

НЕЛИНЕЙНАЯ
АКУСТИКА

УДК 534.222

ТРАНСФОРМАЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ШУМА
В ПОЛЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

© 2018 г. С. Н. Гурбатов^{a, *}, О. В. Руденко^{a, b, c, d, e}, А. В. Тюрина^a

^aНижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950 Нижний Новгород, просп. Гагарина 23, Россия

^bМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Россия

^cИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН
119991 Москва, ул. Вавилова 38, Россия

^dИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
123242 Москва, Б. Грузинская ул. 10, стр. 1, Россия

^eBlekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden

*e-mail: gurb@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 27.12.2017 г.

Исследованы взаимодействия шумовых и регулярных сигналов с фронтом, крутизна которого растёт или уменьшается из-за нелинейного искажения профиля интенсивной волны накачки. Использовано проективное преобразование, являющееся следствием одной из симметрий уравнения Бюргера. Взаимодействие сигнала с волной накачки на её переднем фронте приводит к увеличению амплитуды сигнала, уменьшению его временного масштаба, увеличению темпа эволюции сигнала и более раннему слиянию разрывов. На заднем фронте происходит уменьшение амплитуды сигнала, увеличение временного масштаба и замедление темпа эволюции. Получены формулы, описывающие трансформацию спектра и корреляционную функцию шума. Найдены законы изменения энергии шума как при малых, так и при больших числах Рейнольдса. Исследовано взаимодействие слабого шума с нестационарным ударным фронтом в среде с конечной вязкостью. Показано, что из-за конкуренции усиления на ударном фронте и высокочастотного затухания зависимость интенсивности шума от расстояния имеет немонотонный характер, при этом на больших расстояниях интенсивность стремится к нулю, а время корреляции стремится к конечному значению.

Ключевые слова: ударный фронт, нелинейность, диссипация, шум, средняя интенсивность, время корреляции, уравнение Бюргера

DOI: 10.1134/S0320791918040056

Статистической нелинейной акустикой принято называть физику шумовых полей большой интенсивности. Сегодня это развитое научное направление, результаты которого используются для описания спектров сильного шума природного и техногенного происхождения [1–3].

Интересные явления наблюдаются в процессе нелинейного взаимодействия регулярных и случайных волн. В разных условиях может происходить подавление шума в определенной области спектра, генерация сплошного (белого) шума, дополнительное затухание когерентных спектральных составляющих и ряд других эффектов [4, 5]. Среди многих задач особый интерес представляют взаимодействия шума с важным регулярным волновым объектом – фронтом ударной волны.

В работах [3, 6, 7, 10] показано, что на фронте, крутизна которого растёт из-за нелинейности, возможно усиление слабого сигнала. С математи-

ческой точки зрения это явление является следствием определенной симметрии уравнения Бюргера, описывающего волны в диссипативной среде. Эта симметрия связана с инвариантностью этого уравнения относительно проективного преобразования [11]. Мы будем использовать уравнение Бюргера в следующем виде:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}. \quad (1)$$

Здесь применяются безразмерные обозначения:

$$V = \frac{u}{u_0}, \quad \theta = \omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right), \quad z = \frac{x}{x_{SH}} = \frac{\varepsilon \omega u_0}{c_0^2} x, \quad (2)$$

$$\Gamma = \alpha x_{SH} = \frac{b \omega}{2 \varepsilon c_0 \rho_0 u_0}.$$

Смысл обозначений в (2) таков: V – это колебательная скорость, нормированная на u_0 – “ампли-

тудное” (для периодического сигнала) или “пиковое” (для импульса) значение скорости. Время θ измерено в системе координат, “бегущей” вместе с волной со скоростью звука c_0 ; оно нормировано на характерную длительность (или обратную частоту ω^{-1}) сигнала. Расстояние z измерено в единицах длин образования разрыва x_{SH} ; Γ – обратное акустическое число Рейнольдса (число Гольдберга) – отношение характерных “нелинейной” x_{SH} и “диссипативной” α^{-1} длин [1, 12]. Характеристики среды: ϵ , b – параметры нелинейности и диссипации, ρ_0 – равновесная плотность.

Взаимодействия как регулярных, так и шумовых сигналов с ударным фронтом, моделируемым линейно наклоненным участком профиля, удобно описывать с помощью проективного преобразования [3, 4, 6, 7, 11]. Смысл его состоит в следующем. Если функция $V = \Phi(z, \theta)$ есть точное решение уравнения Бюргерса, то его решением будет также выражение

$$V = \frac{1}{1 - z/z_0} \Phi\left(\frac{z}{1 - z/z_0}, \frac{\theta}{1 - z/z_0}\right) + \frac{\theta}{z_0 - z}. \quad (3)$$

Второе слагаемое в правой части формулы (3) представляет собой фронт волны, нарастающий во времени по линейному закону. Этот фронт может приближенно соответствовать не только ударному фронту, но и, например, фронту периодической волны: переднему (при $z < z_0$) или заднему (при $z > z_0$). Если эта волна – интенсивная и низкочастотная, первому слагаемому разумно сопоставить слабый высокочастотный сигнал, “посаженный” на фронт. При этом формула (3) будет описывать, например, взаимодействие высокочастотного шума и низкочастотного сигнала (см. [4], рис. 10, [7], рис. 3). С увеличением расстояния z частота шума на переднем фронте регулярной волны должна расти, на заднем – уменьшаться. При этом на заднем фронте происходит уменьшение амплитуды и замедление темпа эволюции волны. Эти явления наблюдались в экспериментах [13, 14].

В безразмерных переменных (2) для уравнения (1) расстояние образования разрыва $z_{SH} \approx 1$, а характерная “длина диссипации” $z_D \approx \Gamma^{-1}$. Из проективного преобразования (3) следует, что это взаимодействие приводит к увеличению амплитуды сигнала, уменьшению его временных масштабов и ускорению темпов эволюции. При этом на конечном расстоянии $z \in (0; z_0)$ в поле V , определенном по формуле (3), разыгрываются все стадии эволюции невозмущенного поля $V = \Phi(z, \theta)$, которые в отсутствие фронта происходили бы на бесконечном интервале $z \in (0; \infty)$. Следует подчеркнуть, что, несмотря на усиление сигнала, вза-

имодействие с фронтом не может качественно изменить характер эволюции волны, а меняет лишь масштабы проявления эффектов. Из преобразования (3) следует, что характерные длины образования разрывов и диссипации будут равны соответственно

$$z_{SH}^* = \frac{1}{1 + 1/z_0} = \frac{z_{SH}}{1 + z_{SH}/z_0}, \quad (4)$$

$$z_D^* = \frac{1}{\Gamma(1 + 1/(\Gamma z_0))} = \frac{z_D}{1 + z_D/z_0}.$$

Для иллюстрации этих эффектов рассмотрим модельную задачу – взаимодействие интенсивного гармонического сигнала V_{LF} с высокочастотным сигналом V_{HF} , представляющим сумму двух синусоид на частотах гармоник:

$$V(z = 0, \theta) = V_{LF} + V_{HF}, \quad V_{LF} = a_0 \sin(\omega_0 \theta),$$

$$V_{HF} = -\frac{1}{3} \sin(4\omega_0 \theta) - \frac{2}{3} \sin(8\omega_0 \theta).$$

Поведение такого ВЧ-сигнала обнаруживает черты, типичные для нелинейного шума – образование и слияние разрывов и, соответственно, увеличение характерного масштаба сигнала.

На рис. 1 сплошной линией показано распространение ВЧ-сигнала в отсутствие интенсивной гармонической волны накачки, штриховой линией – форма ВЧ-сигнала, полученная вычитанием накачки из смеси сигнал–накачка, пунктирной линией – интенсивный сигнал при $z = 0.5$ (рис. 1а) и $z = 0.9$ (рис. 1б). Эти решения получены на основе точного решения уравнения Бюргерса, которое при замене Хопфа–Коула [1] сводится к уравнению диффузии. Длина образования разрыва волны накачки $z = 1$, обратное число Гольдберга $\Gamma = 0.01$, $\omega_0 = 1$, $a_0 = 1$. При распространении ВЧ-шума происходит слияние разрывов, что приводит к перемещению спектра в область низких частот.

Из рис. 1 видно, что взаимодействие высокочастотного сигнала с волной накачки на ее переднем фронте приводит к увеличению амплитуды сигнала, уменьшению его временного масштаба и, соответственно, к увеличению темпа и дистанции эволюции сигнала – более раннему слиянию разрывов. На заднем фронте происходит уменьшение амплитуды сигнала, увеличение временного масштаба и, соответственно, замедление темпа эволюции.

Рассмотрим усиление гармонического сигнала. В зависимости от величины числа Рейнольдса (Гольдберга) можно выделить следующие характерные стадии эволюции волны $V = \Phi(z, \theta)$ в отсутствие накачки. При $\Gamma \gg 1$ влиянием нелинейности можно пренебречь, и основным механизмом является линейное затухание, которое

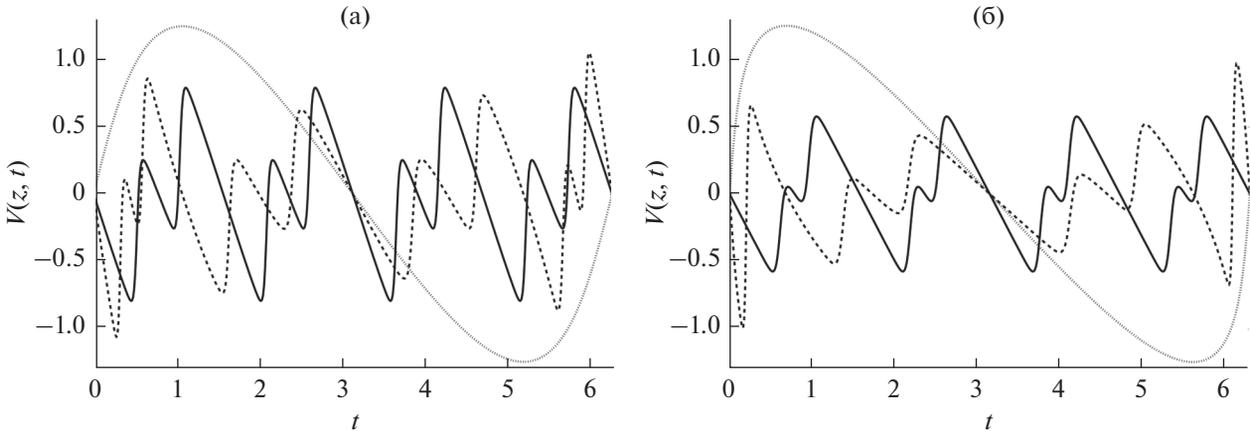


Рис. 1. Эволюция высокочастотного сигнала. Сплошная линия – ВЧ-сигнал в отсутствие накачки, штриховая – ВЧ-сигнал, выделенный из смеси сигнал–накачка, пунктирная – сигнал накачки. (а) Результат взаимодействия ВЧ-сигнала с синусоидальной накачкой при $z = 0.5$, (б) при $z = 0.9$.

становится существенным при $z \geq z_D = 1/\Gamma$. Для амплитуды слабого гармонического сигнала из (3) имеем

$$a^*(z) = \frac{a_0}{1 - z/z_0} \exp\left(-\frac{\Gamma z}{1 - z/z_0}\right). \quad (5)$$

Здесь мы считаем, что частота входного сигнала в безразмерных переменных равна единице. Из (5) видно, что взаимодействие с ударным фронтом приводит к конкуренции двух эффектов: увеличению амплитуды волны и росту затухания из-за вязкости. Усиление сигнала возможно, если длина затухания больше длины образования особенности, то есть $\Gamma z_0 = z_0/z_D < 1$, при этом максимальный коэффициент усиления достигается при $z^* = z_0(1 - z_0/z_D)$ и равен $a_0(z_0/z_D) \times \exp(-(1 - z_0/z_D))$.

Случай волны с сильно выраженной нелинейностью $\Gamma \ll 1$ был подробно рассмотрен в работах [7, 16]. В результате взаимодействия энергия волны $E^*(z) = a_0^2(1 - z/z_0)^{-2}$ возрастает при $z \in (0, z_{SH})$, в интервале $z_{SH} < z < z_D^*$ энергия затухает как $E^*(z) \propto \tau_0^2 z^{-2}$, где τ_0 – период входного возмущения, и экспоненциально затухает при $z_D^* < z < z_0$. Таким образом, при $z > z_{SH}$ усиление сигнала из-за взаимодействия с ударным фронтом полностью компенсируется увеличением нелинейного и линейного затухания из-за уменьшения временных масштабов сигнала.

Рассмотрим теперь взаимодействие ударной волны с высокочастотным шумом. Пусть на входе нелинейной среды при $z = 0$ высокочастотный шум $\Phi(\theta)$ представляет собой нормальный стаци-

онарный случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией

$$R_\Phi(\theta = \theta_1 - \theta_2) = \langle \Phi(\theta_1)\Phi(\theta_2) \rangle. \quad (6)$$

Корреляционную функцию в среде, представленную решением уравнения Бюргера, обозначим как $R_\Phi(z, \theta)$. Тогда в результате наложения линейно нарастающего фронта, как это следует из формулы (3), корреляционная функция в среде подвергнется преобразованию и будет описываться выражением

$$\hat{R}_\Phi(z, \theta) = \frac{1}{(1 - z/z_0)^2} R_\Phi\left(\frac{z}{1 - z/z_0}, \frac{\theta}{1 - z/z_0}\right). \quad (7)$$

Соответствующий спектр интенсивности равен

$$\hat{S}_\Phi(z, \omega) = \frac{1}{1 - z/z_0} S_\Phi\left(\frac{z}{1 - z/z_0}, \omega\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)\right). \quad (8)$$

Формулы (7), (8) показывают, что при распространении волны время корреляции уменьшается, спектр шума смещается в область высоких частот и усиливается.

Будем считать, что шум имеет в области низких частот степенной характер:

$$S_\Phi(0, \omega) = \alpha_n^2 \omega^n b(\omega), \quad b(\omega) = 1, \quad \omega \in [0, \omega_0]. \quad (9)$$

Здесь α_n^2 – некоторая положительная постоянная, $b(\omega)$ – достаточно быстро спадающая функция при $\omega > \omega_0$, где ω_0 – ширина спектра входного сигнала. В безразмерных переменных эта величина порядка единицы. При этом предполагается, что ширина спектра входного сигнала много больше характерной частоты накачки.

Рассмотрим вначале случай малых чисел Рейнольдса, то есть $\Gamma \gg 1$. Нелинейным слагаемым в

уравнении Бюргерса можно пренебречь, и для спектра и энергии невозмущенного сигнала имеем

$$S_{\Phi}(z, \omega) = \alpha_n^2 \omega^n b(\omega) \exp(-2\Gamma \omega^2 z),$$

$$E_{\Phi}(z) = R_{\Phi}(z, 0) = \alpha_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^n b(\omega) \exp(-2\Gamma \omega^2 z) d\omega. \quad (10)$$

Из (7), (8) следует, что при $z < 1/\Gamma \omega_0^2$ затухание несущественно ($E_{\Phi}(z) \approx E_{\Phi}(0)$), и взаимодействие с передним ударным фронтом приводит к усилению сигнала: $E_{\Phi}^*(z) = \hat{R}_{\Phi}(z, 0) = E_{\Phi}(0)(1 - z/z_0)^{-2}$.

При $z > 1/\Gamma \omega_0^2$ спектр сигнала не зависит от частоты обрезания спектра ω_0 , и в (10) можно положить $b(\omega) = 1$. Для энергии возмущенного сигнала $E^*(z)$ из (7), (10) имеем

$$E_{\Phi}^*(z) = \hat{R}_{\Phi}(z, 0) = \frac{\alpha_n^2 \Gamma \left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} \frac{\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^{\frac{n-3}{2}}}{(2\Gamma z)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (11)$$

В формуле (11) $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Из этого выражения следует, что при $n > 3$ усиление сигнала на начальной стадии сменяется затуханием, а при $n < 3$ взаимодействие слабого сигнала с ударным фронтом приводит к неограниченному усилению шума вплоть до точки образования особенности z_0 .

Рассмотрим теперь предельный случай бесконечно больших чисел Рейнольдса, то есть $\Gamma \rightarrow 0$. На начальной стадии $z < z_{SH}^* \approx (1 + 1/z_0)^{-1}$, когда нелинейным затуханием можно пренебречь, взаимодействие с передним ударным фронтом приводит к усилению сигнала $E^*(z) = E(0)(1 - z/z_0)^{-2}$. На достаточно больших расстояниях $z \gg 1$ первоначально непрерывная волна трансформируется в последовательность пилообразных импульсов, и из-за слияния разрывов спектр шума смещается в область низких частот. Из-за многократного слияния разрывов спектр интенсивного шума на больших расстояниях от входа становится автомодельным и определяется единственным масштабом $\tau(z)$ [2, 3, 8, 9, 12]:

$$S_{\Phi}(z, \omega) = \frac{\tau^3(z)}{z^2} \tilde{S}(\tau(z)\omega), \quad E(z) = c_n \frac{\tau^2(z)}{z^2}. \quad (12)$$

Здесь $\tilde{S}(\Omega)$ – безразмерная функция, c_n – численный коэффициент. В теории акустической турбулентности $\tau(z)$ принято называть внешним масштабом турбулентности, рост которого и вид безразмерной функции $\tilde{S}(\Omega)$ определяются показателем n входного спектра (10) [2, 3, 8, 9, 12]. Если во входном спектре отсутствуют низкочастотные компоненты ($n > 1$), то закон роста

внешнего масштаба определяется дисперсией интеграла от начального поля скорости σ^2 :

$$\tau(z) \approx (\sigma z)^{1/2}, \quad E(z) \approx \sigma z^{-1}. \quad (13)$$

Спектр при этом имеет универсальную асимптотику в области низких частот $S_{\Phi}(z, \omega) \approx z^{-2} \tau^5(z) \omega^2 \propto z^{1/2} \omega^2$, связанную с “параметрической” генерацией низкочастотных компонент, и степенную асимптотику $S_{\Phi}(z, \omega) \approx z^{-2} \tau^{-2}(z) \omega^{-2} \propto z^{-3} \omega^{-2}$ в области высоких частот, обусловленную образованием разрывов. Для внешнего масштаба и энергии сигнала, находящегося на переднем фронте ударного фронта, имеем соответственно

$$\tau^*(z) \approx \left(\frac{\sigma z}{1 - z/z_0}\right)^{1/2}, \quad E^*(z) \approx \frac{\sigma}{z(1 - z/z_0)}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что функция $E^*(z)$ имеет минимум при $z = z_0/2$. Таким образом, если длина образования разрыва для шума $z_{SH} \approx 1$ много больше длины возникновения особенности в волне накачки z_0 , то энергия шума монотонно возрастает. В противоположном случае рост энергии на начальном этапе $z \in [0, z_{SH}^* \approx 1]$ сменяется убыванием, а затем при $z \in [z_0/2, z_0]$ энергия шума монотонно возрастает.

Если же в исходном спектре имеются интенсивные низкочастотные компоненты и $n < 1$, то спектр низкочастотной части сохраняется: $S_{\Phi}(z, \omega) = S_{\Phi}(0, \omega) = \alpha_n^2 \omega^2$, и для внешнего масштаба и энергии шума имеем

$$\tau(z) \approx (\alpha_n z)^{\frac{2}{n+3}}, \quad E(z) \approx \alpha_n^{\frac{4}{n+3}} z^{\frac{2(n+1)}{n+3}}. \quad (15)$$

Для внешнего сигнала, находящегося на переднем фронте, имеем

$$E^*(z) \approx \frac{\alpha_n^{\frac{4}{n+3}}}{z^{\frac{2(n+1)}{n+3}} (1 - z/z_0)^{\frac{4}{n+3}}}. \quad (16)$$

При конечных числах Рейнольдса шумовое поле с $n < 1$ никогда не переходит в линейный режим распространения [2, 3, 8, 9, 12], и, таким образом, на ударном фронте неограниченной длительности происходит неограниченное усиление шума. При $n > 1$ расстояние выхода на линейный режим чрезвычайно велико, $z_L \propto \exp(\Gamma^{-2})$, и коэффициент усиления шума может быть весьма значительным.

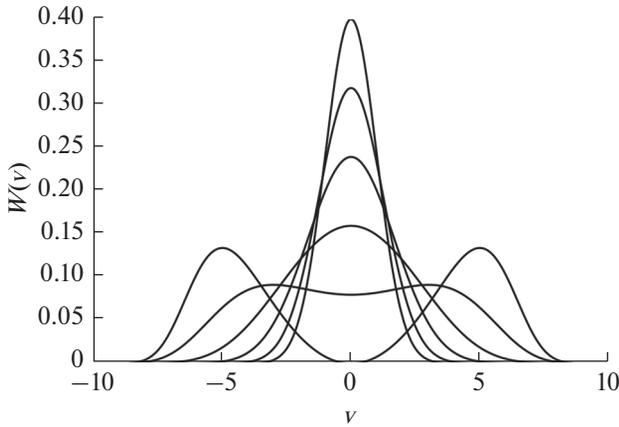


Рис. 2. Вероятностное распределение $W(v)$ нормированного поля скорости v в точке образования ударного фронта для безразмерного расстояния $d = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$ и отношения амплитуды гармонического сигнала к дисперсии шума на входе $\mu = a_0/\sigma_\Phi = 5$.

В рассмотренных выше примерах линейный ударный фронт имел неограниченную длительность и, следовательно, амплитуду.

Рассмотрим случай взаимодействия шумового сигнала $\Phi(\theta)$ с ограниченным по длительности передним фронтом гармонического сигнала:

$$V(z=0, \theta) = a_0 \sin(\omega_0 \theta) + \Phi(\theta). \quad (17)$$

Пока можно пренебречь возникновением разрывов, распространение волны описывается уравнением (1) с $\Gamma = 0$, и вероятностное распределение поля скорости имеет вид [2]

$$W(V, z, \theta) = \frac{1 - a_0 \omega_0 z \cos(\omega_0 (\theta + Vz))}{\sqrt{2\pi\sigma_\Phi^2}} \times \exp\left\{-\frac{(V - a_0 \sin(\omega_0 (\theta + Vz)))^2}{2\sigma_\Phi^2}\right\}. \quad (18)$$

Здесь мы предположили, что входной сигнал имеет гауссову статистику с нулевым средним и дисперсией $\langle \Phi^2(\theta) \rangle = \sigma_\Phi^2$. Одной из особенностей вероятностного распределения смеси сигнала и шума является то, что полученная плотность вероятности не зависит от вида реализации шума [2]. Меняются только условия применимости выражения (18), справедливого для однозначных решений. Для волны накачки длина образования разрыва равна $z_s = 1/a_0 \omega_0$. Если временной масштаб шума много больше периода накачки, то выражение (18) справедливо вплоть до точки образования разрыва в волне накачки. В точке образования ударного фронта $\omega_0 \theta = 0$ для вероятностного распределения нормированного поля скорости $v = V/\sigma_\Phi$ из (18) имеем

$$W(v, d, 0) = \frac{1 - d \cos\left(\frac{vd}{\mu}\right)}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(v - \mu \sin\left(\frac{vd}{\mu}\right)\right)^2\right\}. \quad (19)$$

В этой формуле $d = za_0 \omega_0 = z/z_s$ – безразмерное расстояние от входа, а $\mu = a_0/\sigma_\Phi$ – отношение амплитуды гармонического сигнала к дисперсии входного шума. Поведение вероятностного распределения $W(v, d, 0)$ показано на рис. 2. Видно, что с увеличением безразмерного расстояния максимум гауссовой плотности вероятности уменьшается, дисперсия растет. По мере приближения к опрокидыванию $d \rightarrow 1$ вероятностное распределение становится существенно негауссовым, рост дисперсии шума замедляется. Не слишком близко к моменту опрокидывания можно разложить синус в ряд в формуле (19) и ограничиться первым членом разложения. Это эквивалентно взаимодействию шума с линейным начальным профилем. В таком приближении плотность вероятности остается гауссовой с возрастающей дисперсией $\sigma_v^2(d) = (1-d)^{-2}$, что совпадает с результатом для неограниченного ударного фронта. Для сильного сигнала накачки $\mu \gg 1$ в точке опрокидывания $d = 1$ вероятностное распределение можно представить так:

$$W(v, d=1, 0) = \frac{v^2}{2\mu^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{v^6}{72\mu^4}\right\}. \quad (20)$$

Из (20) для дисперсии шума имеем: $\sigma_v^2(d=1) = \frac{12\sqrt[3]{9}}{5\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \mu^{4/3} \approx 2.65\mu^{4/3}$. На рис. 3 сплошной линией изображен точный график дисперсии шума, а штриховой линией – для случая накачки с линейным начальным профилем. Приближенное описание хорошо работает в области до $d = 0.6$.

Таким образом, при взаимодействии шума с гармоническим сигналом в точке опрокидывания дисперсия шума имеет конечную величину, пропорциональную $a_0^{4/3}$, где a_0 – амплитуда входного сигнала.

Ниже мы обсудим особенности взаимодействия сигнала с ударным фронтом в среде с конечной вязкостью.

При прохождении волной расстояния $z = z_0$ в решениях (7), (8) появляются особенности. Физически это соответствует началу образования неоднозначности в преобразовании (3) – линейно нарастающий фронт становится “вертикальным”. Для устранения особенности нужно учесть конечность ширины ударного фронта, то есть его сглаживание за счет диссипации, которая в рам-

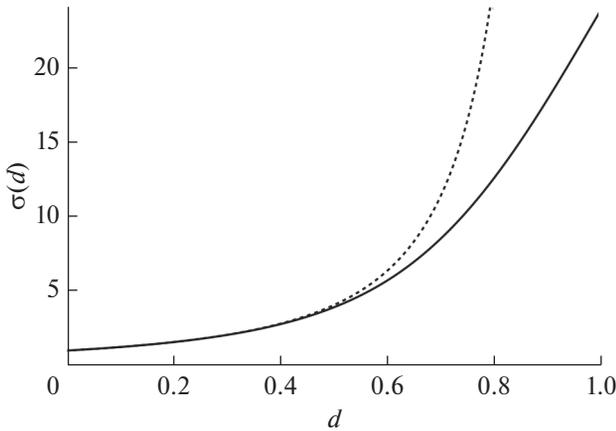


Рис. 3. Дисперсия шума σ в зависимости от безразмерного расстояния d для отношения амплитуды гармонического сигнала к дисперсии шума на входе $\mu = a_0/\sigma_\Phi = 5$.

ках преобразования (3) на линейно нарастающий фронт не влияет.

Исходим из уравнения Бюргера (1), считая НЧ-сигнал V_0 сильным, а ВЧ-сигнал V_1 слабым. Ищем решение в виде $V = V_0 + V_1$. Пусть сильный сигнал удовлетворяет уравнению (1). Для слабого сигнала в этом случае получаем [15]

$$\frac{\partial S}{\partial z} - V_0 \frac{\partial S}{\partial \theta} = \Gamma \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}, \quad V_1 = \frac{\partial S}{\partial \theta}. \quad (21)$$

Далее будем считать, что сигнал V_0 – это фронт нелинейной волны, а V_1 – это шум.

В работах [15, 16] найдено приближенное решение уравнения Бюргера, описывающее формирующийся фронт ударной волны в диссипативной среде $V_0 = \text{th}[a(z)\theta]$. Характерная шири-

на этого фронта $\Delta\theta = a^{-1}(z)$, в отличие от стационарного ударного фронта $V_0 = \text{th}\left[\frac{\theta}{2\Gamma}\right]$, в этом решении может изменяться с расстоянием. Для нахождения градиента ударного фронта $a(z)$ нужно решить уравнение

$$\frac{da}{dz} = a^2(1 - 2\Gamma a). \quad (22)$$

Граничное условие к нему: $a(z=0) = a_0$. Видно, что если исходный фронт достаточно широкий и $2\Gamma a_0 < 1$, производная (22) положительна, то есть $a(z)$ растет, а ширина фронта убывает. При $z \rightarrow \infty$ ширина стремится к своему минимальному стационарному значению $\Delta\theta = 2\Gamma$. Если же исходный фронт очень узок и $\Delta\theta < 2\Gamma$, то фронт, напротив, уширяется, стремясь достичь стационарного значения своей ширины “снизу”. Решение уравнения (22) дается обратной функцией $z(a)$:

$$z = \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a}\right) + 2\Gamma \ln\left(\frac{a}{a_0} \frac{1 - 2\Gamma a_0}{1 - 2\Gamma a}\right). \quad (23)$$

На рис. 4 изображено изменение градиента ударного фронта $a(z)$ от начального значения a_0 до градиента стационарного ударного фронта $a^* = 1/2\Gamma$ при $a_0 = 0.6$ (рис. 4а) и $a_0 = 0.2$ (рис. 4б).

Ограничимся центральной областью фронта, для чего заменим гиперболический тангенс его аргументом $V_0 = a(z)\theta$. Получаемое при этом из (21) уравнение с переменным коэффициентом уде-

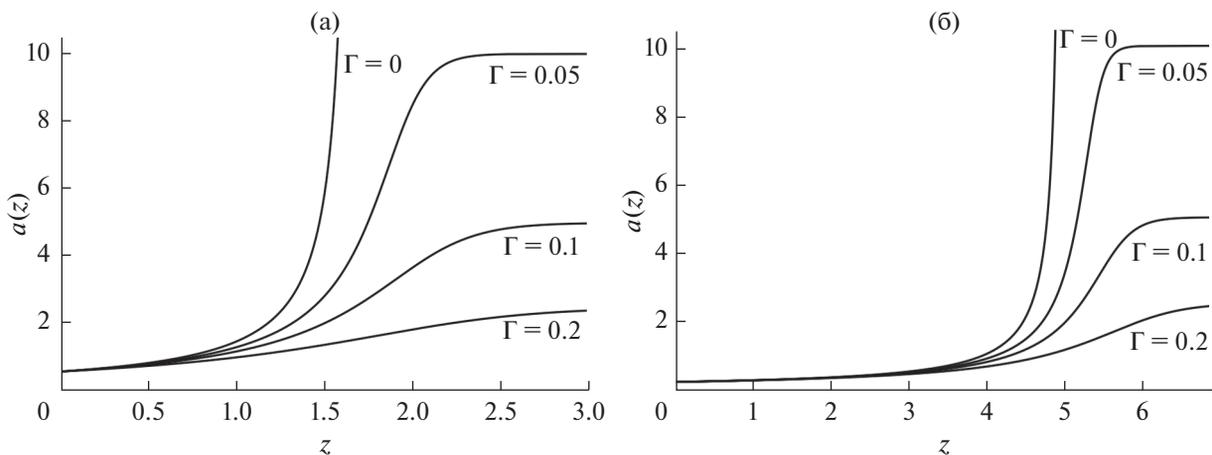


Рис. 4. Градиент ударного фронта $a(z)$: (а) начальное значение $a_0 = 0.6$, (б) $a_0 = 0.2$.

ся свести к автономному уравнению с помощью замены переменных:

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_0^z \exp \left[2 \int_0^{z'} a(z'') dz'' \right] dz', \\ T &= \theta \exp \left[\int_0^z a(z'') dz'' \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Нетрудно видеть, что новое приведенное расстояние ζ удовлетворяет условию $\zeta(z=0) = 0$. Заметим, что на границе среды новая временная переменная равна старой, то есть $T(z=0) = \theta$. Уравнение (21) примет вид простейшего уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta} = \Gamma \frac{\partial^2 S}{\partial T^2}. \quad (25)$$

Здесь, как следует из вычисления интегралов (24) для функции (23), независимые переменные ζ, T выражаются через $a(z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta[a(z)] &= \frac{1}{4\Gamma a_0^2} \left[\frac{(1-2\Gamma a_0)^2}{(1-2\Gamma a)^2} - 1 \right], \\ T &= \beta[a(z)]\theta = \frac{a}{a_0} \frac{1-2\Gamma a_0}{1-2\Gamma a} \theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Корреляционная функция шума

$$R_S(\zeta, T = T_1 - T_2) = \langle S(\zeta, T_1) S(\zeta, T_2) \rangle \quad (27)$$

в соответствии с (25) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R_S}{\partial \zeta} = 2\Gamma \frac{\partial^2 R_S}{\partial T^2}. \quad (28)$$

Его решение с условием на границе $R_S(z=0, T) = R_S(0, T)$ имеет вид

$$\begin{aligned} R_S(\zeta, T) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi\Gamma\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} R_S(0, T') \exp \left[-\frac{(T-T')^2}{8\Gamma\zeta} \right] dT', \\ R_S(z, \theta) &= \frac{\beta(z)}{\sqrt{8\pi\Gamma\zeta(z)}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} R_S(0, \beta(z)\theta') \exp \left[-\frac{\beta^2(z)(\theta-\theta')^2}{8\Gamma\zeta(z)} \right] d\theta'. \end{aligned} \quad (29)$$

Зная вспомогательную функцию R_S , нетрудно рассчитать интересующую нас корреляционную функцию шума R_{V_1} :

$$\begin{aligned} R_{V_1}(z, \theta = \theta_1 - \theta_2) &= \langle V_1(z, \theta_1) V_1(z, \theta_2) \rangle = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} R_S(z, \theta). \end{aligned} \quad (30)$$

Для примера рассмотрим простейшее решение (28) для R_S в виде функции Гаусса:

$$R_S(\zeta, T) = \frac{1}{\sqrt{1+8\Gamma\zeta}} \exp \left(-\frac{T^2}{1+8\Gamma\zeta} \right). \quad (31)$$

Дифференцируем (31) два раза и заменяем переменные в соответствии с преобразованием (30). Получаемая корреляционная функция имеет вид

$$R_{V_1}(z, \theta) = I(z) \left(1 - \frac{2\theta^2}{t_{\text{CORR}}^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{\theta^2}{t_{\text{CORR}}^2(z)} \right). \quad (32)$$

Здесь $I(z)$ – интенсивность волны, а $t_{\text{CORR}}(z)$ – время корреляции сигнала:

$$\begin{aligned} I(z) &= R_{V_1}(z, \theta = 0) = \frac{2\beta^2}{(1+8\Gamma\zeta)^{3/2}} = \\ &= 2 \left[\frac{a(1-2\Gamma a_0)}{a_0(1-2\Gamma a)} \right]^2 \left\{ 1 + \frac{2}{a_0^2} \left[\frac{(1-2\Gamma a_0)^2}{(1-2\Gamma a)^2} - 1 \right] \right\}^{-\frac{3}{2}}, \\ t_{\text{CORR}}(z) &= \frac{(1+8\Gamma\zeta)^{1/2}}{\beta} = \left[\frac{a(1-2\Gamma a_0)}{a_0(1-2\Gamma a)} \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{2}{a_0^2} \left[\frac{(1-2\Gamma a_0)^2}{(1-2\Gamma a)^2} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

На рис. 5 изображена зависимость интенсивности сигнала (рис. 5а) и времени корреляции (рис. 5б) от градиента ударного фронта $a(z)$, который меняется от начального значения a_0 до стационарного значения $a^* = 1/2\Gamma = 5$ при $\Gamma = 0.1$. С увеличением расстояния, когда крутизна фронта растет, интенсивность увеличивается от исходного значения $I = 2$, проходит через максимум и затем стремится к нулю по мере достижения стационарной крутизны ударного фронта. Заметим, что немонотонное поведение интенсивности связано именно с учетом диссипативных процессов в среде. Таким образом, формирующийся фронт может усиливать попутный шум в среде, а уже сформированный фронт, напротив, ослаблять его.

Более сложное поведение интенсивности и времени корреляции мы имеем, если начальный градиент a_0 достаточно мал. При таких a_0 накачка имеет столь малый наклон, что на начальном участке практически не влияет на сигнал. В этом случае, несмотря на малость Γ , происходит затухание. Затем вступает в действие накачка, и происходит усиление, которое при приближении к стационарному значению сменяется затуханием.

В заключение отметим, что данная статья уточняет результаты, полученные авторами ранее. В отличие от большинства работ по взаимодействиям возмущений с ударными волнами, здесь рассмотрены фронты конечной ширины, что позволяет изучать эволюцию возмущений не

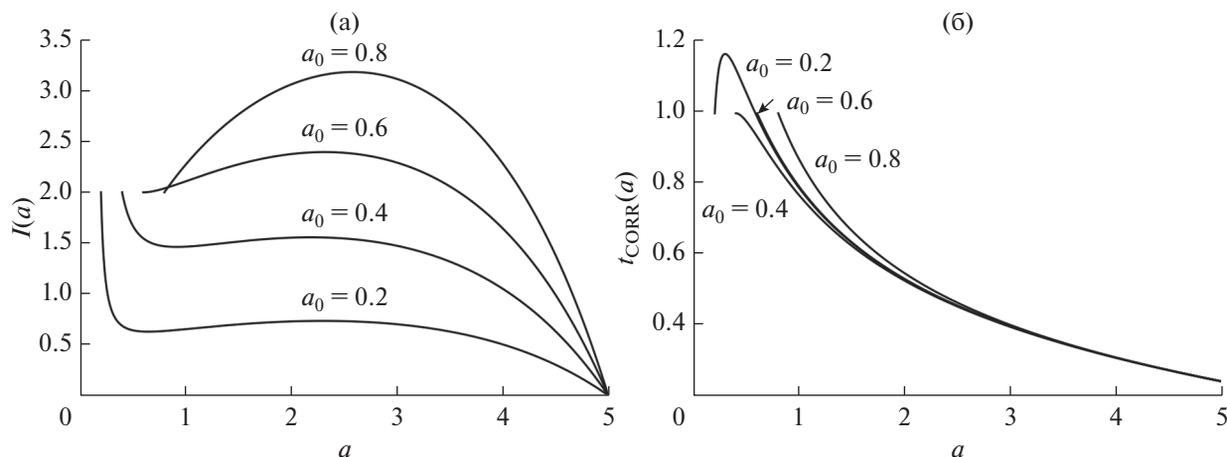


Рис. 5. (а) Интенсивность сигнала I в зависимости от градиента ударного фронта a при $\Gamma = 0.1$, (б) время корреляции t_{CORR} сигнала в зависимости от a при $\Gamma = 0.1$.

только вне фронта, но и внутри него. Кроме того, крутизна фронта изменялась из-за нелинейных и диссипативных эффектов, что привело к появлению новых особенностей в процессе взаимодействия.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-12-00882.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rudenko O.V., Soluyan S.I. Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. New York: Plenum, Consultants Bureau, 1977. 274 p.
2. Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I. Nonlinear Random Waves and Turbulence in Nondispersive Media: Waves, Rays, Particles. New York: Manchester University Press, 1991. 308 p.
3. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Якушкин И.Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН. 1983. Т. 141. № 2. С. 221–255.
4. Руденко О.В. Взаимодействия интенсивных шумовых волн // УФН. 1986. Т. 149. № 3. С. 413–447.
5. Gurbatov S.N., Rudenko O.V. Statistical Phenomena // Nonlinear Acoustics. Eds. Hamilton M.F. and Blackstock D.T. Chap. 13. 1998. P. 377–398.
6. Гурбатов С.Н. Параметрическое взаимодействие и усиление случайных волн в недиспергирующей среде // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 4. С. 551–559.
7. Гурбатов С.Н. Нелинейное взаимодействие волн в средах без дисперсии при наличии внешних распределенных источников // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 3. С. 283–294.
8. Noullez A., Gurbatov S.N., Aurell E., Simdyankin S.I. Global picture of self-similar and non-self-similar decay in Burgers turbulence // Phys. Rev. 2005. 056305.
9. Gurbatov S.N., Simdyankin S.I., Aurell E., Frisch U., Toth G. On the decay of Burgers turbulence // J. Fluid Mech. 1997. V. 344. P. 349–374.
10. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН. 1995. Т. 165. № 9. С. 1011–1036.
11. Ibragimov N.H., Rudenko O.V. Principle of a priori use of symmetries in the theory of nonlinear waves // Acoust. Phys. 2004. V. 50. № 4. P. 481–495.
12. Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I. Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media. Berlin: Higher Education Press Springer Heidelberg, 2011. 472 p.
13. Moffett M.B., Konrad W.L., Carlton L.F. Experimental demonstration of the absorption of sound by sound in water // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. № 4. P. 1048–1052.
14. Буров В.А., Красильников В.А., Тагунов Е.Я. Экспериментальное исследование коллинеарного взаимодействия слабого ультразвукового сигнала с интенсивными низкочастотными возмущениями в воде // Вест. Мос. ун-та. 1978. Т. 19. № 4. С. 5–58.
15. Маков Ю.Н., Руденко О.В. Динамика возмущений нелинейных пилообразных волн // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 6. С. 824–828.
16. Маков Ю.Н., Руденко О.В. Возмущения формирующегося ударного фронта пилообразных волн в диссипативных средах // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 257–260.