Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления
Лаборатория управления и навигации

Курсовая работа

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТЕЙ БЛОКА НЬЮТОНОМЕТРОВ НА ЦЕНТРИФУГЕ

Calibration of a Three-Axis Accelerometer Unit on a Centrifuge

студентки 321 группы
Федосеевой Елизаветы Владимировны
Научные руководитель:
к.ф.-м.н., Козлов А.В.

9 ноября 2021 г.

Содержание

1 Введение

В курсовой работе рассматривается задача идентификации (калибровки) параметров модели погрешностей блока ньютонометров (акселерометров) в сборе. Так как термин "аскелерометр" (более известный в инженерной среде) часто вводит в заблуждение из-за трудностей трактовки определения измеряемого *кажущегося ускорения*, в данной работе мы используем термин "ньютонометр" с приведенным ниже определением.

1.1 Блок Ньютонометров

Ньютонометр – это прибор предназначеный для измерения удельной (на единицу массы) силы реакции, действующей на датчик со стороны других тел. Ньютонометры имеют шикорокое применение в различных технических обрудованиях, а также в инерциальных навигационных системах, где полученные с помощью ньютонометров измерения интегрируют, получая инерциальную скорость и координаты носителя.

Простейший вид ньютонометра можно представить в виде конструкции состоящей из подвешенной горизонтально массы на двух "пружинах" вдоль чувствительной оси.

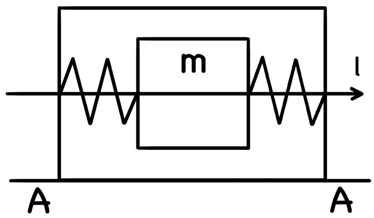


Рис. 1: Простейшая модель статического однокомпонентого ньютонометра

По конструктивному исполнению ньютонометры подразделяются на однокомпонентные, двухкомпонентные и трёхкомпонентные. В навигации, как правило, используются тройки однокомпонентных ньютонометров, со взаимно ортогональными (с точностью до сборки) осями, что позволяет измерять вектор удельной силы реакции в проекции на некоторую жёстко связанную с датчиками правую ортогональную систему координат, называемую приборной.

1.2 Калибровка

Как и всякий реальный измерительный прибор, блок ньютонометров, имеет случайные и систематические погрешности (погрешности, изменяющиеся по определённому закону), поэтому для их компенсации вводится некоторая априорная модель погрешностей. Калибровкой называется идентификация параметров этой априорной модели, при которой используется априорная информация об измеряемой эталонной величине. Для ньютономтеров, когда задача измерений ограничивается определением удельной силы реакции в небольшом диапазоне, достаточно провести испытания в поле силы тяжести g, значение которой известно с достаточной точностью. Однако, когда необходимо получать данные о больших значениях удельной силы, то есть когда прибор устанавливается на объект, на котором возникают большие перегрузки, а зависимость погрешности датчика от них нелинейна, там требуется калибровка во всём рабочем диапазоне датчика.

Перегрузки до $200g$ могут создаваться специальными центрифугами, развивающими скорость вращения до 10 оборотов в секунду с характерным удалением чувствительных масс от оси вращения в пределах 0,5 метра.

Рис. 2: Центрифуги средней точности

При помещении блока ньютонометров в подобного вида рода устройство, на датчик будет действовать создаваемое центрифугой центростремительное ускорение, что может выступать в качестве эталоной величины калибровки, когда величины силы тяжести не достаточно.

Современные установки позволяют выдерживать стабильную угловую скорость вращения с точностью 0,001%. При этом значительный вклад в систематические погрешности калибровки могут вносить ошибки определения расстояния от оси вращения до чувствительной массы: ошибка в 0,5 мм уже вносит погрешность 0,1% от измеряемой величины, что на два порядка хуже точности эталонной информации, обеспечиваемой центрифугой.

1.3 Постановка задачи

В данной работе планируется сформулировать априорную модель погрешностей блока ньютономтеров, учитывая невозможность определения координат чувствительной массы ньютонометров, из-за ее конечно малых размеров (несколько милиметров), для дальнешей калибровки искомых праметров погрешности прибора в условиях недостаточной точности априорных геометрических параметров при указанных выше параметрах движения.

2 Описание системы и моделей погрешностей

Для выполнения поставленной задачи калибровки в настоящей работе мы рассматриваем выше описанный блок (тройка однокомпонентных ньютонометров) как твердое тело, закрепенное на консоли центрифуги с вертикальной осью вращения.

Вращением Земли со скоростью примерно 1 оборот в сутки (около 15 градусов в час или 7,3 · 10-5 радиан в секунду) в данной задаче можно пренебречь по следующим причинам:

— центростремительное ускорение, создаваемое вращением Земли, учтено в местной силе тяжести;

— разность центростремительных ускорений между тремя чувствительными массами пренебрежимо мала, так как их разнесение не превышает 0,1 м:

$$(7,3 \cdot 10^{-5}[\text{рад/сек}])^2 \times 0,1[\text{м}] < 10^{-9}\text{м/сек}^2;$$

— кориолисово ускорение является периодической величиной с нулевым средним и амплитудой в пределах

$$7,3 \cdot 10^{-5}[\text{рад/сек}] \times (10 \cdot 2\pi[\text{рад/сек}] \times 0,5[\text{м}]) < 2,5 \cdot 10^{-3}\text{м/сек}^2.$$

2.1 Системы координат и обозначения

Введём три системы координат:

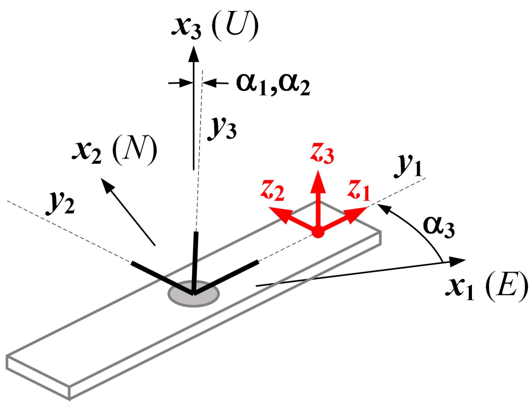
1. $Ox_1x_2x_3$ — неподвижная относительно земли, опорная система координат

   O — точка крепления консоли центрифуги

   Ox_1 — направлена на восток (E)

   Ox_2 — направлена на север (N)

   Ox_3 — направлена вверх по вертикали (совпадает с местной линией отвеса (U))



2. $Oy_1y_2y_3$ — вращающаяся система координат, связаная с консолью центрифуги

   Oy_1 — совпадает с продольной осью центрифгуи

   Oy_3 — совпадает с осью вращения

   Oy_2 — дополняет первую и третью оси до правой ортогональной тройки

   α_1 и α_2 — углы отклонения Oy от Ox вокруг первой и второй оси соответсвенно (отклонения оси вращения от вертикали)

   α_3 — угол поворота центрифуги

   При нулевых углах $\alpha_{1,2,3}$ трёхгранники Ox и Oy совпадают.

3. $Mz_1z_2z_3$ — приборная, жёстко связанная с блоком ньютонометров система координат

   M — приведенная чувствительная масса блока ньютонометров (точное определение положения точки будет дано позже)

   Mz_1 — совпадает с чувствительной осью первого ньютонометра

   Mz_2 — ортогональна Mz_1 и лежит в плоскости осей чувствительности первого и второго ньютономтеров

   Mz_3 — дополняет систему координат до правой ортогональной тройки

Рассмотрим шесть положений блока ньютонометров относительно консоли, по два для каждой оси.

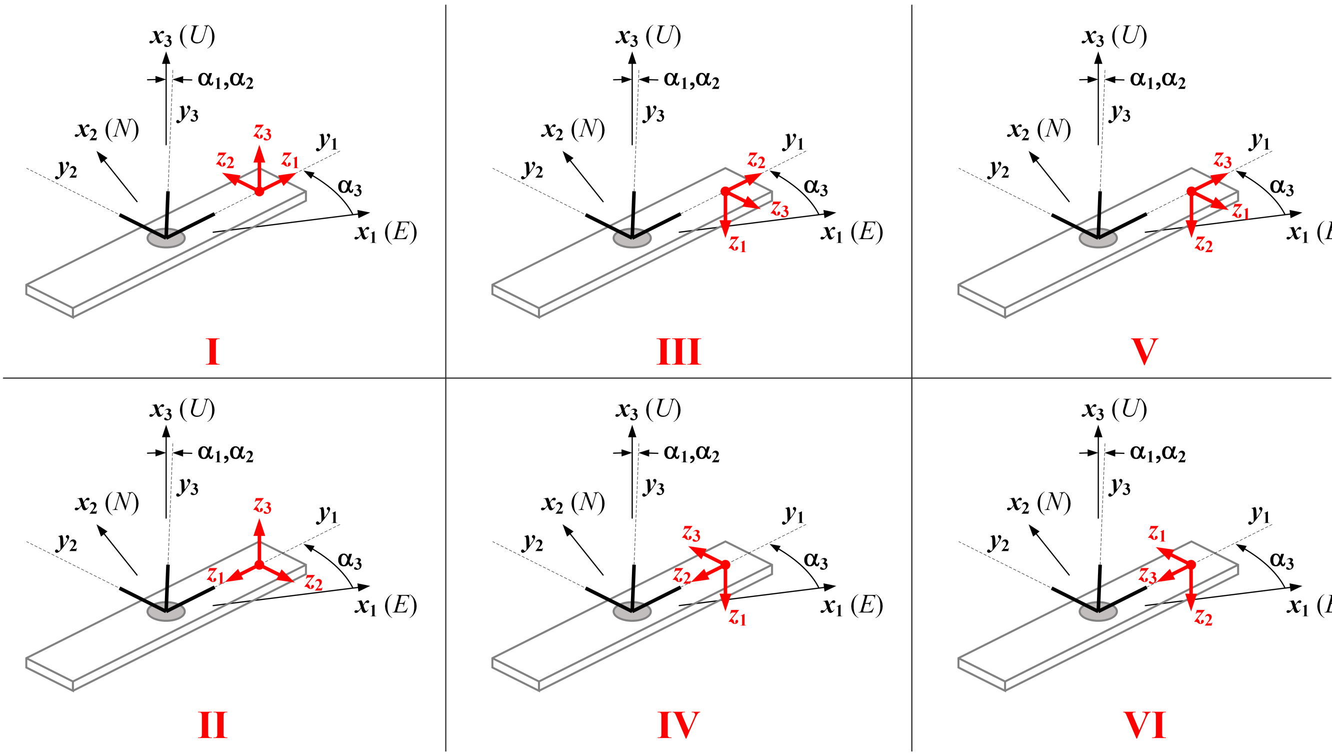


Рис. 3: Шесть положений блока ньютонометров на консоли центрифуги

Введём обозначения:

— Ω_3, $\dot\Omega_3$ — угловая скорость вращения центрифуги относительно Земли и её производная, $\Omega_3 = \dot\alpha_3$;

— $\delta_{\cdot k} \in \mathbb{R}^3$ — малые углы поворота приборного трёхгранника относительно системы координат вращающейся консоли центрифуги вокруг приборных осей в k-м положении;

— $g = -9.8$ [м/с^2] — величина местной силы тяжести;

— $R^0_{\cdot k} \in \mathbb{R}^3$ — тройка априорных значений координат приведённой чувствительной массы блока ньютонометров в осях вращающейся консоли центрифуги в k-м положении;

— $\Delta R_{\cdot k} \in \mathbb{R}^3$ — тройка погрешностей априорных значений координат приведённой чувствительной массы блока ньютонометров (M) в осях вращающейся консоли центрифуги в k-м положении; отметим, что эти погрешности зависят от ориентации блока, но не зависят от конкретного места крепления;

— $\rho_0 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ — матрица априорных значений координат чувствительных масс ньютонометров относительно приведённой в приборных осях, так что ρ^0_{ij} – i-я координата j-й чувствительной массы; матрица содержит шесть независимых параметров, состав которых зависит от определения приведённой чувствительной массы блока ньютонометров, например:

$$\rho^0 = \begin{bmatrix} 0 & \rho^0_{12} & \rho^0_{13} \\ 0 & \rho^0_{22} & \rho^0_{23} \\ 0 & \rho^0_{32} & \rho^0_{33} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \rho^0 = \begin{bmatrix} 0 & \rho^0_{12} & \rho^0_{13} \\ \rho^0_{21} & 0 & \rho^0_{23} \\ \rho^0_{31} & \rho^0_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

далее рассматривается первый вариант, который соответствует соглашению, при котором в качестве приведённой чувствительной массы принимается чувствительная масса первого ньютонометра (M);

— $\Delta\rho \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ — матрица соответствующих погрешностей априорных значений координат чувствительных масс ньютонометров относительно приведённой в приборных осях;

— P_k — априорная матрица перехода от системы координат Oy к Oz без учёта малых погрешностей установки для положения номер k:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

— орты системы координат (проективные операторы):

$$e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0, \end{bmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

— любой вектор v будем задавать тройкой v_s координат в какой-либо системе координат $Os_1s_2s_3$ (Os); обозначим $\hat{v}$ оператор векторного произведения на этот вектор с соответствующей кососимметрической матрицей

$$\hat{v_s} = \begin{bmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Модель показаний идеального блока ньютонометров

Для начала рассмотрим блок состоящий из идеальных ньютонометров, оси чувствительности которых строго ортогональны. При вращении центрифуги с угловой скоростью Ω_3 примем $\dot{\Omega}_3 \approx 0$. Найдем проекции сил дейтсвующих на датчик на приборную систему координат $Mz_2z_2z_3$. Получим матрицу перехода от Os к Os' из матриц поворота на углы γ_1, γ_2 и γ_3 против часовой стрелки вокруг $Os_1, Os_2,$ и Os_3 соответственно.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_1 & \sin\gamma_1 \\ 0 & -\sin\gamma_1 & \cos\gamma_1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \cos\gamma_2 & 0 & -\sin\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma_2 & 0 & \cos\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} \cos\gamma_3 & \sin\gamma_3 & 0 \\ -\sin\gamma_3 & \cos\gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = C_3 \cdot C_2 \cdot C_1$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\gamma_2)\cos(\gamma_3) & \cos(\gamma_1)\sin(\gamma_3) + \cos(\gamma_3)\sin(\gamma_1)\sin(\gamma_2) & \sin(\gamma_1)\sin(\gamma_3) - \cos(\gamma_1)\cos(\gamma_3)\sin(\gamma_2) \\ -\cos(\gamma_2)\sin(\gamma_3) & \cos(\gamma_1)\cos(\gamma_3) - \sin(\gamma_1)\sin(\gamma_2)\sin(\gamma_3) & \cos(\gamma_3)\sin(\gamma_1) + \cos(\gamma_1)\sin(\gamma_2)\sin(\gamma_3) \\ \sin(\gamma_2) & -\cos(\gamma_2)\sin(\gamma_1) & \cos(\gamma_1)\cos(\gamma_2) \end{pmatrix}$$

Пусть углы α_1, α_2 и $\delta_{.k}$ достаточно малы. Тогда матрицы перехода в линейном приближении по малым углам будут иметь вид:

$$C_{xy} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & \sin\alpha_3 + \cos\alpha_3 & \alpha_1\sin\alpha_3 - \alpha_2\cos\alpha_3 \\ -\sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & \alpha_1\cos\alpha_3 + \alpha_2\sin\alpha_3 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{yz} = \begin{pmatrix} 1 & \delta_{3k} & -\delta_{2k} \\ -\delta_{3k} & 1 & \delta_{1k} \\ \delta_{2k} & -\delta_{1k} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta_{3k} & -\delta_{2k} \\ -\delta_{3k} & 0 & \delta_{1k} \\ \delta_{2k} & -\delta_{1k} & 0 \end{pmatrix} = (E + \hat{\delta}_{.k});$$

При установке блока ньютонометров на центрифугу модель показаний идеальных ньютонометров в k-м положении имеет вид:

$$f_z \approx (E + \hat{\delta}_{.k})P_k \left(\begin{bmatrix} \alpha_1\sin\alpha_3 - \alpha_2\cos\alpha_3 \\ \alpha_1\cos\alpha_3 + \alpha_2\sin\alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(R^0_{.k} + \Delta R_{.k}\right) \right) + \Delta f_z^\rho$$

где Δf_z^ρ — компоненты, связанные с разнесением чувствительных масс ньютонометров внутри блока:

$$\Delta f_z^\rho = \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} (E + \hat{\delta}_{.k}) P_k \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_k^T (E - \hat{\delta}_{.k})(\rho^0 + \Delta\rho) e_z^{(i)}$$

Калибровка в центрифуге проводится для создания перегрузок на датчик значительно превышающих g. Введем следующие значения параметров для модели идеального блока ньютономтеров:

— $R_* = R_{1\,k} = 400\,\text{см} = 0.4\,\text{м}$ — априорное значение первой координаты чувствительной массы расстояния блока ньютонометров в осях вращающейся консоли центрифуги в k-м положении;

— Угловую скорость вращения центрифуги Ω_* [рад/с] выберем такой, чтобы создаваемые перегрузки были равны $10g$, т.е. $R_*\Omega_*^2 = 10g$;

— $T_* = 2\pi/\Omega_*$ [с]— период вращения центрифуги при Ω_* выберем за единицу измерения;

Будем проводить эксперименты при угловых скоростях вида $\Omega_3 = \Omega_*\sqrt{m}$ для $m = 0, 1, 2$, для создания бóльших нагрузок (нам достаточно трех значений угловой скорости вращения центрифуги для демонстрации показаний модели идеального блока ньютонометра)

Определим оставшиеся значения параметров модели:

α_1	α_2	α_3
$1/60° \times \pi/180$	$2/60° \times \pi/180$	$\alpha_0 + \Omega_3 * t$

где $\alpha_0 = 0,\ \pi;\ t = t_0 + T_* k\,,\ k \in \mathbb{Z},\ t_0 = 0;$

k	$\delta_{1\,k}$	$\delta_{2\,k}$	$\delta_{3\,k}$
1	$1.1/60° \times \pi/180$	$2.1/60° \times \pi/180$	$3.1/60° \times \pi/180$
2	$1.2/60° \times \pi/180$	$2.2/60° \times \pi/180$	$3.2/60° \times \pi/180$
3	$1.3/60° \times \pi/180$	$2.3/60° \times \pi/180$	$3.3/60° \times \pi/180$
4	$1.4/60° \times \pi/180$	$2.4/60° \times \pi/180$	$3.4/60° \times \pi/180$
5	$1.5/60° \times \pi/180$	$2.5/60° \times \pi/180$	$3.5/60° \times \pi/180$
6	$1.6/60° \times \pi/180$	$2.6/60° \times \pi/180$	$3.6/60° \times \pi/180$

В последующих табличных значениях присутствуют некоторые геометрические ограничения, которые будут описаны по ходу выполнения работы.

k	R_{1k}^0	R_{2k}^0	R_{3k}^0
1	$400 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
2	$400 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
3	$400 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
4	$400 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$
5	$400 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
6	$400 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$

k	ΔR_{1k}	ΔR_{2k}	ΔR_{3k}
1	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$
2	$-1.2 \cdot 10^{-7}$	$-1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
3	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$
4	$-1.3 \cdot 10^{-7}$	$-1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
5	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$
6	$-1.4 \cdot 10^{-7}$	$-1.4 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$

j	ρ^0_{j1}	ρ^0_{j2}	ρ^0_{j2}
1	0	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
2	0	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
3	0	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$

j	$\Delta\rho_{j1}$	$\Delta\rho_{j2}$	$\Delta\rho_{j3}$
1	0	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$
2	0	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$
3	0	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$

В результате мы получим по 6 графиков для каждого значения угловой скорости:

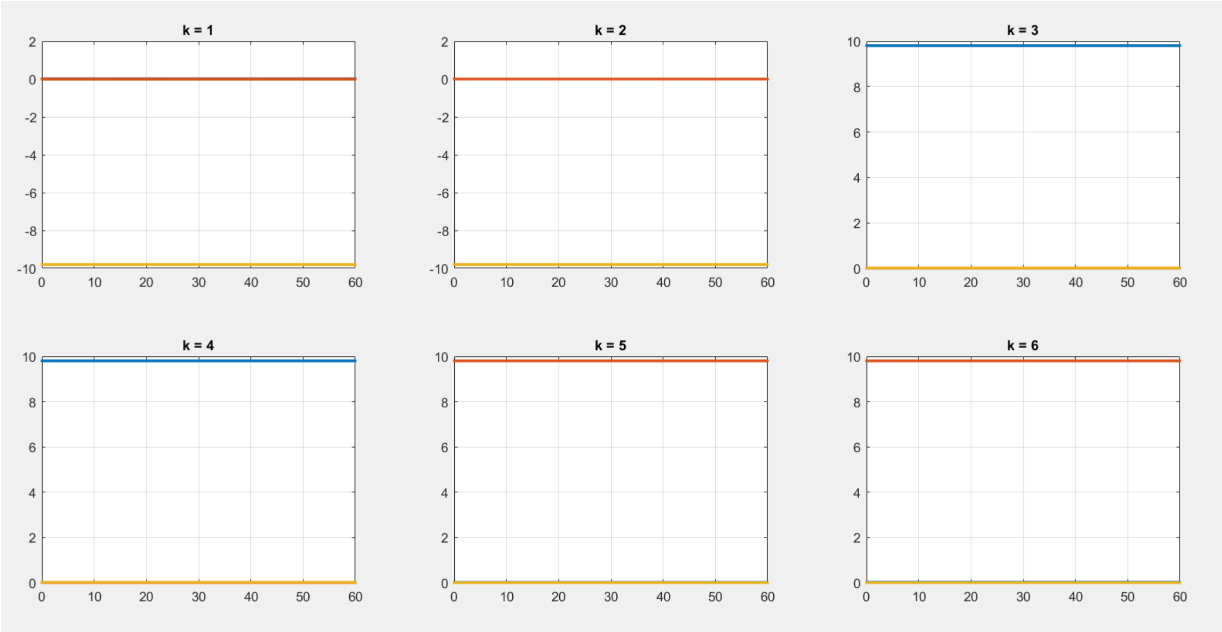


Рис. 4: Показания идеальных датчиков при $\Omega_3 = 0$

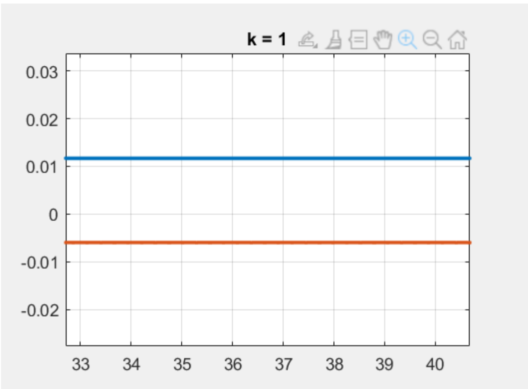


Рис. 5: Увеличеный вид показаний идеальных датчиков при $\Omega_3 = 0$

где z_1 — синий цвет; z_2 — красный цвет; z_3 — желтый цвет

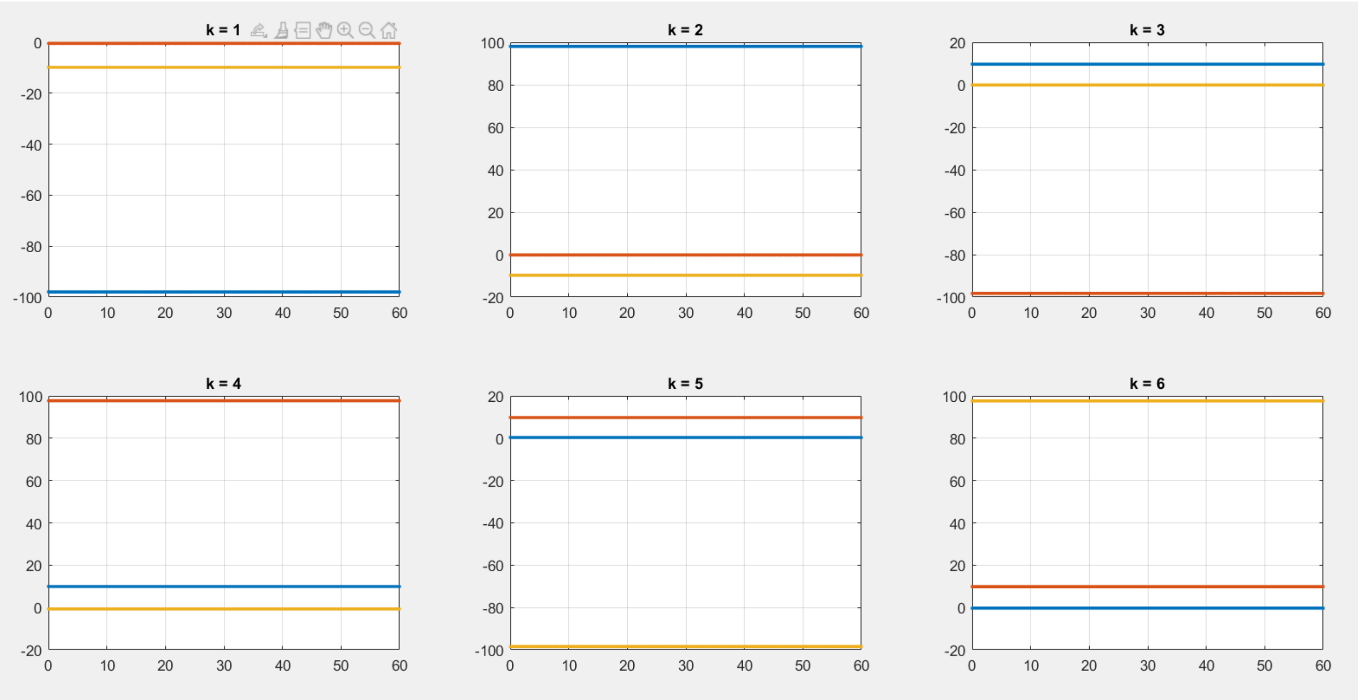


Рис. 6: Показания идеальных датчиков при $\Omega_3 = \Omega_*$

При вращении центрифуги, помимо смещений показаний в зависимости от ориентации блока ньютонометров, можно заметить возмущения, амплитуда которых зависит от малых углов отклонения от оси вращения.

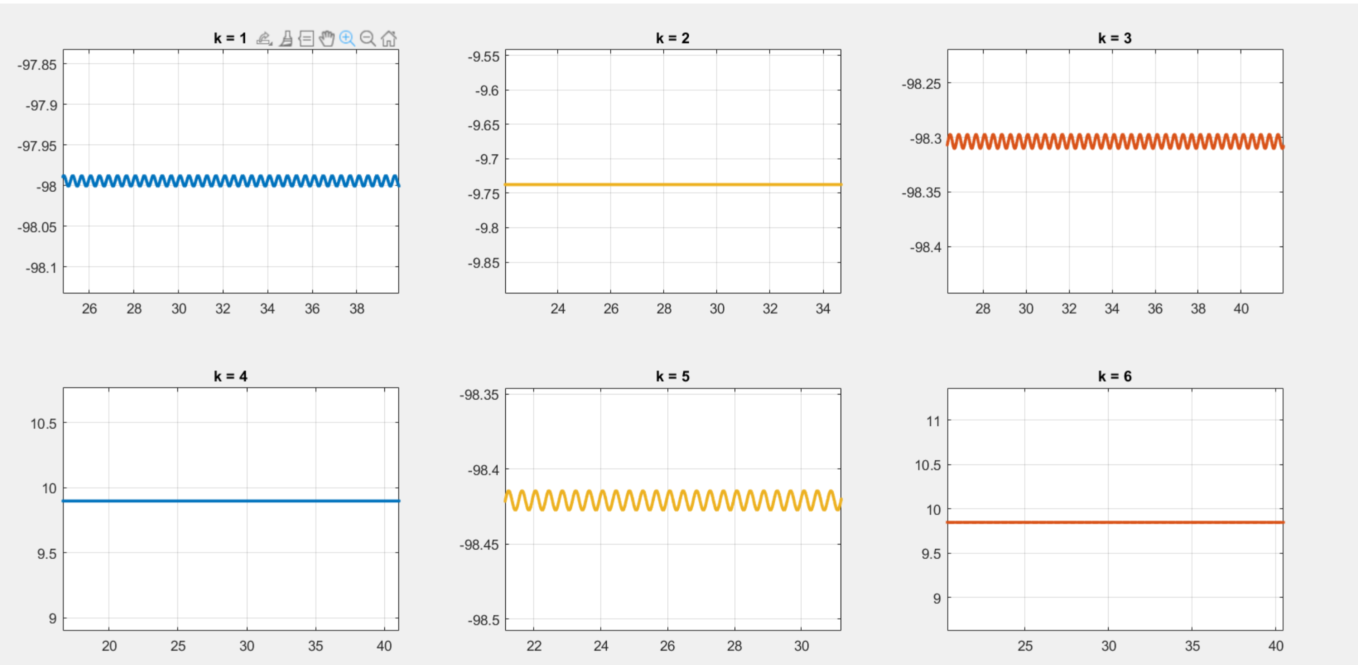


Рис. 7: Увеличеные показаний идеальных датчиков при $\Omega_3 = \Omega_*$

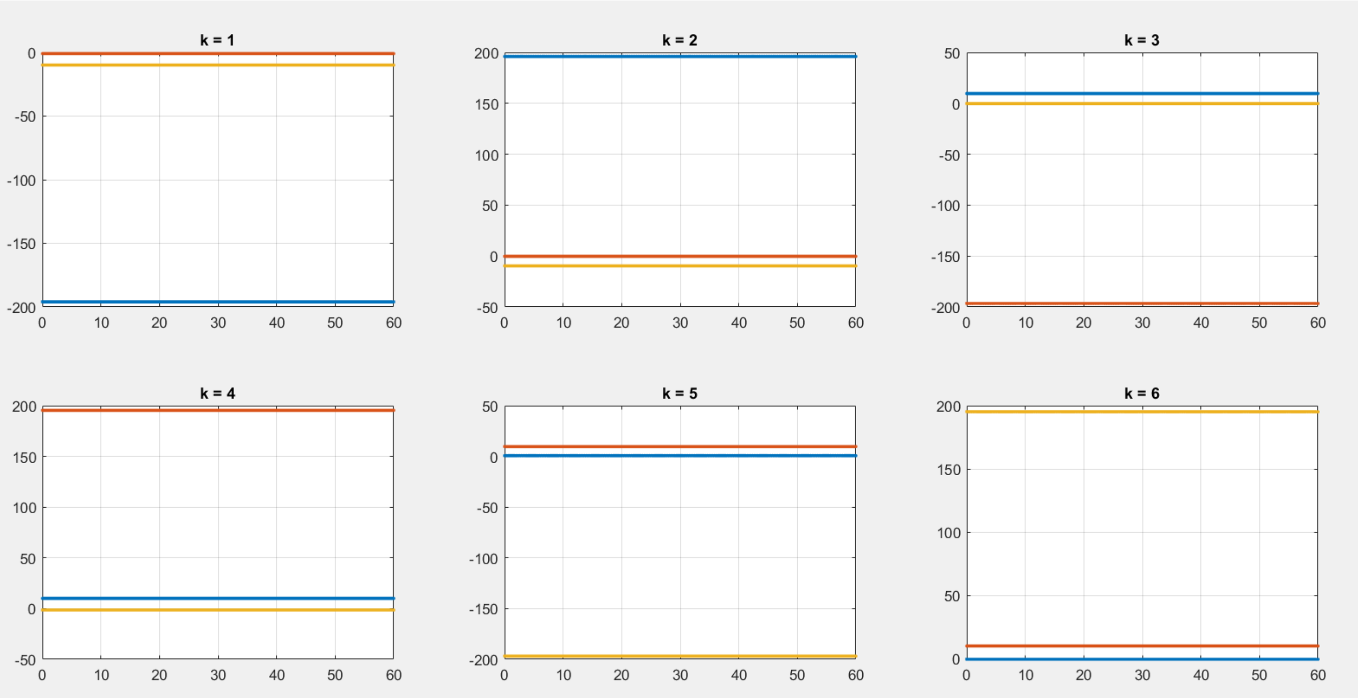


Рис. 8: Показания идеальных датчиков при $\Omega_3 = \Omega_* \sqrt{2}$

При увеличении угловой скорости вращения показания компонент совпадающих с направлением y_1 увеличиваются по модулю.

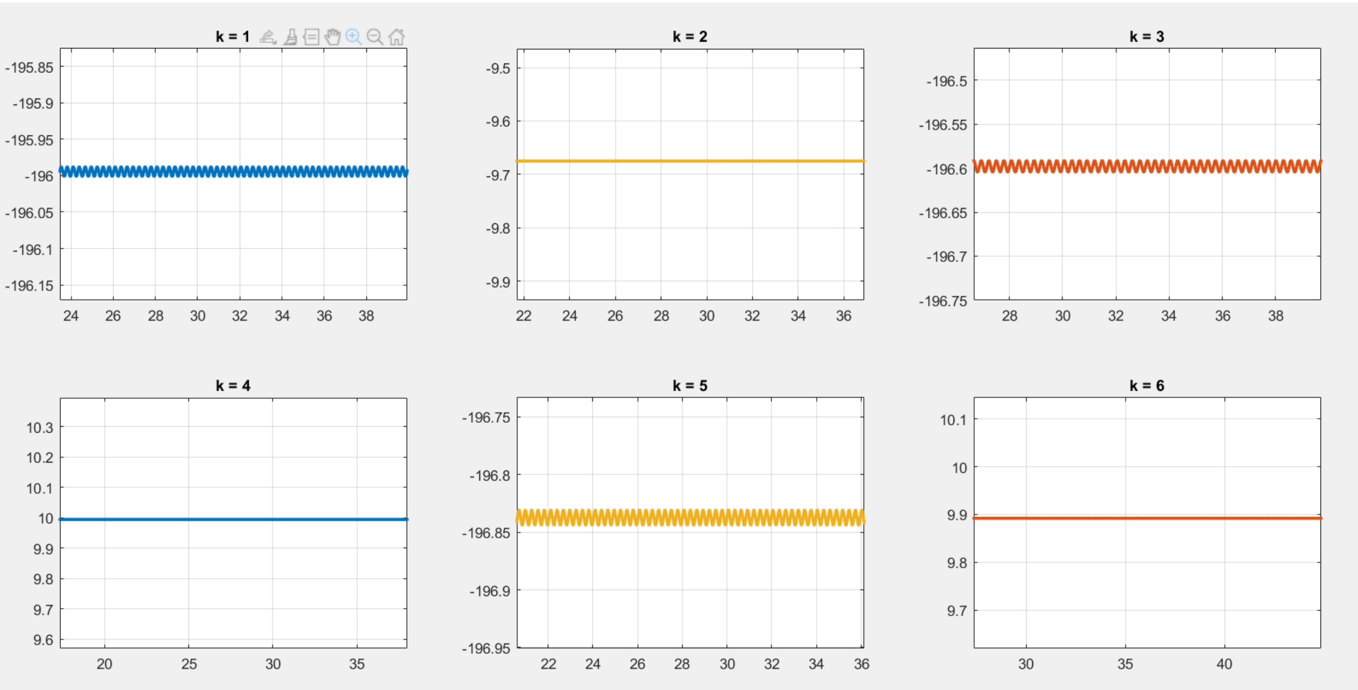


Рис. 9: Увеличенный вид показаний идеальных датчиков при $\Omega_3 = \Omega_* \sqrt{2}$

2.3 Модель погрешностей блока ньютонометров

Теперь введем априорную модель погрешностей блока ньтонометров. Она с связана с тем, что выполнить установку так, чтобы оси чувствительности ньютонометров составляли ортогональные трехгранники, практически невозможно. Из-за чего возникают погрешности геометрии и перекосы. Важно отметить, что введеная выше приборная система координат $Mz_1z_2z_3$ опеределена так, что оси чувствительности ньютономеров близки к приборным осям.

Обозначим f_z' — результат измерений вектора f_z ньютонометров. Тогда простейшая модель погрешностей блока имеет вид:

$$f_z' - f_z \equiv \Delta f_z = \Delta f_z^0 + \Gamma f_z + \delta f_z, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{(0)} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21}^{(0)} & \Gamma_{22}^{(0)} & 0 \\ \Gamma_{31}^{(0)} & \Gamma_{32}^{(0)} & \Gamma_{33}^{(0)} \end{bmatrix}$$

где

— $\Delta f_z^0 \in \mathbb{R}^3$ — вектор погрешностей нулей

— Γ_{ii} — погрешности масштабных коэфициентов ньютонометра, а $\Gamma_{ij}, (i \neq j)$ — погрешности установки (малые углы перекосов осей чувствительности)

— δf_z — стохастическая компонента погрешности (белый шум). Считается, что она имеет нулевое среднее или малое стандартное отклонение $\sigma_{\delta f}/g \ll 1$.

Будем считать, что уже проведена некоторая предварительная грубая калибровка датчиков, так что $\|\Delta f_z^0\|/g \ll 1, \quad |\Gamma_{ij}| \ll 1$.

2.4 Нелинейные модели погрешностей инерциальных датчиков

Под действием больших перегрузок могут возникать погрешности, которые невозможно описать линейно, для чего вводятся различные нелинейные модели погрешностей блока.

Введем модель нелинейных масштабных коэффициентов, аппроксимируемых полиномом второй степени, и перекосов осей чувствительности, пропорциональных ортогональным им компонентам перегрузок

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(1)} \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} f_z e_z^{(i)T} + \Gamma^{(2)} \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} f_z f_z^T e_z^{(i)} e_z^{(i)T},$$

где

$$\Gamma^{(1)} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{(1)} & \Gamma_{12}^{(1)} & \Gamma_{13}^{(1)} \\ \Gamma_{21}^{(1)} & \Gamma_{22}^{(1)} & \Gamma_{23}^{(1)} \\ \Gamma_{31}^{(1)} & \Gamma_{32}^{(1)} & \Gamma_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \Gamma^{(2)} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Такая модель допускает наблюдаемую иногда несимметричность масштабных коэффициентов ньютонометров (приведённые выражения намеренно выписаны в матрично-векторной форме, для того чтобы вид формул не менялся при замене системы координат).

3 Моделирование

3.1 Калибровочные эксперименты

Для последующей компенсации систематической составляющей погрешностей в показаниях датчиков при реальном применении по назначению в будущем для каждого блока необходимо провести идентификацию (калибровку) параметров введённой модели для неё, где искомыми параметрами выступают компоненты: $\alpha_{1,2}$, $\delta_{.k}, \Delta R_{.k}, \Delta\rho, \Delta f_z^0, \Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$

Рассмотрим равномерные вращения с различными заданными угловыми скоростями Ω_3 блока ньютонометров, установленного поочерёдно в шести положениях. Для линеаризации моделей введем следущие условия:

— погрешности геометрической информации — $\Delta R_{\cdot k}$, $\Delta\rho$, малых углов — $\delta_{\cdot k}$, а также составляющие Γ достаточно малы, чтобы погрешностями второго порядка малости по ним можно было пренебречь;

— по техническим причинам, величина угла α_3 на практике оказывается известна только при неподвижной центрифуге. При вращении в моделях будем использовать только усреднённые по времени величины;

За модельные значения показаний ньютонометров в k-м положении блока относительно центрифуги примем тройку

$$f_z^0 = P_k \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R^0_{\cdot k} \right) + \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} P_k \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_k^T \rho^0 e_z^{(i)}$$

Из доступной информации сформируем измерения «в малом», нормированные к величине местной силы тяжести:

$$z^{(k)} = \frac{\overline{f'_z} - f_z^0}{g},$$

где черта сверху $\overline{\cdot}$ означает осреднение по времени и $f'_z = f_z + \Delta f_z$ — результат измерений вектора f_z — модели показаний идеальных ньютонометров.

3.2 Вывод модели измерений

Воспользуемся формулами приведенными в предыдущих параграфах для вывода модели измерений, которые линейным образом связаны с искомыми величинами.

модель показаний идеального блока ньютонометров:

$$f_z \approx (E + \hat{\delta}_{.k}) P_k \left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \sin\alpha_3 - \alpha_2 \cos\alpha_3 \\ \alpha_1 \cos\alpha_3 + \alpha_2 \sin\alpha_3 \\ 1 \end{bmatrix} g + \right.$$
$$\left. + \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (R_{.k} + \Delta R_{.k}) \right) + \Delta f_z^\rho, \quad (1)$$

$$\Delta f_z^{\rho}=\sum_{i=1}^{3}e_z^{(i)}e_z^{(i)T}(E+\hat{\delta}_{.k})P_k\begin{bmatrix}-\Omega_3^2 & 0 & 0\\ 0 & -\Omega_3^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}P_k^T(E-\hat{\delta}_{.k})(\rho^0+\Delta\rho)e_z^{(i)}, \tag{2}$$

модель погрешостей блока ньютонометров:

$$f_z'-f_z\equiv\Delta f_z=\Delta f_z^0+\Gamma f_z+\delta f_z \tag{3}$$

нелинейные модели погрешностей инерциальный датчиков:

$$\Gamma=\Gamma^{(0)}+\Gamma^{(1)}\sum_{i=1}^{3}e_z^{(i)}e_z^{(i)T}f_z e_z^{(i)T}+\Gamma^{(2)}\sum_{i=1}^{3}e_z^{(i)}e_z^{(i)T}f_z f_z^T e_z^{(i)}e_z^{(i)T}, \tag{4}$$

где

$$\Gamma^{(0)}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}^{(0)} & 0 & 0\\ \Gamma_{21}^{(0)} & \Gamma_{22}^{(0)} & 0\\ \Gamma_{31}^{(0)} & \Gamma_{32}^{(0)} & \Gamma_{33}^{(0)}\end{bmatrix}\quad \Gamma^{(1)}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}^{(1)} & \Gamma_{12}^{(1)} & \Gamma_{13}^{(1)}\\ \Gamma_{21}^{(1)} & \Gamma_{22}^{(1)} & \Gamma_{23}^{(1)}\\ \Gamma_{31}^{(1)} & \Gamma_{32}^{(1)} & \Gamma_{33}^{(1)}\end{bmatrix}\quad \Gamma=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}^{(2)} & 0 & 0\\ 0 & \Gamma_{22}^{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \Gamma_{33}^{(2)}\end{bmatrix}$$

модельные показания ньютонометров относительно центрифуги:

$$f_z^0=P_k\left(\begin{bmatrix}0\\0\\g\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\Omega_3^2 & 0 & 0\\ 0 & -\Omega_3^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}R^0_{\cdot k}\right)+\sum_{i=1}^{3}e_z^{(i)}e_z^{(i)T}P_k\begin{bmatrix}-\Omega_3^2 & 0 & 0\\ 0 & -\Omega_3^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}P_k^T\rho^0 e_z^{(i)} \tag{5}$$

Для демонстрации для начала подробно распишем модель показаний при неподвижной центрифуге в первом положении.

Из предыдущего параграфа видно, что:

$$z^{(1)}|_{\Omega_3=0}=\frac{\overline{f_z'}-f_z^0}{g}=\frac{\overline{f_z}-f_z^0+\Delta f_z}{g}$$

Так как $\Omega_3=0$, (1) и (3.2) примут вид:

$$f_z\approx(E+\hat{\delta}_{.1})P_1\begin{bmatrix}\alpha_1\sin\alpha_3-\alpha_2\cos\alpha_3\\ \alpha_1\cos\alpha_3+\alpha_2\sin\alpha_3\\ 1\end{bmatrix}g,\qquad \Delta f_z^{\rho}=0,$$

где

$$\hat{\delta}_{.1}=\begin{pmatrix}0 & \delta_{31} & -\delta_{21}\\ -\delta_{31} & 0 & \delta_{11}\\ \delta_{21} & -\delta_{11} & 0\end{pmatrix}\qquad P_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$f_z\approx\begin{pmatrix}1 & \delta_{31} & -\delta_{21}\\ -\delta_{31} & 1 & \delta_{11}\\ \delta_{21} & -\delta_{11} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\sin\alpha_3-\alpha_2\cos\alpha_3\\ \alpha_1\cos\alpha_3+\alpha_2\sin\alpha_3\\ 1\end{bmatrix}g$$

Линеаризируя, получаем:

$$f_z\approx\begin{pmatrix}\alpha_1\sin\alpha_3-\alpha_2\cos\alpha_3-\delta_{21}\\ \alpha_1\cos\alpha_3+\alpha_2\sin\alpha_3+\delta_{11}\\ 1\end{pmatrix}g$$

Также так как $\Omega_3 = 0$:

$$f_z^0 = P_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g$$

Тогда разность:

$$\overline{f_z} - f_z^0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \sin\alpha_3 - \alpha_2 \cos\alpha_3 - \delta_{21} \\ \alpha_1 \cos\alpha_3 + \alpha_2 \sin\alpha_3 + \delta_{11} \\ 1 \end{pmatrix} g - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} \alpha_1 \sin\alpha_3 - \alpha_2 \cos\alpha_3 - \delta_{21} \\ \alpha_1 \cos\alpha_3 + \alpha_2 \sin\alpha_3 + \delta_{11} \\ 0 \end{pmatrix} g$$

Следовательно для нашего измерения мы получаем:

$$z^{(1)}|_{\Omega_3=0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \sin\alpha_3 - \alpha_2 \cos\alpha_3 - \delta_{21} \\ \alpha_1 \cos\alpha_3 + \alpha_2 \sin\alpha_3 + \delta_{11} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}$$

Аналогично получаем значения для оставшихся 5-ти положений при неподвижной центрифуге:

$$z^{(2)}|_{\Omega_3=0} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \sin\alpha_3 + \alpha_2 \cos\alpha_3 - \delta_{22} \\ -\alpha_1 \cos\alpha_3 - \alpha_2 \sin\alpha_3 + \delta_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}$$

$$z^{(3)}|_{\Omega_3=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \sin\alpha_3 - \alpha_2 \cos\alpha_3 + \delta_{33} \\ -\alpha_1 \cos\alpha_3 - \alpha_2 \sin\alpha_3 - \delta_{23} \end{pmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}$$

$$z^{(4)}|_{\Omega_3=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha_1 \sin\alpha_3 + \alpha_2 \cos\alpha_3 + \delta_{34} \\ \alpha_1 \cos\alpha_3 + \alpha_2 \sin\alpha_3 - \delta_{24} \end{pmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}$$

$$z^{(5)}|_{\Omega_3=0} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \cos\alpha_3 - \alpha_2 \sin\alpha_3 - \delta_{35} \\ 0 \\ \alpha_1 \sin\alpha_3 - \alpha_2 \cos\alpha_3 + \delta_{15} \end{pmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}$$

$$z^{(6)}|_{\Omega_3=0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos\alpha_3 + \alpha_2 \sin\alpha_3 - \delta_{36} \\ 0 \\ -\alpha_1 \sin\alpha_3 + \alpha_2 \cos\alpha_3 + \delta_{16} \end{pmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}$$

Из выкладок видно, что измерения в линейном приближении известным образом связаны с искомыми величинами. Расспишем показания во время вращения в 6-ом положении:

$$z^{(6)}|_{\Omega_3\neq 0} = \frac{\overline{f_z'} - f_z^0}{g} = \frac{\overline{f_z} - f_z^0 + \Delta f_z}{g}$$

Из-за невозможности определить угол α_3 при вращении центрифуги, $\overline{f_z}$ принимает вид:

$$f_z \approx (E + \hat{\delta}_{.6}) P_6 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (R_{.6} + \Delta R_{.6}) \right) + \Delta f_z^{\rho}$$

где

$$\Delta f_z^{\rho} = \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} (E + \hat{\delta}_{.6}) P_6 \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_k^T (E - \hat{\delta}_{.6})(\rho^0 + \Delta\rho) e_z^{(i)},$$

$$\hat{\delta}_{.6} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{36} & -\delta_{26} \\ -\delta_{36} & 0 & \delta_{16} \\ \delta_{26} & -\delta_{16} & 0 \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда мы получим

$$f_z \approx \left(E + \begin{bmatrix} 0 & \delta_{36} & -\delta_{26} \\ -\delta_{36} & 0 & \delta_{16} \\ \delta_{26} & -\delta_{16} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} R_{16}^0 \\ R_{26}^0 \\ R_{36}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta R_{16} \\ \Delta R_{26} \\ \Delta R_{36} \end{bmatrix} \right) \right) + \Delta f_z^{\rho}$$

$$f_z \approx \begin{pmatrix} 1 & \delta_{36} & -\delta_{26} \\ -\delta_{36} & 1 & \delta_{16} \\ \delta_{26} & -\delta_{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega_3^2 (R_{16}^0 + \Delta R_{16}) \\ -\Omega_3^2 (R_{26}^0 + \Delta R_{26}) \\ g \end{pmatrix} + \Delta f_z^{\rho}$$

С учетом линеаризации:

$$\overline{f_z} = \begin{pmatrix} -\Omega_3^2 R_{26}^0 - \Omega_3^2 \Delta R_{26} - \delta_{36} g - \Omega_3^2 R_{16}^0 \delta_{26} \\ \Omega_3^2 R_{26}^0 \delta_{36} - g + \Omega_3^2 R_{16}^0 \delta_{16} \\ -\Omega_3^2 R_{26}^0 \delta_{26} + \delta_{36} g + \Omega_3^2 R_{16}^0 + \Omega_3^2 \Delta R_{16} \end{pmatrix} + \Delta f_z^{\rho}$$

$$\Delta f_z^{\rho} = \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} \left(E + \begin{bmatrix} 0 & \delta_{36} & -\delta_{26} \\ -\delta_{36} & 0 & \delta_{16} \\ \delta_{26} & -\delta_{16} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left(E - \begin{bmatrix} 0 & \delta_{36} & -\delta_{26} \\ -\delta_{36} & 0 & \delta_{16} \\ \delta_{26} & -\delta_{16} & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot$$
$$\cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & \rho_{12}^0 & \rho_{13}^0 \\ 0 & \rho_{22}^0 & \rho_{23}^0 \\ 0 & \rho_{32}^0 & \rho_{33}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Delta\rho_{12} & \Delta\rho_{13} \\ 0 & \Delta\rho_{22} & \Delta\rho_{23} \\ 0 & \Delta\rho_{32} & \Delta\rho_{33} \end{bmatrix} \right) e_z^{(i)}$$

$$\Delta f_z^\rho = \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} \begin{pmatrix} 1 & \delta_{36} & -\delta_{26} \\ -\delta_{36} & 1 & \delta_{16} \\ \delta_{26} & -\delta_{16} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\delta_{36} & \delta_{26} \\ \delta_{36} & 1 & -\delta_{16} \\ -\delta_{26} & \delta_{16} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^0 + \Delta\rho_{12} & \rho_{13}^0 + \Delta\rho_{13} \\ 0 & \rho_{22}^0 + \Delta\rho_{22} & \rho_{23}^0 + \Delta\rho_{23} \\ 0 & \rho_{32}^0 + \Delta\rho_{32} & \rho_{33}^0 + \Delta\rho_{33} \end{pmatrix} e_z^{(i)}$$

Линеаризация:

$$\Delta f_z^\rho = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_3^2 \delta_{36} \rho_{12}^0 - \Omega_3^2 \delta_{16} \rho_{32}^0 \\ -\Omega_3^2 \delta_{16} \rho_{23}^0 - \Omega_3^2 \rho_{33}^0 - \Omega_3^2 \Delta\rho_{33} \end{pmatrix}$$

$$f_z^0 = P_6 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R^0_{\cdot 6} \right) + \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} P_6 \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P_6^T \rho^0 e_z^{(i)}$$

$$f_z^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{16}^0 \\ R_{26}^0 \\ R_{36}^0 \end{bmatrix} \right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^0 & \rho_{13}^0 \\ 0 & \rho_{22}^0 & \rho_{23}^0 \\ 0 & \rho_{32}^0 & \rho_{33}^0 \end{pmatrix} e_z^{(i)}$$

$$f_z^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega_3^2 R_{16}^0 \\ -\Omega_3^2 R_{26}^0 \\ g \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{3} e_z^{(i)} e_z^{(i)T} \begin{pmatrix} -\Omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12}^0 & \rho_{13}^0 \\ 0 & \rho_{22}^0 & \rho_{23}^0 \\ 0 & \rho_{32}^0 & \rho_{33}^0 \end{pmatrix} e_z^{(i)}$$

$$f_z^0 = \begin{pmatrix} -\Omega_3^2 R_{26}^0 \\ -g \\ \Omega_3^2 R_{16}^0 - \Omega_3^2 \rho_{33}^0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{f_z} - f_z^0 = \begin{pmatrix} -\Omega_3^2 R_{26}^0 - \Omega_3^2 \Delta R_{26} - \delta_{36} g - \Omega_3^2 R_{16}^0 \delta_{26} \\ \Omega_3^2 R_{26}^0 \delta_{36} - g + \Omega_3^2 R_{16}^0 \delta_{16} \\ -\Omega_3^2 R_{26}^0 \delta_{26} + \delta_{36} g + \Omega_3^2 R_{16}^0 + \Omega_3^2 \Delta R_{16} \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_3^2 \delta_{36} \rho_{12}^0 - \Omega_3^2 \delta_{16} \rho_{32}^0 \\ -\Omega_3^2 \delta_{16} \rho_{23}^0 - \Omega_3^2 \rho_{33}^0 - \Omega_3^2 \Delta\rho_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\Omega_3^2 R_{26}^0 \\ -g \\ \Omega_3^2 R_{16}^0 - \Omega_3^2 \rho_{33}^0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{f_z} - f_z^0 = \begin{pmatrix} -\Omega_3^2 \Delta R_{26} - \delta_{36} g - \Omega_3^2 R_{16}^0 \delta_{26} \\ \Omega_3^2 \delta_{36} \rho_{12}^0 + \Omega_3^2 R_{26}^0 \delta_{36} + \Omega_3^2 R_{16}^0 \delta_{16} - \Omega_3^2 \delta_{16} \rho_{32}^0 \\ -\Omega_3^2 R_{26}^0 \delta_{26} + \delta_{36} g + \Omega_3^2 \Delta R_{16} - \Omega_3^2 \delta_{16} \rho_{23}^0 - \Omega_3^2 \Delta\rho_{33} \end{pmatrix}$$

$$
z^{(6)}|_{\Omega_3\neq 0} = \frac{\overline{f_z} - f_z^0 + \Delta f_z}{g} = \begin{bmatrix} -\frac{\Omega_3^2}{g}(\Delta R_{26} + R_{16}^0\delta_{26}) - \delta_{36} \\ \frac{\Omega_3^2}{g}(R_{26}^0\delta_{36} + R_{16}^0\delta_{16} - \delta_{16}\rho_{32}^0 + \delta_{36}\rho_{12}^0) \\ -\frac{\Omega_3^2}{g}(R_{26}^0\delta_{26} - \Delta R_{16} + \delta_{16}\rho_{23}^0 + \Delta\rho_{33}) + \delta_{16} \end{bmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}
$$

Аналогично для первых 5-ти положений при вращении центрифуги имеем:

$$
z^{(1)}|_{\Omega_3\neq 0} = \begin{bmatrix} -\frac{\Omega_3^2}{g}(\Delta R_{11} + R_{21}^0\delta_{31}) - \delta_{21} \\ \frac{\Omega_3^2}{g}(R_{11}^0\delta_{31} - \Delta R_{21} + \Delta\rho_{22} + \delta_{11}\rho_{32}^0) + \delta_{11} \\ \frac{\Omega_3^2}{g}(-R_{11}^0\delta_{21} + R_{21}^0\delta_{11} + \delta_{11}\rho_{23}^0 - \delta_{21}\rho_{13}^0) \end{bmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}
$$

$$
z^{(2)}|_{\Omega_3\neq 0} = \begin{bmatrix} \frac{\Omega_3^2}{g}(\Delta R_{12} + R_{22}^0\delta_{32}) - \delta_{22} \\ -\frac{\Omega_3^2}{g}(R_{12}^0\delta_{32} - \Delta R_{22} + \Delta\rho_{22} - \delta_{12}\rho_{32}^0) + \delta_{12} \\ \frac{\Omega_3^2}{g}(R_{12}^0\delta_{22} - R_{22}^0\delta_{12} + \delta_{12}\rho_{23}^0 - \delta_{22}\rho_{13}^0) \end{bmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}
$$

$$
z^{(3)}|_{\Omega_3\neq 0} = \begin{bmatrix} -\frac{\Omega_3^2}{g}(R_{23}^0\delta_{23} + R_{13}^0\delta_{33}) \\ -\frac{\Omega_3^2}{g}(\Delta R_{13} - R_{23}^0\delta_{13} + \Delta\rho_{22} + \delta_{33}\rho_{12}^0) + \delta_{33} \\ \frac{\Omega_3^2}{g}(R_{13}^0\delta_{13} + \Delta R_{23} - \Delta\rho_{33} - \delta_{23}\rho_{13}^0) - \delta_{23} \end{bmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}
$$

$$
z^{(4)}|_{\Omega_3\neq 0} = \begin{bmatrix} \frac{\Omega_3^2}{g}(R_{24}^0\delta_{24} + R_{14}^0\delta_{34}) \\ \frac{\Omega_3^2}{g}(\Delta R_{14} - R_{24}^0\delta_{14} - \Delta\rho_{22} - \delta_{34}\rho_{12}^0) + \delta_{34} \\ -\frac{\Omega_3^2}{g}(R_{14}^0\delta_{14} + \Delta R_{24} + \Delta\rho_{33} + \delta_{34}\rho_{13}^0) - \delta_{24} \end{bmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}
$$

$$
z^{(5)}|_{\Omega_3\neq 0} = \begin{bmatrix} \frac{\Omega_3^2}{g}(\Delta R_{25} + R_{15}^0\delta_{25}) - \delta_{35} \\ -\frac{\Omega_3^2}{g}(R_{25}^0\delta_{35} + R_{15}^0\delta_{15} + \delta_{15}\rho_{32}^0 - \delta_{35}\rho_{12}^0) \\ \frac{\Omega_3^2}{g}(R_{25}^0\delta_{25} - \Delta R_{15} - \delta_{16}\rho_{23}^0 + \Delta\rho_{33}) + \delta_{15} \end{bmatrix} + \frac{\Delta f_z}{g}
$$

Расписывая компоненты Δf_z, мы получаем 12 формул: 6 при неподвижной центрифуге и 6 при равномерном вращении, где искомыми величинами выступают углы α_1 и α_2, компоненты троек $\delta_{\cdot k}$, $\Delta R_{\cdot k}$, Δf_z^0, матриц $\Delta\rho$, $\Gamma^{(0)}$, $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, а их коэффициентами — Ω_3^2, g и компоненты троек $R_{\cdot k}^0$ и матрицы ρ^0

3.3 Обеспечение наблюдаемости искомых величин и введение геометрических ограничений

В настоящем разделе будут рассмотрены условия, необходимые для обеспечения возможности оценки параметров модели погрешностей блока ньютонометров. Из предварительного анализа связи измерений и неизвестных величин видно, что для обеспечения наблюдаемости искомых величин необходимо провести эксперименты при нескольких различных значениях угловой скорости Ω_3 и при различных удалениях $R^0_{1\,k}$ блока ньютонометров от оси вращения.

Введем описания единиц измерения и величин констант, при которых будем проводить эксперименты:

1. Единица измерения длин — $R_* = |R^0_{11}|$;

2. Единица измерения времени — T_* такое, что

$$\frac{\Omega_*^2}{g}R_* = \frac{4\pi^2}{T_*^2} \cdot \frac{R_*}{g} = 10;$$

3. Значения угловых скоростей будут иметь вид — $\Omega_3 = \Omega_*\sqrt{m}$ для $m = 0, 1, 2, ...$;

4. При неподвижной центрифуге $(m = 0)$: $\alpha_3 = 0, \pi$;

5. При равномерном вращении $(m = 1, 2, ...)$: $R^0_{1\,k} = R^0_*,\ R^0_*/2$;

В указанных условиях коэффициентами в приведенной выше модели будут: нули, числа вида — $\pm 1, \pm 1/2, \pm(10m)^{1,2,3}, \pm 1/g$, а также малые коэффициенты, не оказывающие существенного влияния на точность оценки.

Отметим, что все расстояния в системе не превышают единицу измерения, а большинство из них значительно меньше.

Вектор описанных выше неизвестных констант, входящих в модель, будет иметь вид:

$$X = \Big[\alpha_{1,2}\ \delta_{11,\ldots,36}\ \Delta R_{11,21,13,23,15,25}\ \Delta\rho_{22,33}\ \Delta f^0_{1,2,3}\ \Gamma^{(0)}_{11,\ldots,33}\ldots\Gamma^{(2)}_{11,\ldots,33}\Big]^T \in \mathbb{R}^{49}$$

Так как вертикальные смещения приведенной чувствительной массы ($R^0_{k\,3}$ и $\Delta R_{k\,3}$) не влияют на показания ньютонометров, а ошибки горизонтальных ее смещений связаны:

$$\Delta R_{12} = -\Delta R_{11},\ \ \Delta R_{22} = -\Delta R_{21},\ \ \Delta R_{14} = -\Delta R_{13},$$

$$\Delta R_{24} = -\Delta R_{23},\ \ \Delta R_{16} = -\Delta R_{15},\ \ \Delta R_{26} = -\Delta R_{25}$$

При отсутствии такой связи внутренние разнесения чувствительных масс ньютонометров будут оцениваться только в комбинации с некоторыми отнесениями приведённой чувствительной массы, что, однако, не препятствует оценке параметров модели погрешностей Δf_z.

Полный набор измерений будет линейно связан с X с точностью до малых погрешностей r:

$$Z = HX + r, M[r] \approx 0$$

где матрица H составляется исходя из моделей измерений, приведенный выше.

3.4 Анализ матрицы, составленной из моделей измерений

Рассмотрим модель измерений при трех различных угловых скоростях: $\Omega_3 = 0,\ \Omega_*,\ \Omega_*\sqrt{2}$; двух углах поворота: $\alpha_3 = 0,\ \pi$, когда $\Omega_3 = 0$; и при двух значениях удаления от оси вращения: $R^0_{1\,k} = R^0_*,\ R^0_*/2$;

В таком случае можно провести анализ матрицы H, размерность которой при заданном количестве величин и экспериментов будет равна $[m \times n = 108 \times 49]$, при это маскимальный ранг матрицы будет равен 47. Действительно, рассмотрим сингулярное разложение матрицы H:

$$H = U \cdot \Sigma \cdot V^T,$$

где Σ — матрица размера $m \times n$ с неотрицательными элементами, у которой элементы, лежащие на главной диагонали — это сингулярные числа (а все элементы, не лежащие на главной диагонали, являются нулевыми), а матрицы U (порядка m) и V (порядка n), состоящие из левых и правых сингулярных векторов соответственно. Как и ожидаемо, ранг матрицы Σ также равен 47, что нам горит о неполной наблюдаемости величин.

Из 6-ти мерного подпространство переменных $\Delta R_{12},\ \Delta R_{13},\ \Delta R_{23},\ \Delta R_{15},\ \rho_{22},\ \rho_{33}$, (соотвествующие столбцы коэффициентов в матрице H которых линейно зависимы) выделяется 2-х мерное ненаблюдаемое подпростравно ΔR_{12} и ΔR_{23}, и соотвественно наблюдаемое 4-х мерное подпростространство $\Delta R_{13},\ \Delta R_{15},\ \rho_{22},\ \rho_{33}$. Неполная наблюдаемость параметров не препятствует оценке параметров. Внутренние разнесения чувтствительных масс ньютонометров будут оцениваться в комбинации с отнесениями приведенной чувствительной массы.

3.5 Сравнения заданных в моделировании величин и полученных оценок для них

Проведем оценку параметров модели с помощью МНК. Так как матрица $H^T H$ вырождена, воспользуемся сингулярным разложением:

$$X = V \cdot \Sigma^{-1} \cdot U^T \cdot Z,$$

где $\Sigma^+ = \sigma^+_{ij}$— псевдообратная матрица к Σ, элементы которой имеют вид:

$$\sigma^+_{ii} = \begin{cases} 1/\sigma_{ii}, & \sigma_{ii} \neq 0 \\ 0, & \sigma_{ii} = 0 \end{cases}, \quad i = j; \quad \sigma^+_{ij} = 0, \ \ i \neq j \tag{6}$$

Сравним полученые результаты $X_{\text{мнк}} = H^+ Z$ с помощью псевдообратной матрицы H с задаными в моделировании величинами X_0:

	α_1	α_2
X_0	$2.91 \cdot 10^{-4}$	$5.82 \cdot 10^{-4}$
X_{mnk}	$2.91 \cdot 10^{-4}$	$5.82 \cdot 10^{-4}$

	Δf_1^0	Δf_2^0	Δf_3^0
X_0	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
X_{mnk}	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$

	δ_{11}	δ_{21}	δ_{31}	δ_{12}	δ_{22}	δ_{32}
X_0	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$6.11 \cdot 10^{-4}$	$9.02 \cdot 10^{-4}$	$3.49 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$9.31 \cdot 10^{-4}$
X_{mnk}	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$6.11 \cdot 10^{-4}$	$9.02 \cdot 10^{-4}$	$3.49 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$9.31 \cdot 10^{-4}$

	δ_{13}	δ_{23}	δ_{33}	δ_{14}	δ_{24}	δ_{34}
X_0	$3.78 \cdot 10^{-4}$	$6.69 \cdot 10^{-4}$	$9.6 \cdot 10^{-4}$	$4.07 \cdot 10^{-4}$	$6.98 \cdot 10^{-4}$	$9.89 \cdot 10^{-4}$
X_{mnk}	$3.78 \cdot 10^{-4}$	$6.69 \cdot 10^{-4}$	$9.6 \cdot 10^{-4}$	$4.07 \cdot 10^{-4}$	$6.98 \cdot 10^{-4}$	$9.89 \cdot 10^{-4}$

	δ_{15}	δ_{25}	δ_{35}	δ_{16}	δ_{26}	δ_{36}
X_0	$4.36 \cdot 10^{-4}$	$7.27 \cdot 10^{-4}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$4.65 \cdot 10^{-4}$	$7.56 \cdot 10^{-4}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$
X_{mnk}	$4.36 \cdot 10^{-4}$	$7.27 \cdot 10^{-4}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$	$4.65 \cdot 10^{-4}$	$7.56 \cdot 10^{-4}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$

	ΔR_{11}	ΔR_{21}	ΔR_{13}	ΔR_{23}	ΔR_{15}	ΔR_{25}
X_0	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$-1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$
X_{mnk}	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$-1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$

	$\Delta\rho_{22}$	$\Delta\rho_{33}$
X_0	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$
X_{mnk}	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$

	Γ^0_{11}	Γ^0_{21}	Γ^0_{22}	Γ^0_{31}	Γ^0_{32}	Γ^0_{33}
X_0	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$1.6 \cdot 10^{-7}$
X_{mnk}	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1.01 \cdot 10^{-8}$	$1.05 \cdot 10^{-8}$	$1.61 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$

	Γ^1_{11}	Γ^1_{12}	Γ^1_{13}	Γ^1_{21}	Γ^1_{22}	Γ^1_{23}
X_0	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-7}$
X_{mnk}	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-7}$

	Γ^1_{31}	Γ^1_{32}	Γ^1_{33}	Γ^2_{11}	Γ^2_{22}	Γ^2_{33}
X_0	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
X_{mnk}	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$

В модели измерений мы считаем углы $\delta_{\cdot k}$ постоянными, не учитывая упругие деформации, но при этом пишем слагаемые второго порядка f_z в погрешностях ньютономтеров, которые могут быть либо частично, либо полностью вызваны упругими погрешностями осей чувствительности датчиков. Допуская деформации осей чувствительности, будет логично, что приборный трехграник будет поворачиваться под действием перегрузок при вращении. Таким образом, появляется задача исследования оценки и наблюдаемости дополнительных коэффициентов упругих деформаций корпуса блока.

Для остальных же параметров оценки совпадают с задаными в модели величинами с точностью до слагаемых второго порядка малости.

4 Вывод

- Сформулированы основные модели калибровки, учитывающие погрешности информации о геометрической конфигурации блока, а также возможные нелинейности, имеющиеся в погрешностях ньютонометров.
- Сформированы измерения для постановки задачи оценивания;
- Определены достаточные условия наблюдаемости параметров модели погрешностей блока ньютонометров;
- С помошью метода наименьших квардартов получены оценки заданых параметров модели, которые совпадают с ними с точностью до слагаемых второго порядка малости;

Список литературы

[1] *А.В.Козлов* Идентификация параметров модели погрешностей блока ньютонометров на центрифуге. 2018.

[2] *Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем. – М.: МАКС Пресс, 2012.

[3] *Голован А. А., Парусников Н. А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации.– М.: МАКС Пресс, 2011.

[4] Acuitas Centrifuge Series: GLC-6_13_15000 datasheet rev. D1, September 2013,CA // Acuitas products overview.—acuitas.ch/files/4013/8018/3773/Data_sheet_GLC-6_13_15000.pdf.

[5] Acutronic Medium Precision Centrifuges Series AC66 data sheet version F // Acutronic products.—acutronic.com/fileadmin/cms_files/ACH_DS/Laboratory-MediumPrecision-Centrifuges-Flyer-AC66.pdf.