым [82], О. А. Олейник [86], С. П. Пулькиным [87], Л. С. Пулькиной [88], Н. Раджабовым [93], О. А. Репиным [94], А. М. Савчуком [100], И. В. Садовничей [101], А. Л. Скубачевским [108–110], М. М. Смирновым [112], С. А. Терсеновым [115], В. Евс. Федоровым [23], А. И. Янушаускасом [128] и многими другими математиками.

Особое место в теории вырождающихся и сингулярных уравнений занимают уравнения, содержащие дифференциаль-

ный оператор Бесселя

$$B_\nu = x^{-\nu}\,\frac{d}{dx}\left(x^\nu\,\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu}{x}\,\frac{d}{dx}.$$

Изучение этого класса уравнений было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу и продолжено в теории обобщенного осесимметрического потенциала [130–132, 141, 145, 146]. Важность данного класса уравнений обусловлена их использованием в приложениях к задачам газовой динамики и акустики [130–132], теории струй в гидродинамике [16], линеаризованным уравнениям Максвелла—Эйнштейна [5, 6], механике, теории упругости и пластичности [20]. Уравнения трех основных классов, содержащие оператор Бесселя, согласно терминологии воронежского математика И. А. Киприянова, называются B-эллиптическими, B-гиперболическими и B-параболическими соответственно. Исследованию краевых задач для B-эллиптических уравнений посвящена монография [47], изучение B-гиперболических уравнений представлено в монографии Р. Кэрролла и Р. Шоуолтера [139], B-параболических — в монографии М. И. Матийчука [70].

Обширный круг вопросов для уравнений с операторами Бесселя был изучен И. А. Киприяновым [44, 47] и его учениками: Л. А. Ивановым [46], В. В. Катраховым [39–42], В. И. Кононенко [45], Л. Н. Ляховым [64–66], А. Б. Муравником [73–75], И. П. Половинкиным [67, 68], С. М. Ситником [104–107], Э. Л. Шишкиной [124, 125, 140, 144] и др.

Классические задачи математической физики для уравнений трех основных классов с оператором Бесселя рассматривались и в работах казанского математика Ф. Г. Мухлисова [76, 77] и его учеников: И. Б. Гарипова [12], С. М. Гафуровой [13], М. Ю. Денисовой [19], Э. В. Чеботаревой [123].

Необходимость решения таких крупных научно-технических проблем современности, как овладение ядерной и термоядерной энергией, создание высокоскоростных летательных аппаратов, изучение физики плазмы в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза, решение проблемы риска и безопасности, создание новых экологически чистых технологий, безопасных для окружающей среды (актуальнейшая

из настоящих мировых проблем), требуют обобщения классических задач математической физики и постановки качественно новых задач — нелокальных задач. Подчеркнем, что важнейшая задача современной науки (анализ сложных физико-химических систем и управление ими) не может быть описана базовыми математическими моделями. Нелокальными принято называть задачи, в которых вместо классических начальных и граничных условий задаются условия, связывающие значение решения (и, возможно, его производных) в точках внутренних и граничных многообразий.

Нелокальные задачи для различных классов дифференциальных уравнений изучались Дж. Р. Кэнноном [137, 138], А. Бузиани [133–135], А. К. Гущиным [17], В. И. Жегаловым [24, 25], В. А. Ильиным [33–35], Н. И. Ионкиным [36, 37], Л. И. Камыниным [38], А. И. Кожановым [48–52], М. Е. Лернером и О. А. Репиным [55–57], И. С. Ломовым [61, 63], В. П. Михайловым [18], Е. И. Моисеевым [72], А. М. Нахушевым [79–81], З. А. Нахушевой [83], Н. Попивановым [142], Л. С. Пулькиной [89–92], К. Б. Сабитовым [95–97], М. С. Салахитдиновым и М. Мирсабуровым [102], Л. И. Сербиной [103], А. Л. Скубачевским [108–110], А. П. Солдатовым [113, 114], Е. А. Уткиной [117, 118], Ф. И. Франклем [120–122], А. А. Шкаликовым [126] и другими математиками.

Нелокальные задачи для гиперболических уравнений изучаются с 90-х годов прошлого века и до сих пор вызывают большой научный интерес, обусловленный выбором доказательства разрешимости этих задач в зависимости от вида нелокальных условий. Исследованию таких нелокальных задач посвящены работы Н. Э. Бенуара [2], Л. Бижевского [136], А. Бузиани [135], Д. Г. Гордезиани и Г. А. Авалишвили [15, 129], В. Б. Дмитриева [22], В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [35], А. И. Кожанова [50, 52], Л. С. Пулькиной [89–92], Н. И. Юрчука [127] и других авторов.

К нелокальным условиям относятся и условия, заданные в виде интегралов. Задачи с интегральными условиями возникли при изучении некоторых физических процессов, границы областей протекания которых могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, но среднее значение искомых

величин известно. Нелокальные интегральные условия можно считать обобщением дискретных нелокальных условий. Нелокальные задачи с интегральными условиями встречаются при математическом моделировании некоторых процессов теплопроводности, влагопереноса в капиллярно-пористых средах, процессов, происходящих в турбулентной плазме, при изучении задач математической биологии, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

В работе Л. С. Пулькиной [90] были введены термины «интегральные условия первого и второго рода». Согласно данной терминологии, если нелокальное условие содержит только интегральный оператор, то такое условие принято называть интегральным условием первого рода. А если нелокальное условие помимо интегрального оператора содержит значение искомого решения или его производных на границе области исследования, то условие такого вида называется интегральным условием второго рода. В работах [91, 92] впервые методами функционального анализа изучены краевые задачи с интегральными условиями для телеграфного уравнения и для более общих уравнений гиперболического типа с гладкими коэффициентами. В совместной статье Л. С. Пулькиной и А. И. Кожанова [50] была доказана однозначная разрешимость краевых задач с нелокальными интегральными условиями для многомерных гиперболических уравнений, что явилось важным шагом в исследовании подобных задач.

Основное содержание монографии составлено из материалов статей автора, опубликованных в рецензируемых российских и зарубежных научных изданиях за последние пять лет, но подробное доказательство некоторых результатов автора публикуется впервые. Приводится краткий теоретический материал, необходимый для изложения основных трех глав.

Первая глава посвящена исследованию смешанных задач с интегральными условиями первого рода для двумерного гиперболического уравнения с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной. Найдены промежутки изменения параметра, входящего в уравнение, в которых рассматриваемые задачи поставлены корректно. В каждом из этих случаев доказаны теоремы единственности, существования

и устойчивости решения задач. Решения построены в явном виде, а именно в виде рядов Фурье—Бесселя по собственным функциям одномерных спектральных задач с соответствующим обоснованием их сходимости в классе регулярных решений.

Во второй главе рассматриваются смешанные задачи с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения с оператором Бесселя. Установлены промежутки изменения параметра в дифференциальном операторе Бесселя, в которых нелокальные задачи с интегральным условием второго рода в прямоугольной области поставлены корректно. Доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решений задач, построенных в виде рядов по собственным функциям одномерных спектральных задач. Установлены достаточные условия сходимости рядов в классе регулярных решений.

Полученные результаты автор применил для изучения краевых задач с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя и нелокальных задач с интегральными условиями для уравнений смешанного типа, также содержащими дифференциальный оператор Бесселя, чему посвящена третья глава. В заключение приведена библиография, содержащая 150 ссылок.

Теоретический материал

В данной главе приведен краткий теоретический материал (без доказательств) из книг [7], [9] и [85], необходимый для дальнейшего изложения трех глав. Затем, согласно физическим фактам из книги [119], описана природа возникновения гиперболического уравнения с оператором Бесселя и постановки для него смешанных задач с интегральными условиями в прямоугольной области.

Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad (1_0)$$

где ν — постоянная, называется *уравнением Бесселя*, часто встречающимся при решении многих задач физики, механики, астрономии и т. д.

Любое решение уравнения (1_0), не равное тождественно нулю, называется *цилиндрической функцией*.

Функция

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \qquad (2_0)$$

является частным решением уравнения (1_0) и называется *цилиндрической функцией Бесселя первого рода порядка* ν. Здесь $\Gamma(\tau)$ — гамма-функция, которая определена для всех положительных значений τ (а также для всех комплексных значений с положительной вещественной частью) следующим образом:

$$\Gamma(\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\tau-1}\, dx.$$

Формула $\Gamma(\tau + 1) = \tau\Gamma(\tau)$ позволяет определить гамма-функцию для отрицательных значений τ, а также для всех комплексных значений аргумента.

Отметим, что ряд (2_0) сходится по признаку Даламбера при любом значении x.

Другим частным решением уравнения (1_0) является функция

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}, \qquad (3_0)$$

полученная из формулы (2_0) заменой ν на $-\nu$, так как уравнение (1_0) содержит только ν^2 и не меняется при замене ν на $-\nu$.

Если ν не равно целому числу, то частные решения $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ уравнения (1_0) будут линейно независимыми, так как разложения в правых частях формул (2_0) и (3_0) начинаются с разных степеней x.

Если ν является целым положительным числом n, то справедливо равенство $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_\nu(x)$, то есть решения $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ будут линейно зависимыми.

В случае, когда ν равно целому числу, вторым линейно независимым решением уравнения (1_0) является функция

$$Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},$$

представляющая собой линейную комбинацию частных решений $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ этого уравнения.

Функция $Y_\nu(x)$ называется *цилиндрической функцией Бесселя второго рода порядка* ν или *функцией Вебера*.

Функция Вебера $Y_\nu(x)$ является решением уравнения (1_0) также и в случае, когда ν — целое число.

Итак, функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ линейно независимы (при любом ν) и образуют фундаментальную систему решений уравнения (1_0). Тогда общее решение уравнения (1_0) может быть представлено в виде

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Для функций $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$J'_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x), \quad Y'_\nu(x)=Y_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}Y_\nu(x),$$
$$J'_\nu(x)=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x), \quad Y'_\nu(x)=-Y_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}Y_\nu(x),$$
$$J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu-1}(x), \quad Y_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}Y_\nu(x)-Y_{\nu-1}(x),$$

из которых легко выводятся соотношения для функции $J_\nu(x)$ (для $Y_\nu(x)$ аналогично):

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.$$

Теорема. *Корни уравнения $J_\nu(x) = 0$ при $\nu > -1$ — вещественные, простые, кроме, возможно, нуля; симметрично расположены относительно точки 0 и не имеют конечных предельных точек.*

Свойство ортогональности функций Бесселя:

$$\int_0^l x J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) J_\nu\left(\mu_j \frac{x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i), & j = i, \end{cases}$$

где μ_i и μ_j — положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$, $\nu > -1$.

Также если μ — корень уравнения $J_\nu(x) = 0$, то справедливо равенство

$$J'_\nu(\mu) = -J_{\nu+1}(\mu).$$

Для больших положительных корней уравнения $J_\nu(x) = 0$ справедливо асимптотическое разложение

$$x = \pi n + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4} + O(n^{-1}),$$

где n — большое натуральное число.

Разложение произвольной функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) \quad (\nu > -1),$$

где μ_1, $\mu_2, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания, коэффициенты a_i находятся по формуле

$$a_i = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x) J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) dx,$$

называется разложением в *ряд Фурье—Бесселя*.

Рассмотрим теперь следующую задачу газовой динамики — исследуем малые колебания идеального газа [119, с. 347] около своего положения равновесия внутри неограниченной (то есть настолько длинной, что будем считать ее простирающейся до бесконечности в обе стороны) неподвижной цилиндрической трубы. Распространение звука в газе определяют три величины: скорость v, давление p и плотность ρ. Уравнения, описывающие малые колебания газа, выводятся из общих уравнений гидродинамики [119, с. 349, 356]: уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{Div}(\rho v) = 0 \qquad (4_0)$$

и уравнения движения в форме Эйлера

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \qquad (5_0)$$

где $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ — субстанциональная производная [119, с. 356], то есть скорость частицы в данной точке, F — действующие внешние силы. Связь между давлением p и плотностью ρ зададим в форме адиабаты Пуассона

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}. \qquad (6_0)$$

Будем считать, что скорость v — малая величина, а давление p и плотность ρ незначительно отклоняются от своих начальных значений p_0 и ρ_0, которые в общем случае могут зависеть от пространственных координат. В силу малости звуковых колебаний величинами второго порядка малости в уравнениях можно пренебречь, в результате уравнения становятся линейными. Для линеаризации уравнений введем новые величины: $\sigma = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ — относительное изменение плотности (конденсация газа) и $q = p/p_0$ — относительное давление. Тогда уравнение (6_0) примет вид

$$q = (1+\sigma)^{\gamma} \approx 1 + \gamma\sigma.$$

Подставив $\rho = \rho_0(1+\sigma)$ в уравнение (4_0), получим

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{Div}\bigl(\rho_0(1+\sigma)v\bigr) = 0.$$

Так как σv — малая величина, то

$$\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{Div} v + (\operatorname{grad} \rho_0, v) = 0.$$

Перейдем в последнем равенстве от σ к q с учетом равенства $\sigma = (q-1)/\gamma$:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{Div} v + \frac{1}{\rho_0} (\operatorname{grad} \rho_0, v) = 0. \qquad (7_0)$$

Далее заменим в уравнении (5_0) $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ на $\partial v/\partial t$, пренебрегая малыми величинами. И будем считать, что внешние силы отсутствуют. Наконец, подставив в уравнение (5_0) $p_0 q$ вместо p, будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad}(p_0 q). \qquad (8_0)$$

В цилиндрической системе координат (r, α, z) уравнения (7_0) и (8_0) принимают вид

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\ + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} v_r + \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \rho_0}{\partial \alpha} v_\alpha + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} v_z = 0,$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} (p_0 q), \quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} (p_0 q),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 q).$$

Предположим, что газ радиально неоднороден, то есть $\rho_0 = \rho_0(r)$. К тому же пусть имеет место степенная зависимость плотности от радиальной координаты $\rho_0(r) = r^\beta$. И кроме того, в силу закона Бойля—Мариотта при постоянной температуре справедливо равенство $p_0(r) = \chi \rho_0(r)$. Пусть также искомые функции не зависят от координат z и α, то есть исследуем радиальные колебания газа в пределах одного сечения. У нас останутся уравнения

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} v_r = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} (p_0 q),$$

исключив из которых функцию v_r, будем иметь

$$\frac{1}{\gamma\chi}\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 q}{\partial r^2}+\frac{2\beta+1}{r}\,\frac{\partial q}{\partial r}+\frac{\beta^2}{r^2}\,q.$$

Перейдем теперь в последнем равенстве от относительного давления q к давлению p по формуле $q=\frac{p}{p_0}=\frac{1}{\chi}r^{-\beta}p$. В результате получим гиперболическое уравнение с оператором Бесселя, или, согласно терминологии [47], B-гиперболическое уравнение

$$\frac{1}{\gamma\chi}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial r}. \qquad (9_0)$$

В главах 1 и 2 будут рассмотрены математические модели исследования давления в газе внутри цилиндрической трубки радиуса l, ограничившись радиальными колебаниями частиц, то есть пространственная переменная будет принадлежать отрезку $[0,l]$. Вместо уравнения (9_0) будем рассматривать более общее B-гиперболическое уравнение. Зафиксируем также значения переменной времени $t=0$ и $t=T$ — начало и окончание эксперимента, при этом будем полагать, что невозможно точно измерить значения исследуемой величины ни в одной конкретной точке выбранного радиус-отрезка $[0,l]$, что и обосновывает наличие интегрального условия в постановке задач. При этом будут исследованы на корректность нелокальные задачи при всех действительных значениях параметра, входящего в уравнение.

В главе 3 будет показано, что теория исследования смешанных задач с интегральными условиями для гиперболического уравнения с оператором Бесселя может быть применена для исследования краевых задач с интегральными условиями для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.

Глава 1
Смешанные задачи с интегральными условиями первого рода для B-гиперболического уравнения

Рассмотрим в прямоугольной области $D = \{(x, t) \mid 0 < x < l, 0 < t < T\}$ координатной плоскости Oxt, где $l, T > 0$ — заданные действительные числа, B-гиперболическое уравнение

$$\Box_B u(x, t) \equiv u_{tt} - x^{-k} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x) = 0, \tag{1.0}$$

где $B_x u := x^{-k} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x)$ — дифференциальный оператор Бесселя, $k \neq 0$ — заданное действительное число.

В данной главе для уравнения (1.0) в области D будут исследованы смешанные задачи с нелокальными интегральными условиями первого рода. Поставленные задачи с интегральными условиями эквивалентно сведены к локальным начально-граничным задачам со смешанными краевыми условиями. Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решений эквивалентных задач. Решения построены в явном виде — в виде рядов Фурье—Бесселя, приведено обоснование сходимости рядов в классе регулярных решений. Доказательство единственности решений эквивалентных задач проводится на основании полноты системы собственных функций соответствующих одномерных задач на собственные значения в пространстве квадратично суммируемых функций с весом. Для доказательства существования решений этих задач используются оценки коэффициентов рядов и систем собственных функций. Получены достаточные условия относительно начальных условий, которые гарантируют сходимость построенных рядов в классе регулярных решений. Затем показана однозначная разрешимость первоначальных нелокальных задач и доказана устойчивость их решений.

1.1. Смешанная задача с интегральным условием первого рода для уравнения (1.0) при $k \geqslant 1$

1.1.1. Постановка задачи. Единственность решения

Требуется найти функцию $u(x, t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x, t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \tag{1.1}$$

$$\Box_B u(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D, \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.3}$$

$$\int_0^l u(x, t) x^k \, dx = A = \text{const}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.4}$$

где A — заданное действительное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int_0^l \varphi(x) x^k \, dx = A, \quad \int_0^l \psi(x) x^k \, dx = 0. \tag{1.5}$$

Задача (1.1)–(1.5) — задача с неполными граничными данными. В случае B-эллиптического уравнения

$$u_{tt} + x^{-k} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x) = 0$$

при $k \geqslant 1$ в силу результатов работы [43] в классе ограниченных решений отрезок $x = 0$ границы области освобождается от граничного условия. При этом производная u_x на отрезке $x = 0$ равна нулю. Аналогичная ситуация имеет место и для уравнения (1.0). Разделив переменные, нетрудно показать, что при $k \geqslant 1$ справедливо равенство

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.6}$$

Тем самым устанавливается дополнительное свойство решения задачи (1.1)–(1.5) при $k \geqslant 1$. В последующих доказательствах равенством (1.6) можно воспользоваться или нет, все зависит от поведения производной u_x при $x \to 0$. Если эта производная при $x \to 0$ останется ограниченной, то в условии (1.6) необходимости нет.

Умножим уравнение (1.0) на x^k и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0, T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. В результате получим

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt} x^k \, dx - \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^k \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = 0.$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x, t) x^k \, dx - \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} = 0.$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в силу условий (1.1) и (1.4) получим локальное граничное условие

$$u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.7}$$

В дальнейшем вместо задачи (1.1)–(1.5) будем рассматривать задачу (1.1)–(1.3), (1.7).

Частные решения уравнения (1.0), не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (1.1) и (1.7), будем искать в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$. Подставив данную функцию в уравнение (1.0) и условие (1.7), после разделения переменных получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{k}{x} X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{1.8}$$

$$|X(0)| < +\infty, \quad X'(l) = 0, \tag{1.9}$$

где λ^2 — постоянная разделения.

Умножим уравнение (1.8) на x^2 и с помощью замены переменных по формулам

$$X(x) = x^{\frac{1-k}{2}} Z(\xi), \quad \xi = \lambda x \tag{1.10}$$

приведем уравнение (1.8) к уравнению Бесселя

$$\xi^2 \frac{d^2 Z}{d\xi^2} + \xi \frac{dZ}{d\xi} + \left[\xi^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right] Z = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$Z(\xi) = P_1 J_{\frac{k-1}{2}}(\xi) + P_2 Y_{\frac{k-1}{2}}(\xi), \tag{1.11}$$

где $J_\nu(\xi)$, $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго родов соответственно, порядка $\nu = (k-1)/2$, P_1, P_2 — произвольные постоянные.

С учетом (1.10) и (1.11) общее решение уравнения (1.8) при $k \geqslant 1$ определяется по формуле

$$X(x) = P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x) + P_2 x^{\frac{1-k}{2}} Y_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x). \tag{1.12}$$

Для того чтобы функция (1.12) удовлетворяла первому условию из (1.9), положим $P_2 = 0$ и $P_1 = 1$, так как собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Тогда решение примет вид

$$\widetilde{X}(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x). \tag{1.13}$$

Отметим, что для функции (1.13) выполняется $\widetilde{X}'(0) = 0$, что подтверждает справедливость свойства (1.6).

Подставив теперь функцию (1.13) во второе условие из (1.9), найдем

$$\lambda_0 = 0, \tag{1.14}$$

$$\widetilde{X}'(l) = \left(x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x) \right)'_x \Big|_{x=l} = -l^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda l),$$

откуда получим

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{1.15}$$

Из теории бесселевых функций [7, с. 530] известно, что функция $J_\nu(\xi)$ при $\nu > -1$ имеет счетное множество вещественных корней. Тогда, обозначив n-й корень уравнения (1.15) через μ_n при заданном k, найдем собственные значения $\lambda_n = \mu_n / l$ задачи (1.8) и (1.9).

Согласно [85, с. 317], для решений уравнения (1.15) при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{4} k + O(n^{-1}). \tag{1.16}$$

Заметим, что при $\lambda_0 = 0$ спектральная задача (1.8), (1.9) имеет собственную функцию, равную константе, которую примем за единицу. Таким образом, система собственных функций

задачи (1.8), (1.9) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0, \tag{1.17}$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.18}$$

где собственные значения λ_n определяются как решения уравнения (1.15).

Отметим, что система собственных функций (1.17) и (1.18) задачи (1.8), (1.9) ортогональна в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^k, а также образует полную систему в этом пространстве [9, с. 343].

Для дальнейших вычислений будем использовать ортонормированную систему функций:

$$X_n(x) = \frac{1}{||\widetilde{X}_n(x)||} \widetilde{X}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.19}$$

где

$$||\widetilde{X}_n(x)||^2 = \int_0^l x^k \widetilde{X}_n^2(x)\, dx. \tag{1.20}$$

Теперь рассмотрим функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x, t) x^k X_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.21}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (1.19).

На основании (1.21) введем в рассмотрение вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, t) x^k X_n(x)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.22}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Продифференцировав равенство (1.22) по переменной t дважды при $0 < t < T$, с учетом уравнения (1.0) получим

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}(x,t)x^k X_n(x)\,dx = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \Big(u_{xx} + \frac{k}{x}\,u_x\Big)x^k X_n(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x)X_n(x)\,dx = x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx. \tag{1.23}$$

Из (1.22) в силу уравнения (1.8) будем иметь

$$u_{n,\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k\Big[X''_n(x) + \frac{k}{x}X'_n(x)\Big]\,dx =$$
$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)\,\frac{d}{dx}(x^k X'_n(x))\,dx =$$
$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\Big[u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx\Big],$$

откуда найдем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) + u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}$$

и подставим в (1.23). В результате будем иметь

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \tag{1.24}$$

В силу (1.1) функции $u(x,t)$ и $x^k u_x(x,t)$ непрерывны в $\overline{D}$. Тогда после перехода в (1.24) к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (1.7) и (1.9) получим для определения функций $u_n(t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(t) = a_n \cos\lambda_n t + b_n \sin\lambda_n t, \tag{1.25}$$

где a_n, b_n — произвольные постоянные, требующие определения. С этой целью функции (1.21) подставим в начальные

условия (1.3):

$$\begin{aligned} u_n(0) &= \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x)\,dx = \varphi_n, \\ u_n'(0) &= \int_0^l \psi(x) x^k X_n(x)\,dx = \psi_n. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Из (1.25) и (1.26) будем иметь

$$a_n = \varphi_n, \quad b_n = \frac{\psi_n}{\lambda_n}.$$

Подставив найденные значения констант в (1.25), найдем окончательный вид функций

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t. \tag{1.27}$$

Аналогично находим

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t, \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned} u_0(0) &= l^{-\frac{k+1}{2}} \sqrt{k+1} \int_0^l \varphi(x) x^k\,dx = \varphi_0, \\ u_0'(0) &= l^{-\frac{k+1}{2}} \sqrt{k+1} \int_0^l \psi(x) x^k\,dx = \psi_0. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Пусть теперь $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$, тогда из (1.26) и (1.29) следует, что $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$, и из (1.27) и (1.28) получим, что $u_n(t) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда из (1.21) при любом $t \in [0, T]$ имеем $\int_0^l u(x,t) x^k X_n(x)\,dx = 0$. Отсюда в силу полноты системы (1.19) в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^k следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду на промежутке $[0, l]$ при любом $t \in [0, T]$. Поскольку, согласно (1.1), функция $u(x, t) \in C(\overline{D})$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1.1. *Если существует решение задачи* (1.1)–(1.3), (1.7), то оно единственно.

1.1.2. Существование решения задачи

На основании найденных частных решений запишем формально решение задачи (1.1)–(1.3), (1.7) в виде ряда Фурье–Бесселя:

$$u(x,t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x), \tag{1.30}$$

где функции $u_n(t)$ определяются по формуле (1.27), $X_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — по формуле (1.19), функция $u_0(t)$ — по формуле (1.28).

Вместе с рядом (1.30) рассмотрим следующие ряды:

$$\begin{gathered} u_t(x,t) = \psi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)X_n(x), \\ u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n'(x), \end{gathered} \tag{1.31}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)X_n(x), \quad u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n''(x). \tag{1.32}$$

Докажем равномерную сходимость рядов (1.30)–(1.32) в области $\overline{D}$, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ подчинить некоторым дополнительным условиям.

Лемма 1.1.1. *Для достаточно больших n и при любом $t \in [0, T]$ справедливы оценки*

$$\begin{gathered} |u_n(t)| \leqslant C_1\big(|\varphi_n| + |\psi_n|/n\big), \\ |u_n'(t)| \leqslant C_2\big(n|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \\ |u_n''(t)| \leqslant C_3\big(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n|\big), \end{gathered} \tag{1.33}$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство этих оценок следует из формул (1.27) и (1.16).

Лемма 1.1.2. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0, l]$ выполнены оценки*

$$|X_n(x)| \leqslant C_4, \quad |X_n'(x)| \leqslant C_5 n, \quad |X_n''(x)| \leqslant C_6 n^2. \tag{1.34}$$

Доказательство. Известно, что при больших ξ справедливо равенство

$$J_\nu(\xi) = O(\xi^{-1/2}). \tag{1.35}$$

Из (1.20) получим

$$||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,l)} = \frac{l}{\sqrt{2}}|J_{\frac{k+1}{2}}(\mu_n)|. \tag{1.36}$$

Из (1.35) и (1.36) следует, что

$$||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,l)} = O(n^{-1/2}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1.37}$$

С учетом (1.36) формула (1.19) примет вид

$$X_n(x) = \frac{1}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,l)}}\widetilde{X}_n(x) = \frac{x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x)}{l/\sqrt{2}|J_{\frac{k+1}{2}}(\mu_n)|}. \tag{1.38}$$

Тогда из (1.35), (1.37) и (1.38) следует справедливость первой оценки из (1.34).

Вычислим теперь

$$\widetilde{X}_n'(x) = -\lambda_n x^{\frac{1-k}{2}}J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x). \tag{1.39}$$

Тогда из (1.35), (1.37) и (1.39) следует справедливость второй оценки (1.34).

Из уравнения (1.8) запишем $\widetilde{X}_n''(x) = -\frac{k}{x}\widetilde{X}_n'(x) - \lambda_n^2\widetilde{X}_n(x)$. Отсюда, в силу выполнения первых двух оценок, следует справедливость и третьей оценки из (1.34). Лемма доказана.

Согласно леммам 1.1.1 и 1.1.2 при любом $(x,t) \in \overline{D}$ ряд (1.30) мажорируется рядом

$$C_7 \sum_{n=1}^{\infty}\big(|\varphi_n| + |\psi_n|/n\big), \tag{1.40}$$

ряды (1.31) и (1.32) мажорируются соответственно рядами

$$C_8 \sum_{n=1}^{\infty}\big(n|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \tag{1.41}$$

$$C_9 \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n|\bigr). \tag{1.42}$$

Исследуем ряды (1.40)–(1.42) на сходимость.

Лемма 1.1.3. *Если функция* $\varphi(x) \in C^2[0, l]$ *и существует производная* $\varphi'''(x)$, *имеющая конечное изменение на* $[0, l]$, *функция* $\psi(x) \in C^1[0, l]$ *и существует производная* $\psi''(x)$, *которая имеет конечное изменение на* $[0, l]$, *и*

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = 0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n| \leqslant C_{10} n^{-4}, \quad |\psi_n| \leqslant C_{11} n^{-3}. \tag{1.43}$$

Доказательство. С учетом (1.8), (1.9) и условий леммы из первого равенства в (1.26) будем иметь

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x)\, dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi(x) x^k \Bigl[X_n''(x) + \frac{k}{x} X_n'(x)\Bigr]\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi(x) (x^k X_n'(x))'\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \Bigl[\varphi(x) x^k X_n'(x)\Big|_0^l - \int_0^l \varphi'(x) x^k X_n'(x)\, dx\Bigr] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi'(x) x^k X_n'(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} \Bigl[\varphi'(x) x^k X_n(x)\Big|_0^l - \int_0^l (\varphi'(x) x^k)' X_n(x)\, dx\Bigr] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l (\varphi'(x) x^k)' X_n(x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi''(x) x^k X_n(x)\, dx - \frac{k}{\lambda_n^2} \int_0^l \frac{\varphi'(x)}{x} x^k X_n(x)\, dx.$$

Введем обозначения

$$\varphi_n^{(2)} = \int_0^l \varphi''(x) x^k X_n(x)\, dx, \tag{1.44}$$

$$\varphi_{1n} = \int_0^l \varphi_1(x) x^k X_n(x)\, dx, \quad \varphi_1(x) = \frac{\varphi'(x)}{x}, \tag{1.45}$$

в результате чего получим

$$\varphi_n = -\frac{1}{\lambda_n^2}\,\varphi_n^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2}\,\varphi_{1n}. \tag{1.46}$$

В силу (1.8) и (1.9) из интеграла (1.44) получим

$$\varphi_n^{(2)} = \int_0^l \varphi''(x) x^k X_n(x)\, dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi''(x) \big(x^k X_n'(x)\big)' dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[\varphi''(x) x^k X_n'(x)\Big|_0^l - \int_0^l \varphi'''(x) x^k X_n'(x)\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi'''(x) x^k X_n'(x)\, dx = \frac{\varphi_n^{(3)}}{\lambda_n^2}, \tag{1.47}$$

где

$$\varphi_n^{(3)} = \int_0^l \varphi'''(x) x^k X_n'(x)\, dx.$$

На основании (1.39) имеем

$$\varphi_n^{(3)} = -\frac{\lambda_n}{||\widetilde{X}_n||} \int_0^l \varphi'''(x) x^{1+k} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x)\, dx.$$

Поскольку функция

$$x^{\frac{1}{2}} f(x) = x^{\frac{1}{2}} \varphi'''(x) x^k = \varphi'''(x) x^{k+\frac{1}{2}}$$

имеет ограниченное изменение на сегменте $[0, l]$ [78, с. 202], то на основании теоремы [7, с. 653] при $n \to \infty$ будем иметь

$$\int_0^l \varphi'''(x) x^{1+k} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x)\, dx = O\Big(\frac{1}{\lambda_n^{3/2}}\Big).$$

Тогда в силу (1.37) при больших n: $\varphi_n^{(3)} = O(1)$, следовательно, имеем оценку

$$|\varphi_n^{(3)}| \leqslant C_{12}. \tag{1.48}$$

Аналогично, на основании (1.8), (1.9) и $\varphi'(l) = 0$, проинтегрируем по частям интеграл (1.45):

$$\varphi_{1n} = \int_0^l \varphi_1(x) x^k X_n(x)\,dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi_1(x) \big(x^k X_n'(x)\big)'\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\Big[\varphi_1(x) x^k X_n'(x)\Big|_0^l - \int_0^l \varphi_1'(x) x^k X_n'(x)\,dx\Big] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \varphi_1'(x) x^k X_n'(x)\,dx = \frac{\varphi_{1n}^{(1)}}{\lambda_n^2}, \tag{1.49}$$

где

$$\varphi_{1n}^{(1)} = \int_0^l \varphi_1'(x) x^k X_n'(x)\,dx,$$

и этот интеграл в силу (1.37) сходится.

Теперь оценим интеграл $\varphi_{1n}^{(1)}$ при больших n. Представим его в виде

$$\varphi_{1n}^{(1)} = -\frac{\lambda_n}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,l)}} \int_0^l \Big(\frac{\varphi'(x)}{x}\Big)' x^k x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x)\,dx =$$

$$= -\frac{\lambda_n}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,l)}} \int_0^l \Big[\frac{\varphi''(x)}{x} - \frac{\varphi'(x)}{x^2}\Big] x^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x)\,dx =$$

$$= -\frac{\lambda_n}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,l)}} \int_0^l x\Big[\varphi''(x) - \frac{\varphi'(x)}{x}\Big] x^{\frac{k-3}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x)\,dx.$$

По условию $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$, поэтому при малых x: $0 \leqslant x \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число, запишем

$$\varphi'(x) = \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{1!}\,x + \frac{\varphi'''(\xi x)}{2!}\,x^2 = \frac{1}{2}\,\varphi'''(\xi x) x^2, \quad 0 < \xi < x,$$

$$\varphi''(x) = \varphi''(0) + \frac{\varphi'''(\theta x)}{1!}\,x = \varphi'''(\theta x) x, \quad 0 < \theta < x.$$

В силу этих представлений функция

$$x^{\frac{1}{2}} f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Big[\varphi''(x) - \frac{\varphi'(x)}{x}\Big] x^{\frac{k-3}{2}} =$$
$$= \Big[\varphi''(x) - \frac{\varphi'(x)}{x}\Big] x^{\frac{k}{2}-1} = \Big[\varphi'''(\theta x) - \frac{1}{2}\,\varphi'''(\xi x)\Big] x^{\frac{k}{2}}$$

имеет ограниченное изменение на сегменте $[0, \delta]$ как произведение двух функций, имеющих конечное изменение [78, с. 202].

На сегменте $[\delta, l]$ аналогично можно показать, что функция $x^{\frac{1}{2}} f(x)$ имеет конечное изменение. Тогда она имеет конечное изменение на промежутке $[0, l]$. И, как и в случае интеграла $\varphi_n^{(3)}$, будем иметь оценку

$$|\varphi_{1n}^{(1)}| \leqslant C_{13}. \tag{1.50}$$

Подставив (1.47) и (1.49) в равенство (1.46), найдем

$$\varphi_n = -\frac{1}{\lambda_n^4}\,\varphi_n^{(3)} - \frac{k}{\lambda_n^4}\,\varphi_{1n}^{(1)}. \tag{1.51}$$

Из (1.48), (1.50) и (1.51) следует первая оценка из (1.43).

На основании второго равенства в (1.26) при $\psi'(l) = 0$ проведем аналогичные вычисления и получим

$$\psi_n = \int_0^l \psi(x) x^k X_n(x)\,dx =$$
$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \psi''(x) x^k X_n(x)\,dx - \frac{k}{\lambda_n^2} \int_0^l \frac{\psi'(x)}{x}\, x^k X_n(x)\,dx =$$
$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\psi_n^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2}\psi_{1n}, \tag{1.52}$$

где

$$\psi_n^{(2)} = \int_0^l \psi''(x) x^k X_n(x)\,dx, \quad \psi_{1n} = \int_0^l \frac{\psi'(x)}{x}\, x^k X_n(x)\,dx.$$

Аналогично оценим интегралы $\psi_n^{(2)}$ и ψ_{1n}. На основании формулы (1.19) имеем

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\varphi}(0,l)}} \int_0^l x\psi''(x)x^{\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x)\, dx.$$

Отсюда, в силу того что функция $x^{\frac{1}{2}} f(x) = \psi''(x)x^{\frac{k}{2}}$ имеет конечное изменение, получим при $n \to \infty$

$$\psi_n^{(2)} = O\Big(\frac{1}{\lambda_n}\Big). \tag{1.53}$$

Аналогично имеем

$$\psi_{1n} = \frac{1}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\varphi}(0,l)}} \int_0^l x\psi'(x)x^{\frac{k-3}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x)\, dx.$$

По условию $\psi'(0) = 0$, поэтому функция

$$x^{\frac{1}{2}} f(x) = \psi'(x)x^{\frac{k}{2}-1} = \psi''(\theta x)x^{\frac{k}{2}}, \quad 0 < \theta < x \leqslant \delta,$$

где $\delta > 0$ — малое число, на сегменте $[0, \delta]$ имеет конечное изменение. Аналогично функция $x^{\frac{1}{2}} f(x)$ имеет конечное изменение на сегменте $[\delta, l]$, а значит, и на $[0, l]$. Тогда при больших n получим оценку

$$\psi_{1n} = O\Big(\frac{1}{\lambda_n}\Big). \tag{1.54}$$

Таким образом, из (1.52), (1.53) и (1.54) следует вторая оценка из (1.43). Лемма доказана.

Согласно лемме 1.1.3, ряды (1.40)–(1.42) мажорируются числовым рядом $C_{14} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. А следовательно, по признаку Вейерштрасса ряды (1.30)–(1.32) в замкнутой области $\overline{D}$ сходятся равномерно.

Таким образом, построена функция $u(x, t)$, определяемая рядом (1.30), которая удовлетворяет всем условиям задачи (1.1)–(1.3), (1.7). Тем самым доказана

Теорема 1.1.2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 1.1.3, *то существует единственное*

решение $u(x,t)$ *задачи* (1.1)–(1.3), (1.7), *определяемое рядом* (1.30), *при этом* $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.

Теперь покажем, что функция $u(x,t)$, определяемая рядом (1.30), является решением первоначальной задачи (1.1)–(1.5).

Теорема 1.1.3. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 1.1.3 *и условиям* (1.5), *то существует единственное решение задачи* (1.1)–(1.5), *определяемое рядом* (1.30), *при этом* $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.3), (1.7) и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда уравнение (1.0) выполняется всюду в области D. Умножим уравнение (1.0) на x^k и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0,T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. В результате получим

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}(x,t)x^k\,dx - \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} = 0. \tag{1.55}$$

Перейдем в равенстве (1.55) к пределу при $\varepsilon \to 0$, тогда с учетом условий (1.1) и (1.7) будем иметь

$$\int_0^l u_{tt}(x,t)x^k\,dx = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство по переменной t, в результате будем иметь

$$\int_0^l u_t(x,t)x^k\,dx = K_1 = \text{const}. \tag{1.56}$$

Полученное равенство (1.56) проинтегрируем еще раз по переменной t:

$$\int_0^l u(x,t)x^k\,dx = K_1 t + K_2, \quad K_2 = \text{const}. \tag{1.57}$$

Положив в равенстве (1.56) $t = 0$, с учетом условий (1.3) и (1.5) найдем

$$\int_0^l u_t(x, 0)x^k\,dx = \int_0^l \psi(x)x^k\,dx = K_1 = 0.$$

Положим теперь $t = 0$ в равенстве (1.57), откуда с учетом условий (1.3), (1.5) и найденного значения $K_1 = 0$ получим

$$\int_0^l u(x, 0)x^k\,dx = \int_0^l \varphi(x)x^k\,dx = K_2 = A.$$

Подставив найденные значения констант $K_1 = 0$ и $K_2 = A$ в формулу (1.57), будем иметь

$$\int_0^l u(x, t)x^k\,dx = A.$$

Пусть теперь $u(x, t)$ — решение задачи (1.1)–(1.5). Тогда из равенства (1.55) запишем

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, t)x^k\,dx - \left(x^k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} = 0.$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в силу условий (1.1) и (1.4) получим локальное граничное условие второго рода

$$u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Тем самым мы показали, что при выполнении условий согласования (1.5) условия (1.4) и (1.7) эквивалентны. А значит, эквивалентны и задачи (1.1)–(1.5) и (1.1)–(1.3), (1.7). Теорема доказана.

1.1.3. Устойчивость решения задачи

Теорема 1.1.4. *Для решения задачи* (1.1)–(1.5) *справедлива оценка*

$$||u(x, t)|| \leqslant C_{15}(||\varphi|| + ||\psi||), \tag{1.58}$$

где $||f||^2 = \int_0^l x^k|f(x)|^2\,dx$.

Доказательство. Из (1.30) с учетом оценки (1.33) вычислим

$$||u||^2 = \int_0^l x^k u^2(x,t)\,dx =$$

$$= \int_0^l x^k \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)X_n(x) \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)X_m(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2(t) = u_0^2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leqslant$$

$$\leqslant (\varphi_0 + \psi_0 t)^2 + C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n}\Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_0(\varphi_0^2 + \psi_0^2) + 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_n|^2 + \frac{1}{n^2}|\psi_n|^2\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C_0(\varphi_0^2 + \psi_0^2) + 2C_1^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2\Big) = C_{15}\big(||\varphi||^2 + ||\psi||^2\big).$$

Теорема доказана.

1.2. Смешанная задача с интегральным условием первого рода для уравнения (1.0) при $|k| < 1$, $k \neq 0$

1.2.1. Постановка задачи. Единственность решения

Требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \tag{1.59}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1.60}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.61}$$

$$\lim_{x \to 0+} x^k u_x(x,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.62}$$

$$\int_0^l u(x,t)\,x^k\,dx = A = \text{const}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.63}$$

где A — заданное действительное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int_0^l \varphi(x) x^k \, dx = A, \quad \int_0^l \psi(x) x^k \, dx = 0. \tag{1.64}$$

В данном параграфе поставленная задача с нелокальным интегральным условием первого рода эквивалентно сведена к локальной задаче с граничными условиями второго рода. Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решения эквивалентной задачи. Решение построено в виде ряда Фурье—Бесселя, и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений. Затем показана однозначная разрешимость первоначальной задачи и доказана устойчивость ее решения.

Аналогично случаю $k \geqslant 1$ умножим уравнение (1.0) на x^k и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0, T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, t) x^k \, dx - \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} = 0.$$

В силу условий (1.59), (1.62) и (1.63) в полученном равенстве можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, так как все слагаемые имеют конечные пределы при $-1 < k < 1$, $k \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$. И в результате получим локальное граничное условие

$$u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.65}$$

В дальнейшем вместо задачи (1.59)—(1.64) будем рассматривать задачу (1.59)—(1.62), (1.65). Разделив переменные в уравнении (1.0), аналогично § 1.1, получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу:

$$X''(x) + \frac{k}{x} X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{1.66}$$

$$\lim_{x \to 0+} x^k X'(x) = 0, \tag{1.67}$$

$$X'(l) = 0, \tag{1.68}$$

где λ^2 — постоянная разделения.

Общее решение уравнения (1.66) при $|k|<1$, $k\neq 0$ определяется по формуле

$$\widetilde{X}(x)=P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x)+P_2 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x), \tag{1.69}$$

так как $\frac{1-k}{2}$ не является целым числом, а значит, $J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x)$ и $J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)$ — линейно независимые решения уравнения Бесселя.

Из этой формулы вычислим

$$X'(x)=P_1\lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda x)-P_2\lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x).$$

Поскольку при $x\to 0$: $x^k X'(x)=O(P_1+P_2 x^{k+1})$, то для того чтобы функция (1.69) удовлетворяла условию (1.67), нужно положить $P_1=0$. И пусть $P_2=1$.

Тогда решение уравнения (1.66), удовлетворяющее условию (1.67), определяется равенством

$$X(x)=x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x),$$

которое по внешнему виду совпадает с (1.13), но здесь $-1<k<1$ и $k\neq 0$.

Потребуем теперь, чтобы эта функция удовлетворяла второму граничному условию (1.68):

$$\frac{dX(x)}{dx}\Big|_{x=l}=\left(x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x)\right)'\Big|_{x=l}=-\lambda l^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda l)=0,$$

откуда получим

$$\lambda_0=0,$$
$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu_n)=0,\quad \mu_n=\lambda_n l. \tag{1.70}$$

Таким образом, система собственных функций задачи (1.66)–(1.68) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x)=1,\quad \lambda_0=0,$$
$$\widetilde{X}_n(x)=x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right)=x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x),\quad n\in\mathbb{N},$$

где собственные значения λ_n определяются как решения уравнения (1.70).

Аналогично случаю $k \geqslant 1$ доказана

Теорема 1.2.1. *Если существует решение задачи* (1.59)–(1.62), (1.65), *то оно единственно.*

1.2.2. Существование и устойчивость решения задачи

Аналогично случаю $k \geqslant 1$ доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.2.2. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 1.1.3, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* (1.59)–(1.62), (1.65), *определяемое рядом* (1.30), *при этом* $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.

Теорема 1.2.3. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 1.1.3 *и условиям* (1.64), *то существует единственное решение задачи* (1.59)–(1.64), *определяемое рядом* (1.30), *при этом* $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.

Теорема 1.2.4. *Для решения задачи* (1.59)–(1.64) *справедлива оценка* (1.58).

1.3. Смешанная задача с интегральным условием первого рода для уравнения (1.0) при $k \leqslant -1$

1.3.1. Постановка задачи. Единственность решения

Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \tag{1.71}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1.72}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.73}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.74}$$

$$\int_0^l u(x,t)x\,dx = A = \text{const}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.75}$$

где A — заданное действительное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям со-

гласования

$$\int_0^l \varphi(x)x\,dx = A, \quad \int_0^l \psi(x)x\,dx = 0. \tag{1.76}$$

В данном параграфе поставленная задача с нелокальным интегральным условием (1.75) эквивалентно сведена к локальной начально-граничной задаче со смешанными краевыми условиями первого и третьего родов. Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решения эквивалентной задачи. Решение построено в явном виде — в виде ряда Фурье—Бесселя, и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений. Доказана устойчивость решения первоначальной задачи.

Умножим уравнение (1.0) на x и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0, T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. В результате получим

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{tt}x\,dx - \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} (xu_{xx} + ku_x)\,dx = 0,$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, t)x\,dx - \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(xu_x + (k-1)u)\,dx = 0.$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, t)x\,dx - \big(xu_x + (k-1)u\big)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} = 0.$$

В силу условий (1.71), (1.74) и (1.75) в последнем равенстве можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, в результате получим граничное условие третьего рода

$$lu_x(l, t) + (k-1)u(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.77}$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу (1.71)—(1.74), (1.77).

Разделив переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$ в уравнении (1.0), получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{k}{x} X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{1.78}$$

$$X(0) = 0, \tag{1.79}$$

$$lX'(l) + (k-1)X(l) = 0. \tag{1.80}$$

В силу результатов § 1.1 общее решение уравнения (1.78) при $k \leqslant -1$ определяется по формуле

$$X(x) = P_1 x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x) + P_2 x^{\frac{1-k}{2}} Y_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x), \tag{1.81}$$

где $J_\nu(\xi)$, $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго родов соответственно, порядка $\nu = (1-k)/2$, P_1, P_2 — произвольные постоянные.

Вычислим

$$X'(x) = P_1 \lambda x^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda x) + P_2 \lambda x^{\frac{1-k}{2}} Y_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda x).$$

Так как при $x \to 0$ функция (1.81)

$$X(x) = O(P_1 x^{1-k} + P_2) = O(1),$$

а производная при этом

$$X'(x) = O(P_1 x^{-k} + P_2 x) = O(x),$$

то для выполнения условия (1.79) в (1.81) нужно положить значения констант $P_1 = 1$ и $P_2 = 0$. В результате решение принимает вид

$$\widetilde{X}(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x). \tag{1.82}$$

Далее вычислим производную от функции (1.82):

$$\widetilde{X}'(x) = \frac{1-k}{2} x^{-\frac{k+1}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x) + \lambda x^{\frac{1-k}{2}} J'_{\frac{1-k}{2}}(\lambda x). \tag{1.83}$$

Теперь подставим функцию (1.82) и ее производную (1.83) в граничное условие (1.80). В результате получим уравнение

$$\mu J'_\nu(\mu) - \nu J_\nu(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l, \quad \nu = \frac{1-k}{2}. \tag{1.84}$$

В силу теоремы Ломмеля [7, с. 530] уравнение (1.84) при $\nu > -1$ имеет лишь вещественные простые корни.

С другой стороны, на основании формулы [1, с. 20] $zJ'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) = -zJ_{\nu+1}(z)$ уравнение (1.84) равносильно уравнению

$$J_{\frac{3-k}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{1.85}$$

Для решений уравнения (1.85), согласно [85, с. 317], при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\,k + O(n^{-1}). \tag{1.86}$$

Таким образом, система собственных функций задачи (1.78)–(1.80) имеет вид

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.87}$$

а собственные значения μ_n определяются как решения уравнения (1.85).

Система функций (1.87) ортогональна в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^k как решение задачи Штурма–Лиувилля для уравнения (1.78) с граничными условиями (1.79) и (1.80).

Для дальнейших исследований будем рассматривать ортонормированную систему собственных функций

$$X_n(x) = \frac{\widetilde{X}_n(x)}{||\widetilde{X}_n||}, \tag{1.88}$$

где

$$||\widetilde{X}_n||^2 = \int_0^l x^k \widetilde{X}_n^2(\lambda_n x)\,dx = \int_0^l x J^2_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x)\,dx = \frac{l^2}{2}\,J^2_{\frac{3-k}{2}}(\mu_n),$$

откуда получим

$$||\widetilde{X}_n|| = \frac{l}{\sqrt{2}}|J_{\frac{3-k}{2}}(\mu_n)|. \tag{1.89}$$

Введем функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x, t) x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.90}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (1.88).

На основании (1.90) введем в рассмотрение вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x, t)x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.91}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Аналогично случаю $k \geqslant 1$, с учетом уравнений (1.0) и (1.78) получим равенство

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(x, t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \tag{1.92}$$

Из формулы (1.88) следует, что $X_n(x) = O(x^{1-k})$ и $X'_n(x) = O(x^{-k})$ при $x \to 0$. Перейдем в (1.92) к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу условий (1.71), (1.74), (1.79) и (1.80) будем иметь

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = l^{k-1}[lu_x(l, t) - (k-1)u(l, t)]X_n(l),$$

откуда в силу условия (1.77) получим для определения функций (1.90) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0, T). \tag{1.93}$$

Подставив далее функции (1.90) в начальные условия (1.73), будем иметь

$$u_n(0) = \int\limits_0^l u(x, 0)x^k X_n(x)\,dx = \int\limits_0^l \varphi(x)x^k X_n(x)\,dx = \varphi_n, \tag{1.94}$$

$$u'_n(0) = \int\limits_0^l u_t(x, 0)x^k X_n(x)\,dx = \int\limits_0^l \psi(x)x^k X_n(x)\,dx = \psi_n. \tag{1.95}$$

Единственное решение задачи (1.93)–(1.95) определяется по формуле

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t. \tag{1.96}$$

Докажем единственность задачи (1.71)–(1.74), (1.77). Пусть $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$, тогда из (1.94) и (1.95) при всех $n \in \mathbb{N}$ следует, что $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$. Из (1.96) получим, что $u_n(t) = 0$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (1.90) при любом $t \in [0, T]$ имеем

$$\int_0^l u(x, t) x^k X_n(x)\, dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы (1.88) в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^k следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду на промежутке $[0, l]$ при любом $t \in [0, T]$. Поскольку, согласно (1.71), функция $u(x, t) \in C(\overline{D})$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1.3.1. *Если существует решение задачи* (1.71)–(1.74), (1.77), *то оно единственно.*

1.3.2. Существование решения задачи

На основании найденных частных решений (1.96) и (1.88) решение задачи (1.71)–(1.74), (1.77) запишем формально в виде ряда Фурье–Бесселя

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \tag{1.97}$$

Лемма 1.3.1. *Для достаточно больших n и при любом $t \in [0, T]$ справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \leqslant C_1 \Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n} \Big), \tag{1.98}$$

$$|u_n'(t)| \leqslant C_2 \big(n|\varphi_n| + |\psi_n| \big), \tag{1.99}$$

$$|u_n''(t)| \leqslant C_3 \big(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n| \big). \tag{1.100}$$

Доказательство оценок (1.98)–(1.100) непосредственно следует из формул (1.96) и (1.86).

Лемма 1.3.2. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0, l]$ справедливы оценки*

$$|X_n(x)| \leqslant C_4, \quad |X_n'(x)| \leqslant C_5 n, \quad |X_n''(x)| \leqslant C_6 n^2. \tag{1.101}$$

Доказательство. Как известно, функция $\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x) \in C^2[0, l]$ и при больших ξ справедлива оценка

$$J_\nu(\xi) = O(\xi^{-1/2}). \tag{1.102}$$

Из (1.88), (1.102) и (1.89) следует справедливость первой оценки из (1.101).

Вычислим производную функции (1.87):

$$\widetilde{X}_n'(x) = \lambda_n x^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x) = O(x^{-k}). \tag{1.103}$$

Тогда из (1.88), (1.102), (1.89) и (1.103) следует справедливость второй оценки из (1.101).

Из уравнения (1.78) запишем

$$\widetilde{X}_n''(x) = -\frac{k}{x}\,\widetilde{X}_n'(x) - \lambda_n^2 \widetilde{X}_n(x).$$

Отсюда, в силу первых двух оценок из (1.101), следует справедливость и третьей оценки из (1.101). Лемма доказана.

Согласно леммам 1.3.1 и 1.3.2 при любом $(x, t) \in \overline{D}$ ряд (1.97) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием первого и второго порядка, мажорируются рядом

$$C_7 \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n|\bigr). \tag{1.104}$$

Лемма 1.3.3. *Если функция $\varphi(x) \in C^2[0, l]$ и существует производная $\varphi'''(x)$, имеющая конечное изменение на $[0, l]$, функция $\psi(x) \in C^1[0, l]$ и существует производная $\psi''(x)$, которая имеет конечное изменение на $[0, l]$, и*

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(l) = \psi(l) = \varphi'(0) = \psi'(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = \\ = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n| \leqslant C_8 n^{-4}, \quad |\psi_n| \leqslant C_9 n^{-3}. \tag{1.105}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.1.3.

Согласно лемме 1.3.3 ряд (1.104) оценивается сверху сходящимся числовым рядом $C_{10}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$, а значит, функция (1.97) принадлежит классу $C^2(\overline{D})$.

Построенная функция $u(x,t)$, определяемая рядом (1.97), удовлетворяет всем условиям задачи (1.71)–(1.74), (1.77).

Таким образом, доказана

Теорема 1.3.2. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 1.3.3, *то существует единственное решение* $u(x,t)$ *задачи* (1.71)–(1.74), (1.77), *определяемое рядом* (1.97), *при этом* $u(x,t)\in C^2(\overline{D})$.

Из этой теоремы на основании условий согласования данных (1.76) следует однозначная разрешимость первоначальной задачи (1.71)–(1.76).

Теорема 1.3.3. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 1.3.3 *и условиям* (1.76), *то существует единственное решение задачи* (1.71)–(1.76), *определяемое рядом* (1.97), *при этом* $u(x,t)\in C^2(\overline{D})$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1.1.3 из уравнения (1.0) получим

$$\int\limits_0^l u_{tt}(x,t)x\,dx=0. \tag{1.106}$$

Проинтегрируем равенство (1.106) по переменной t дважды. В результате имеем

$$\int\limits_0^l u_t(x,t)x\,dx=K_1=\text{const}, \tag{1.107}$$

$$\int\limits_0^l u(x,t)x\,dx=K_1t+K_2,\quad K_2=\text{const}. \tag{1.108}$$

Положив в равенствах (1.107) и (1.108) $t=0$, с учетом условий (1.73) и (1.76) найдем значения констант

$$\int\limits_0^l u_t(x,0)x\,dx=\int\limits_0^l \psi(x)x\,dx=K_1=0,$$

$$\int_0^l u(x,0)x\,dx = \int_0^l \varphi(x)x\,dx = K_2 = A,$$

подставив которые в формулу (1.108), получим интегральное условие (1.75):

$$\int_0^l u(x,t)x\,dx = A.$$

Пусть теперь $u(x,t)$ — решение задачи (1.71)–(1.76). Так как уравнение (1.0) выполняется всюду в области D, умножим его на x и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0,T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. В результате будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)x\,dx - (xu_x + (k-1)u)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} = 0.$$

Перейдем здесь в силу условий (1.71), (1.74) и (1.75) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получим граничное условие третьего рода (1.77):

$$lu_x(l,t) + (k-1)u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Тем самым мы показали, что при выполнении условий согласования (1.76) условия (1.75) и (1.77) эквивалентны. А значит, эквивалентны и задачи (1.71)–(1.76) и (1.71)–(1.74), (1.77). Теорема доказана.

1.3.3. Устойчивость решения задачи

Теорема 1.3.4. *Для решения задачи* (1.71)–(1.76) *справедлива оценка*

$$||u|| \leqslant C_{11}(||\varphi|| + ||\psi||), \tag{1.109}$$

где норма определяется по формуле $||\widetilde{X}_n||^2 = \int_0^l x^k \widetilde{X}_n^2(x)\,dx$.

Доказательство. Из формулы (1.97) с учетом оценки (1.98) вычислим

$$||u||^2_{L_{2,\rho}(0,l)} = \int\limits_0^l x^k u^2(x,t)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^l x^k \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x) \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)X_m(x)\,dx =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_n(t)u_m(t) \int\limits_0^l x^k X_n(x)X_m(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \int\limits_0^l x^k X_n^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leqslant$$

$$\leqslant 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_n|^2 + \frac{1}{n^2}|\psi_n|^2\Big) \leqslant 2C_1^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2\Big) =$$

$$= C_{11}\big(||\varphi||^2_{L_{2,\rho}(0,l)} + ||\psi||^2_{L_{2,\rho}(0,l)}\big).$$

Теорема доказана.

Глава 2
Смешанные задачи с интегральными условиями второго рода для B-гиперболического уравнения

В данной главе для B-гиперболического уравнения

$$\Box_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x) = 0 \tag{2.0}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) \mid 0 < x < l, 0 < t < T\}$, где $l > 0,\ T > 0,\ k \neq 0$ — заданные действительные числа, изучены вопросы о корректности постановки нелокальных задач с интегральными условиями второго рода в зависимости от коэффициента k, входящего в уравнение. Единственность решений поставленных задач доказана методом интегральных тождеств при $k \geqslant 1$ и $-1 < k < 1$, $k \neq 0$, и методом спектрального анализа при $k \leqslant -1$. Решения построены в виде рядов Фурье–Бесселя. Для обоснования существования решений нелокальных задач получены достаточные условия относительно начальных условий, которые гарантируют сходимость построенных рядов в классе регулярных решений. Доказаны теоремы устойчивости решений поставленных задач.

2.1. Смешанная задача с интегральным условием второго рода для уравнения (1.0) при $k \geqslant 1$

2.1.1. Постановка задачи. Единственность решения

Требуется найти функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \tag{2.1}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.3}$$

$$u_x(l,t)+\int\limits_0^l u(x,t)\,x^k\,dx=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.4}$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi'(l)+\int\limits_0^l \varphi(x)\,x^k\,dx=0,\quad \psi'(l)+\int\limits_0^l \psi(x)\,x^k\,dx=0. \tag{2.5}$$

Дополнительным свойством решения задачи, согласно работе [43], является условие

$$u_x(0,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.6}$$

В дальнейшем равенством (2.6) можно воспользоваться или этот факт не использовать в последующих доказательствах, что зависит от поведения производной u_x при $x\to 0$. Если эта производная при $x\to 0$ остается ограниченной, то нет необходимости в условии (2.6), что и будет показано.

Теорема 2.1.1. *Если существует решение задачи* (2.1)–(2.5), *то оно единственно.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два предполагаемых решения задачи (2.1)–(2.5). Тогда их разность $v=u_1-u_2$ удовлетворяет условиям (2.1), (2.2), однородным начальным условиям

$$v(x,0)=0,\quad v_t(x,0)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{4_0}$$

интегральному условию (2.4) и условию (2.6).

Умножим уравнение (1.0) на x^k и проинтегрируем при фиксированном $t\in(0,T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число. В результате получим

$$\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} v_{tt}x^k\,dx-\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}(x^k v_x)\,dx=0,$$

откуда будем иметь

$$\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} v_{tt}x^k\,dx-\left(x^k\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon}=0. \tag{2.7}$$

Перейдем в (2.7) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в силу условия (2.1) получим

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^l v(x, t) x^k \, dx = l^k v_x(l, t). \tag{2.8}$$

Подставив значение производной из интегрального условия (2.4) в равенство (2.8), получим

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^l v(x, t) x^k \, dx + l^k \int_0^l v(x, t) \, x^k \, dx = 0. \tag{2.9}$$

Введем обозначение

$$Z(t) = \int_0^l v(x, t) \, x^k \, dx$$

и равенство (2.9) запишем в виде уравнения

$$Z''(t) + l^k Z(t) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$Z(t) = \int_0^l v(x, t) \, x^k \, dx = K_1 \cos\left(\sqrt{l^k} t\right) + K_2 \sin\left(\sqrt{l^k} t\right), \tag{2.10}$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные.

С учетом начальных условий (4_0) из равенства (2.10) находим значения констант $K_1 = 0$ и $K_2 = 0$. В результате имеем

$$\int_0^l v(x, t) \, x^k \, dx = 0. \tag{2.11}$$

Подставив значение (2.11) в условие (2.4), получим

$$v_x(l, t) = 0. \tag{2.12}$$

Далее рассмотрим тождество, справедливость которого можно проверить непосредственным дифференцированием:

$$x^k v_t \Box_B v(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[x^k (v_t^2 + v_x^2)\right] - \frac{\partial}{\partial x} (x^k v_t v_x).$$

Поскольку функция v удовлетворяет уравнению (1.0), то последнее выражение можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[x^k(v_t^2+v_x^2)\right]=\frac{\partial}{\partial x}(x^k v_t v_x). \tag{2.13}$$

Проинтегрируем теперь равенство (2.13) при фиксированном $t\in(0,T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число, и затем перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$. В силу условия (2.1) будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l (v_t^2+v_x^2)x^k\,dx=l^k v_t(l,t)v_x(l,t).$$

Тогда с учетом (2.12) из последнего равенства запишем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l (v_t^2+v_x^2)x^k\,dx=0,$$

откуда делаем вывод, что

$$\int\limits_0^l (v_t^2+v_x^2)x^k\,dx=C=\text{const}.$$

Положим теперь $t=0$ в последнем равенстве, откуда с учетом условий (4_0) получим

$$\int\limits_0^l (v_t^2(x,0)+v_x^2(x,0))x^k\,dx=C=0,$$

а значит, $v_t(x,t)\equiv 0$ и $v_x(x,t)\equiv 0$. Следовательно $v(x,t)\equiv \equiv\text{const}$, откуда, опять же, в силу однородных начальных условий (4_0) получим $v(x,t)\equiv 0$. Таким образом, $u_1\equiv u_2$. Теорема доказана.

2.1.2. Существование решения задачи

Частные решения уравнения (1.0), не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (2.1) и (2.4), будем искать в виде произведения $u(x,t)=X(x)T(t)$. Подставив данное выражение в уравнение (1.0) и условия (2.4) и (2.6), получим относительно неизвестной функции $X(x)$ следующую спектраль-

ную задачу:

$$X''(x) + \frac{k}{x} X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{2.14}$$

$$|X(0)| < +\infty, \tag{2.15}$$

$$X'(l) + \int_0^l X(x)\, x^k\, dx = 0, \tag{2.16}$$

где λ^2 — постоянная разделения.

С учетом уравнения (2.14) из граничного условия (2.16) получим

$$X'(l) + \int_0^l X(x) x^k\, dx = X'(l) - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^l \Big[X''(x) + \frac{k}{x} X'(x)\Big] x^k\, dx =$$

$$= X'(l) - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^l \frac{d}{dx}(x^k X'(x))\, dx = \Big(1 - \frac{l^k}{\lambda^2}\Big) X'(l) = 0.$$

Отсюда следует, что нелокальное интегральное условие (2.16) при $\lambda \neq l^{\frac{k}{2}}$ с учетом (2.1) равносильно локальному граничному условию второго рода

$$X'(l) = 0. \tag{2.17}$$

Решение уравнения (2.14), удовлетворяющее условию (2.15), имеет вид

$$\widetilde{X}(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x), \tag{2.18}$$

где $J_\nu(\xi)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu = (k-1)/2$. При этом нетрудно убедиться, что функция (2.18) удовлетворяет условию $\widetilde{X}'(0) = 0$, как и должно быть в силу равенства (2.6).

Подставив функцию (2.18) в граничное условие (2.17), получим

$$\lambda_0 = 0,$$

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{2.19}$$

Из теории бесселевых функций известно [7, с. 530], что уравнение (2.20) при $(k+1)/2 > -1$ имеет счетное множество лишь вещественных корней. Обозначив n-й корень уравнения (2.20) через μ_n, $n \in \mathbb{N}$, найдем собственные значения задачи (2.14)–(2.16). Также известно [85, с. 317], что для корней μ_n

уравнения (2.19) при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{4} k + O(n^{-1}). \tag{2.20}$$

Тогда соответствующая система собственных функций задачи (2.14), (2.15) и (2.17) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0,$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для удобства дальнейших вычислений полученную систему собственных функций ортонормируем:

$$X_n(x) = \frac{1}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,l)}} \widetilde{X}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.21}$$

где

$$||\widetilde{X}_n||^2_{L_{2,\rho}(0,l)} = \int_0^l \rho(x)\, \widetilde{X}_n^2(x)\, dx, \quad \rho(x) = x^k. \tag{2.22}$$

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (2.1)–(2.5). Рассмотрим функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x, t) x^k X_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.23}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (2.22). На основании (2.23) введем в рассмотрение вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, t) x^k X_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.24}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число.

Продифференцируем равенство (2.24) по переменной t дважды при $0 < t < T$ и с учетом уравнения (1.0) получим

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}(x,t)x^k X_n(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \Big(u_{xx} + \frac{k}{x}u_x\Big)x^k X_n(x)\,dx = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x)X_n(x)\,dx =$$

$$= x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx. \quad (2.25)$$

Из (2.24) в силу уравнения (2.14) будем иметь

$$u_{n,\varepsilon}(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k\Big[X''_n(x) + \frac{k}{x}X'_n(x)\Big]\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)\,\frac{d}{dx}\big(x^k X'_n(x)\big)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\Big[u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx\Big],$$

откуда находим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) + u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \quad (2.26)$$

Подставив (2.26) в (2.25), будем иметь

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = x^k u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}. \quad (2.27)$$

Теперь, аналогично рассуждениям при доказательстве единственности решения задачи, умножим уравнение (1.0) на x^k и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0, T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. В результате получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k\,dx - \Big(x^k\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} = 0.$$

Перейдем теперь в полученном равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в силу условий (2.1) и (2.4) будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_x(l,t)) + l^k u_x(l,t) = 0. \tag{2.28}$$

Введем обозначение

$$Z(t) = u_x(l,t),$$

в результате чего получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Z''(t) + l^k Z(t) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$Z(t) = \widetilde{C_1}\cos\left(\sqrt{l^k}t\right) + \widetilde{C_2}\sin\left(\sqrt{l^k}t\right),$$

здесь $\widetilde{C_1}$ и $\widetilde{C_2}$ — произвольные постоянные.

Тогда

$$u_x(l,t) = \widetilde{C_1}\cos\left(\sqrt{l^k}t\right) + \widetilde{C_2}\sin\left(\sqrt{l^k}t\right). \tag{2.29}$$

С учетом начальных условий (2.3) из (2.29) найдем значения констант

$$\widetilde{C_1} = \varphi'(l), \quad \widetilde{C_2} = l^{-\frac{k}{2}}\psi'(l). \tag{2.30}$$

Из формулы (2.21) следует, что $X_n(x) = O(1)$, $X_n'(x) = O(x)$ при $x \to 0$. Тогда с учетом условий (2.1), (2.17) и равенства (2.29) перейдем в (2.27) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получим для определения функций $u_n(t)$ следующее уравнение:

$$\begin{gathered} u_n''(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = C_1\cos\left(\sqrt{l^k}t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{l^k}t\right), \\ t \in (0,T), \end{gathered} \tag{2.31}$$

где

$$C_1 = \widetilde{C_1} l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l) = \varphi'(l) l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l),$$

$$C_2 = \widetilde{C_2} l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l) = \psi'(l)\sqrt{l} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l).$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.31), имеет вид

$$u_n(t) = a_n\cos(\lambda_n t) + b_n\sin(\lambda_n t), \tag{2.32}$$

где a_n и b_n — произвольные постоянные.

Частное решение уравнения (2.31) будем искать в следующем виде:

$$v(t) = A\cos\left(\sqrt{l^k}t\right) + B\sin\left(\sqrt{l^k}t\right), \tag{2.33}$$

где A и B — коэффициенты, требующие определения. Подставив (2.33) в уравнение (2.31), найдем

$$A = \frac{C_1}{\lambda_n^2 - l^k} = \frac{\varphi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k} l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l),$$

$$B = \frac{C_2}{\lambda_n^2 - l^k} = \frac{\psi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k} \sqrt{l} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l).$$

Тогда частное решение (2.33) уравнения (2.31) определяется по формуле

$$v_n(t) = \frac{\sqrt{l}}{\lambda_n^2 - l^k} \times$$
$$\times \left(\sqrt{l^k}\,\varphi'(l)\cos\left(\sqrt{l^k}t\right) + \psi'(l)\sin\left(\sqrt{l^k}t\right)\right) J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l), \tag{2.34}$$

а его общее решение принимает вид

$$u_n(t) = a_n\cos(\lambda_n t) + b_n\sin(\lambda_n t) + v_n(t). \tag{2.35}$$

Для определения произвольных постоянных a_n и b_n функции (2.23) подставим в начальные условия (2.3):

$$u_n(0) = \int_0^l u(x,0)x^k X_n(x)\,dx = \int_0^l \varphi(x)x^k X_n(x)\,dx = \varphi_n, \tag{2.36}$$

$$u_n'(0) = \int_0^l u_t(x,0)x^k X_n(x)\,dx = \int_0^l \psi(x)x^k X_n(x)\,dx = \psi_n. \tag{2.37}$$

С учетом (2.36) и (2.37) из (2.35) и (2.34) будем иметь

$$u_n(0) = a_n + \frac{\varphi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k} l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l) = \varphi_n,$$

$$u_n'(0) = b_n\lambda_n + \frac{\psi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k} l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l) = \psi_n,$$

откуда находим

$$a_n = \varphi_n - \frac{\varphi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k}\, l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l),$$
$$b_n = \frac{\psi_n}{\lambda_n} - \frac{\psi'(l)}{(\lambda_n^2 - l^k)\lambda_n}\, l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l). \tag{2.38}$$

Подставив найденные значения (2.38) в (2.35), найдем окончательный вид функций

$$u_n(t) = \varphi_n \cos(\lambda_n t) + \frac{\psi_n}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t) +$$
$$+ \frac{\varphi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k}\, l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l)\left(\cos\left(\sqrt{l^k}\,t\right) - \cos(\lambda_n t)\right) +$$
$$+ \frac{\psi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k}\, l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l)\left(l^{-\frac{k}{2}}\sin\left(\sqrt{l^k}\,t\right) - \frac{1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t)\right). \tag{2.39}$$

На основании найденных частных решений (2.21) и (2.39) запишем решение задачи (2.1)–(2.5) формально в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{2.40}$$

где функции $X_n(x)$ определяются по формуле (2.21), а функции $u_n(t)$ — по формуле (2.39).

Вместе с рядом (2.40) рассмотрим следующие ряды:

$$u_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(t) X_n(x), \quad u_x(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) X_n'(x), \tag{2.41}$$

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(t) X_n(x), \quad u_{xx}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) X_n''(x). \tag{2.42}$$

Докажем равномерную сходимость рядов (2.40)–(2.42) в области $\overline{D}$, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ подчинить некоторым дополнительным условиям.

Лемма 2.1.1. *Для достаточно больших n и при любом $t \in [0, T]$ справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \leqslant C_1\big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n}\big) + \frac{|\varphi'(l)|}{n^{5/2}} + \frac{|\psi'(l)|}{n^{5/2}}, \tag{2.43}$$

$$|u_n'(t)| \leqslant C_2\big(n|\varphi_n| + |\psi_n|\big) + \frac{|\varphi'(l)|}{n^{3/2}} + \frac{|\psi'(l)|}{n^{5/2}}, \tag{2.44}$$

$$|u_n''(t)| \leqslant C_3\big(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n|\big) + \frac{|\varphi'(l)|}{n^{1/2}} + \frac{|\psi'(l)|}{n^{3/2}}, \tag{2.45}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство оценок (2.43)–(2.45) следует из формул (2.39) и (2.20).

Лемма 2.1.2. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0, l]$ выполнены оценки*

$$|X_n(x)| \leqslant C_4, \quad |X_n'(x)| \leqslant C_5 n, \quad |X_n''(x)| \leqslant C_6 n^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.2.

Лемма 2.1.3. *Если функция $\varphi(x) \in C^2[0, l]$ и существует производная $\varphi'''(x)$, имеющая конечное изменение на $[0, l]$, функция $\psi(x) \in C^1[0, l]$ и существует производная $\psi''(x)$, которая имеет конечное изменение на $[0, l]$, и*

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = 0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n| \leqslant \frac{C_7}{n^4}, \quad |\psi_n| \leqslant \frac{C_8}{n^3}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.3.

С учетом условий леммы 2.1.3 коэффициенты $u_n(t)$ ряда (2.40) принимают вид

$$u_n(t) = \varphi_n \cos(\lambda_n t) + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t). \tag{2.46}$$

Согласно леммам 2.1.1–2.1.3, при любых $(x, t) \in \overline{D}$ ряды (2.40)–(2.42) мажорируются числовым рядом $C_9 \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$,

следовательно, сходятся равномерно в замкнутой области $\overline{D}$. И тем самым доказана

Теорема 2.1.2. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 2.1.3, *то существует единственное решение задачи* (2.1)–(2.5), *определяемое рядом* (2.40), *при этом* $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.

2.1.3. Устойчивость решения задачи

Теорема 2.1.3. *Для решения задачи* (2.1)–(2.5) *справедлива оценка*

$$||u|| \leqslant C_{10}\big(||\varphi|| + ||\psi||\big). \tag{2.47}$$

Норма определяется по формуле (2.22).

Доказательство. Из (2.43) с учетом полученного выражения (2.46) получим

$$|u_n(t)| \leqslant C_1\Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n}\Big). \tag{2.48}$$

Тогда на основании (2.40) вычислим:

$$||u||^2_{L_{2,\rho}(0,l)} = \int\limits_0^l x^k u^2(x,t)\,dx =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} u_n(t)u_m(t) \int\limits_0^l x^k X_n(x)X_m(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2(t) \int\limits_0^l x^k X_n^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2(t).$$

Отсюда в силу оценки (2.48) имеем

$$||u||^2_{L_{2,\rho}(0,l)} \leqslant 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty}\Big(|\varphi_n|^2 + \frac{1}{n^2}|\psi_n|^2\Big) \leqslant$$

$$\leqslant\leqslant 2C_1^2\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^2\Big) = C_{10}\big(||\varphi||^2_{L_{2,\rho}(0,l)} + ||\psi||^2_{L_{2,\rho}(0,l)}\big).$$

Тем самым доказана справедливость оценки (2.47). Теорема доказана.

2.2. Смешанная задача с интегральным условием второго рода для уравнения (1.0) при $|k|<1$, $k\neq 0$

2.2.1. Постановка задачи. Единственность решения

Требуется найти функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D), \tag{2.49}$$

$$\square_B u(x,t)\equiv 0,\quad (x,t)\in D, \tag{2.50}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{2.51}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^k u_x(x,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.52}$$

$$u_x(l,t)+\int_0^l u(x,t)\,x^k\,dx=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.53}$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi'(l)+\int_0^l \varphi(x)\,x^k\,dx=0,\quad \psi'(l)+\int_0^l \psi(x)\,x^k\,dx=0. \tag{2.54}$$

Аналогично доказательству теоремы 2.1.1 доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *Если существует решение задачи* (2.49)–(2.54), *то оно единственно.*

2.2.2. Существование и устойчивость решения задачи

Аналогично случаю $k\geqslant 1$, подставив произведение $u(x,t)=X(x)T(t)$ в уравнение (1.0) и условия (2.52) и (2.53), получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x)+\frac{k}{x}X'(x)+\lambda^2 X(x)=0,\quad 0<x<l, \tag{2.55}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^k X'(x)=0, \tag{2.56}$$

$$X'(l)+\int_0^l X(x)\,x^k\,dx=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.57}$$

Система собственных функций задачи (2.55)–(2.57) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0,$$
$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

собственные значения $\lambda_n = \mu_n / l$ $(n = 1, 2, \ldots)$ определяются как решения уравнения

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0,$$

для которых при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{4} k + O(n^{-1}).$$

Введем норму по формуле

$$||\widetilde{X}_n(x)||^2 = \int_0^l x^k \widetilde{X}_n^2(x)\, dx \tag{2.58}$$

и далее будем рассматривать функции

$$X_n(x) = \frac{1}{||\widetilde{X}_n(x)||} \widetilde{X}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.59}$$

Решение задачи (2.49)–(2.54), аналогично задаче при $k \geqslant 1$, строится в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{2.60}$$

где функции $X_n(x)$ определяются по формуле (2.59), для которых справедливы оценки леммы 2.1.2, функции $u_n(t)$ имеют вид

$$u_n(t) = \varphi_n \cos(\lambda_n t) + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) +$$
$$+ \frac{\varphi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k} l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l)\left(\cos\left(\sqrt{l^k} t\right) - \cos(\lambda_n t)\right) +$$
$$+ \frac{\psi'(l)}{\lambda_n^2 - l^k} l^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n l)\left(l^{-\frac{k}{2}} \sin\left(\sqrt{l^k} t\right) - \frac{1}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t)\right), \tag{2.61}$$

а φ_n и ψ_n определяются по формулам

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x)\, dx, \quad \psi_n = \int_0^l \psi(x) x^k X_n(x)\, dx.$$

Отметим, что для функций (2.61) справедливы оценки леммы 2.1.1.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ подчиним условиям леммы 2.1.3, в результате чего коэффициенты (2.61) ряда (2.60) принимают вид

$$u_n(t) = \varphi_n \cos(\lambda_n t) + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t).$$

Согласно леммам 2.1.1–2.1.3 при любых $(x, t) \in \overline{D}$ ряд (2.60) и его производные до второго порядка включительно мажорируются числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. Поэтому функция (2.60) удовлетворяет условиям (2.49) и (2.50). Тем самым доказана следующая

Теорема 2.2.2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 2.1.3, *то существует единственное решение задачи* (2.49)–(2.54), *определяемое рядом* (2.60), *при этом $u(x, t) \in C^2(\overline{D})$.*

Совершенно аналогично случаю $k \geqslant 1$ доказывается следующая теорема.

Теорема 2.2.3. *Для решения задачи* (2.49)–(2.54) *справедлива оценка*

$$||u|| \leqslant C(||\varphi|| + ||\psi||),$$

где C – произвольная постоянная, норма определяется по формуле (2.58).

2.3. Смешанная задача с интегральным условием второго рода для уравнения (1.0) при $k \leqslant -1$

2.3.1. Постановка задачи. Единственность решения

В данном параграфе для уравнения (1.0) в области D исследуем смешанную задачу с нелокальным интегральным

условием второго рода при $k \leqslant -1$. Не теряя общности в дальнейших рассуждениях, положим $l = 1$, так как уравнение (1.0) инвариантно относительно замены $x_1 = x/l$, $y_1 = y/l$.

Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \tag{2.62}$$

$$\Box_B u(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D, \tag{2.63}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.64}$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.65}$$

$$\left(x^{k-1} u(x, t)\right)'_x \Big|_{x=1} + \int\limits_0^1 u(x, t) x \, dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.66}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\begin{aligned} &\left(x^{k-1} \varphi(x)\right)'_x \Big|_{x=1} + \int\limits_0^1 \varphi(x) x \, dx = 0, \\ &\left(x^{k-1} \psi(x)\right)'_x \Big|_{x=1} + \int\limits_0^1 \psi(x) x \, dx = 0. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Частные решения уравнения (1.0), не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (2.62), (2.65) и (2.66), будем искать в виде произведения $u(x, t) = X(x)T(t)$. Подставив данное выражение в уравнение (1.0) и условия (2.65) и (2.66), получим относительно неизвестной функции $X(x)$ следующую спектральную задачу:

$$X''(x) + \frac{k}{x} X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{2.68}$$

$$X(0) = 0, \tag{2.69}$$

$$\left(x^{k-1} X(x)\right)'_x \Big|_{x=1} + \int\limits_0^1 X(x) x \, dx = 0, \tag{2.70}$$

где λ^2 — постоянная разделения.

С учетом уравнения (2.68) и условия (2.69) из интегрального условия (2.70) имеем

$$\left(x^{k-1}X(x)\right)'_x\Big|_{x=1} + \int_0^1 X(x)x\,dx =$$

$$= (k-1)X(1) + X'(1) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1 \left[xX''(x) + kX'(x)\right]dx =$$

$$= (k-1)X(1) + X'(1) - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[xX'(x) + (k-1)X(x)\right]dx =$$

$$= (k-1)X(1) + X'(1) - \frac{1}{\lambda^2}\left[xX'(x) + (k-1)X(x)\right]\Big|_0^1 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\left(X'(1) + (k-1)X(1)\right) = 0.$$

Отсюда получим уравнение

$$\lambda^2 = 1$$

или уравнение

$$X'(1) + (k-1)X(1) = 0.$$

Следовательно, нелокальное условие (2.70) эквивалентно двум локальным условиям.

Общее решение уравнения (2.68) при $k \leqslant -1$ определяется по формуле

$$\widetilde{X}(x) = K_1 x^{\nu} J_{\nu}(\lambda x) + K_2 x^{\nu} Y_{\nu}(\lambda x),$$

где $J_{\nu}(\xi)$, $Y_{\nu}(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго родов соответственно, порядка $\nu = (1-k)/2$, K_1, K_2 — произвольные постоянные.

Общее решение будет удовлетворять условию (2.69), если $K_1 = 1$ и $K_2 = 0$. В результате это решение принимает вид

$$\widetilde{X}(x) = x^{\nu} J_{\nu}(\lambda x), \quad \nu = (1-k)/2.$$

Тогда собственному значению $\lambda_0^2 = 1$ соответствует собственная функция

$$X_0(x) = x^{\nu} J_{\nu}(\lambda_0 x).$$

Подставим теперь данное решение в граничное условие третьего рода, откуда получим уравнение для нахождения остальных собственных значений задачи (2.68)–(2.70):

$$\lambda J'_\nu(\lambda) - \nu J_\nu(\lambda) = 0. \tag{2.71}$$

На основании формулы $zJ'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) = -zJ_{\nu+1}(z)$ [85, с. 82] уравнение (2.71) равносильно уравнению

$$J_{\frac{3-k}{2}}(\lambda) = 0.$$

Для решений этого уравнения, согласно [85, с. 317], при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_n = \pi n + \pi/2 - k\pi/4 + O(n^{-1}). \tag{2.72}$$

Таким образом, система собственных функций задачи (2.68)–(2.70) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_0 x), \quad \widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

а собственные значения λ_n определяются как решения уравнения (2.71), которая не ортогональна на сегменте $[0, 1]$, так как собственное число λ_0 не является корнем функции Бесселя $J_{\frac{3-k}{2}}(\lambda x)$, то есть корнем уравнения (2.71). А подсистема функций $\widetilde{X}_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ ортогональна и полна в пространстве $L_2[0, 1]$ с весом x^k как система собственных функций спектральной задачи (2.68), (2.69) и (2.71). Действительно, ортогональность данной системы следует из равенства

$$\int_0^1 x^k \widetilde{X}_n(x)\widetilde{X}_m(x)\,dx = \int_0^1 x J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x) J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_m x)\,dx = 0,$$

так как λ_n и λ_m — нули уравнения (2.71) и $\nu = (1-k)/2 > -1$. Такая система полна в пространстве $L_2[0, 1]$ в силу теоремы Стеклова [9, с. 314]. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только систему собственных функций $\widetilde{X}_n(x)$, где $n = 1, 2, \ldots$, которую для удобства дальнейших вычислений ортонормируем:

$$X_n(x) = \frac{\widetilde{X}_n(x)}{||\widetilde{X}_n||}, \tag{2.73}$$

норма определяется по формуле

$$||\widetilde{X}_n||^2 = \int_0^1 x^k \widetilde{X}_n^2(x)\,dx. \tag{2.74}$$

Теперь введем функции

$$u_n(t) = \int_0^1 u(x,t)x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.75}$$

на основании которых рассмотрим вспомогательные функции

$$u_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)x^k X_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Продифференцируем данное равенство по переменной t дважды при $0 < t < T$ и с учетом уравнения (1.0) получим

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{tt}(x,t)x^k X_n(x)\,dx = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \Big(u_{xx} + \frac{k}{x}u_x\Big)x^k X_n(x)\,dx =$$

$$= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x)X_n(x)\,dx = x^k u_x X_n(x)\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx.$$

Также из данного равенства в силу уравнения (2.68) запишем

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^k u_x X'_n(x)\,dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) + u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon}.$$

Из последних двух равенств имеем

$$u''_{n,\varepsilon}(t) = x^k u_x X_n(x)\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(t) - u(x,t)x^k X'_n(x)\Big|_\varepsilon^{1-\varepsilon}.$$

Из формулы для функций $\widetilde{X}_n(x)$ следует, что $X_n(x) = O(x^{1-k})$ и $X'_n(x) = O(x^{-k})$ при $x \to 0$. Тогда, после перехода в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом условий (2.62), (2.65), (2.69) и (2.71) получим

$$u''_n(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = \big[u_x(1,t) + (k-1)u(1,t)\big]X_n(1), \quad t \in (0,T). \tag{2.76}$$

Умножим теперь уравнение (1.0) на x и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0, T)$ по переменной x на промежутке от ε до $1-\varepsilon$. В результате получим

$$\frac{d^2}{dt^2} \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,t)x\,dx - \big[xu_x + (k-1)u\big]\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0.$$

Перейдем теперь в полученном равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в силу условий (2.62), (2.65) и (2.66) будем иметь

$$-\frac{d^2}{dt^2}\Big[\big(x^{k-1}u(x,t)\big)'_x\Big|_{x=1}\Big] - \big[u_x(1,t) + (k-1)u(1,t)\big] = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{d^2}{dt^2}\big[u_x(1,t) + (k-1)u(1,t)\big] + \big[u_x(1,t) + (k-1)u(1,t)\big] = 0.$$

Введем обозначение $Z(t) = u_x(1,t) + (k-1)u(1,t)$, в результате чего получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Z''(t) + Z(t) = 0,$$

общее решение которого определяется по формуле

$$Z(t) = P_1 \cos t + P_2 \sin t,$$

где P_1 и P_2 — произвольные постоянные. Тогда

$$u_x(1,t) + (k-1)u(1,t) = P_1 \cos t + P_2 \sin t.$$

С учетом начальных условий (2.64) из последнего равенства найдем значения констант

$$P_1 = \varphi'(1) + (k-1)\varphi(1), \quad P_2 = \psi'(1) + (k-1)\psi(1).$$

Таким образом,

$$u_x(1,t) + (k-1)u(1,t) = \\ = \big[\varphi'(1) + (k-1)\varphi(1)\big]\cos t + \big[\psi'(1) + (k-1)\psi(1)\big]\sin t.$$

Подставив последнее выражение в (2.76), получим для определения функций $u_n(t)$ уравнение

$$u_n''(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = P_3 \cos t + P_4 \sin t, \quad t \in (0, T),$$

где

$$P_3 = P_1 X_n(1) = \big(\varphi'(1) + (k-1)\varphi(1)\big) J_{\frac{l-1}{2}}(\lambda_n),$$

$$P_4 = P_2 X_n(1) = \big(\psi'(1) + (k-1)\varphi(1)\big) J_{\frac{l-1}{2}}(\lambda_n).$$

Общее решение данного обыкновенного уравнения определяется по формуле

$$u_n(t) = a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t) + v_n(t), \tag{2.77}$$

где a_n и b_n — произвольные постоянные, требующие определения, а частное решение $v_n(t)$ имеет вид

$$v_n(t) = \frac{1}{\lambda_n^2 - 1} \big[\big(\varphi'(1) + (k-1)\varphi(1)\big) \cos t + \\ + \big(\psi'(1) + (k-1)\psi(1)\big) \sin t\big] J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n). \tag{2.78}$$

Здесь отметим, что $\lambda_n^2 \neq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$, так как ± 1 не являются решениями уравнения (2.71).

Для определения произвольных постоянных a_n и b_n функции (2.75) подставим в начальные условия (2.64):

$$u_n(0) = \int_0^1 \varphi(x) x^k X_n(x)\, dx = \varphi_n,$$

$$u_n'(0) = \int_0^1 \psi(x) x^k X_n(x)\, dx = \psi_n.$$

Из последних двух равенств и формулы (2.77) найдем

$$a_n = \varphi_n - \frac{1}{\lambda_n^2 - 1} \big(\varphi'(1) + (k-1)\varphi(1)\big) J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n),$$

$$b_n = \frac{\psi_n}{\lambda_n} - \frac{1}{(\lambda_n^2 - 1)\lambda_n} \big(\varphi'(1) + (k-1)\varphi(1)\big) J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n).$$

Подставив найденные значения констант a_n и b_n в (2.77), запишем окончательный вид функций:

$$u_n(t) = \varphi_n \cos(\lambda_n t) + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) + \\ + \frac{1}{\lambda_n^2 - 1} \left[\varphi'(1) + (k-1)\varphi(1)\right] J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n) \left(\cos t - \cos(\lambda_n t)\right) + \\ + \frac{1}{(\lambda_n^2 - 1)\lambda_n} \left[\varphi'(1) + (k-1)\varphi(1)\right] J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n) \times \\ \times \left(\sin t - \frac{1}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t)\right). \quad (2.79)$$

Теорема 2.3.1. *Если существует решение задачи* (2.62)–(2.67), *то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение однородной задачи (2.62)–(2.66), где $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$. Умножим уравнение (1.0) на x и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0, T)$ по переменной x на промежутке от ε до $1 - \varepsilon$. В результате получим

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{tt} x \, dx - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} (x u_{xx} + k u_x) \, dx = 0,$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, t) x \, dx - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left(x u_x + (k-1)u\right) dx = 0.$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, t) x \, dx - \left(x u_x + (k-1)u\right)\Big|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0.$$

В силу условий (2.62) и (2.65) в последнем равенстве можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, в результате чего получим

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x, t) x \, dx - \left(u_x(1, t) + (k-1)u(1, t)\right) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Из интегрального условия (2.66) найдем

$$u_x(1, t) + (k-1)u(1, t) = -\int_0^1 u(x, t)x\,dx.$$

Подставив данное выражение в последнее равенство, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x, t)x\,dx + \int_0^1 u(x, t)x\,dx = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\int_0^1 u(x, t)x\,dx = K_1 \cos t + K_2 \sin t,$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные. Отсюда с учетом нулевых начальных условий имеем

$$\int_0^1 u(x, t)x\,dx = 0.$$

Тогда из условия (2.66) получим

$$u_x(1, t) + (k-1)u(1, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Таким образом, для функции $u(x, t)$ получили однородные граничные условия

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) + (k-1)u(1, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Ранее построена система собственных функций (2.73) этой задачи и на основе этой системы с помощью введения функций (2.75) найден их явный вид — формула (2.79). По условию $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$, тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ следует, что $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$. Из формулы (2.79) получим, что $u_n(t) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (2.75) при любом $t \in [0, T]$ имеем

$$\int_0^1 u(x, t)x^k X_n(x)\,dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы (2.73) в пространстве $L_2[0, 1]$ с весом x^k следует, что $u(x, t) = 0$ почти всюду на промежутке

$[0, 1]$ при любом $t \in [0, T]$. Поскольку, согласно (2.62), функция $u(x, t) \in C(\overline{D})$, то $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема доказана.

2.3.2. Существование решения задачи

На основании найденных частных решений (2.73) и (2.79) запишем решение задачи (2.62)–(2.6) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{2.80}$$

вместе с которым (считаем возможным почленное дифференцирование) рассмотрим следующие ряды:

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) X_n(x), \quad u_x(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n'(x),$$

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) X_n(x), \quad u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n''(x).$$

Покажем теперь, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящих в начальные условия (2.64) задачи, эти ряды сходятся равномерно в области $\overline{D}$.

Лемма 2.3.1. *Для достаточно больших n и при любом $t \in [0, T]$ справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \leqslant C_1\Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n}\Big) + \frac{|\varphi'(1)|}{n^{3/2}} + \frac{|\psi'(1)|}{n^{3/2}} + \frac{|\varphi(1)|}{n^{3/2}} + \frac{|\psi(1)|}{n^{3/2}},$$

$$|u_n'(t)| \leqslant C_2\big(n|\varphi_n| + |\psi_n|\big) + \frac{|\varphi'(1)|}{n^{1/2}} + \frac{|\psi'(1)|}{n^{3/2}} + \frac{|\varphi(1)|}{n^{1/2}} + \frac{|\psi(1)|}{n^{3/2}},$$

$$|u_n''(t)| \leqslant C_3\big(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n|\big) + n^{1/2}|\varphi'(1)| + \frac{|\psi'(1)|}{n^{1/2}} + \\ + n^{1/2}|\varphi(1)| + \frac{|\psi(1)|}{n^{1/2}},$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство оценок следует из формул (2.79) и (2.72).

Лемма 2.3.2. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0, l]$ справедливы оценки*

$$|X_n(x)| \leqslant C_4, \quad |X_n'(x)| \leqslant C_5 n, \quad |X_n''(x)| \leqslant C_6 n^2.$$

Доказательство. Как известно, функция $\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x) \in C^2[0, 1]$ и при больших ξ справедлива оценка $J_\nu(\xi) = O(\xi^{-1/2})$.

Вычислим

$$||\widetilde{X}_n||^2_{L_{2,\varrho}(0,1)} = \int_0^1 x^k \widetilde{X}_n^2(\lambda_n x)\, dx = \int_0^1 x J^2_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x)\, dx = \frac{1}{2} J^2_{\frac{3-k}{2}}(\lambda_n).$$

Тогда из (2.73) следует справедливость первой оценки данной леммы.

Вычислим производные функции $\widetilde{X}_n(x)$:

$$\widetilde{X}_n'(x) = \lambda_n x^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x), \tag{2.81}$$

$$\widetilde{X}_n''(x) = -\frac{k}{x} \widetilde{X}_n'(x) - \lambda_n^2 \widetilde{X}_n(x).$$

Из этих равенств следуют остальные оценки. Лемма доказана.

Лемма 2.3.3. *Если функция $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ и существует производная $\varphi'''(x)$, имеющая конечное изменение на $[0, 1]$, функция $\psi(x) \in C^1[0, 1]$ и существует производная $\psi''(x)$, которая имеет конечное изменение на $[0, 1]$, и*

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(1) = \psi(1) = \varphi'(0) = \psi'(0) = \\ = \varphi'(1) = \psi'(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n| \leqslant C_7 n^{-4}, \quad |\psi_n| \leqslant C_8 n^{-3}. \tag{2.82}$$

Доказательство. С учетом (2.68) и условий леммы будем иметь

$$\varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(x)x^k X_n(x)\,dx = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^1 \varphi(x)x^k\Big[X_n''(x)+\frac{k}{x}X_n'(x)\Big]\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^1 \varphi(x)\big(x^k X_n'(x)\big)'\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\Big[\varphi(x)x^k X_n'(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \varphi'(x)x^k X_n'(x)\,dx\Big] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^1 \varphi'(x)x^k X_n'(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2}\Big[\varphi'(x)x^k X_n(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (\varphi'(x)x^k)' X_n(x)\,dx\Big] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^1 (\varphi'(x)x^k)' X_n(x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^1 \varphi''(x)x^k X_n(x)\,dx - \frac{k}{\lambda_n^2}\int\limits_0^1 \frac{\varphi'(x)}{x}\,x^k X_n(x)\,dx.$$

Введем обозначения

$$\varphi_n^{(2)} = \int\limits_0^1 \varphi''(x)x^k X_n(x)\,dx,$$

$$\varphi_{1n} = \int\limits_0^1 \varphi_1(x)x^k X_n(x)\,dx,$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi'(x)}{x},$$

в результате чего получим

$$\varphi_n = -\frac{1}{\lambda_n^2}\,\varphi_n^{(2)} - \frac{k}{\lambda_n^2}\,\varphi_{1n}. \tag{2.83}$$

В силу (2.68) и условий леммы для интеграла $\varphi_n^{(2)}$ имеем

$$\varphi_n^{(2)} = \int_0^1 \varphi''(x) x^k X_n(x)\, dx = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \varphi''(x) \left(x^k X_n'(x)\right)' dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2} \left[\varphi''(x) x^k X_n'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi'''(x) x^k X_n'(x)\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \varphi'''(x) x^k X_n'(x)\, dx = \frac{\varphi_n^{(3)}}{\lambda_n^2},$$

где

$$\varphi_n^{(3)} = \int_0^1 \varphi'''(x) x^k X_n'(x)\, dx.$$

Поскольку производная $\varphi'''(x)$ по условиям леммы имеет конечное изменение на сегменте $[0, 1]$, то можно показать [78, с. 202], что $\varphi_n^{(3)} = O(1)$ при больших n, а следовательно, справедлива оценка

$$|\varphi_n^{(3)}| \leqslant C_9.$$

Аналогично, на основании (2.68) и условий леммы проинтегрируем по частям второй интеграл:

$$\varphi_{1n} = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \varphi_1(x) \left(x^k X_n'(x)\right)' dx = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \varphi_1'(x) x^k X_n'(x)\, dx = \frac{\varphi_{1n}^{(1)}}{\lambda_n^2},$$

где $\varphi_{1n}^{(1)} = \int_0^1 \varphi_1'(x) x^k X_n'(x)\, dx$, и этот интеграл сходится.

Оценим интеграл $\varphi_{1n}^{(1)}$ при больших n, представив его в виде

$$\varphi_{1n}^{(1)} = \frac{\lambda_n}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\varphi}(0,1)}} \int_0^1 \left(\frac{\varphi'(x)}{x}\right)' x^k x^{\frac{1-k}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x)\, dx =$$

$$= \frac{\lambda_n}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\varphi}(0,1)}} \int_0^1 x \left[\varphi''(x) - \frac{\varphi'(x)}{x}\right] x^{\frac{k-3}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda_n x)\, dx.$$

По условию $\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$, поэтому при малых x: $0\leqslant x\leqslant\delta$, где $\delta>0$ — достаточно малое число, запишем

$$\varphi'(x)=\varphi'(0)+\frac{\varphi''(0)}{1!}x+\frac{\varphi'''(\xi x)}{2!}x^2=\frac{1}{2}\,\varphi'''(\xi x)x^2,\quad 0<\xi<x,$$

$$\varphi''(x)=\varphi''(0)+\frac{\varphi'''(\theta x)}{1!}\,x=\varphi'''(\theta x)x,\quad 0<\theta<x.$$

В силу этих представлений функция

$$x^{\frac{1}{2}}f(x)=x^{\frac{1}{2}}\Big[\varphi''(x)-\frac{\varphi'(x)}{x}\Big]x^{\frac{k-3}{2}}=$$
$$=\Big[\varphi''(x)-\frac{\varphi'(x)}{x}\Big]x^{\frac{k}{2}-1}=\Big[\varphi'''(\theta x)-\frac{1}{2}\,\varphi'''(\xi x)\Big]x^{\frac{k}{2}}$$

имеет ограниченное изменение на сегменте $[0,\delta]$ как произведение двух функций, имеющих конечное изменение [78, с. 202].

На сегменте $[\delta,l]$ аналогично можно показать, что функция $x^{\frac{1}{2}}f(x)$ имеет конечное изменение. Тогда она имеет конечное изменение на промежутке $[0,1]$. И, как и в случае интеграла $\varphi_n^{(3)}$, будем иметь оценку

$$|\varphi_{1n}^{(1)}|\leqslant C_{10}.$$

Из установленных оценок для интегралов $\varphi_n^{(2)}$ и φ_{1n} в силу представления (2.83) следует первая оценка из (2.82).

На основании условий леммы, проинтегрировав дважды по частям, получим

$$\psi_n=-\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^1\psi''(x)x^kX_n(x)\,dx-\frac{k}{\lambda_n^2}\int\limits_0^1\frac{\psi'(x)}{x}\,x^kX_n(x)\,dx=$$
$$=-\frac{1}{\lambda_n^2}\,\psi_n^{(2)}-\frac{k}{\lambda_n^2}\,\psi_{1n},$$

где

$$\psi_n^{(2)}=\int\limits_0^1\psi''(x)x^kX_n(x)\,dx,\quad \psi_{1n}=\int\limits_0^1\frac{\psi'(x)}{x}\,x^kX_n(x)\,dx.$$

Аналогично получим равенства $\psi_n^{(2)} = O(\lambda_n^{-1})$, $\psi_{1n} = O(\lambda_n^{-1})$, на основании которых и из представления для ψ_n следует вторая оценка из (2.36). Лемма доказана.

В силу условий леммы 2.3.3 коэффициенты (2.79) ряда (2.80) принимают вид

$$u_n(t) = \varphi_n \cos(\lambda_n t) + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t). \tag{2.84}$$

Согласно леммам 2.3.1–2.3.3, ряд (2.80) и его производные до второго порядка включительно при любых $(x, t) \in \overline{D}$ мажорируются сходящимся числовым рядом $C_{11} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$, а следовательно, они сходятся равномерно в замкнутой области $\overline{D}$. Тем самым доказана

Теорема 2.3.2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 2.3.3 *и выполнены условия* (2.67), *то существует единственное решение задачи* (2.62)–(2.67), *определяемое рядом* (2.80), *при этом $u(x, t) \in C^2(\overline{D})$.*

2.3.3. Устойчивость решения задачи

Теорема 2.3.3. *Для решения задачи* (2.62)–(2.67) *справедлива оценка*

$$||u||_{L_{2,\rho}(0,1)} \leqslant C_{12}\big(||\varphi||_{L_{2,\rho}(0,1)} + ||\psi||_{L_{2,\rho}(0,1)}\big),$$

где норма определяется по формуле (2.74), *постоянная C_{12} не зависит от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.*

Доказательство. Из формулы (2.84) и леммы 2.3.1 имеем

$$|u_n(t)| \leqslant C_1\Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n}\Big).$$

С учетом этой оценки на основании (2.80) вычислим квадрат нормы и оценим ее:

$$
\begin{aligned}
||u||^2_{L_{2,\rho}(0,1)} &= \int_0^1 x^k u^2(x,t)\,dx = \\
&= \int_0^1 x^k \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x) \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)X_m(x)\,dx = \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_n(t)u_m(t) \int_0^1 x^k X_n(x)X_m(x)\,dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \int_0^1 x^k X_n^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leqslant \\
&\leqslant 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_n|^2 + \frac{1}{n^2}|\psi_n|^2\Big) \leqslant 2C_1^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2\Big) = \\
&= 2C_1^2 \big(||\varphi||^2_{L_{2,\rho}(0,1)} + ||\psi||^2_{L_{2,\rho}(0,1)}\big).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует справедливость указанной оценки. Теорема доказана.

Глава 3
Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для уравнений гиперболического и смешанного типов с оператором Бесселя

В данном параграфе исследована нелокальная задача с неполными граничными данными и интегральным условием первого рода в прямоугольной области. Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решения поставленной задачи. Решение задачи получено в виде ряда Фурье—Бесселя, при построении которого решена проблема малых знаменателей. Найдены оценки для начальных функций, позволяющие обосновать сходимость ряда в классе регулярных решений.

Пусть $D = \{(x, t) \mid 0 < x < l, 0 < t < T\}$ — прямоугольная область координатной плоскости Oxt, где $l, T > 0$ — заданные действительные числа. Рассмотрим в этой области B-гиперболическое уравнение

$$\Box_B u(x, t) \equiv u_{tt} - x^{-k} \frac{\partial}{\partial x}(x^k u_x) = 0, \tag{3.0}$$

где $k \geqslant 1$ — заданное действительное число.

3.1. Задача типа Келдыша с интегральным условием для уравнения (1.0) в прямоугольной области

3.1.1. Постановка задачи. Единственность решения

Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D), \tag{3.1}$$

$$\Box_B u(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in D, \tag{3.2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, T) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.3}$$

$$\int_0^l u(x, t) x^k \, dx = A = \text{const}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.4}$$

где A — заданное число; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int_0^l \varphi(x)x^k\,dx = \int_0^l \psi(x)x^k\,dx = A. \tag{3.5}$$

В § 1.1 показано, что при $k \geqslant 1$ справедливо равенство

$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.6}$$

Тем самым устанавливается дополнительное свойство решения задачи (3.1)–(3.5).

Умножим уравнение (1.0) на x^k и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0,T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число:

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{tt}x^k\,dx - \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^k\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = 0,$$

откуда будем иметь

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)x^k\,dx - \left(x^k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} = 0.$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в силу условий (3.4) и (3.6) получим локальное граничное условие

$$u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.7}$$

В дальнейшем вместо задачи (3.1)–(3.5) будем рассматривать задачу (3.1)–(3.3), (3.7).

Частные решения уравнения (1.0), не равные нулю в области D и удовлетворяющие условиям (3.1) и (3.7), будем искать в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставив данную функцию в уравнение (1.0) и условие (3.7), после разделения переменных получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{k}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3.8}$$

$$|X(0)| < +\infty, \quad X'(l) = 0, \tag{3.9}$$

где λ^2 — постоянная разделения.

В § 1.1 найдена система собственных функций задачи (3.8), (3.9), которая имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0,$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

где собственные значения λ_n определяются как решения уравнения

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{3.10}$$

Отметим, что система собственных функций $\widetilde{X}_0(x)$ и $\widetilde{X}_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) ортогональна и полна в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^k [9, с. 343].

Для дальнейших вычислений будем использовать ортонормированную систему функций

$$X_n(x) = \frac{1}{||\widetilde{X}_n(x)||}\widetilde{X}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.11}$$

где норма определяется по формуле

$$||\widetilde{X}_n(x)||^2 = \int_0^l x^k \widetilde{X}_n^2(x)\, dx.$$

Введем функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x, t) x^k X_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.12}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (3.11). И для определения функций $u_n(t)$, по аналогии с рассуждениями в § 1.1, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_n''(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t \in (0, T),$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(t) = a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \sin(\lambda_n t), \tag{3.13}$$

где a_n, b_n — произвольные постоянные. Для определения a_n и b_n подставим функции (3.12) в начальные условия (3.3):

$$u_n(0) = \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x)\, dx = \varphi_n, \qquad u_n(T) = a_n \cos(\lambda_n T) + b_n \sin(\lambda_n T) = \psi_n. \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) будем иметь

$$a_n = \varphi_n, \quad b_n = \frac{\psi_n - \varphi_n \cos(\lambda_n T)}{\sin(\lambda_n T)}.$$

Подставив найденные значения a_n, b_n в (3.13), найдем окончательный вид функций

$$u_n(t) = \varphi_n \cos(\lambda_n t) - \frac{\psi_n - \varphi_n \cos(\lambda_n T)}{\sin(\lambda_n T)} \sin(\lambda_n t), \tag{3.15}$$

которые определены при

$$\sin(\lambda_n T) = \sin \mu_n \alpha \neq 0, \quad \alpha = T/l,\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.16}$$

где μ_n — корни уравнения (3.10).

Условие (3.16) для любых $k \geqslant 1$ будет выполняться всегда, если $\alpha = T/l$ является иррациональным числом.

Аналогично найдем

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t, \tag{3.17}$$

$$u_0(0) = l^{-\frac{k+1}{2}} \sqrt{k+1} \int_0^l \varphi(x) x^k\, dx = \varphi_0, \qquad u_0(T) = l^{-\frac{k+1}{2}} \sqrt{k+1} \int_0^l \psi(x) x^k\, dx = \psi_0. \tag{3.18}$$

Пусть $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ и выполнено условие (3.16), тогда из (3.14) и (3.18) следует, что $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$, и из (3.15) и (3.17) получим, что $u_n(t) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда из (3.12) при любом $t \in [0, T]$ имеем $\int_0^l u(x,t) x^k X_n(x)\, dx = 0$. Отсюда в силу полноты системы (3.11) в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^k следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на промежутке $[0, l]$ при любом $t \in [0, T]$. Поскольку, согласно (3.1), функция

$u(x,t) \in C(\overline{D})$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Нетрудно показать, что если $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ и условие (3.16) нарушено, то есть α является рациональным числом, то однородная задача ($\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения.

Таким образом, доказана

Теорема 3.1.1. *Пусть существует решение задачи* (3.1)–(3.3), (3.7) *и отношение сторон* $T/l = \alpha$ *прямоугольной области* D *является иррациональным числом, тогда это решение единственно.*

3.1.2. Существование решения задачи

Пусть при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие (3.16). На основании найденных частных решений запишем решение задачи (3.1)–(3.3), (3.7) в виде ряда Фурье–Бесселя

$$u(x,t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x), \tag{3.19}$$

где функции $X_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ определяются по формуле (3.11), $u_n(t)$ — по формуле (3.15), функция $u_0(t)$ — по формуле (3.17).

Вместе с рядом (3.19) рассмотрим ряды

$$\begin{gathered} u_t(x,t) = \psi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)X_n(x), \\ u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n'(x), \end{gathered} \tag{3.20}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)X_n(x), \quad u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n''(x). \tag{3.21}$$

Известно, что если $\alpha > 0$ — иррациональное число степени $m \geqslant 2$, то существует число $C_0 > 0$ такое, что справедливы оценки

$$\begin{gathered} |\sin \pi_n \alpha| \geqslant \frac{C_0}{n} \quad (m = 2), \\ |\sin \pi_n \alpha| \geqslant \frac{C_0}{n^{1+\varepsilon}} \quad (m > 2,\ \varepsilon > 0). \end{gathered} \tag{3.22}$$

Теперь докажем вспомогательные леммы.

Лемма 3.1.1. *Если* $\alpha > 0$ *— иррациональное число степени* $m \geqslant 2$, *то для достаточно больших* n *и при любом* $t \in [0, T]$ *справедливы оценки*:

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leqslant C_1 n\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \\ |u_n'(t)| &\leqslant C_2 n^2\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \quad m = 2, \\ |u_n''(t)| &\leqslant C_3 n^3\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leqslant C_1 n^{1+\varepsilon}\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \\ |u_n'(t)| &\leqslant C_2 n^{2+\varepsilon}\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \quad m > 2, \\ |u_n''(t)| &\leqslant C_3 n^{3+\varepsilon}\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \end{aligned} \tag{3.24}$$

где C_i *— здесь и далее положительные постоянные.*

Доказательство следует из формулы (3.15) на основании оценок (3.22).

Лемма 3.1.2. *Для достаточно больших* n *и при всех* $x \in [0, l]$ *выполнены оценки*

$$|X_n(x)| \leqslant C_4, \quad |X_n'(x)| \leqslant C_5 n, \quad |X_n''(x)| \leqslant C_6 n^2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.2.

Согласно леммам 3.1.1 и 3.1.2, при любом $(x, t) \in \overline{D}$ ряд (3.19) оценивается рядом

$$C_7 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{1+\varepsilon}\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \tag{3.25}$$

ряды (3.20) и (3.21) — соответственно рядами

$$C_8 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2+\varepsilon}\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \quad C_9 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{3+\varepsilon}\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big). \tag{3.26}$$

Исследуем ряды (3.25), (3.26) на сходимость.

Лемма 3.1.3. *Если функции* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{2+\delta}[0, l]$, $\varepsilon < \delta < 1$, *и существуют производные* $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$, *имеющие конечное изменение на* $[0, l]$, *и*

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = 0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n| \leqslant \frac{C_{10}}{n^{4+\delta}}, \quad |\psi_n| \leqslant \frac{C_{11}}{n^{4+\delta}}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.3.

Согласно лемме 3.1.3, ряды (3.25), (3.26) мажорируются сходящимся числовым рядом $C_{12} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1-(\delta-\varepsilon)}$. По признаку Вейерштрасса ряды (3.19)–(3.21) в области $\overline{D}$ сходятся равномерно. Таким образом, нами построена функция $u(x, t)$, определяемая рядом (3.19), которая удовлетворяет всем условиям задачи (3.1)–(3.3), (3.7) и принадлежит классу $C^2(\overline{D})$. Тем самым доказана следующая

Теорема 3.1.2. *Если* $\alpha > 0$ *является иррациональным алгебраическим числом степени* $m \geqslant 2$ *и функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 3.1.3, *то существует единственное решение* $u(x, t)$ *задачи* (3.1)–(3.3), (3.7), *определяемое рядом* (3.19), *при этом* $u(x, t) \in C^2(\overline{D})$.

Покажем теперь, что функция $u(x, t)$, определяемая рядом (3.19), является решением задачи (3.1)–(3.5).

Теорема 3.1.3. *Если* $\alpha > 0$ *является иррациональным алгебраическим числом степени* $m \geqslant 2$ *и функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 3.1.3 *и условиям* (3.5), *то существует единственное решение задачи* (3.1)–(3.5), *определяемое рядом* (3.19), *при этом* $u(x, t) \in C^2(\overline{D})$.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (3.1)–(3.3), (3.7) и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда уравнение (1.0) выполняется всюду в области D. Умножим уравнение (1.0) на x^k и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0, T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. В результате получим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{tt}(x, t) x^k \, dx - \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} = 0.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. С учетом условий (3.6) и (3.7) будем иметь $\int\limits_0^l u_{tt}(x,t)x^k\,dx = 0$. Проинтегрируем теперь это равенство по переменной t дважды и в результате получим

$$\int\limits_0^l u(x,t)x^k\,dx = K_1 t + K_2, \quad K_1, K_2 = \text{const}. \tag{3.27}$$

Положив в (3.27) $t = 0$, с учетом условий (3.3) и (3.5) найдем $\int\limits_0^l \varphi(x)x^k\,dx = K_2 = A$. Положим теперь в (3.27) $t = T$, откуда с учетом условий (3.3), (3.5) и найденного значения $K_2 = A$ будем иметь $\int\limits_0^l u(x,T)x^k\,dx = \int\limits_0^l \psi(x)x^k\,dx = K_1 T + A = A$, откуда находим $K_1 = 0$. Подставив найденные значения констант $K_1 = 0$ и $K_2 = A$ в равенство (3.27), получим интегральное условие (3.4). Обратные рассуждения приведены после постановки задачи. Тем самым доказано, что при выполнении условий согласования (3.5) условия (3.4) и (3.7) эквивалентны. А значит, эквивалентны и задачи (3.1)–(3.5) и (3.1)–(3.3), (3.7). Теорема доказана.

В данном параграфе для уравнения смешанного типа с оператором Бесселя в прямоугольной области исследована краевая задача с нелокальным интегральным условием первого рода в зависимости от числового параметра, входящего в уравнение. Установлен критерий единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленной задачи. Решение задачи построено в явном виде, и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений.

В прямоугольной области $D = \{(x,y) \mid 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где l, α, β — заданные положительные действительные числа, рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{p}{x}\,u_x = 0. \tag{3.28}$$

Здесь $p > -1$, $p \neq 0$ — заданное действительное число.

Введем обозначения $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ и $D_- = D \cap \{y < 0\}$. Для уравнения (3.28) в области D исследуем нелокальную задачу с интегральным условием первого рода при $p \geqslant 1$ и нелокальную задачу с таким же интегральным условием при $|p| < 1$, $p \neq 0$.

3.2. Нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с оператором Бесселя

3.2.1. Постановка задачи при $p \geqslant 1$. Единственность решения

Пусть $p \geqslant 1$. Требуется найти функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{3.29}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3.30}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3.31}$$

$$\int_0^l x^p u(x, y)\, dx = A = \text{const}, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{3.32}$$

где A — заданное действительное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^l x^p \varphi(x)\, dx = \int_0^l x^p \psi(x)\, dx = A. \tag{3.33}$$

Краевая задача (3.29)–(3.33) не имеет локальных граничных условий на боковых сторонах прямоугольника D. При $p \geqslant 1$ в области эллиптичности D_+ уравнения (3.28), в силу результатов работы [43], в классе ограниченных решений отрезок $x = 0$ освобождается от граничного условия Дирихле, при этом производная по нормали u_x на отрезке $x = 0$ равна нулю. Разделив переменные, нетрудно показать, что и в области гиперболичности D_- уравнения (3.28) справедливо равенство

$$u_x(0, y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta. \tag{3.34}$$

Проинтегрируем уравнение (3.28) при фиксированном $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. В результате получим

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^p \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + (\operatorname{sgn} y) \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^p u_{yy}\, dx,$$

или

$$\left(x^p \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} + (\operatorname{sgn} y)\frac{d^2}{dy^2} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^p u(x, y)\, dx = 0.$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в силу условий (3.29) и (3.32) получим локальное граничное условие

$$u_x(l, y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta. \tag{3.35}$$

В дальнейшем вместо задачи (3.29)–(3.33) будем рассматривать задачу (3.29)–(3.31), (3.35).

Частные решения уравнения (3.28), не равные нулю в области $D_+ \cup D_-$ и удовлетворяющие условиям (3.29) и (3.35), будем искать в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Подставив данное произведение в уравнение (3.28) и условие (3.35), получим относительно функции $X(x)$ спектральную задачу

$$X''(x) + \frac{p}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3.36}$$

$$|X(0)| < +\infty, \quad X'(l) = 0, \tag{3.37}$$

где λ^2 — постоянная разделения.

Общее решение уравнения (3.36) имеет вид

$$X(x) = C_1 x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x) + C_2 x^{\frac{1-p}{2}} Y_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x),$$

где $J_\nu(\xi)$, $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $\nu = (p-1)/2$, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решение уравнения (3.36), удовлетворяющее первому условию из (3.37), определяется по формуле

$$X(x) = x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x).$$

Заметим, что производная $X'(0) = 0$, что подтверждает справедливость свойства (3.34).

Потребуем теперь, чтобы эта функция удовлетворяла второму граничному условию из (3.37). Для этого вычислим

$$\frac{dX(x)}{dx}\Big|_{x=l} = \left(-\lambda x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p+1}{2}}(\lambda x)\right)\Big|_{x=l} = -\lambda l^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p+1}{2}}(\lambda l) = 0,$$

откуда получим

$$\lambda_0 = 0,$$

$$J_{\frac{p+1}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{3.38}$$

Обозначив n-й корень уравнения (3.38) через μ_n при заданном p, находим собственные значения $\lambda_n = \mu_n / l$ задачи (3.36) и (3.37). Согласно [85, с. 317], для решений уравнения (3.38) при больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n + \frac{\pi}{4} p + O(n^{-1}). \tag{3.39}$$

Заметим, что при $\lambda_0 = 0$ спектральная задача (3.36) и (3.37) имеет собственную функцию, равную константе, которую примем за единицу. Таким образом, система собственных функций задачи (3.36), (3.37) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0, \tag{3.40}$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.41}$$

где собственные значения λ_n определяются как корни уравнения (3.38).

Отметим, что система собственных функций (3.40) и (3.41) ортогональна в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^p, а также образует полную систему в этом пространстве [9, с. 343].

Для дальнейших вычислений будем использовать ортонормированную систему функций

$$X_n(x) = \frac{1}{||\widetilde{X}_n(x)||} \widetilde{X}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.42}$$

где норма

$$||\widetilde{X}_n(x)||^2 = \int_0^l x^p \, \widetilde{X}_n^2(x) \, dx. \tag{3.43}$$

Пусть далее $u(x, y)$ — решение задачи (3.29)–(3.31), (3.35). Рассмотрим функции

$$u_n(y) = \int_0^l u(x, y) x^p X_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.44}$$

$$u_{n,\varepsilon}(y) = \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) x^p X_n(x)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.45}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Продифференцируем равенство (3.45) по переменной y дважды при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ и с учетом уравнения (3.28) получим равенство

$$\begin{aligned} u''_{n,\varepsilon}(y) &= \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{yy}(x, y) x^p X_n(x)\, dx = \\ &= -(\operatorname{sgn} y) \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} \Big(u_{xx} + \frac{p}{x} u_x\Big) x^p X_n(x)\, dx = \\ &= -(\operatorname{sgn} y) \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(x^p u_x) X_n(x)\, dx = \\ &= -(\operatorname{sgn} y) \Big[x^p u_x X_n(x) \Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\, dx \Big]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Из (3.45) в силу уравнения (3.36) будем иметь

$$\begin{aligned} u_{n,\varepsilon}(y) &= -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) x^p \Big[X''_n(x) + \frac{p}{x} X'_n(x) \Big]\, dx = \\ &= -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, y) \frac{d}{dx}\big(x^p X'_n(x)\big)\, dx = \\ &= -\frac{1}{\lambda_n^2} \Big[u(x, y) x^p X'_n(x) \Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon} - \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\, dx \Big], \end{aligned}$$

откуда находим

$$\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\, dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) + u(x, y) x^p X'_n(x) \Big|_\varepsilon^{l-\varepsilon}.$$

Подставив данное выражение в (3.46), получим

$$u''_{n,\varepsilon}(y) =$$
$$= -(\operatorname{sgn} y)\left[x^p u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) - u(x,y)x^p X_n'(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\right].$$

В силу (3.29) в последнем равенстве можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, откуда в силу условий (3.35) и (3.37) получим для нахождения функций (3.44) дифференциальное уравнение

$$u''_n(y) - (\operatorname{sgn} y)\lambda_n^2 u_n(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \tag{3.47}$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(y) = \begin{cases} a_n e^{\lambda_n y} + b_n e^{-\lambda_n y}, & y > 0, \\ c_n \cos(\lambda_n y) + d_n \sin(\lambda_n y), & y < 0, \end{cases} \tag{3.48}$$

где a_n, b_n, c_n, d_n — произвольные постоянные, требующие определения.

С учетом (3.29) подберем постоянные a_n, b_n, c_n и d_n таким образом, чтобы выполнялись условия сопряжения $u_n(0+) = u_n(0-)$, $u'_n(0+) = u'_n(0-)$, которые справедливы при $a_n = (c_n + d_n)/2$, $b_n = (c_n - d_n)/2$, $n = 1, 2, \ldots$ Подставив найденные значения в (3.48), будем иметь

$$u_n(y) = \begin{cases} c_n \operatorname{ch} \lambda_n y + d_n \operatorname{sh} \lambda_n y, & y > 0, \\ c_n \cos(\lambda_n y) + d_n \sin(\lambda_n y), & y < 0. \end{cases} \tag{3.49}$$

Подставим теперь (3.44) в граничные условия (3.31):

$$\begin{aligned} u_n(\beta) &= \int_0^l \varphi(x) x^p X_n(x)\, dx = \varphi_n, \\ u_n(-\alpha) &= \int_0^l \psi(x) x^p X_n(x)\, dx = \psi_n. \end{aligned} \tag{3.50}$$

В результате получим систему для нахождения постоянных c_n и d_n

$$\begin{cases} c_n \operatorname{ch} \lambda_n \beta + d_n \operatorname{sh} \lambda_n \beta = \varphi_n, \\ c_n \cos(\lambda_n \alpha) - d_n \sin(\lambda_n \alpha) = \psi_n, \end{cases} \tag{3.51}$$

которая имеет единственное решение

$$c_n = \frac{\varphi_n \sin(\lambda_n\alpha) + \psi_n \operatorname{sh} \lambda_n\beta}{\sin(\lambda_n\alpha) \operatorname{ch} \lambda_n\beta + \cos(\lambda_n\alpha) \operatorname{sh} \lambda_n\beta},$$
$$d_n = \frac{\varphi_n \cos(\lambda_n\alpha) - \psi_n \operatorname{ch} \lambda_n\beta}{\sin(\lambda_n\alpha) \operatorname{ch} \lambda_n\beta + \cos(\lambda_n\alpha) \operatorname{sh} \lambda_n\beta}, \tag{3.52}$$

если при всех $n \in \mathbb{N}$ определитель системы (3.51) отличен от нуля, то есть

$$\triangle_n(\alpha, \beta) = \sin(\lambda_n\alpha) \operatorname{ch} \lambda_n\beta + \cos(\lambda_n\alpha) \operatorname{sh} \lambda_n\beta \neq 0. \tag{3.53}$$

Подставив найденные значения (3.52) в (3.49), найдем окончательный вид функций

$$u_n(y) = \begin{cases} \triangle_n^{-1}(\alpha, \beta)\big(\varphi_n \triangle_n(\alpha, y) + \psi_n \operatorname{sh} \lambda_n(\beta - y)\big), & y > 0, \\ \triangle_n^{-1}(\alpha, \beta)\big(\varphi_n \sin\big(\lambda_n(\alpha + y)\big) + \psi_n \triangle_n(-y, \beta)\big), & y < 0. \end{cases} \tag{3.54}$$

Аналогично находим

$$u_0(y) = \frac{\alpha\varphi_0 + \beta\psi_0}{\alpha + \beta} + \frac{\varphi_0 - \psi_0}{\alpha + \beta}\, y, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta), \tag{3.55}$$

$$u_0(\beta) = l^{-\frac{p+1}{2}} \sqrt{p+1} \int_0^l \varphi(x) x^p \, dx = \varphi_0,$$
$$u_0(-\alpha) = l^{-\frac{p+1}{2}} \sqrt{p+1} \int_0^l \psi(x) x^p \, dx = \psi_0. \tag{3.56}$$

При выполнении условия (3.53) задача (3.29)–(3.31), (3.35) имеет единственное решение. Действительно, пусть $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ и $\triangle_n(\alpha, \beta) \neq 0$. Тогда из (3.50) и (3.56) следует, что $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и из (3.54) и (3.55) следует, что $u_n(y) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. В силу (3.44) имеем $\int_0^l u(x, y) x^p X_n(x) \, dx = 0$. Отсюда в силу полноты системы (3.42) в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^p следует, что $u(x, y) = 0$ почти всюду на промежутке $x \in [0, l]$ и при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку, согласно (3.29), функция $u(x, y) \in C(\overline{D})$, то $u(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть теперь при некоторых значениях p, l, α, β и некотором $n = m$ условие (3.53) нарушено. При $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ и $\triangle_m(\alpha, \beta) = 0$ система (3.51) равносильна одному уравнению, например первому

$$c_m \operatorname{ch}(\lambda_m \beta) + d_m \operatorname{sh}(\lambda_m \beta) = 0,$$

которое имеет бесконечное множество решений

$$\left\{ -d_m \frac{\operatorname{sh}(\lambda_m \beta)}{\operatorname{ch}(\lambda_m \beta)},\ d_m \right\}.$$

Подставив найденные значения в (3.49), будем иметь

$$u_m(y) = \begin{cases} \widetilde{d_m}\big(\operatorname{sh}(\lambda_m y)\ \operatorname{ch}(\lambda_m \beta) - \operatorname{sh}(\lambda_m \beta)\operatorname{ch}(\lambda_m y)\big), & y > 0, \\ \widetilde{d_m}\big(\operatorname{ch}(\lambda_m \beta)\ \sin(\lambda_m y) - \operatorname{sh}(\lambda_m \beta)\cos(\lambda_m y)\big), & y < 0, \end{cases}$$

где $\widetilde{d_m} = \frac{d_m}{\operatorname{ch}(\lambda_m \beta)}$ — произвольная постоянная, не равная нулю.

Таким образом, однородная задача (3.29)–(3.31), (3.35) имеет ненулевое решение

$$u_m(x, y) = \\ = \begin{cases} \widetilde{d_m}\big(\operatorname{sh}(\lambda_m y)\operatorname{ch}(\lambda_m \beta) - \operatorname{sh}(\lambda_m \beta)\operatorname{ch}(\lambda_m y)\big) X_m(x), & y > 0, \\ \widetilde{d_m}\big(\operatorname{ch}(\lambda_m \beta)\sin(\lambda_m y) - \operatorname{sh}(\lambda_m \beta)\cos(\lambda_m y)\big) X_m(x), & y < 0, \end{cases} \tag{3.57}$$

где функции $X_m(x)$ определяются по формуле (3.42). Нетрудно проверить, что построенная функция (3.57) удовлетворяет всем условиям задачи (3.29)–(3.31), (3.35) при $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$.

Тем самым доказана

Теорема 3.2.1. *Если существует решение задачи* (3.29)–(3.31), (3.35), *то оно единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.53) *при всех* $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.2.2. Существование решения задачи при $p \geqslant 1$

Выясним, при каких значениях параметров p, l, α и β нарушается условие (3.53). Представим $\triangle_n(\alpha, \beta)$ в следующем виде:

$$\triangle_n(\alpha,\beta) = \sin(\lambda_n\alpha)\,\mathrm{ch}(\lambda_n\beta) + \cos(\lambda_n\alpha)\,\mathrm{sh}(\lambda_n\beta) = \\ = \sin(\lambda_n\alpha)\cos\xi + \cos(\lambda_n\alpha)\sin\xi.$$

Для этого вычислим

$$\sqrt{\cos^2\xi + \sin^2\xi} = \sqrt{\mathrm{ch}^2(\lambda_n\beta) + \mathrm{sh}^2(\lambda_n\beta)} = \sqrt{\mathrm{ch}(2\lambda_n\beta)},$$

тогда

$$\triangle_n(\alpha,\beta) = \\ = \sqrt{\mathrm{ch}(2\lambda_n\beta)}\Big(\sin(\lambda_n\alpha)\cos\Big(\arcsin\frac{\mathrm{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\mathrm{ch}\,2\lambda_n\beta}}\Big) + \\ + \cos(\lambda_n\alpha)\sin\Big(\arcsin\frac{\mathrm{sh}\,\lambda_n\beta}{\sqrt{\mathrm{ch}(2\lambda_n\beta)}}\Big)\Big) = \\ = \sqrt{\mathrm{ch}(2\lambda_n\beta)}\,\sin\Big(\Big(\lambda_n\alpha + \arcsin\Big(\frac{\mathrm{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\mathrm{ch}(2\lambda_n\beta)}}\Big)\Big)\Big) = \\ = \sqrt{\mathrm{ch}(2\lambda_n\beta)}\,\sin(\mu_n\widetilde{\alpha} + \gamma_n), \quad (3.58)$$

где $\mu_n = \lambda_n l$, $\widetilde{\alpha} = \alpha/l$, $\gamma_n = \arcsin\Big(\frac{\mathrm{sh}(\lambda_n\beta)}{\sqrt{\mathrm{ch}(2\lambda_n\beta)}}\Big) \to \frac{\pi}{4}$ при $n \to +\infty$.

Из данного представления видно, что $\triangle_n(\alpha,\beta) = 0$, если $\sin(\mu_n\widetilde{\alpha} + \gamma_n) = \sin\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, то есть при

$$\widetilde{\alpha} = \frac{\pi k - \gamma_n}{\mu_n}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (3.59)$$

Таким образом, согласно (3.58), выражение $\triangle_n(\alpha,\beta)$ имеет счетное множество корней. Исследуем значения этого выражения, входящего в знаменатели формулы (3.54), при достаточно больших n.

Лемма 3.2.1. *Если $\widetilde{\alpha} = a/b$ — рациональное число, a и b — взаимно простые числа и $p \neq \frac{1}{a}(4bd - b - 4r)$, $r = \overline{1, b-1}$, $d \in \mathbb{Z}$, то существуют постоянные $C_0 > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ такие,*

что при любом $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\left|\triangle_n(\alpha,\beta)\right| \geqslant C_0 e^{\lambda_n \beta}. \tag{3.60}$$

Доказательство. Подставим (3.39) в выражение (3.58):

$$\triangle_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}\,\sin\Big(\pi n\widetilde{\alpha} + \frac{\pi}{4}\,p\widetilde{\alpha} + O(n^{-1}) + \gamma_n\Big).$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = a/b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a,b) = 1$. Поделим na на b. По теореме о делении с остатком будем иметь

$$na = bq + r, \quad q \in \mathbb{N}\cup\{0\} = \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leqslant r \leqslant b-1.$$

Тогда

$$\triangle_n(\alpha,\beta) = \sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda_n\beta)}(-1)^q \sin\Big(\frac{\pi r}{b} + \frac{\pi a}{4b}\,p + \gamma_n + O(n^{-1})\Big) =$$

$$= \frac{e^{\lambda_n\beta}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\operatorname{ch}(-4\lambda_n\beta)}(-1)^q \sin\Big(\frac{\pi r}{b} + \frac{\pi a}{4b}\,p + \frac{\pi}{4} - \varepsilon_n + O(n^{-1})\Big),$$

где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Из последнего равенства следует, что найдется номер n_0 такой, начиная с которого, $n > n_0$, будет выполняться

$$|\triangle_n(\alpha,\beta)| \geqslant \frac{e^{\lambda_n\beta}}{2\sqrt{2}}\left|\sin\Big(\frac{\pi r}{b} + \frac{\pi a}{4b}\,p + \frac{\pi}{4}\Big)\right| = C_0 e^{\lambda_n\beta}.$$

Для того чтобы выполнялось $C_0 > 0$, необходимо, чтобы

$$\frac{\pi r}{b} + \frac{\pi a}{4b}\,p + \frac{\pi}{4} \neq \pi d, \quad d \in \mathbb{Z},$$

откуда имеем

$$p \neq \frac{1}{a}\,(4bd - b - 4r), \quad d \in \mathbb{Z}. \tag{3.61}$$

Условие (3.61) выполняется при любом иррациональном значении $p \geqslant 1$. Лемма доказана.

Лемма 3.2.2. *Если при $n > n_0$ выполнена оценка* (3.60), *то справедливы оценки*

$$|u_n(y)| \leqslant C_1\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \quad y \in [-\alpha,\beta], \tag{3.62}$$

$$|u_n'(y)| \leqslant C_2 n\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \quad y \in [-\alpha,\beta], \tag{3.63}$$

$$|u_n''(y)| \leqslant C_3 n^2\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \quad y \in [-\alpha,0), \tag{3.64}$$

$$|u_n''(y)| \leqslant C_4 n^2 \big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \quad y \in (0, \beta], \tag{3.65}$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Доказательство. Из формулы (3.54) с учетом (3.60) найдем

$$|u_n(y)| \leqslant \frac{1}{\big|\triangle_n(\alpha, \beta)\big|}\big(|\varphi_n|\big(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta) + \operatorname{ch}(\lambda_n\beta)\big) + |\psi_n|\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{C_0 e^{\lambda_n\beta}}\big(|\varphi_n|\big(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta) + \operatorname{ch}(\lambda_n\beta)\big) + |\psi_n|\operatorname{sh}(\lambda_n\beta)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C_1}(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad y \geqslant 0,$$

$$|u_n(y)| \leqslant \frac{1}{C_0 e^{\lambda_n\beta}}\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta) + \operatorname{ch}(\lambda_n\beta)\big)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C_2}\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \quad y \leqslant 0,$$

где $\widetilde{C_i}$ — здесь и далее положительные постоянные. Обозначив через $C_1 = \max\{\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}\}$, получим оценку (3.62) при всех $n > n_0$ и $y \in [-\alpha, \beta]$.

Вычислим теперь на основании (3.54) производную $u_n'(y)$ и с учетом (3.60) и формулы (3.39) будем иметь

$$|u_n'(y)| \leqslant \frac{n}{C_0 e^{\lambda_n\beta}}\big(|\varphi_n|\big(\operatorname{ch}(\lambda_n\beta) + \operatorname{sh}(\lambda_n\beta)\big) - |\psi_n|\operatorname{ch}(\lambda_n\beta)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C_3} n(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad y \geqslant 0,$$

$$|u_n'(y)| \leqslant \frac{n}{C_0 e^{\lambda_n\beta}}\big(|\varphi_n| - |\psi_n|\big(\operatorname{sh}(\lambda_n\beta) + \operatorname{ch}(\lambda_n\beta)\big)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C_4} n\big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big), \quad y \leqslant 0.$$

Из данных неравенств следует справедливость оценки (3.63) при всех $n > n_0$ и $y \in [-\alpha, \beta]$, где $C_2 = \max\{\widetilde{C_3}, \widetilde{C_4}\}$.

Справедливость оценок (3.64) и (3.65) следует из равенств (3.39), (3.47) и оценки (3.62). Лемма доказана.

Лемма 3.2.3. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0, l]$ выполнены оценки*

$$|X_n(x)| \leqslant C_5, \quad |X_n'(x)| \leqslant C_6 n, \quad |X_n''(x)| \leqslant C_7 n^2. \tag{3.66}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.2.

Лемма 3.2.4. *Если функции* $\varphi(x), \psi(x) \in C^2[0,l]$ *и существуют производные* $\varphi'''(x)$, $\psi'''(x)$, *имеющие конечное изменение на* $[0,l]$, *и*

$$\varphi'(0)=\varphi''(0)=\psi'(0)=\psi''(0)=\varphi'(l)=\psi'(l)=0,$$

то выполняются оценки

$$|\varphi_n| \leqslant C_8 n^{-4}, \quad |\psi_n| \leqslant C_9 n^{-4}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.3.

На основании найденных частных решений (3.42), (3.54) и (3.55) при выполнении условий (3.53) и (3.60) решение задачи (3.29)–(3.31), (3.35) определяется в виде ряда Фурье–Бесселя

$$u(x,y)=u_0(y)X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)X_n(x). \tag{3.67}$$

Вместе с рядом (3.67) рассмотрим следующие ряды:

$$\begin{gathered} u_y(x,y)=u_0'(y)X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(y)X_n(x), \\ u_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n'(x), \end{gathered} \tag{3.68}$$

$$\begin{gathered} u_{yy}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(y)X_n(x), \\ u_{xx}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)X_n''(x). \end{gathered} \tag{3.69}$$

Согласно леммам 3.2.2 и 3.2.3, при любом $(x,y) \in \overline{D}$ ряды (3.67) и (3.68) мажорируются соответственно рядами $C_{10}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\bigl(|\varphi_n|+|\psi_n|\bigr)$, $C_{11}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\bigl(|\varphi_n|+|\psi_n|\bigr)$, а ряды (3.69) при любом $(x,y) \in \overline{D_+} \cup \overline{D_-}$ мажорируются рядом $C_{12}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\bigl(|\varphi_n|+|\psi_n|\bigr)$, которые, в свою очередь, согласно

лемме 3.2.4, оцениваются числовым рядом $C_{13}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряды (3.67), (3.68) в замкнутой области $\overline{D}$, а ряды (3.69) в замкнутых областях $\overline{D_+}$ и $\overline{D_-}$ сходятся равномерно. Таким образом, построена функция $u(x,y)$, определяемая рядом (3.67), которая удовлетворяет всем условиям задачи (3.29)–(3.31), (3.35).

Если для чисел $\widetilde{\alpha}$ в лемме 3.2.1 при некоторых натуральных $n=m=m_1,\ldots,m_k$, где $1\leqslant m_1<\ldots<m_k\leqslant n_0$, $k\in\mathbb{N}$, выполняется $\triangle_m(\alpha,\beta)=0$, то для разрешимости задачи (3.29)–(3.31), (3.35) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\psi_m \operatorname{ch}(\lambda_m\beta)-\varphi_m\cos(\lambda_m\alpha)=0,\quad m=m_1,\ldots,m_k. \tag{3.70}$$

В этом случае решение задачи (3.29)–(3.31), (3.35) определяется рядом

$$u(x,y)=\Big(\sum_{n=1}^{m_1-1}+\ldots+\sum_{n=m_{k-1}+1}^{m_k-1}+\sum_{n=m_k+1}^{\infty}\Big)u_n(y)X_n(x)+ \\ +\sum_m u_m(x,y), \tag{3.71}$$

где m принимает значения $m_1,\ldots,m_k$, а функция $u_m(x,y)$ определяется по формуле (3.57). В случае если нижний предел окажется больше верхнего в некоторых суммах, то эти суммы следует считать равными нулю.

Тем самым доказана

Теорема 3.2.2. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 3.2.4 *и выполнено условие* (3.60) *при $n>n_0$. Тогда существует единственное решение $u(x,y)$ задачи* (3.29)–(3.31), (3.35), *определяемое рядом* (3.67), *если $\triangle_n(\alpha,\beta)\neq 0$ при всех $n=\overline{1,n_0}$; если $\triangle_m(\alpha,\beta)=0$ при некоторых $m=m_1,\ldots,m_k\leqslant n_0$, задача имеет решение, определяемое рядом* (3.71), *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3.70).

Теорема 3.2.3. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 3.2.4, *условиям* (3.33) *и выполнено*

неравенство (3.60) *при* $n > n_0$. *Тогда существует единственное решение* $u(x, y)$ *задачи* (3.29)–(3.33), *определяемое рядом* (3.67), *если* $\triangle_n(\alpha, \beta) \neq 0$ *при всех* $n = \overline{1, n_0}$; *если* $\triangle_m(\alpha, \beta) = 0$ *при некоторых* $m = m_1, \ldots, m_k \leqslant n_0$, *задача имеет решение, определяемое рядом* (3.71), *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3.70).

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ – решение задачи (3.29)–(3.31), (3.35) и функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Тогда уравнение (3.28) выполняется всюду в области D. Умножим уравнение (3.28) на x^p и проинтегрируем при фиксированном $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. В результате получим

$$\left(x^p \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} + (\operatorname{sgn} y) \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^p u_{yy}(x, y)\, dx = 0. \tag{3.72}$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$ и с учетом условий (3.29) и (3.35) будем иметь

$$\int_0^l u_{yy}(x, t) x^p\, dx = 0.$$

Проинтегрировав последнее равенство по переменной y дважды, получим

$$\int_0^l u(x, y) x^p\, dx = K_1 y + K_2, \quad K_1,\ K_2 = \text{const}. \tag{3.73}$$

Положим в равенстве (3.73) $y = \beta$, а затем $y = -\alpha$ и с учетом условий (3.31), (3.33) получим

$$\int_0^l u(x, \beta) x^p\, dx = \int_0^l \varphi(x) x^p\, dx = K_1 \beta + K_2 = A,$$

$$\int_0^l u(x, -\alpha) x^p\, dx = \int_0^l \psi(x) x^p\, dx = -\alpha K_1 + K_2 = A,$$

откуда находим значения констант $K_1 = 0$ и $K_2 = A$. Тогда из формулы (2.43) имеем

$$\int_0^l u(x, y) x^p \, dx = A,$$

то есть справедливо условие (3.32).

Пусть теперь $u(x, y)$ — решение задачи (3.29)–(3.33). Тогда из равенства (3.72) будем иметь

$$\left(x^p \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} + (\operatorname{sgn} y) \frac{d^2}{dy^2} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^p u(x, y) \, dx = 0.$$

Перейдем здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$ и в силу условий (3.29), (3.32) получим локальное граничное условие второго рода $u_x(l, y) = 0$.

Тем самым мы показали, что при выполнении условий согласования (3.33) условия (3.32) и (3.35) эквивалентны. А значит, эквивалентны и задачи (3.29)–(3.33) и (3.29)–(3.31), (3.35). Теорема доказана.

3.2.3. Устойчивость решения задачи при $p \geqslant 1$

Теорема 3.2.4. *Для решения задачи* (3.29)–(3.33) *справедлива оценка*

$$||u(x, y)|| \leqslant C_{14}\big(||\varphi(x)|| + ||\psi(x)||\big), \tag{3.74}$$

где $||f(x)||^2 = \int_0^l x^p |f(x)|^2 \, dx$.

Доказательство. Из формулы (3.67) с учетом оценки (3.62) вычислим

$$||u(x,y)||^2 = \int_0^l x^p u^2(x,t)\,dx =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_n(y)u_m(y) \int_0^l x^p X_n(x)X_m(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(y) \int_0^l x^p X_n^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(y) \leqslant C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(|\varphi_n| + |\psi_n|\big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(|\varphi_n|^2 + |\psi_n|^2\big) \leqslant 2C_1^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2\Big) =$$

$$= 2C_1^2 \big(||\varphi||^2 + ||\psi||^2\big),$$

откуда следует справедливость оценки (2.44). Теорема доказана.

3.2.4. Постановка задачи $|p| < 1$, $p \neq 0$. Единственность, существование и устойчивость решения

Пусть $|p| < 1$, $p \neq 0$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (3.29)–(3.33) и условию

$$\lim_{x \to 0+} x^p u_x(x,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta. \tag{3.75}$$

Умножим уравнение (3.28) на x^p и проинтегрируем при фиксированном $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$:

$$\Big(x^p \frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} + (\operatorname{sgn} y)\frac{d^2}{dy^2} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^p u(x,y)\,dx = 0.$$

В силу условий (3.29), (3.32) и (3.75) в этом равенстве можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, так как все слагаемые имеют конечные пределы при $\varepsilon \to 0$. В результате получим локальное граничное условие (3.35). В дальнейшем вместо задачи (3.29)–(3.33), (3.75) будем рассматривать задачу (3.29)–(3.31), (3.75), (3.35).

Подставив произведение $u(x,y)=X(x)Y(y)$ в уравнение (3.28) и условия (3.75) и (3.35), получим относительно функции $X(x)$ следующую задачу:

$$X''(x)+\frac{p}{x}X'(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad 0<x<l,$$

$$\lim_{x\to 0+}x^pX'(x)=0,\quad X'(l)=0.$$

Система собственных функций спектральной задачи при $|p|<1$ и $p\neq 0$ имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x)=1,\quad \lambda_0=0,$$

$$\widetilde{X}_n(x)=x^{\frac{1-p}{2}}J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda_n x),\quad n\in\mathbb{N},$$

где собственные значения $\lambda_n=\mu_n/l$ $(n=1,2,\ldots)$ определяются как решения уравнения (3.38), для которых при больших n справедлива асимптотическая формула (3.39). Введем норму по формуле (3.43) и далее будем рассматривать функции (3.42).

Решение задачи (3.29)–(3.31), (3.75), (3.35), аналогично задаче при $p\geqslant 1$ этого параграфа, строим в виде суммы ряда Фурье–Бесселя

$$u(x,y)=u_0(y)X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)X_n(x),\qquad (3.76)$$

где функции $X_n(x)$ определяются по формуле (3.42), функции $u_0(y)$ – по формуле (3.55), функции $u_n(y)$ имеют вид

$$u_n(y)=\begin{cases}\triangle_n^{-1}(\alpha,\beta)\big(\varphi_n\triangle_n(\alpha,y)+\psi_n\,\mathrm{sh}\big(\lambda_n(\beta-y)\big)\big), & y>0,\\ \triangle_n^{-1}(\alpha,\beta)\big(\varphi_n\sin(\lambda_n(\alpha+y))+\psi_n\triangle_n(-y,\beta)\big), & y<0.\end{cases}$$

$$\triangle_n(\alpha,\beta)=\sin(\lambda_n\alpha)\,\mathrm{ch}(\lambda_n\beta)+\cos(\lambda_n\alpha)\,\mathrm{sh}(\lambda_n\beta),$$

$$\varphi_n=\int_0^l\varphi(x)x^pX_n(x)\,dx,\quad \psi_n=\int_0^l\psi(x)x^pX_n(x)\,dx.$$

По аналогии с задачей при $p\geqslant 1$ доказана

Теорема 3.2.5. *Если существует решение задачи* (3.29)–(3.31), (3.75), (3.35), *то оно единственно тогда и только*

тогда, когда выполняется условие $\triangle_n(\alpha,\beta)\neq 0$ *при всех* $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Аналогично задаче при $p\geqslant 1$ доказаны оценки лемм 3.2.1–3.2.4, согласно которым ряд (3.76) и его производные первого порядка сходятся равномерно в замкнутой области $\overline{D}$, производные второго порядка сходятся равномерно в областях $\overline{D_+}$ и $\overline{D_-}$. Поэтому функция (3.76) удовлетворяет условиям (3.29) и (3.30).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.2.6. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 3.2.4 *и выполнено условие* (3.60) *при* $n>n_0$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи* (3.29)–(3.31), (3.75), (3.35), *определяемое рядом* (3.76), *если* $\triangle_n(\alpha,\beta)\neq 0$ *при всех* $n=\overline{1,n_0}$; *если* $\triangle_m(\alpha,\beta)=0$ *при некоторых* $m=m_1,\ldots,m_k\leqslant n_0$, *задача имеет решение, определяемое рядом* (3.71), *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3.70).

Теорема 3.2.7. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 3.2.4, *условиям* (3.33) *и выполнено неравенство* (3.60) *при* $n>n_0$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи* (3.29)–(3.33), (3.75) *определяемое рядом* (3.76), *если* $\triangle_n(\alpha,\beta)\neq 0$ *при всех* $n=\overline{1,n_0}$; *если* $\triangle_m(\alpha,\beta)=0$ *при некоторых* $m=m_1,\ldots,m_k\leqslant n_0$, *задача имеет решение, определяемое рядом* (3.71), *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3.70).

Теорема 3.2.8. *Для решения задачи* (3.29)–(3.33), (3.75) *справедлива оценка*

$$||u(x,y)||\leqslant C_{15}\big(||\varphi(x)||+||\psi(x)||\big),$$

где постоянная C_{15} *не зависит от функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

В данном параграфе методом спектрального анализа установлен критерий единственности нелокальной задачи с интегральным условием для уравнения смешанного типа с двумя операторами Бесселя.

Рассмотрим в области $D=\{(x,y)\mid 0<x<l,\ -\alpha<y<\beta\}$ координатной плоскости Oxy, где l, α, β — заданные положительные действительные числа, эллиптико-гиперболическое

уравнение

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{p}{x}\,u_x + \frac{q}{|y|}\,u_y = 0, \qquad (3.77)$$

где p, q — заданные действительные числа, такие что $|p| < 1$, $p \neq 0$ и $|q| < 1$, $q \neq 0$. Введем обозначения: $D_+ = D \cap \{y > 0\}$ и $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

3.3. Нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в прямоугольной области

3.3.1. Постановка задачи. Единственность решения

Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \qquad (3.78)$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \qquad (3.79)$$

$$\lim_{y\to 0+} y^q u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-} (-y)^q u_y(x,y), \quad 0 < x < l, \qquad (3.80)$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad (3.81)$$

$$\lim_{x\to 0+} x^p u_x(x,y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \qquad (3.82)$$

$$\int_0^l x^p u(x,y)\,dx = A = \text{const}, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \qquad (3.83)$$

где A — заданное действительное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\lim\limits_{x\to 0+} x^p\varphi'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} x^p\psi'(x) = 0$ и

$$\int_0^l x^p\varphi(x)\,dx = \int_0^l x^p\psi(x)\,dx = A. \qquad (3.84)$$

Представим уравнение (3.77) в виде

$$x^{-p}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^p\frac{\partial u}{\partial x}\right)-u_{yy}-\frac{q}{y}u_y=0,\quad y\in(-\alpha,0),$$
$$x^{-p}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u_{yy}+\frac{q}{y}s_y=0,\quad y\in(0,\beta).$$

Умножим оба равенства на x^p и проинтегрируем при фиксированных $y\in(-\alpha,0)$ и $y\in(0,\beta)$ по переменной x на промежутке от ε до $l-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число. В результате получим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^p\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx-\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}x^pu_{yy}\,dx-\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}x^p\frac{q}{y}u_y\,dx=0,$$
$$y\in(-\alpha,0),$$
$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^p\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}x^pu_{yy}\,dx+\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}x^p\frac{q}{y}u_y\,dx=0,$$
$$y\in(0,\beta),$$

или

$$\left(x^p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}-\frac{d^2}{dy^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}x^pu(x,y)\,dx-\frac{q}{y}\frac{d}{dy}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}x^pu(x,y)\,dx=0,$$
$$y\in(-\alpha,0),$$
$$\left(x^p\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}+\frac{d^2}{dy^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}x^pu(x,y)\,dx+\frac{q}{y}\frac{d}{dy}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}x^pu(x,y)\,dx=0,$$
$$y\in(0,\beta).$$

Перейдем в последних равенствах к пределу при $\varepsilon\to0$ и в силу условий (3.82) и (3.83) получим локальное граничное условие

$$u_x(l,y)=0,\quad -\alpha\leqslant y\leqslant\beta. \tag{3.85}$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу (3.78)–(3.82), (3.85).

Подставив функцию $u(x,y)=X(x)Y(y)$ в уравнение (3.77) и условия (3.82), (3.85), после разделения переменных получим

спектральную задачу

$$X''(x)+\frac{p}{x}X'(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad 0<x<l, \tag{3.86}$$

$$\lim_{x\to 0+}x^pX'(x)=0,\quad X'(l)=0, \tag{3.87}$$

где λ^2 — постоянная разделения.

Общее решение уравнения (3.86) при $|p|<1$, $p\neq 0$ определяется по формуле

$$X(x)=C_1x^{\frac{1-p}{2}}J_{\frac{1-p}{2}}(\lambda x)+C_2x^{\frac{1-p}{2}}J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x). \tag{3.88}$$

Так как $(1-p)/2$ не является целым числом, то $J_{\frac{1-p}{2}}(\lambda x)$ и $J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x)$ — линейно независимые решения уравнения (3.86). Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Из этой формулы вычислим

$$X'(x)=C_1\lambda x^{\frac{1-p}{2}}J_{-\frac{p+1}{2}}(\lambda x)-C_2\lambda x^{\frac{1-p}{2}}J_{\frac{p+1}{2}}(\lambda x).$$

Поскольку при $x\to 0+$: $x^pX'(x)=O(C_1+C_2x^{p+1})$, то для того, чтобы функция (3.88) удовлетворяла первому условию из (3.87), нужно положить $C_1=0$. И пусть $C_2=1$.

Тогда решение уравнения (3.86), удовлетворяющее первому условию из (3.87), определяется равенством

$$X(x)=x^{\frac{1-p}{2}}J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x).$$

Потребуем теперь, чтобы эта функция удовлетворяла второму граничному условию из (3.87). Вычислим

$$\frac{dX(x)}{dx}\Big|_{x=l}=\left(x^{\frac{1-p}{2}}J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda x)\right)'\Big|_{x=l}=-\lambda l^{\frac{1-p}{2}}J_{\frac{p+1}{2}}(\lambda l)=0,$$

откуда получим

$$\lambda_0=0,$$

$$J_{\frac{p+1}{2}}(\mu_n)=0,\quad \mu_n=\lambda_n l. \tag{3.89}$$

Таким образом, система собственных функций задачи (3.86), (3.87) имеет вид

$$\widetilde{X}_0(x) = 1, \quad \lambda_0 = 0, \tag{3.90}$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\mu_n x}{l}\right) = x^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.91}$$

где собственные значения λ_n определяются как решения уравнения (3.89).

Отметим, что система собственных функций (3.90) и (3.91) задачи (3.86), (3.87) ортогональна в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^p, а также образует полную систему в этом пространстве [9, с. 343].

Для дальнейших вычислений будем использовать ортонормированную систему функций

$$X_n(x) = \frac{1}{||\widetilde{X}_n(x)||}\,\widetilde{X}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.92}$$

где

$$||\widetilde{X}_n(x)||^2 = \int_0^l x^p \widetilde{X}_n^2(x)\,dx. \tag{3.93}$$

Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (3.78)–(3.82), (3.85). Рассмотрим функции

$$u_n(y) = \int_0^l u(x, y) x^p X_n(x)\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.94}$$

где $X_n(x)$ определяются по формуле (3.92).

На основании (3.94) введем в рассмотрение вспомогательные функции вида

$$u_{n,\varepsilon}(y) = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x, y) x^p X_n(x)\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.95}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Продифференцируем равенство (3.95) по переменной y дважды при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$

и с учетом уравнения (3.77) получим равенства

$$u''_{n,\varepsilon}(y) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{yy}(x,y)x^p X_n(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left(-\left(u_{xx} + \frac{p}{x}\,u_x\right) - \frac{q}{y}\,u_y\right) x^p X_n(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x}(x^p u_x) X_n(x)\,dx - \frac{q}{y}\,\frac{d}{dy}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y)x^p x_n(x)\,dx =$$

$$= -\left(x^p u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\,dx\right) -$$

$$- \frac{q}{y}\,\frac{d}{dy}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y)x^p x_n(x)\,dx, \quad y > 0, \quad (3.96)$$

$$u''_{n,\varepsilon}(y) = \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{yy}(x,y)x^p X_n(x)\,dx =$$

$$= x^p u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\,dx -$$

$$- \frac{q}{y}\,\frac{d}{dy}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y)x^p x_n(x)\,dx, \quad y < 0. \quad (3.97)$$

Из (3.95) в силу уравнения (3.86) будем иметь

$$u_{n,\varepsilon}(y) = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y)x^p\left[X''_n(x) + \frac{p}{x}\,X'_n(x)\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y)\frac{d}{dx}\left(x^p X'_n(x)\right)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[u(x,y)x^p X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\,dx\right],$$

откуда находим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} x^p u_x X'_n(x)\,dx = \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) + u(x,y)x^p X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}.$$

Подставив данное выражение в (3.96) и (3.97), получим

$$u''_{n,\varepsilon}(y) = -\left(x^p u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) - u(x,y)x^p X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}\right) - \\ - \frac{q}{y}\frac{d}{dy}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y)x^p x_n(x)\,dx, \quad y>0,$$

$$u''_{n,\varepsilon}(y) = x^p u_x X_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \lambda_n^2 u_{n,\varepsilon}(y) - u(x,y)x^p X'_n(x)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - \\ - \frac{q}{y}\frac{d}{dy}\int\limits_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y)x^p x_n(x)\,dx, \quad y<0.$$

Так как значения $-1<k<1$ и $k\neq 0$, то в силу (3.78) в последних двух равенствах можно перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$, откуда в силу условий (3.82), (3.85) и (3.87) получим для нахождения функций (3.94) дифференциальное уравнение

$$u''_n(y) + \frac{q}{y}u'_n(y) - (\operatorname{sgn} y)\lambda_n^2 u_n(y) = 0, \quad y\in(-\alpha,0)\cup(0,\beta). \tag{3.98}$$

Общее решение уравнения (3.98) при $|q|<1$ и $q\neq 0$ имеет вид

$$u_n(y) = \begin{cases} a_n y^{\frac{1-q}{2}} I_{\frac{1-q}{2}}(\lambda_n y) + b_n y^{\frac{1-q}{2}} I_{\frac{q-1}{2}}(\lambda_n y), & y>0, \\ c_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{1-q}{2}}(-\lambda_n y) + d_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q-1}{2}}(-\lambda_n y), & y<0, \end{cases} \tag{3.99}$$

где $J_\nu(\xi)$ и $_{-\nu}(\xi)$ — функции Бесселя первого рода, $\nu=(1-k)/2$, $I_\nu(\xi)$ и $I_{-\nu}(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя, a_n, b_n, c_n и d_n — произвольные постоянные.

Теперь в (3.99) на основании (3.78) подберем постоянные a_n, b_n, c_n и d_n таким образом, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$u_n(0+) = u_n(0-), \quad u'_n(0+) = u'_n(0-). \tag{3.100}$$

Вычислим

$$u_n'(y)=$$
$$=\begin{cases} a_n\lambda_n y^{\frac{1-q}{2}} I_{-\frac{q+1}{2}}(\lambda_n y)+b_n\lambda_n y^{\frac{1-q}{2}} I_{\frac{q+1}{2}}(\lambda_n y), & y>0,\\ c_n\lambda_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{-\frac{q+1}{2}}(-\lambda_n y)-d_n\lambda_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q+1}{2}}(-\lambda_n y), & y<0. \end{cases} \tag{3.101}$$

С учетом формулы $I_\nu(z)=e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}J_\nu(iz)$ [7, с. 91] из (3.99) и (3.101) будем иметь

$$u_n(y)=$$
$$=\begin{cases} a_n e^{\frac{(q-1)\pi}{4}i} y^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{1-q}{2}}(i\lambda_n y)+b_n e^{\frac{(1-q)\pi}{4}i} y^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q-1}{2}}(i\lambda_n y), & y>0,\\ c_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{1-q}{2}}(-\lambda_n y)+d_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q-1}{2}}(-\lambda_n y), & y<0, \end{cases} \tag{3.102}$$

$$u_n'(y)=$$
$$=\begin{cases} a_n e^{\frac{(q+1)\pi}{4}i}\lambda_n y^{\frac{1-q}{2}} J_{-\frac{q+1}{2}}(i\lambda_n y)+b_n e^{-\frac{(q+1)\pi}{4}i}\lambda_n y^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q+1}{2}}(i\lambda_n y), \\ \qquad y>0,\\ c_n\lambda_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{-\frac{q+1}{2}}(-\lambda_n y)-d_n\lambda_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q+1}{2}}(-\lambda_n y),\\ \qquad y<0. \end{cases}$$

Откуда делаем вывод, что условия (3.100) выполняются при

$$a_n=e^{-\frac{(q+1)\pi}{4}i}c_n,\quad b_n=e^{\frac{(q-1)\pi}{4}i}d_n,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Подставив значения a_n и b_n в (3.102), получим

$$u_n(y)=\begin{cases} c_n e^{\frac{-\pi}{2}i} y^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{1-q}{2}}(i\lambda_n y)+d_n y^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q-1}{2}}(i\lambda_n y), & y>0,\\ c_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{1-q}{2}}(-\lambda_n y)+d_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q-1}{2}}(-\lambda_n y), & y<0 \end{cases}$$

или

$$u_n(y)=\begin{cases} -c_n i y^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{1-q}{2}}(i\lambda_n y)+d_n y^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q-1}{2}}(i\lambda_n y), & y>0,\\ c_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{1-q}{2}}(-\lambda_n y)+d_n(-y)^{\frac{1-q}{2}} J_{\frac{q-1}{2}}(-\lambda_n y), & y<0. \end{cases} \tag{3.103}$$

Подставим теперь (3.94) в граничные условия (3.81):

$$\begin{aligned} u_n(\beta) &= \int_0^l \varphi(x) x^p X_n(x)\,dx = \varphi_n, \\ u_n(\alpha) &= \int_0^l \psi(x) x^p X_n(x)\,dx = \psi_n. \end{aligned} \tag{3.104}$$

Из (3.103) и (3.104) получим систему для нахождения постоянных c_n и d_n:

$$\begin{cases} c_n i J_{\frac{1-q}{2}}(i\lambda_n\beta) - d_n J_{\frac{q-1}{2}}(i\lambda_n\beta) = -\varphi_n \beta^{\frac{q-1}{2}}, \\ c_n J_{\frac{1-q}{2}}(\lambda_n\alpha) + d_n J_{\frac{q-1}{2}}(\lambda_n\alpha) = \psi_n \alpha^{\frac{q-1}{2}}. \end{cases} \tag{3.105}$$

Если при всех $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ определитель системы (1.31)

$$\triangle_n(\alpha,\beta) = iJ_{\frac{q-1}{2}}(\lambda_n\alpha)J_{\frac{1-q}{2}}(i\lambda_n\beta) + J_{\frac{1-q}{2}}(\lambda_n\alpha)J_{\frac{q-1}{2}}(i\lambda_n\beta) \neq 0, \tag{3.106}$$

то она имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$c_n = \frac{-\varphi_n\beta^{\frac{q-1}{2}} J_{\frac{q-1}{2}}(\lambda_n\alpha) + \psi_n \alpha^{\frac{q-1}{2}} J_{\frac{q-1}{2}}(i\lambda_n\beta)}{\triangle(n)},$$

$$d_n = \frac{\varphi_n\beta^{\frac{q-1}{2}} J_{\frac{1-q}{2}}(\lambda_n\alpha) + \psi_n i\alpha^{\frac{q-1}{2}} J_{\frac{1-q}{2}}(i\lambda_n\beta)}{\triangle(n)}.$$

Подставив теперь найденные значения c_n и d_n в (3.103), найдем окончательный вид функций

$$u_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_n\sqrt{(\alpha y)^{1-q}}\triangle_n(\alpha,y) + \psi_n\sqrt{(\beta y)^{1-q}}A_n(y,\beta)}{\triangle_n(\alpha,\beta)\sqrt{(\alpha\beta)^{1-q}}}, & y > 0, \\ \dfrac{\varphi_n\sqrt{(-\alpha y)^{1-q}}B_n(\alpha,-y) + \psi_n\sqrt{(-\beta y)^{1-q}}\triangle_n(-y,\beta)}{\triangle_n(\alpha,\beta)\sqrt{(\alpha\beta)^{1-q}}}, & y < 0, \end{cases} \tag{3.107}$$

где

$$A_n(y,\beta) = \left(-J_{\frac{q-1}{2}}(i\lambda_n\beta)J_{\frac{1-q}{2}}(i\lambda_n y) + J_{\frac{1-q}{2}}(i\lambda_n\beta)J_{\frac{q-1}{2}}(i\lambda_n y)\right)i,$$

$$B_n(\alpha,-y) = -J_{\frac{q-1}{2}}(\lambda_n\alpha)J_{\frac{1-q}{2}}(-\lambda_n y) + J_{\frac{1-q}{2}}(\lambda_n\alpha)J_{\frac{q-1}{2}}(-\lambda_n y).$$

На основании найденных частных решений запишем решение задачи (3.78)–(3.82), (3.85) формально в виде ряда Фурье–Бесселя

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)X_n(x),$$

где функции $u_n(t)$ определяются по формуле (3.107), $X_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$ — по формуле (3.92), после чего нетрудно показать эквивалентность задач (3.78)–(3.82), (3.85) и (3.78)–(3.83) при выполнении условий (3.84).

При выполнении условия (3.106) задача (3.78)–(3.82), (3.85) имеет единственное решение. Действительно, пусть $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$. Тогда из (3.104) и (3.107) следует, что $u_n(y)=0$ при всех $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$. В силу (3.94) имеем

$$\int_0^l u(x,y)x^p X_n(x)\,dx=0.$$

Отсюда в силу полноты системы $X_n(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^p следует, что $u(x,y)=0$ почти всюду на промежутке $x\in[0,l]$ и при любом $y\in[-\alpha,\beta]$. Поскольку, согласно (3.78), функция $u(x,y)\in C(\overline{D})$, то $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Таким образом, доказана

Теорема (критерий единственности решения). *Если существует решение задачи* (3.78)–(3.82), (3.85), *то оно единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.106) *при всех* $n\in\mathbb{N}_0$.

Библиографический список

1. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.
2. *Бенуар Н.Э.*, *Юрчук Н.И.* Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2094–2098.
3. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1959. 164 с.
4. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
5. *Бицадзе А.В.*, *Пашковский В.И.* К теории уравнений Максвелла–Эйнштейна // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 2. С. 9–10.
6. *Бицадзе А.В.*, *Пашковский В.И.* О некоторых классах решений уравнения Максвелла–Эйнштейна // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 134. С. 26–30.
7. *Ватсон Г.Н.* Теория Бесселевых функций. Часть первая. М.: ИЛ, 1949. 799 с.
8. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Наука. Глав. ред. физ.-матем. лит., 1981. 512 с.
10. *Волкодавов В.Ф.*, *Николаев Н.Я.* Краевые задачи для уравнения Эйлера–Пауссона–Дарбу. Куйбышев: Изд-во Куйбышев. гос. пед. ин-та, 1984. 80 с.
11. *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983. 84 с.
12. *Гарипов И.Б.* Решение задачи Коши и некоторых краевых задач для параболического уравнения с оператором Бесселя // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань: КГУ, 2002. 110 с.
13. *Гафурова С.М.* Решение задачи Коши и некоторых краевых задач для гиперболического уравнения с оператором Бесселя // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань: КГУ, 2002. 104 с.
14. *Глушко В.П.* Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1972. 193 с.
15. *Гордезиани Д.Г.*, *Авалишвили Г.А.* Решение нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.
16. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.

17. *Гущин А. К.* Условие компактности одного класса операторов и его приложение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // Матем. сборник. 2002. Т. 193. № 5. С. 17–36.

18. *Гущин А. К.*, *Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сборник. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.

19. *Денисова М. Ю.* Исследование основных краевых задач для некоторых B-полигармонических уравнений методом потенциалов // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань: КГУ, 2002. 99 с.

20. *Джаяни Г. В.* Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1982. 178 с.

21. *Джаяни Г. В.* Уравнение Эйлера–Пауссона–Дарбу. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 79 с.

22. *Дмитриев В. Б.* Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. 2006. № 2 (42). С. 15–27.

23. *Егоров И. Е.*, *Федоров В. Евс*. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. 133 с.

24. *Жегалов В. И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Уч. записки Казанск. ун-та. 1962. Т. 122. № 3. С. 3–16.

25. *Жегалов В. И.* Задача Франкля со смещением // Изв. вузов. Математика. 1979. № 9. С. 11–20.

26. *Жегалов В. И.*, *Миронов А. Н.*, *Уткина Е. А.* Уравнения с доминирующей частной производной. Казань: Казан. ун-т, 2014. 385 с.

27. *Зайцева Н. В.* Смешанная задача для одного B-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода // Известия Тульского гос. ун-та. Естеств. науки. 2012. Вып. 2. С. 39–50.

28. *Зайцева Н. В.* Смешанная задача для одного B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода // Известия Смоленского гос. ун-та. 2013. № 4 (24). С. 397–403.

29. *Зайцева Н. В.* Начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода в прямоугольной области // Вестник СамГУ. 2016. № 3–4. С. 51–62.

30. *Зайцева Н. В.* Нелокальная краевая задача для B-гиперболического уравнения в прямоугольной области // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия Физ.-матем. науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 589–602.

31. *Зайцева Н. В.* Нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 224–234.

32. *Зайцева Н. В.* Единственность решения нелокальной задачи для одного эллиптико-гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 544–551.

33. *Ильин В. А.*, *Моисеев Е. И.* Нелокальная краевая задача для оператора Штурма–Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 3. С. 534–539.

34. *Ильин В. А.*, *Моисеев Е. И.* Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 8. С. 139–156.

35. *Ильин В. А.*, *Моисеев Е. И.* О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 5. С. 656–661.

36. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.

37. *Ионкин Н. И.*, *Моисеев Е. И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1284–1295.

38. *Камынин Л. И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журн. ВМ и МФ. 1964. Т. 4. № 6. С. 1006–1024.

39. *Катрахов В. В.* Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся уравнений // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 6. С. 1296–1300.

40. *Катрахов В. В.* Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 354–379.

41. *Катрахов В. В.*, *Ситник С. М.* Композиционный метод построения B-эллиптических, B-параболических и B-гиперболических операторов преобразования // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 307–311.

42. *Катрахов В. В.*, *Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Соврем. матем. Фундам. направл. 2018. Т. 64. № 2. С. 211–426.

43. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.

44. *Киприянов И. А.* О краевых задачах для уравнений в частных производных с оператором Бесселя // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. № 2. С. 275–278.

45. *Киприянов И. А.*, *Кононенко В. И.* Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 1. С. 114–129.

46. *Киприянов И. А.*, *Иванов Л. А.* Фундаментальные решения однородных B-гиперболических уравнений // Сиб. матем. журнал. 1980. Т. 21. № 4. С. 95–102.

47. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука. Физматлит, 1997. 208 с.

48. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 763–774.

49. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7. № 1 (17). С. 51–60.

50. *Кожанов А. И.*, *Пулькина Л. С.* Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Докл. АН. 2005. Т. 404. № 5. С. 589–592.

51. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых пространственно нелокальных задач для линейных параболических уравнений // Вестник СамГУ. 2008. № 3 (62). С. 165–174.

52. *Кожанов А. И.* Нелокальные задачи для линейных гиперболических уравнений с граничными условиями, содержащими временную производную // Докл. АМАН. 2010. Т. 12. № 1. С. 40–52.

53. *Кудрявцев Л. Д.* Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1959. 182 с.

54. *Ладыженская О. А.*, *Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964. 538 с.

55. *Лернер М. Е.*, *Репин О. А.* Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Сиб. матем. журнал. 1999. Т. 40. № 6. С. 1260–1275.

56. *Лернер М. Е.*, *Репин О. А.* О задачах типа задачи Франкля для некоторых эллиптических уравнений с вырождением разного рода // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1087–1093.

57. *Лернер М. Е.*, *Репин О. А.* Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1562–1564.

58. *Ломов И. С.* Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 9. С. 1550–1563.

59. *Ломов И. С.* О базисности систем нерегулярных корневых векторов дифференциальных операторов высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 1. С. 74–86.

60. *Ломов С. А.*, *Ломов И. С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2011. 456 с.

61. *Ломов И. С.* Неклассические постановки задач для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 723–729.

62. *Ломов И. С.* Спектральный метод В. А. Ильина. Несамосопряженные операторы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2019. 132 с.

63. *Ломов И. С.* Равномерная сходимость разложений по корневым функциям дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 486–497.

64. *Ляхов Л. Н.* Преобразование Фурье–Бесселя ядра сингулярного интегрального оператора, порожденного обобщенным сдвигом // Неклассические уравнения матем. физики. Новосибирск. 1986. С. 75–83.

65. *Ляхов Л. Н.* Обращение B-потенциалов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 3. С. 466–469.

66. *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. Липецк: Изд-во ЛГПУ, 2007. 232 с.

67. *Ляхов Л. Н.*, *Половинкин И. П.*, *Шишкина Э. Л.* Об одной задаче И. А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 4. С. 516–528.

68. *Ляхов Л. Н.*, *Половинкин И. П.*, *Шишкина Э. Л.* Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени // Докл. РАН. 2014. Т. 459. № 5. С. 533–538.

69. *Маричев О. И.*, *Килбас А. А.*, *Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самар. гос. эконом. ун-та, 2008. 275 с.

70. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. 176 с.

71. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во МГУ, 1988. 149 с.

72. *Моисеев Е. И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094–1103.

73. *Муравник А. Б.* О стабилизации решений некоторых сингулярных квазилинейных параболических задач // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 6. С. 858–865.

74. *Муравник А. Б.* О стабилизации решений сингулярных эллиптических уравнений // Фундам. и прикл. матем. 2006. Т. 12. № 4. С. 169–186.

75. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства ре-

шений задачи Коши // Соврем. матем. Фундам. направл. 2014. Т. 52. С. 3–141.

76. *Мухлисов Ф. Г.* О существовании и единственности решения некоторых уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Изв. вузов. Математика. 1982. № 10. С. 58–71.

77. *Мухлисов Ф. Г.* Обобщенное решение задачи типа Дирихле для некоторых сингулярных уравнений // Сиб. матем. журнал. 1990. Т. 31. № 6. С. 79–91.

78. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

79. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 44–59.

80. *Нахушев А. М.* К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 15. № 1. С. 66–73.

81. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

82. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.

83. *Нахушева З. А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2011. 189 с.

84. *Никольский С. М.* Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе // Тр. МИАН. 1979. Т. 150. С. 212–238.

85. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Мир, 1986. 381 с.

86. *Олейник О. А.*, *Радкевич Е. В.* Уравнения с неотрицательной характеристической формой. М.: Изд-во МГУ, 2010. 354 с.

87. *Пулькин С. П.* Избранные труды. Самара: Универс групп, 2007. 261 с.

88. *Пулькина Л. С.* Об одной неклассической задаче для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Сер. Матем. 1991. № 11. С. 48–51.

89. *Пулькина Л. С.* Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 3. С. 435–445.

90. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральным условием для гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 7. С. 887–892.

91. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во Самарский ун-т, 2012. 194 с.

92. *Пулькина Л. С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74–83.

93. *Раджабов Н.* Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. Душанбе: Изд-во ТГУ, 1980. 170 с.

94. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Самара: Изд-во Сарат. ун-та: Самар. фил., 1992. 161 с.

95. *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1468–1478.

96. *Сабитов К. Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. 2011. Т. 89. № 4. С. 596–602.

97. *Сабитов К. Б.*, *Мартемьянова Н. В.* Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 2. С. 71–85.

98. *Сабитов К. Б.*, *Зайцева Н. В.* Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 123–135.

99. *Сабитов К. Б.*, *Зайцева Н. В.* Вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2019. № 10. С. 75–86.

100. *Савчук А. М.*, *Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912.

101. *Садовничая И. В.* Классическая задача равносходимости для оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 504–513.

102. *Салахитдинов М. С.*, *Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, 2005. 224 с.

103. *Сербина Л. И.* Нелокальные математические модели переноса в водонасосных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.

104. *Ситник С. М.* Операторы преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя // Сб. науч. тр.: Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. 1989. С. 179–185.

105. *Ситник С. М.*, *Катрахов В. В.* Композиционный метод построения B-эллиптических, B-параболических и B-гиперболических операторов // Доклады РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 307–311.

106. *Ситник С. М.* Применение операторов преобразования Бушмана—Эрдейи и их обобщений в теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2016. 307 с.

107. *Ситник С. М.*, *Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2019. 221 с.

108. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I // Соврем. матем. Фундам. направл. 2007. Т. 26. С. 3–132.

109. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II // Соврем. матем. Фундам. направл. 2009. Т. 33. С. 3–179.

110. *Скубачевский А. Л.*, *Гуревич П. Л.* Применение методов нелинейного функционального анализа к нелокальным проблемам процессов распределения тепла. Учеб. пособие. М.: РУДН, 2008. 264 с.

111. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.

112. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.

113. *Солдатов А. П.* Решение одной краевой задачи теории функций со смещением // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 1. С. 143–152.

114. *Солдатов А. П.*, *Ковалева Л. А.* Об одной нелокальной задаче теории функций // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 3. С. 396–409.

115. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: НГУ, 1973. 144 с.

116. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Иностр. лит., 1957. 442 с.

117. *Уткина Е. А.* Об одной краевой задаче со смещениями в четырехмерном пространстве // Изв. вузов. Математика. 2009. № 3. С. 50–55.

118. *Уткина Е. А.* Задача со смещениями для трехмерного уравнения Бианки // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 4. С. 535–539.

119. *Франк Ф.*, *Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Часть 2. Ленинград: Глав. ред. общетехн. литературы, 1937. 996 с.

120. *Франкль Ф. И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1945. Т. 9. № 2. С. 121–142.

121. *Франкль Ф. И.* Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // ПММ. 1956. Т. 20. № 2. С. 196–202.

122. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 703 с.

123. *Чеботарева Э. В.* Решение краевых задач для многомерных вырождающихся B-эллиптических уравнений методом потенциалов // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Казань: КГУ, 2010. 134 с.

124. *Шишкина Э. Л.* Обобщенная дивергентная теорема и второе тождество Грина для B-эллиптических и B-гиперболических операторов // ПМ&Ф. 2019. Т. 51. № 4. С. 506–513.

125. *Шишкина Э. Л.* Общее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и гиперболические B-потенциалы // Соврем. матем. Фундам. направл. 2019. Т. 65. № 2. С. 157–338.

126. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. 1982. № 6. С. 12–21.

127. *Юрчук Н. И.* Смешанная задача с интегральным условием для некоторых гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2117–2126.

128. *Янушаускас А. И.* Аналитическая теория эллиптических уравнений. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1979. 190 с.

129. *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011. Vol. 5. No. 1. P. 31–37.

130. *Bers L.* On a class of differential equations in mechanics of continua // Quart. Appl. Math. 1943. Vol. 5. No. 1. P. 168–188.

131. *Bers L.* A remark on an applications of pseudo-analytic functions // Amer. J. Math. 1956. Vol. 78. No. 3. P. 486–496.

132. *Bers L., Gelbart A.* On a class of functions defined by partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 56. P. 67–93.

133. *Bouziani A., Mesloub S.* A strong solution of an envolution problem with integral condition // Georgian Mathematical Journal. 2002. Vol. 9. No. 12. P. 149–159.

134. *Bouziani A.* On the solvability of a nonlocal problem arising in dynamics of moisture transfer // Georgian Mathematical Journal. 2003. No. 4. P. 607–622.

135. *Bouziani A., Benouar N.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // Bull. Belg. Math. Soc. 1996. No. 3. P. 137–145.

136. *Byszewski L.* Existance and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x,t,u,u_x)$ // Journal of Applied Math. and Stochastic Analysis. 1990. Vol. 3. No. 3. P. 163–168.

137. *Cannon J. R.* The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 21. No. 2. P. 155–160.

138. *Cannon J. R.* Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinius coefficient // Ann. Math. pura ed Appl. 1963. Vol. 62. P. 371–377.

139. *Carroll R. W.*, *Showalter R. E.* Singular and degenerate Cauchy problems. New York: Academic Press, 1976. 333 p.

140. *Fitouhi A.*, *Jebabli I.*, *Shishkina E. L.*, *Sitnik S. M.* Applications of the integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 130. P. 1–27.

141. *Gilbert R. P.* Function theoretic method in partial differential equations. New York–London: Academic Press, 1969. 311 p.

142. *Popivanov N.*, *Schneider M.* The Darboux problem in R3 for a class of degenerating hyperbolic equations // J. Math. Anal. Appl. 1993. Vol. 175. P. 537–579.

143. *Sabitov K. B.*, *Zaitseva N. V.* Initial-boundary value problem for hyperbolic equation with singular coefficient and integral condition of second kind // Lobachevskii J. of Mathematics. 2018. Vol. 39. No. 9. P. 1419–1427.

144. *Shishkina E. L.*, *Sitnik S. M.* General form of the Euler-Poisson-Darboux equation and application of the transmutation method // Electronic Journal of Differential Equations. 2017. Vol. 177. P. 1–20.

145. *Weinstein A.* Discontinuous integrals and generalized theory of potential // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 63. No. 2. P. 342–354.

146. *Weinstein A.* Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 59. P. 20–38.

147. *Zaitseva N. V.* Boundary value problem for B-hyperbolic equation with an integral condition of the second kind // Journal of Theoretical and Applied Technology. 2015. Vol. 78. No. 3. P. 497–508.

148. *Zaitseva N. V.* Keldysh type problem for B-hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind // Lobachevskii J. of Mathematics. 2017. Vol. 38. No. 1. P. 162–169.

149. *Zaitseva N. V.* First initial-boundary value problem for B-hyperbolic equation // Lobachevskii J. of Mathematics. 2019. Vol. 40. No. 2. P. 240–247.

150. *Zaitseva N. V.* Boundary value problem with integral condition for the mixed type equation with a singular coefficient // Transmutation Operators and Applications. V. V. Kravchenko, S. M. Sitnik (eds.), Trends in Mathematics. Cham, Switzerland: Springer, 2020. P. 671–686.

Научное издание

Зайцева Наталья Владимировна

Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя

Монография

Художественное оформление *К. В. Саутенков*
Корректор *Е. Г. Якимова*
Верстка *М. А. Голуб*

Подписано в печать 18.08.2021. Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 7,5. Уч. изд. л. 3,75.
Тираж 100 экз. Изд. № 11883. Заказ №

Издательство Московского университета

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
(ул. Академика Хохлова, 11).
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
http://msupress.com

Отдел реализации.
Тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «Амирит».
410 004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 88.