Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Корчемкина Татьяна Александровна

Асимптотические и качественные свойства решений дифференциальных уравнений с нелинейностями общего вида

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Асташова Ирина Викторовна

Москва – 2021

Оглавление

Введение

Диссертация подготовлена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Представленная работа является исследованием в области качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений. В диссертации рассматривается уравнение второго порядка с нелинейностями общего вида и потенциалом, зависящим от всех фазовых переменных, изучается зависимость качественного поведения решений от значений показателей нелинейности, а также асимптотическое поведение всех типов решений.

Актуальность темы

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение высокого порядка с нелинейностями общего вида

$$y^{(n)} = p\big(x,\, y,\, y',\, \ldots, y^{(n-1)}\big)\, |y|^{k_0} |y'|^{k_1} \ldots \left|y^{(n-1)}\right|^{k_{n-1}} \operatorname{sgn}\left(yy' \ldots y^{(n)}\right), \quad k_i > 0. \tag{0.1}$$

Оно является одним из обобщений уравнения высокого порядка

$$y^{(n)} = p\big(x,\, y,\, y',\, \ldots, y^{(n-1)}\big)\, |y|^{k} \operatorname{sgn} y, \quad k > 0,\ k \neq 1, \tag{0.2}$$

которое, в свою очередь, обобщает уравнение Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y'' = -x^{\sigma}\, |y|^{k-1}\, y, \tag{0.3}$$

возникшее впервые в работе Р. Эмдена [58] 1907 года как уравнение, описывающее распределение плотности по мере удаления от центра масс в политропной модели звезды. Свойства решений этого уравнения, а позднее и его обобщения, также изучалось в трудах Р. Фаулера [61]. В приложениях атомной физики уравнение (0.3) известно как уравнение Томаса–Ферми [91, 60], описывающее распределение электронов в тяжелых атомах.

Исследованием качественных свойств и асимптотического поведения решений уравнения Эмдена–Фаулера и его обобщений занимались многие математики. В частности, ряд результатов о колеблемости решений уравнения (0.3), об их продолжаемости или непродолжаемости, а также асимптотическом поведении при различных значениях параметров σ и k приведен в монографиях Р. Беллмана [4], Дж. Сансоне [38], Ф. Хартмана [40].

Вопрос колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений также основательно изучался А. Кнезером [69] и Ф. Аткинсоном [49]. Так, для нелинейного уравнения второго порядка $y'' + f(x)\, y^{2k-1} = 0$, где $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, а $f(x)$ — непрерывная положительная функция при $x \geq 0$, Ф. Аткинсоном доказан критерий колеблемости всех решений. Для уравнения Эмдена–Фаулера и нелинейных уравнений второго порядка $y'' + f(x)\, g(y) = 0$ и $y'' + h(x, y) = 0$ колеблемость решений исследовалась в работах S. Belohorec [52], И. Т. Кигурадзе [23], M. Jasny [62], J. Kurzweil [71], Z. Nehari [84], J. W. Masci, J. S. B. Wang [79, 93, 94], P. Waltman [92] и других.

Различные вопросы качественного и асимптотического поведения решений уравнения типа Эмдена–Фаулера высокого порядка изучались в монографии И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия [29], а также в работах И. В. Асташовой [1, 43, 44, 45], В. А. Кондратьева и В. С. Самовола [33], T. Kusano, M. Naito [72], Н. А. Изобова [22], В. А. Козлова [70], А. А. Конькова [34], M. Bartušek [50, 51] и многих других.

Остановимся подробнее на некоторых результатах, полученных для уравнения (0.2). В монографии И. В. Асташовой [1] доказан ряд утверждений о существовании знакопеременных решений, решений со степенной асимптотикой, имеющих вертикальную асимптоту, а также кнезеровских решений со степенной асимптотикой в случае уравнений четного порядка. В случае уравнений типа Эмдена–Фаулера с сингулярной нелинейностью (то есть, при показателе нелинейности $k < 1$) условия классической теоремы существования и единственности не выполнены, и вследствие этого решения таких уравнений могут иметь особое поведение не только вблизи границ области определения, но и во внутренней ее точке. Поэтому вопрос классификации решений уравнения связан с рассмотрением максимально продолженных единственным образом решений, то есть, *μ–решений* (термин введен И. В. Асташовой [2, 46]).

Определение 0.1. *Решение обыкновенного дифференциального уравнения $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, называется μ-решением, если:*

1) уравнение не имеет других решений, равных y на некотором подынтервале $(a,\, b)$ и не равных y в некоторой точке из $(a,\, b)$;

2) уравнение либо не имеет решений, определенных на другом интервале, содержащем $(a,\, b)$, *и равных* y *на* $(a,\, b)$, *либо имеет по крайней мере два таких решения, не равных друг другу в точках, сколь угодно близких к границе* $(a,\, b)$.

В терминах μ-решений И. В. Асташовой в работах [1, 3, 46, 47] для уравнения (0.2) при $n = 3$, $p = p(x)$ и $n = 4$, $p \equiv p_0$ соответственно получена полная асимптотическая классификация решений в случае сингулярной нелинейности ($0 < k < 1$) и также полная асимптотическая классификация максимально продолженных решений в случае регулярной нелинейности ($k > 1$). В частности, И. В. Асташовой для уравнений типа Эмдена–Фаулера третьего и четвертого порядков подтверждена гипотеза И. Т. Кигурадзе о том, что все решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику.

Рассмотрим отдельно уравнение Эмдена–Фаулера второго порядка с потенциалом, зависящим только от независимой переменной

$$y'' = p(x)\ |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad k > 0,\ k \neq 1 \tag{0.4}$$

и некоторые его обобщения.

Множество результатов о качественном и асмиптотическом поведении решений уравнения (0.4) получено И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия в работах [24, 25, 26, 41, 42] и позднее собрано в §20 пятой главы монографии [29]. Также ряд вопросов об асимптотическом поведении решений уравнения (0.4) исследуется в работах В. А. Кондратьева и В. А. Никишкина [31, 32].

Асимптотическое поведение решений уравнения (0.4) с интегрируемым положительным потенциалом $p(x)$ изучалось M. Naito. В частности, в работе [81] получены необходимые и достаточные условия существования решений, на бесконечности асимптотически эквивалентных линейной функции, а в работах [82] и [83] для уравнения типа Эдмена–Фаулера четного порядка изучен вопрос существования решений с заданным числом нулей на данном отрезке.

T. Kusano, M. Naito, J. Manojlović в работе [76] в случае регулярной нелинейности при условии, что $p(x)$ — непрерывная интегрируемая положительная функция, получены достаточные условия существования решений уравнения (0.4) в терминах регулярной вариации. Авторами применяется теория регулярной вариации [66], что позволяет получить точное асимптотическое представление решений, являющихся функциями регулярной вариации. Также в работе [75] T. Kusano, J. Manojlović изучается вопрос существования и асимптотического поведения положительных решений уравнения $y''(x)+q(x)\varphi(y(x))=0$, где $q(x)$ и $\varphi(t)$ — непрерывные положительные функции регулярной вариации, причем функция $\varphi(t)$ — возрастающая.

В работе [67] M. Kitano и T. Kusano исследованы вопросы глобального существования решений, их колеблемость и неколеблемость, а также поведение на бесконечности решений уравнения вида

$$\big(|y'|^{\alpha}\operatorname{sgn} y'\big)' + q(x)|y|^{\beta}\operatorname{sgn} y = 0, \quad \alpha,\ \beta > 0,$$

где функция $q(x)$ является непрерывной и колеблющейся.

В работе [80] M. Naito изучается более общее квазилинейное уравнение

$$\big(p(x)|y'|^{\alpha}\operatorname{sgn} y'\big)' + q(x)|y|^{\beta}\operatorname{sgn} y = 0. \tag{0.5}$$

При условии α, $\beta > 0$ в случае непрерывных положительных функций $p(x)$ и $q(x)$ получены необходимые и достаточные условия существования медленно растущих положительных решений, а также исследовано асимптотическое поведение медленно растущих и медленно убывающих решений на бесконечности.

Случай α, $\beta > 1$ для непрерывной положительной функции $p(x)$ и непрерывной отрицательной функции $q(x)$ в работе Z. Došlá, M. Cecchi, M. Marini [54] изучены вопросы существования и единственности решений рассматриваемого уравнения, исследовано стремление решений к нулю на бесконечности, а также получены асимптотические оценки некоторых типов решений.

При $\alpha < \beta$ уравнение (0.5) исследовалось Z. Došlá и M. Marini в работах [55, 56, 57], посвященных вопросам существования решений уравнения и проблеме одновременного существования нескольких типов решений.

Наконец, в случае $\alpha > \beta > 0$ уравнение (0.5) рассматривалось в работе J. Jaroš, T. Kusano, J. Manojlović [65] в предположении, что функции $p(t)$ и $q(t)$ являются обобщенными функциями регулярной вариации. Авторами получены необходимые и достаточные условия существования решений, а также изучено асимптотическое поведение решений на бесконечности.

Асимптотические свойства решений другого обобщения уравнения типа

Эмдена–Фаулера второго порядка, а именно, уравнения

$$\big(p(x)y'(x)\big)' = p(x)\, f\big(y(x)\big),$$

при липшищевой функции $f(t)$, имеющей по крайней мере два нуля, и непрерывной на $[0, +\infty)$ и равной нулю при $x = 0$ функции $p(x)$ с положительной производной на $(0, +\infty)$ изучены в работе [88]. В этой работе I. Rachůnková, L. Rachůnek, J. Tomeček получили условия на функции $f(t)$ и $p(x)$, обеспечивающие стремление колеблющихся решений к нулю на бесконечности.

В работе [53] J. Burkotová, M. Hubner, I. Rachůnková, E. B. Weinmüller исследовали более общий вид уравнения

$$\big(p(x)\, y'(x)\big)' + q(x)\, f\big(y(x)\big) = 0,$$

где f, p и q — функции регулярной вариации, причем $f(L_0) = f(0) = f(L) = 0$ для некоторых $L_0 < 0 < L$. Авторами изучен вопрос существования *кнезеровских решений* (определение введено И. Т. Кигурадзе, см. [68]) данного уравнения, а также получены результаты об асимптотическом поведении кнезеровских решений и их первых производных на бесконечности.

Вопрос существования и единственности решений, а также исследование качественных свойств решений краевых задач также широко используется при исследовании качественных и асимптотических свойств решений нелинейных уравнений второго порядка [35].Различные методы исследования краевых задач представлены в работах И. Т. Кигурадзе [27], Б. Л. Шехтера [28], А. Г. Ломтатидзе [37], L. Malaguti, [77], C. Marcelli [78], N. Partsvania [85, 86], F. Sadyrbaev [39], I. Yermachenko [89], I. Rachůnková [87] и других.

Для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y'' = p(x, y, y')|y|^k \mathrm{sgn}\, y$$

К. М. Дулиной в работах [95, 8, 109] в случае как отрицательного, так и положительного ограниченного потенциала $p = p(x, y, y')$, зависящего от всех фазовых переменных, было изучено качественное поведение решений, а также получена полная асимптотическая классификация максимально продолженных решений при регулярной нелинейности и μ-решений при сингулярной нелинейности. В работах К. М. Дулиной [9, 108] рассмотрен случай неограниченного потенциала и показано, что наиболее существенную роль в поведении решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка играет зависимость потенциала от производной решения. Эти и другие результаты о качественном и асимптотическом поведении решений уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка подытожены в диссертации К. М. Дулиной [10].

В зависимости от характера зависимости потенциала от первой производной уравнения второго порядка могут иметь решения, обладающие следующим свойством:

$$\lim_{x\to a-0} |y'(x)| = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} |y(x)| < +\infty. \tag{0.6}$$

Ранее вопрос существования и поведения таких решений возникал при изучении уравнений вида

$$\left(|y'|^{-\alpha}\right)' + q(x)\,|y|^{\beta} = 0, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \tag{0.7}$$

с непрерывной положительной функцией $q(x)$. При $\alpha > 0$ уравнение (0.7) и свойства его решений исследовали J. Jaroš, T. Kusano, M. Naito в работах [63, 74]. Авторами доказано существование сингулярных решений, обладающих свойством (0.6), и такие решения были названы *black hole* решениями. В работе J. Jaroš и T. Kusano [64] также рассмотрен случай $\alpha < 0$, при котором уравнение (0.7) имеет решения, обладающие свойством

$$\lim_{x\to a-0} y(x) = \mathrm{const} \neq 0, \quad \lim_{x\to a-0} y'(x) = 0,$$

названные авторами *white hole* решениями. Сингулярный случай $\beta < 0$ также исследовался в работах S. Taliaferro [90], И. Т. Кигурадзе, Б. Л. Шехтера [28], В. М. Евтухова [16], T. Kusano, T. Tanigawa [73] и других.

Асимптотическое поведение некоторых типов положительных решений уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида

$$y'' = \alpha\, p(x)|y'|^{\lambda} y^{m}, \quad \alpha = \pm 1 \tag{0.8}$$

с непрерывным потенциалом $p(x)$, зависящим только от независимой переменной, изучалось А. В. Костиным [12, 36], В. М. Евтуховым [13, 14, 15]. В частности, в работе [14] В. М. Евтуховым получены асимптотические формулы положительных решений уравнения при $\lambda \neq 1$ и $m + \lambda \neq 1$. Случай

$m+\lambda = 1$, $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 2$ рассмотрен в работе [15]. В работе [16] исследуется асимптотическое поведение положительных решений уравнения при локально суммируемой функции $p(x)$. В. М. Евтуховым в [18] при $p(x) < 0$ и $k > -1$, $\lambda < 1$, установлены достаточные условия колеблемости всех правильных решений. В работе [17] для уравнений высокого порядка с нелинейностями общего вида были получены критерии существования решений с заданным асимптотическим представлением, сформулированные в терминах интегральных условий на функцию $p(x)$ и условия разрешимости алгебраического уравнения.

Кроме того, В. М. Евтухов и М. А. Белозерова, а также А. Г. Черникова, В. А. Касьянова исследовали поведение некоторых классов решений дифференциальных уравнений второго порядка, с нелинейностями более общего вида

$$y'' = \alpha\, p(x)\, \varphi_0(y)\, \varphi_1(y'), \quad \alpha = \pm 1, \tag{0.9}$$

где $p(x) > 0$ — непрерывная функция, а φ_0, φ_1 — регулярно меняющиеся функции в смысле Караматы [66, 6], близкие к степенным функции [5, 19] или быстро меняющиеся функции [7, 11, 21]. Для рассматриваемых уравнений найдены условия существования некоторых типов решений уравнений и получены результаты об их асимптотическом поведении. Помимо уравнения второго порядка, В. М. Евтуховым М. А. Белозеровой, А. М. Клопотом в работах [59, 20, 30] рассматривалось уравнение (0.9) высокого порядка. Для уравнения высокого порядка также были получены результаты об асимптотических представлениях некоторых классов решений.

Задача, рассматриваемая в диссертации

В диссертации рассматривается уравнение (0.1) при $n = 2$, то есть

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\ |y|^{k_0}\, |y'|^{k_1} \operatorname{sgn}(yy'), \quad k_0, k_1 > 0, \tag{0.10}$$

где функция $p(x,u,v)$ определена на $\mathbb{R}^3$, знакопостоянна, непрерывна по x и липшицева по u, v.

Цель работы — изучить качественные свойства решений уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида (0.10) в зависимости от значений показателей нелинейности в случае потенциала общего вида и получить полные качественную и асимптотическую классификации всех решений уравнения.

Научная новизна результатов

Задача полной качественной и асимптотической классификации решений уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида с потенциалом, зависящим от независимой и всех фазовых переменных, ставится впервые. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Основные результаты состоят в следующем:

1. Показано, что все μ-решения уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида строго монотонны; причём возрастающие μ-решения либо имеют один нуль, либо знакопостоянны на всей области определения, а все убывающие μ-решения имеют ровно один нуль.

2. Изучен вопрос существования различных типов решений в зависимости от значений показателей нелинейности, в том числе показано, при каких условиях на показатели нелинейности у рассматриваемого уравнения существуют знакопостоянные решения — сингулярные μ-решения первого рода или кнезеровские решения.

3. Исследовано поведение возрастающих μ-решений в зависимости от значений показателей нелинейности: найден критерий существования у решения вертикальной асимптоты, получена оценка расстояния от начальной точки до вертикальной асимптоты и показано, что при $k_1 > 2$ все решения являются black hole решениями; для black hole решений также получены оценки сверху и снизу предела решения при стремлении к границе области определения; показана непрерывная зависимость положения асимптоты от начальных данных.

4. Исследовано качественное поведение убывающих μ-решений: показано, что тип решений зависит только от показателя нелинейности, отвечающего за производную решения, и найдены все возможные типы решений в зависимости от значений этого показателя; для ограниченных μ-решений получены оценки сверху и снизу предела μ-решения при стремлении к границе области определения.

5. Получены результаты о степенном характере асимптотического поведения μ-решений и их первых производных вблизи границ области определения для всех возможных типов μ-решений.

6. Проведён сравнительный анализ полученных в диссертации результатов для уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида с результатами, известными для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер и представляет интерес для специалистов в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Также материалы диссертации могут послужить основой для специального курса в области нелинейных дифференциальных уравнений.

Методы исследований

В диссертации использованы методы качественной и асимптотической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа. В дополнение к классическим методам используются методы, разработанные И.В. Асташовой (см. [1]). Доказательство части результатов потребовало нового аппарата исследования, разработанного автором.

Апробация работы

Результаты работы обсуждались и докладывались на следующих научных семинарах:

- межвузовский научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений МЭСИ, МГУ им. М. В. Ломоносова, МГТУ им. Н. Э. Баумана под руководством проф., д.ф.-м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.-м.н. А. В. Филиновского, проф., к.ф.-м.н. В. А. Никишкина (2013 – 2017 гг.);
- научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф., д.ф.-м.н. И. В. Асташовой, проф., д.ф.-м.н. А. В. Боровских, проф., д.ф.-м.н. Н. Х. Розова, проф., д.ф.-м.н. И. Н. Сергеева (2014 – 2021 гг.);
- Israeli-Georgian Seminar and Drakhlin's Seminar on Functional Differential Equations, Ariel University, Israel (2020-2021 гг.).

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems, Brno, Czech Republic, January 10–13, 2017.

- Международная конференция «Functional Differential Equations and Applications (FDEA 2017)», Ариэль, Израиль, 21–27 августа 2017 г.
- Всероссийская научная конференция "Понтрягинские чтения" в рамках Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач", Воронеж, ВГУ, 3–9 мая 2017 г.; Москва, 2–6 мая 2018 г.; Воронеж, 3–9 мая 2019 г.
- XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения - 2018), Гродно, 15–18 мая 2018 г.
- Международная конференция "International Conference on Differential & Difference Equations and Applications (ICDDEA-2019) Лиссабон, Португалия, 1–5 июля 2019 г.
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, Россия, 3-8 июля 2020 г.
- Международная научная конференция «Седьмые Богдановские чтения по дифференциальным уравнениям», посвященная 100-летию со дня рождения профессора Ю.С.Богданова, Минск, Беларусь, 1-4 июня 2021

Публикации автора по теме диссертации

По результатам научно-исследовательской работы автором опубликовано 42 работы, из них 6 ([95],[96],[97],[98],[99],[100]) входят в журналы, индексируемые в системах Scopus ([98],[99],[100]), WoS ([98],[99],[100]), RSCI ([95],[96],[97],[98]). В журналы перечня ВАК входят 12 статей ([95],[96],[97],[98],[100],[101]–[107]).

В работе [95] автору принадлежит теорема 2.1 (0.125 п.л.), Дулиной К.М. — теорема 2.2; в работе [96] автору принадлежит теорема 1 (0.0625 п.л.), Дулиной К.М. — теорема 2; в работе [97] автору принадлежат леммы 1 и 2, теорема 2 (0.0625 п.л.), Дулиной К.М. — следствие и теорема 3; в работе [101] автору принадлежат леммы 1 и 2, теорема 1 (0.0625 п.л.), Дулиной К.М. — теоремы 2, 3, 4 и следствие; в работе [108] автору принадлежат теоремы 2.1, 3.1, леммы 3.1 и 3.2 (0.1875 п.л.), Дулиной К.М. — теоремы 2.2, 3.2, 3.3 и 3.4; в работе [109] автору принадлежат леммы 1-3 и теорема 1 (0.625 п.л.), Дулиной К.М. — следствия 1 и 2, теорема 2.

Все выносимые на защиту положения — новые и получены автором лично.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего **136** наименований, включая работы автора. Объём диссертации составляет **107** страниц.

Краткое изложение содержания работы

Во **введении** приводится краткий обзор исследований, посвящённых изучению свойств и поведения решений уравнений второго порядка, нелинейных относительно решения, а также результатов об асимптотическом поведении отдельных типов решений уравнения второго порядка со степенными нелинейностями общего вида. Обзор подкрепляется ссылками на научные работы, приведённые в списке литературы. Объясняется актуальность темы исследований и научная новизна поставленной задачи, а также значимость полученных результатов. Также во введении приведены основные результаты диссертации.

В **первой** и **второй** главах рассматривается уравнение (0.10) второго порядка с нелинейностями общего вида и ограниченным и отделённым от нуля потенциалом, зависящим от независимой и всех фазовых переменных.

В **первой** главе получена полная классификация μ-решений уравнения (0.10) в соответствии с их качественным поведением.

В **первом параграфе первой главы** получены общие результаты о возможных типах решений рассматриваемого уравнения.

Теорема 0.1. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, а $p(x,u,v)$ — положительная непрерывная по x и липшицевая по u, v функция. Тогда все μ-решения уравнения* (0.10) *в соответствии со своим качественным поведением относятся к одному из следующих типов:*

0. Постоянные решения;

1. Возрастающие положительные решения;

2. Возрастающие отрицательные решения;

3. Возрастающие решения, отрицательные вблизи левой и положительные вблизи правой границы области определения;

4. Убывающие решения, положительные вблизи левой и отрицательные вблизи правой границы области определения.

Следствие 0.1. *Пусть $p(x,u,v)$ — положительная непрерывная по x и липшицевая по u, v функция. Тогда все μ-решения уравнения* (0.10) *строго* *монотонны.*

Во **втором параграфе первой главы** изучается вопрос существования решений каждого из типов в зависимости от значений показателей нелинейности. Для формулировки результатов понадобятся следующие определения.

Определение 0.2 ([29]). *Решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *является сингулярным первого рода в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если*

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = \lim_{x \to x_0} y'(x) = 0.$$

Определение 0.3 ([95]). *Решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *является отрицательным кнезеровским на промежутке $(x_0, +\infty)$, если $y(x) < 0$ и $y'(x) > 0$ при $x > x_0$.*

Определение 0.4 ([95]). *Решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *является положительным кнезеровским при убывании аргумента на промежутке $(-\infty, x_0)$, если $y(x) > 0$ и $y'(x) > 0$ при $x < x_0$.*

Теорема 0.2. *Пусть функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам*

$$0 < m \leq p(x, u, v) \leq M < +\infty. \tag{0.11}$$

Тогда существование у уравнения (0.10) *сингулярных μ-решений первого рода равносильно условию $k_0 + k_1 < 1$.*

Теорема 0.3. *Пусть функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11). *Тогда существование у уравнения* (0.10) *отрицательных кнезеровских решений и положительных кнезеровских при убывании аргумента решений равносильно одновременному выполнению условий $k_0 + k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$.*

В **третьем параграфе первой главы** получены результаты о качественном поведении возрастающих μ-решений в зависимости от значений показателей нелинейности.

В частности, найдены критерий ограниченности справа (слева) области определения возрастающий решений, положительных (соответственно, отрицательных) в некоторой начальной точке.

Теорема 0.4. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11). *Пусть $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения* (0.10), *удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \geq 0$ и $y'(x_0) > 0$. Тогда существование такой конечной точки $x^* > x_0$, что $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty$, эквивалентно условию $k_0 + k_1 > 1$. Более того, при $k_0 + k_1 > 1$ существует такая положительная константа $\xi = \xi(m, k_0)$, что для любого решения $y(x)$, удовлетворяющего условиям теоремы,*

$$x^* - x_0 < \xi \cdot y'(x_0)^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}}.$$

Теорема 0.5. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11). *Пусть $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения* (0.10), *удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \leq 0$ и $y'(x_0) > 0$. Тогда существование такой конечной точки $x_* < x_0$, что $\lim\limits_{x\to x_*+0} y'(x) = +\infty$, эквивалентно условию $k_0+k_1 > 1$. Более того, при $k_0+k_1 > 1$ существует такая положительная константа $\xi = \xi(m, k_0)$, что для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения* (0.10), *удовлетворяющего условиям теоремы,*

$$x_0 - x_* < \xi \cdot y'(x_0)^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}}.$$

Кроме того, установлено ограничение показателей нелинейности, при выполнении которого возрастающие решения являются ограниченными (в данном случае — black hole решениями), и получены оценки сверху и снизу пределов решений при стремлении к каждой из границ области определения.

Определение 0.5 ([63]). *Решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *является black hole решением, если вблизи конечной границы x^* его области определения справедливо*

$$\lim_{x\to x^*} |y(x)| < \infty, \ \lim_{x\to x^*} |y'(x)| = \infty.$$

Теорема 0.6. *Пусть $k_1 > 2$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11). *Если $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения* (0.10), *удовлетворяющее в некото-*

рой точке x_0 *условиям* $y(x_0) \geq 0$ *и* $y'(x_0) > 0$*, то для правой границы* x^* *области определения, конечность которой утверждается в теореме 0.4, предел* $\lim\limits_{x \to x^*-0} y(x) = y^*$ *конечен, и*

$$\frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{1}{M}\,|y'(x_0)|^{2-k_1} \leq |y^*|^{k_0+1} - |y(x_0)|^{k_0+1} \leq \frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{1}{m}\,|y'(x_0)|^{2-k_1}. \quad (0.12)$$

Теорема 0.7. *Пусть* $k_1 > 2$*, а функция* $p(x,u,v)$ *непрерывна по* x*, липшицева по* u*,* v *и удовлетворяет неравенствам* (0.11)*. Если* $y(x)$ *— максимально продолженное решение уравнения* (0.10)*, удовлетворяющее в некоторой точке* x_0 *условиям* $y(x_0) \leq 0$ *и* $y'(x_0) > 0$*, то для левой границы* x_* *области определения решения, конечность которой утверждается в теореме 0.5, предел* $\lim\limits_{x \to x_*+0} y(x) = y_*$ *конечен и удовлетворяет неравенствам* (0.12) *с заменой* y^* *на* y_**.*

В **четвёртом параграфе первой главы** получены результаты о качественном поведении убывающих μ-решений в зависимости от значений показателей нелинейности.

Определение 0.6 ([64])**.** *μ-решение* $y(x)$ *уравнения* (0.10) *является white hole решением, если вблизи конечной границы* x^* *его области определения справедливо*

$$\lim_{x \to x^*} |y(x)| = \text{const} \neq 0, \ \lim_{x \to x^*} |y'(x)| = 0.$$

В частности, показано, в каких случаях убывающие решения будут white hole решениями, в каких будут иметь горизонтальные асимптоты при $x \to \pm\infty$, и в каких будут неограниченными.

Теорема 0.8. *Пусть* $k_0 > 0$*,* $0 < k_1 < 1$*, а функция* $p(x,u,v)$ *непрерывна по* x*, липшицева по* u*,* v *и удовлетворяет неравенствам* (0.11)*. Тогда любое μ-решение* $y(x)$ *уравнения* (0.10) *с начальными данными* $y(x_0) \leq 0$*,* $y'(x_0) < 0$ *имеет конечную правую границу области определения* x^**, причём существует конечное отрицательное значение* $y^* < y(x_0)$*, такое, что* $\lim\limits_{x \to x^*} y(x) = y^*$ *(то есть,* $y(x)$ *— white hole решение). Более того, предел* y^* *удовлетворяет неравенствам* (0.12)*.*

Теорема 0.9. *Пусть* $k_0 > 0$*,* $0 < k_1 < 1$*, а* $p(x,u,v)$ *непрерывна по* x*, липшицева по* u*,* v *и удовлетворяет неравенствам* (0.11)*. Тогда* *любое μ-решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными $y(x_0) \geq 0$, $y'(x_0) < 0$ имеет конечную левую границу x_* области определения, причём существует конечное положительное значение $y_* > y(x_0)$, такое, что предел $\lim\limits_{x \to x_*} y(x) = y_*$. Более того, y_* удовлетворяет неравенствам* (0.12) *с заменой y^* на y_*.*

Теорема 0.10. *Пусть $k_0 > 0$, $1 \leq k_1 < 2$), а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11)*. Тогда любое μ-решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными $y(x_0) \leq 0$, $y'(x_0) < 0$ определено при всех $x > x_0$, и существует конечное отрицательное значение $y^* < y(x_0)$, такое, что $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = y^*$. Более того, y^* удовлетворяет неравенствам* (0.12)*.*

Теорема 0.11. *Пусть $k_0 > 0$, $1 \leq k_1 < 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11)*. Тогда любое μ-решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными $y(x_0) \geq 0$, $y'(x_0) < 0$ определено при всех $x < x_0$, и существует конечное отрицательное значение $y_* > y(x_0)$, такое, что $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = y_*$. Более того, y_* удовлетворяет неравенствам* (0.12) *с заменой y^* на y_*.*

Теорема 0.12. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 \geq 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11)*. Тогда любое μ-решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными $y(x_0) \leq 0$, $y'(x_0) < 0$ неограниченно и определено на всей числовой прямой.*

В **пятом параграфе первой главы** доказана непрерывная зависимость положений асимптот или конечных областей определения (если они таковы) от начальных данных.

Теорема 0.13. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 + k_1 > 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенству $p(x, u, v) \geq m > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1, удовлетворяющих условиям $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \geq 0$, $y_1 > 0$, $z_0 \geq 0$, $z_1 > 0$, максимально продолженные решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{0.13}$$

и

$$\begin{cases} y(\tilde{x}_0) = z_0, \\ y'(\tilde{x}_0) = z_1, \end{cases} \tag{0.14}$$

соответственно имеют конечные правые границы области определения $x_1^* > x_0$ *и* $x_2^* > \tilde{x}_0$ *соответственно, причём* $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.

Теорема 0.14. *Пусть* $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 + k_1 > 1$, *а функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенству* $p(x, u, v) \geq m > 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая* $\delta > 0$, *что для любых* x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 *удовлетворяющих условиям* $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \leq 0$, $y_1 > 0$, $z_0 \leq 0$, $z_1 > 0$, *максимально продолженные решения* $y(x)$ *и* $z(x)$ *уравнения* (0.10) *с начальными данными* (0.13) *и* (0.14) *соответственно имеют конечные левые границы области определения* $x_{1*} < x_0$ *и* $x_{2*} < \tilde{x}_0$ *соответственно, причём* $|x_{2*} - x_{1*}| < \varepsilon$.

Теорема 0.15. *Пусть* $k_0 > 0$, $k_1 \in (0, 2)$, *а функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенствам* (0.11). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая* $\delta > 0$, *что для любых* x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1, *удовлетворяющих условиям* $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \leq 0$, $y_1 < 0$, $z_0 \leq 0$, $z_1 < 0$, *максимально продолженные решения* $y(x)$ *и* $z(x)$ *уравнения* (0.10) *с начальными данными* (0.13) *и* (0.14) *соответственно имеют конечные пределы* $y_+ < y(x_0)$ *и* $z_+ < z(\tilde{x}_0)$ *соответственно при* $x \to +\infty$, *причём* $|y_+ - z_+| < \varepsilon$.

Теорема 0.16. *Пусть* $k_0 > 0$, $k_1 \in (0, 2)$, *а функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенствам* (0.11). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая* $\delta > 0$, *что для любых* x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1, *удовлетворяющие условиям* $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \geq 0$, $y_1 < 0$, $z_0 \geq 0$, $z_1 < 0$, *максимально продолженные решения* $y(x)$ *и* $z(x)$ *уравнения* (0.10) *с начальными данными* (0.13) *и* (0.14) *соответственно имеют конечные пределы* $y_- > y(x_0)$ *и* $z_- > z(\tilde{x}_0)$ *соответственно при* $x \to -\infty$, *причём* $|x_- - z_-| < \varepsilon$.

Во **второй главе** получена асимптотическая классификация всех μ–решений уравнения (0.10) при условии, что функция $p(x, u, v)$ положительна, ограничена и отделена от нуля.

В **первом параграфе второй главы** получены вспомогательные результаты об асимптотическом поведении всех μ–решений уравнения (0.10), неограниченных вблизи границы области определения, в случае $p(x,u,v) \equiv p_0$, а также исследовано асимптотическое поведение μ–решений уравнения (0.10), неограниченных вблизи границы области определения при условии, что функция $p(x,u,v)$ положительна, ограничена и отделена от нуля.

Введем обозначения $\alpha = \frac{2-k_1}{k_0+k_1-1}$ и для произвольного $P \in \mathbb{R}_+$

$$C(P) = \left(\frac{|\alpha|^{1-k_1}|\alpha+1|}{P}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}}, \ D(P) = \left(\frac{|\alpha|^{k_0}|\alpha+1|}{P}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}}. \qquad (0.15)$$

Получены следующие результаты об асимптотическом поведении решений, неограниченных вблизи границы области определения.

Теорема 0.17. *Пусть $k_0+k_1 > 1$, $k_1 < 2$, а функция $p(x,u,v)$ положительна, непрерывна по x и липшицева по u, v и для любого $a \in \mathbb{R}$ имеет при $x \to a$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P_a. Тогда $\alpha > 0$, и любое возрастающее решение уравнения* (0.10) *имеет вертикальную асимптоту $x = x^*$ справа и вблизи нее имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$y(x) = C(P_{x^*})\,(x^*-x)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0,$$

$$y'(x) = D(P_{x^*})\,(x^*-x)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0.$$

Теорема 0.18. *Пусть $k_0+k_1 > 1$, $k_1 < 2$, а функция $p(x,u,v)$ положительна, непрерывна по x и липшицева по u, v и для любого $a \in \mathbb{R}$ имеет при $x \to a$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P_a. Тогда $\alpha > 0$, и любое возрастающее решение уравнения* (0.10) *имеет вертикальную асимптоту $x = x_*$ слева и вблизи нее имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$y(x) = -C(P_{x_*})\,(x-x_*)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to x_*+0,$$

$$y'(x) = D(P_{x_*})\,(x-x_*)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to x_*+0.$$

Теорема 0.19. *Пусть $k_0+k_1 < 1$, а функция $p(x,u,v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to +\infty$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P. Тогда $\alpha < -1$, и любое возрастающее*

μ-решение уравнения (0.10), положительное вблизи правой границы области определения, имеет вид

$$y(x) = C(P)\,(x - x_0)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = D(P)\,(x - x_0)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

где x_0 — такая точка, что $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = 0$.

Теорема 0.20. *Пусть $k_0 + k_1 < 1$, а функция $p(x, u, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P. Тогда $\alpha < -1$ и любое возрастающее μ-решение уравнения* (0.10), *отрицательное вблизи правой границы области определения, имеет вид*

$$y(x) = -C(P)\,(x_0 - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = D(P)\,(x_0 - x)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

где x_0 — такая точка, что $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = 0$.

Теорема 0.21. *Пусть $k_1 > 2$, а функция $p(x, u, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to +\infty$, $u \to -\infty$, $v \to 0$ положительный предел p_0. Тогда $-1 < \alpha < 0$, и любое убывающее решение уравнения* (0.10) *обращается в ноль в некоторой точке x_0, определено на $[x_0, +\infty)$ и имеет вид*

$$y(x) = -C(p_0)\,(x - x_0)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = -D(p_0)\,(x - x_0)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Теорема 0.22. *Пусть $k_1 > 2$, а функция $p(x, u, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to 0$ положительный предел p_0. Тогда $-1 < \alpha < 0$, и любое убывающее решение уравнения* (0.10) *обращается в ноль в некоторой точке x_0, определено на $(-\infty, x_0]$ и имеет вид*

$$y(x) = C(p_0)\,(x_0 - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = -D(p_0)\,(x_0 - x)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

Во **втором параграфе второй главы** получены результаты об асимптотическом поведении всех μ–решений уравнения (0.10), стремящихся к нулю вблизи границы области определения (а именно, сингулярных μ-решений первого рода и кнезеровских решений) при условии, что функция $p(x, u, v)$ положительна, ограничена и отделена от нуля.

Теорема 0.23. *Пусть $k_0 + k_1 < 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11)*. Тогда $\alpha < -1$, и если $y(x)$ — отрицательное сингулярное первого рода в точке x_0 μ-решение уравнения* (0.10)*, то*

$$y(x) = -C\big(p(x_0, 0, 0)\big)(x_0 - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_0 - 0,$$

$$y'(x) = D\big(p(x_0, 0, 0)\big)\,(x_0 - x)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_0 - 0.$$

Теорема 0.24. *Пусть $k_0 + k_1 < 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11)*. Тогда $\alpha < -1$, и если $y(x)$ — положительное сингулярное первого рода в точке x_0 μ-решение уравнения* (0.10)*, то*

$$y(x) = C\big(p(x_0, 0, 0)\big)(x - x_0)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_0 + 0,$$

$$y'(x) = D\big(p(x_0, 0, 0)\big)\,(x - x_0)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_0 + 0.$$

Теорема 0.25. *Пусть $k_0 + k_1 > 1$, $k_1 < 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (0.11)*, а также имеет предел p_+ при $x \to +\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$. Тогда $-1 < \alpha < 0$, и если $y(x)$ — отрицательное кнезеровское решение уравнения* (0.10)*, то*

$$y(x) = -C\,(p_+)\,x^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = D\,(p_+)\,x^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Теорема 0.26. *Пусть $k_0 + k_1 > 1$, $k_1 > 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (0.11)*, а также* *имеет предел* p_- *при* $x \to -\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$. *Тогда* $-1 < \alpha < 0$, *и если* $y(x)$ *— положительное кнезеровское при убывании аргумента решение уравнения* (0.10), *то*

$$y(x) = C\,(p_-)\,|x|^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = D\,(p_-)\,|x|^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

В **третьем параграфе второй главы** приведены результаты об асимптотическом поведении всех μ–решений уравнения (0.10), имеющих конечный ненулевой предел вблизи границы области определения (а именно, black hole решений, а также white hole решений и решений с горизонтальными асимптотами), и их первых производных при условии, что функция $p(x, u, v)$ положительна, ограничена и отделена от нуля.

Обозначим для $s > 0$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\widetilde{D}(s, t) = \left(|1 - k_1|\, s\, |t|^{k_0}\right)^{\frac{1}{1-k_1}}.$$

Теорема 0.27. *Пусть* $k_1 > 2$, *а функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (0.11) *и для любых* a *и* $b > 0$ *имеет предел предел* P_{ab} *при* $x \to a$, $u \to b$, $v \to +\infty$. *Если* $y(x)$ *— возрастающее решение уравнения* (0.10), *а* x^* *— правая граница его области определения, конечная в силу теоремы 0.4. Обозначим* $y^* = \lim\limits_{x \to x^* - 0} y(x)$, *то*

$$y'(x) = \widetilde{D}(P_{x^* y^*}, y^*)\,(x^* - x)^{-\frac{1}{k_1 - 1}}\,(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0.$$

Теорема 0.28. *Пусть* $k_1 > 2$, *а функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (0.11) *и для любых* a *и* $b < 0$ *имеет предел предел* P_{ab} *при* $x \to a$, $u \to b$, $v \to +\infty$. *Если* $y(x)$ *— возрастающее решение уравнения* (0.10), *а* x_* *— левая граница его области определения, конечная в силу теоремы 0.5. Обозначим* $y_* = \lim\limits_{x \to x_* + 0} y(x)$, *то*

$$y'(x) = \widetilde{D}(P_{x_* y_*}, y_*)\,(x - x_*)^{-\frac{1}{k_1 - 1}}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_* + 0.$$

Теорема 0.29. *Пусть* $0 < k_1 < 1$, *а функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна* *по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11). *Если $y(x)$ — убывающее μ-решение уравнения* (0.10) *а x^* — правая граница его области определения, конечная в силу теоремы 0.10. Обозначим $y^* = \lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)$ и $p_+ = p(x^*, y^*, 0)$, то*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_+, y^*)\ (x^* - x)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0.$$

Теорема 0.30. *Пусть $0 < k_1 < 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (0.11). *Если $y(x)$ — убывающее μ-решение уравнения* (0.10) *а x_* — левая граница его области определения, конечная в силу теоремы 0.11. Обозначим $y_* = \lim\limits_{x\to x_*+0} y(x)$ и $p_- = p(x_*, y_*, 0)$, то*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_-, y_*)\ (x - x_*)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to x_* + 0.$$

Теорема 0.31. *Пусть $k_1 = 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (0.11) *и имеет предел p_+ при $x \to +\infty$, $u \to y^*$, $v \to 0$. Если $y(x)$ — убывающее μ-решение уравнения* (0.10), *$y(x_0) \le 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, то*

$$y'(x) = -|y'(x_0)|\, e^{-p_+ |y^*|^{k_0}\,(x - x_0)} (1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Теорема 0.32. *Пусть $k_1 = 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (0.11) *и имеет предел p_- при $x \to -\infty$, $u \to y_*$, $v \to 0$. Если $y(x)$ — убывающее μ-решение уравнения* (0.10), *$y(x_0) \ge 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, то*

$$y'(x) = -|y'(x_0)|\, e^{-p_- |y^*|^{k_0}\,(x_0 - x)} (1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

Теорема 0.33. *Пусть $1 < k_1 < 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (0.11) *и имеет предел $p(x, u, v) \to p_a^+$ при $x \to +\infty$, $u \to a$, $v \to 0$. Если $y(x)$ — убывающее μ-решение уравнения* (0.10), *$y(x_0) \le 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ и $y^* = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$, то*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_{y^*}^+, y^*)\ (x - x_0)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Теорема 0.34. *Пусть $1 < k_1 < 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна* *по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (0.11) *и имеет предел $p(x,u,v) \to p_a^-$ при $x \to -\infty$, $u \to a$, $v \to 0$. Если $y(x)$ — убывающее μ-решение уравнения* (0.10), *$y(x_0) \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ и $y_* = \lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$, то*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_{y_*}^-, y_*)\ (x_0 - x)^{\frac{1}{1-k_1}}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

В **третьей главе** проведён сравнительный анализ результатов, полученных в настоящей диссертации для уравнения (0.10) второго порядка с нелинейностями общего вида и ограниченным потенциалом, и полученных ранее К. М. Дулиной и собранных в [10] результатов для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка с ограниченным потенциалом.

В **заключении** перечислены основные результаты диссертационной работы и возможные направления дальнейших исследований.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Асташовой Ирине Викторовне за постановку задачи, ее обсуждение, полезные советы, конструктивную критику и постоянную поддержку. Автор выражает благодарность сотрудникам кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за внимание к работе и ценные замечания.

Глава 1. Качественное поведение решений уравнения второго порядка в зависимости от значений показателей нелинейности

В данной главе исследуется качественное поведение μ-решений уравнения (0.10) второго порядка с нелинейностями общего вида

$$y'' = p(x,\, y,\, y')\,|y|^{k_0}\,|y'|^{k_1}\mathrm{sgn}\,(yy'), \quad k_0 > 0,\ k_1 > 0,\ k_0, k_1 \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

со знакопостоянной непрерывной по x и липшицевой по u, v функцией $p(x, u, v)$.

В данной главе будет показано, что все непостоянные решения уравнения (0.10) монотонны, а также описаны возможные типы качественного поведения решений вне зависимости от значений показателей нелинейности. Далее будет исследован вопрос существования каждого из возможных типов решений, а также изучено их качественное поведение в зависимости от показателей нелинейности. В частности, будет установлено взаимнооднозначное соответствие между возможными типами поведения решений и условиями, накладываемыми на показатели нелинейности; кроме того, будет показана непрерывная зависимость положения (конечных) границ областей определения от начальных данных. В случаях ограниченных решений оценим сверху и снизу отношение модулей их пределов (существующих в силу монотонности решений) вблизи левой и правой границ области определения и покажем непрерывную зависимость этих пределов от начальных данных.

1.1 Свойства решений

Рассмотрим поведение решений уравнения (0.10) в зависимости от начальных данных.

Во-первых, справедливо следующее

Замечание 1.1. *При замене $y(x) \mapsto y(-x)$ уравнение* (0.10) *переходит в уравнение того же типа с потенциалом другого знака.*

Действительно, введём обозначение $z(x) = -y(x)$, тогда $z'(x) = -y'(x)$ и $z''(x) = -y''(x)$, и в силу уравнения (0.10)

$$-y''(x) = -p\big(x,\, -y(x),\, -y'(x)\big)\, |-y(x)|^{k_0} |-y'(x)|^{k_1} \mathrm{sgn}\,\big((-y(x))\,(-y'(x))\big),$$

то есть,

$$z''(x) = -\tilde{p}(x, z, z')\, |z|^{k_0}\, |z'|^{k_1}\, \mathrm{sgn}\,(zz'),$$

где функция $\tilde{p}(x, u, v)$, как и $p(x, u, v)$, непрерывна по x, липшицева по u, v и $\mathrm{sgn}\,\tilde{p}(x, u, v) = \mathrm{sgn}\,p(x, u, v)$.

Таким образом, достаточно исследовать только случай положительной функции $p(x, u, v)$; далее будем считать, что $p(x, u, v) > 0$. Кроме того,

Замечание 1.2. *При замене $y(x) \mapsto -y(-x)$ тип уравнения* (0.10) *не меняется.*

Опять же, введём обозначение $z(x) = -y(-x)$, тогда $z'(x) = y'(-x)$ и $z''(x) = -y''(-x)$, и в силу уравнения (0.10)

$$-y''(-x) = -p\big(-x,\, y(-x),\, y'(-x)\big)\, |y(-x)|^{k_0} |y'(-x)|^{k_1} \mathrm{sgn}\,(-y(-x)y'(-x)),$$

то есть,

$$z''(x) = \tilde{p}(x, z, z')\, |z|^{k_0}\, |z'|^{k_1}\, \mathrm{sgn}\,(zz'),$$

где функция $\tilde{p}(x, u, v)$, как и $p(x, u, v)$, положительна, непрерывна по x и липшицева по u, v.

Отсюда следует, что достаточно изучить поведение решений уравнения (0.10) при возрастании аргумента.

Прежде чем перейти к изучению качественного поведения решений уравнения (0.10), обратимся к вопросу единственности решений рассматриваемого уравнения в окрестности точки x_0, удовлетворяющих начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_1, \tag{1.2}$$

Асташовой И.В. в [48] доказаны следующие теоремы:

Теорема 1.1 ([48])**.** *Пусть $0 < k_0 < 1$, $y_0 = 0$, $y_1 \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности нуля уравнение* (0.10) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию* (1.2).

Теорема 1.2 ([48])**.** *Пусть* $0 < k_1 < 1$, $y_0 \neq 0$, $y_1 = 0$. *Тогда существует по крайней мере два решения уравнения* (0.10), *удовлетворяющих условию* (1.2) *и отличающихся в точках, сколь угодно близких к нулю.*

Теорема 1.3 ([48])**.** *Пусть* $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 + k_1 \geqslant 1$, $y_0 = y_1 = 0$. *Тогда в некоторой окрестности нуля уравнение* (0.10) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию* (1.2).

Теорема 1.4 ([48])**.** *Пусть* $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 + k_1 < 1$, $y_0 = y_1 = 0$. *Тогда существует по крайней мере два решения уравнения* (0.10), *удовлетворяющих условию* (1.2) *и отличающихся в точках, сколь угодно близких к нулю.*

Результаты теорем 1.1–1.4 можно представить с помощью следующей таблицы.

	00	Y0	0Z	YZ
$k_0 \geqslant 1,\ k_1 \geqslant 1$	**1**	**1**	**1**	**1**
$k_0 < 1,\ k_1 \geqslant 1$	**1** : т.1.3	**1**	**1** : т.1.1	**1**
$k_0 \geqslant 1,\ k_1 < 1$	**1** : т.1.3	**0** : т.1.2	**1**	**1**
$k_0 < 1,\ k_1 < 1$ $k_0 + k_1 \geqslant 1$	**1** : т.1.3	**0** : т.1.2	**1** : т.1.1	**1**
$k_0 + k_1 < 1$	**0** : т.1.4	**0** : т.1.2	**1** : т.1.1	**1**

В первой колонке таблицы указаны условия на положительные константы k_0 и k_1; первая строка описывает начальные данные $y(0)$, $y'(0)$ с помощью обозначений Y и Z для любых ненулевых значений.

В остальной части таблицы **1** означает локальную единственность решения задачи (0.10)–(1.2) при выполнении соответствующих условий на k_0, k_1, y_0, y_1, а **0** — наоборот, неединственность. Эти метки сопровождаются ссылками на теорему, описывающую соответствующий случай. Отсутствие ссылки означает применимость классической теоремы существования и единственности.

Таким образом, любое максимально продолженное решение уравнения (0.10) единственно на интервале, на котором его производная отлична от нуля.

В связи с задачей классификации решений далее будем рассматривать μ-решения уравнения (0.10). Если максимально продолженное решение единственно на всей области определения, оно же является и μ-решением; в этих случаях, если не оговорено иное, будем говорить «максимально продолженные решения» или просто «решения».

Перейдём к изучению качественного поведения решений в зависимости от показателей нелинейности.

Теорема 1.5. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, а $p(x, u, v)$ — положительная непрерывная по x и липшицевая по u, v функция. Тогда все μ-решения уравнения* (0.10) *в соответствии со своим качественным поведением относятся к одному из следующих типов:*

0. Постоянные решения;

1. Возрастающие положительные решения;

2. Возрастающие отрицательные решения;

3. Возрастающие решения, отрицательные вблизи левой и положительные вблизи правой границы области определения;

4. Убывающие решения, положительные вблизи левой и отрицательные вблизи правой границы области определения.

Доказательство. Сопоставим в соответсвие каждому максимально продолженному решению $y(x)$ уравнения (0.10) траекторию в $\mathbb{R}^2$, состоящую из точек с координатами $\big(y(x), y'(x)\big)$. Разобъём $\mathbb{R}^2$ на множества $\mathbb{R}_{++}$, $\mathbb{R}_{-+}$, $\mathbb{R}_{+-}$, $\mathbb{R}_{--}$, а также $\mathbb{R}_{0+}$, $\mathbb{R}_{0-}$, $\mathbb{R}_{+0}$, $\mathbb{R}_{-0}$ в соответствии со знаками координат точек.

Заметим, что траекториям постоянных решений соответствуют точки множеств $\mathbb{R}_{-0}$, $\mathbb{R}_{+0}$ и $\mathbb{R}_{00} = (0, 0)$. В силу приведённых выше теорем 1.1–1.4 такие решения будут единственны при $k_1 \geq 1$; при $k_1 < 1$ такие решения неединственны и, поскольку любое максимально продолженное решение уравнения (0.10) единственно на интервале, на котором его производная отлична от нуля, получаем, что любое μ-решение либо полностью содержится в одной из областей $\mathbb{R}_{\pm\pm}$, либо пересекает множества $\mathbb{R}_{0\pm}$ в точках, образующих множество нулевой меры.

Покажем, что первая производная любого μ-решения $y(x)$ уравнения (0.10) знакопостоянна. Действительно, в силу уравнения имеем $\operatorname{sgn} y'' = \operatorname{sgn} y \, \operatorname{sgn} y'$. Пусть решение $y(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0. Тогда если $y(x_0) = 0$, то либо $(0, 0)$ — точка неединственности и не принадлежит траектории μ-решения, либо это решение — тождественный ноль, и его производная имеет постоянный — нулевой — знак. Если же $y(x_0) \neq 0$, то в окрестности точки x_0 знак меняет только первая производная, и равенство знаков $\operatorname{sgn} y'' = \operatorname{sgn} y \operatorname{sgn} y'$ нарушается.

Таким образом, любое μ-решение имеет знакопостоянную производную, а значит, имеет не более одного нуля, то есть либо полностью лежит в одном из множеств $\mathbb{R}_{\pm\pm}$, либо пересекает одно из множеств $\mathbb{R}_{0\pm}$ ровно в одной точке. Во втором случае это, соответственно, решение типа 3 (возрастающее, меняющее знак с отрицательного на положительный) или 4 (убывающее, меняющее знак с положительного на отрицательный). Решения, траектории которых полностью лежат в одном из множеств $\mathbb{R}_{\pm+}$, относятся к типам 1 и 2 (знакопостоянные возрастающие решения).

Покажем, что траектория μ-решения не может полностью содержаться в любом из множеств $\mathbb{R}_{\pm-}$ (и, следовательно, возможные типы μ-решений исчерпываются приведёнными в формулировке теоремы). Действительно, для убывающих μ-решений уравнения (0.10) справедливо равенство $\operatorname{sgn} y'' = \operatorname{sgn} y \ \operatorname{sgn} y' = -\operatorname{sgn} y$, значит, пока траектория μ-решения лежит в множестве $\mathbb{R}_{+-}$, его вторая производная отрицательна и, следовательно, первая производная отрицательна и убывает. А это означает, что μ-решение $y(x)$ не может оставаться положительным при возрастании аргумента и покинет множество $\mathbb{R}_{--}$. В силу замечания 1.2, аналогичные рассуждения справедливы и для множества $\mathbb{R}_{--}$: траектория μ-решения не может оставаться в $\mathbb{R}_{+-}$ при убывании аргумента. Таким образом, любое μ-решение относится к одному из перечисленных в формулировке теоремы типов, и теорема 1.5 доказана.

Из теоремы 1.5, в частности, вытекает

Следствие 1.1. *Пусть $p(x,u,v)$ — положительная непрерывная по x и липшицевая по u, v функция. Тогда все μ-решения уравнения* (0.10) *строго монотонны.*

В связи с этим в дальнейшем мы будем рассматривать отдельно качественное поведение возрастающих и убывающих μ-решений, но сначала сформулируем лемму, учитывающую оба возможных знака первой производной решения.

Лемма 1.1. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_1 \neq 2$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам*

$$0 < m \leq p(x,u,v) \leq M < +\infty. \tag{1.3}$$

Тогда для любого μ-решения $y(x)$ уравнения (0.10), *знакопостоянного на ин-*

тервале (x_1, x_2), справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
& m\left(\left|y(x_2)\right|^{k_0+1}-\left|y(x_1)\right|^{k_0+1}\right) sgn\,(yy') \leq \\
& \leq \frac{k_0+1}{2-k_1}\left(\left|y'(x_2)\right|^{2-k_1}-\left|y'(x_1)\right|^{2-k_1}\right) sgn\, y \leq \\
& \leq M\left(\left|y(x_2)\right|^{k_0+1}-\left|y(x_1)\right|^{k_0+1}\right) sgn\,(yy').
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Доказательство. В силу неравенств (1.3) и уравнения (0.10) модуль второй производной решения можно оценить следующим образом:

$$
m\,|y|^{k_0}\,|y'|^{k_1} \leq |y''| = \left|p(x,\,y,\,y')\,|y|^{k_0}\,|y'|^{k_1}\mathrm{sgn}\,(yy')\right| \leq M\,|y|^{k_0}\,|y'|^{k_1}.
$$

Тогда

$$
m\,|y(x)|^{k_0}\,|y'(x)| \leq |y''(x)||y'(x)|^{1-k_1} \leq M\,|y(x)|^{k_0}\,|y'(x)|
$$

и, интегрируя полученные неравенства на $[x_1, x_2]$, получаем

$$
\begin{aligned}
& \frac{m}{k_0+1}\left(\left|y(x_2)\right|^{k_0+1}-\left|y(x_1)\right|^{k_0+1}\right) \mathrm{sgn}\,(yy') \leq \\
& \leq \frac{1}{2-k_1}\left(|y'|^{2-k_1}-\left|y'(x_1)\right|^{2-k_1}\right) \mathrm{sgn}\,(y'y'') \leq \\
& \leq \frac{M}{k_0+1}\left(\left|y(x_2)\right|^{k_0+1}-\left|y(x_1)\right|^{k_0+1}\right) \mathrm{sgn}\,(yy'),
\end{aligned}
$$

где $\mathrm{sgn}\,(yy')$ и $\mathrm{sgn}\,(y'y'')$ постоянны на интервале (x_1, x_2) и поэтому могут быть вяты в любой точке этого интервала. Следовательно, на интервале (x_1, x_2) справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
& m\left(\left|y(x_2)\right|^{k_0+1}-\left|y(x_1)\right|^{k_0+1}\right) \mathrm{sgn}\,(yy') \leq \\
& \leq \frac{k_0+1}{2-k_1}\left(\left|y'(x_2)\right|^{2-k_1}-\left|y'(x_1)\right|^{2-k_1}\right) \mathrm{sgn}\, y \\
& \leq M\left(\left|y(x_2)\right|^{k_0+1}-\left|y(x_1)\right|^{k_0+1}\right) \mathrm{sgn}\,(yy').
\end{aligned}
$$

Лемма 1.1 доказана.

Замечание 1.3. *Теорема 1.5 не утверждает существования решений каждого из типов — этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.*

1.2 О существовании решений с заданным качественным поведением

Решения, обращающиеся в ноль в некоторой точке, существуют при любых значениях показателей нелинейности в силу классической теоремы существования для любой тройки начальных данных $(x_0, 0, y_1)$, где $y_1 \neq 0$.

Таким образом, в силу теоремы 1.5, остаётся решить вопрос существования знакопостоянных решений, то есть сингулярных μ-решений первого рода и отрицательного и положительного при убывании аргумента кнезеровских решений.

Из доказательства теоремы 1.2 (И. В. Асташова, [48]) следует

Теорема 1.6. *Пусть функция* $p(x,u,v)$ *непрерывна по* x*, липшицева по* u*,* v *и удовлетворяет неравенствам* (1.3)*. Тогда существование у уравнения* (0.10) *сингулярных* μ*-решений первого рода равносильно условию* $k_0 + k_1 < 1$*.*

Перейдем к вопросу существования кнезеровских решений.

Теорема 1.7. *Пусть функция* $p(x,u,v)$ *непрерывна по* x*, липшицева по* u*,* v *и удовлетворяет неравенствам* (1.3)*. Тогда при* $k_0 + k_1 < 1$ *уравнение* (0.10) *не имеет кнезеровских решений.*

Доказательство. В силу замечания 1.2 достаточно изучить вопрос существования отрицательных кнезеровских решений. Предположим противное: пусть существует такое решение $y(x)$, что $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$ на некотором интервале $(x_0, +\infty)$. Обозначим $y_0 = y(x_0)$ и $y_1 = y'(x_0)$.

В силу уравнения (0.10) $y''(x)$ будет также отрицательной на $(x_0, +\infty)$, значит, первая производная положительна и убывает. Возможны два случая: либо $y' \to 0$ при $x \to +\infty$, либо $y' \geq \mathrm{const} > 0$ при $x \geq x_0$. Однако, во втором случае $y(x) - y_0 \geq \mathrm{const}(x - x_0)$, откуда следует $y(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, что противоречит определению отрицательного кнезеровского решения. Значит, у всякого такого решения первая производная стремится к нулю при возрастании аргумента.

Покажем, что в случае $k_0 + k_1 < 1$ и само решение стремится к нулю. Предположим противное: пусть $y \to \mathrm{const} < 0$ при $x \to +\infty$. Отсюда следует, что $|y(x)| \geq \mathrm{const} > 0$, и в силу уравнения (0.10),

$$-y''(x) \geq \mathrm{const}\,(y'(x))^{k_1},$$

$$-y''(x)\,(y'(x))^{-k_1} \geq \mathrm{const},$$

и, поскольку $k_1 < 1$,

$$\frac{(y'(x))^{1-k_1} - y_1^{1-k_1}}{k_1 - 1} \geq \mathrm{const}\,(x - x_0),$$

откуда при $x \to +\infty$ получаем

$$\lim_{x\to+\infty} (y'(x))^{1-k_1} = \infty,$$

что приводит к противоречию в силу того, что $y' \to +0$ и $1 - k_1 > 0$.

Таким образом, $y(x) \to 0$ и $y'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Это значит, что можно построить последовательность точек, которая начинается с x_0 и далее строится по правилу

$$x_i = \max\left\{x\colon x > x_{i-1},\ |y(x_i)| \geq 2^{-i}|y_0|,\ y'(x_i) \geq 2^{-i}y_1\right\}.$$

Тогда в силу монотонности $y(x)$ и $y'(x)$ на промежутке (x_i, x_{i+1}) выполнено

$$|y(x)| \geq |y(x_{i+1})| \geq 2^{-i-1}|y_0| \text{ и } y'(x) \geq y'(x_{i+1}) \geq 2^{-i-1}y_1,$$

следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$-y'' \geq m\,|2^{-i-1}y_0|^{k_0}\,(2^{-i-1}y_1)^{k_1},$$

$$y'(x_i) - y'(x_{i+1}) \geq m\,|2^{-i-1}y_0|^{k_0}\,(2^{-i-1}y_1)^{k_1}\,(x_{i+1} - x_i),$$

откуда

$$2^{-i-1}y_1 \geq m\,2^{-(i+1)(k_0+k_1)}\,|y_0|^{k_0}\,(y_1)^{k_1}\,(x_{i+1} - x_i),$$

$$x_{i+1} - x_i \leq \frac{|y_0|^{-k_0}\,(y_1)^{1-k_1}}{m}\,2^{-(i+1)(1-k_0-k_1)}.$$

Тогда сумму расстояний между точками последовательности можно оценить следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(x_{i+1}-x_i) \le \frac{|y_0|^{-k_0}\,(y_1)^{1-k_1}}{m}\ \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-(i+1)(1-k_0-k_1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{i\to+\infty} x_i \le \frac{|y_0|^{-k_0}\,(y_1)^{1-k_1}}{m}\ \left(1-2^{-(1-k_0-k_1)}\right)^{-1} < +\infty,$$

но по построению для отрицательного кнезеровского решения $\lim\limits_{i\to+\infty} x_i = +\infty$, что приводит к противоречию. Следовательно, при $k_0+k_1<1$ кнезеровских решений не существует.

Теорема 1.8. *Пусть функция* $p(x,u,v)$ *непрерывна по* x*, липшицева по* u*,* v *и удовлетворяет неравенствам* (1.3)*. Тогда при* $k_1 \ge 2$ *уравнение* (0.10) *не имеет кнезеровских решений.*

Доказательство. Опять же, в силу замечания 1.2 достаточно изучить вопрос существования отрицательных кнезеровских решений. Предположим противное: пусть существует такое решение $y(x)$, что $y(x)<0$, $y'(x)>0$ на некотором интервале $(x_0,+\infty)$. Обозначим $y_0=y(x_0)$ и $y_1=y'(x_0)$.

В силу уравнения (0.10) $y''(x)$ будет также отрицательной на $(x_0,+\infty)$, значит, первая производная положительна и убывает. Возможны два случая: либо $y'\to 0$ при $x\to+\infty$, либо $y'\ge \mathrm{const}>0$ при $x\ge x_0$. Однако, во втором случае $y(x)-y_0\ge \mathrm{const}(x-x_0)$, откуда следует $y(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, что противоречит определению отрицательного кнезеровского решения. Значит, у всякого такого решения первая производная стремится к нулю при возрастании аргумента.

Далее, при $k_1<2$ в силу леммы 1.1 для $x>x_0$ справедливо неравенство

$$\frac{y_1^{2-k_1}-(y'(x))^{2-k_1}}{2-k_1} \le M\frac{|y(x)|^{k_0+1}-|y_0|^{k_0+1}}{k_0+1},$$

а при $k_1=2$ — неравенство

$$\ln y_1^{2-k_1}-\ln y'(x) \le M\frac{|y(x)|^{k_0+1}-|y_0|^{k_0+1}}{k_0+1}.$$

В обоих случаях при $y'\to 0$ левая часть полученного неравенства стремится к бесконечности, а значит, и правая чать тоже, и $|y(x)|^{k_0+1} \to \infty$. Но, поскольку при $x > x_0$ решение отрицательно, а его производная положительна, $|y(x)|$ убывает при $x \to +\infty$, что приводит к противоречию. Значит, при $k_1 \geq 2$ уравнение (0.10) не имеет кнезеровских решений.

Таким образом, в связи с вопросом существования кнезеровских решений осталось рассмотреть случай $k_0 + k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$.

Лемма 1.2. *Пусть $k_0 + k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Пусть существует такая точка x_0, что решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *удовлетворяет условиям $y(x_0) < 0$, $y'(x_0) > 0$, а также при всех таких $x \geq x_0$, что $y(x) < 0$, удовлетворяет неравенствам*

$$m\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\,|y(x)|^{k_0+1} \leq \big(y'(x)\big)^{2-k_1} \leq M\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\,|y(x)|^{k_0+1}. \qquad (1.5)$$

Тогда $y(x)$ — отрицательное кнезеровское решение.

Доказательство. Поскольку в точке x_0 решение отрицательно, а его производная положительна, то при $x > x_0$ решение будет возрастать. Это означает, что возможны два случая: либо $y \to \mathrm{const} < 0$ при $x \to x^*$, где x^* — правая граница области определения решения $y(x)$, либо $y \to 0$ при $x \to \widetilde{x}$ для некоторого $\widetilde{x} > x_0$.

Рассмотрим первый случай. В силу неравенств (1.5) при $x \to x^*$ условие $y \to \mathrm{const} < 0$ равносильно условию $y' \to \mathrm{const} > 0$. Поскольку на всём промежутке (x_0, x^*) решение отрицательно, а его первая производная положительна, то в силу уравнения (0.10) его вторая производная отрицательна. Значит, на промежутке (x_0, x^*) справедливо $y' \geq \mathrm{const} > 0$. Проинтегрировав это неравенство на интервале (x_0, x^*), получим

$$\lim_{x \to x^*} y(x) - y_0 \geq \mathrm{const}\,(x^* - x_0).$$

По предположению, $y(x) \to \mathrm{const}$ при $x \to x^*$, то есть левая часть полученного неравенства ограничена, а это означает, что $x^* < +\infty$. Но тогда в конечной точке x^* решение и его первая производная также конечны, а значит, решение $y(x)$ продолжаемо за точку x^* — противоречие.

Следовательно, возможен только второй случай: $y \to 0$ при $x \to \widetilde{x}$ для некоторого $\widetilde{x} > x_0$. В силу неравенств (1.5) первая производная также стремится к 0 при $x \to \widetilde{x}$. Однако, если $\widetilde{x} < +\infty$, то решение $y(x)$ по определению является сингулярным первого рода в точке $\widetilde{x}$, что в силу требований на коэффициенты k_0 и k_1 невозможно по теореме 1.6. Значит, $\widetilde{x} = +\infty$, и решение $y(x)$ при $x \in (x_0, +\infty)$ отрицательно и имеет положительную первую и отрицательную вторую производные — следовательно, по определению является отрицательным кнезеровским решением, и лемма 1.2 доказана.

Замечание 1.4. *Соблюдение условия* (1.5) *на всей области определения μ-решения $y(x)$ является необходимым для того, чтобы решение $y(x)$ было сингулярным первого рода в случае $k_0 + k_1 < 1$ и кнезеровским в случае $k_0 + k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$.*

Доказательство. Действительно, в лемме 1.2 показано, что отрицательные кнезеровские решения стремятся к нулю вместе с первой производной вблизи правой границы области определения; то же выполняется для отрицательных сингулярных μ-решений первого рода по определению. В сочетании с результатом леммы 1.1 для $x_1 = x$ и $x_2 \to x^*$, где x^* — правая граница области определения решения $y(x)$, получаем в точности условие 1.5.

Покажем, что уравнение (0.10) действительно имеет при $k_0+k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$ решения, удовлетворяющие условию леммы 1.2.

Теорема 1.9. *Пусть $k_0+k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3)*. Тогда среди решений уравнения* (0.10)*, в некоторой точке x_0 удовлетворяющих условиям $y(x_0) < 0$, $y'(x_0) > 0$ и*

$$m\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\,|y(x_0)|^{k_0+1} \leq \big(y'(x_0)\big)^{2-k_1} \leq M\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\,|y(x_0)|^{k_0+1},$$

существует хотя бы одно, удовлетворяющее условиям леммы 1.2.

Доказательство. Введём замену переменных

$$\begin{cases} t = -\ln|y(x)|, \\ u = |y(x)|^{-(k_0+1)}\,\big(y'(x)\big)^{2-k_1}. \end{cases}$$

Будем рассматривать решения на промежутке, на котором $-\infty < y(x_0) < y(x) < 0$ и, соответственно, $0 < t_0 = -\ln|y_0| < t < +\infty$; в силу условия теоремы справедливы соотношения

$$m\,\frac{2-k_1}{k_0+1} \le u(t_0) \le M\,\frac{2-k_1}{k_0+1}. \tag{1.6}$$

Итак, при отрицательном $y(x)$

$$t'_x = \big(-\ln(-y(x))\big)'_x = \frac{y'(x)}{|y(x)|}, \quad x'_t = |y|\,(y')^{-1},$$

и, следовательно,

$$\dot u = \Big(-(k_0+1)(-y)^{-k_0-2}(-y')(y')^{2-k_1} + (2-k_1)|y|^{-k_0-1}(y')^{1-k_1}y''\Big)|y|\,(y')^{-1} =$$

$$= (k_0+1)|y|^{-k_0-1}(y')^{2-k_1} + (2-k_1)|y|^{-k_0}(y')^{-k_1}y'',$$

откуда, в силу уравнения (0.10) и замены переменных,

$$\dot u = (k_0+1)u - (2-k_1)|y|^{-k_0}(y')^{-k_1}|y|^{k_0}(y')^{k_1}\varphi(t),$$

$$\dot u = (k_0+1)u - (2-k_1)\varphi(t), \tag{1.7}$$

где $\varphi(t) = p\big(x(t), y(x(t)), y'(x(t))\big)$ непрерывна и в силу неравенств (1.3) удовлетворяет соотношениям $0 < m \le \varphi(t) \le M < +\infty$.

Покажем, что среди решений $u(t)$ уравнения (1.7) со значением $u(t_0)$, удовлетворяющими ограничениям (1.6), найдётся хотя бы одно, удовлетворяющее при всех $t \ge t_0$ неравенствам

$$m\,\frac{2-k_1}{k_0+1} \le u(t) \le M\,\frac{2-k_1}{k_0+1}.$$

Рассмотрим систему координат (t,u) и замкнутую полосу

$$L = \left\{t \ge t_0,\ m\,\frac{2-k_1}{k_0+1} \le u \le M\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\right\}.$$

Оценим значения $\dot u$ на горизонтальных границах полосы L:

$$\dot u\big|_{u=M\frac{2-k_1}{k_0+1}} = \big((k_0+1)u - (2-k_1)\varphi(t)\big)\big|_{u=M\frac{2-k_1}{k_0+1}} = (2-k_1)(M-\varphi(t)) \ge 0,$$

поскольку $\varphi(t) \le M$; при $u > M\frac{2-k_1}{k_0+1}$, аналогично, $\dot u > 0$. Также

$$\dot u\big|_{u=m\frac{2-k_1}{k_0+1}} = \big((k_0+1)u - (2-k_1)\varphi(t)\big)\big|_{u=m\frac{2-k_1}{k_0+1}} = (2-k_1)(m-\varphi(t)) \le 0,$$

поскольку $\varphi(t) \ge m$; при $0 < u < m\frac{2-k_1}{k_0+1}$, аналогично, $\dot u < 0$.

Отсюда следует, что график решения $u(t)$ уравнения (1.7), в некоторый момент покинувший полосу L, больше в неё не вернётся.

Рассмотрим графики решений с начальными точками из отрезка

$$I = \left\{ t = t_0,\ m\,\frac{2-k_1}{k_0+1} \le u \le M\,\frac{2-k_1}{k_0+1} \right\}.$$

При продолжении вправо эти графики могут либо покинуть полосу L, пересекая при этом либо верхнюю, либо нижнюю горизонтальные её границы, либо остаться в этой полосе. Покажем, что все решения не могли остаться в полосе.

Действительно, предположим противное. Определим для произвольного решения u_α с начальными данными $(t_0,\alpha) \in I$ момент t_α так, что $u_\alpha(t_\alpha) \in L$, но для любого $\varepsilon > 0$ точка $\big(t_\alpha+\varepsilon, u(t_\alpha+\varepsilon)\big)$ лежит вне полосы L — то есть, последний момент перед выходом решения из полосы.

Поскольку

$$\dot u = (k_0+1)\,u - (2-k_1)\,\varphi(t) \le (k_0+1)\,u - m\,(2-k_1),$$

решение u_α продолжаемо при $t \ge t_0$, а значит, по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных данных, существует такое δ_α, что все решения u_β с начальными данными из промежутка

$$U_\alpha = \big\{ \big(t_0, (\alpha-\delta_\alpha, \alpha+\delta_\alpha)\big) \big\} \cap I$$

в соответствующие моменты выхода t_β принимают значение

$$u_\beta(t_\beta) = u_\alpha(t_\alpha) \in \left\{ m\,\frac{2-k_1}{k_0+1}; M\,\frac{2-k_1}{k_0+1} \right\},$$

то есть выходят из полосы L через ту же горизонтальную границу (верхнюю или нижнюю).

Построим такие промежутки U_α для всех $\alpha \in \left[m\,\frac{2-k_1}{k_0+1}, M\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\right]$. Посколь-

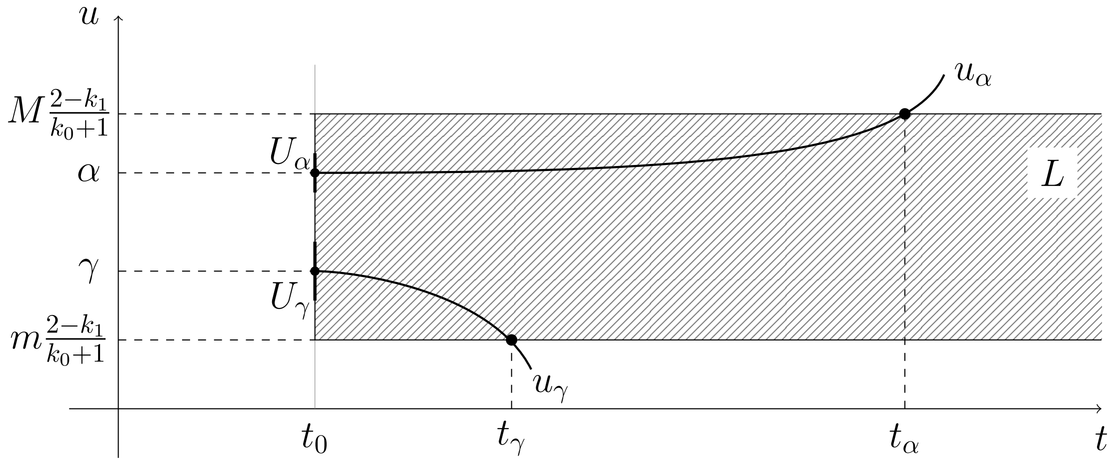

Рисунок 1.1

ку I — компакт, из его покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{\alpha_i}\}_{i=0,\dots,n}$, причём по построению решения с начальной точкой в каждом из промежутков покрытия покинут полосу L через одну и ту же границу. А это означает, в частности, что решения, начинающиеся в граничных точках отрезка I также покидают полосу L через одну и ту же границу, что невозможно, поскольку $\dot{u}\big|_{u=M^{\frac{2-k_1}{k_0+1}}} \geq 0$, а $\dot{u}\big|_{u=m^{\frac{2-k_1}{k_0+1}}} \leq 0$. Полученное противоречие доказывает существование решения $u(t)$ уравнения (1.7), график которого лежит в полосе L при всех $t > t_0$, и, соответственно, существование решения $y(x)$ уравнения(0.10), удовлетворяющего заключению теоремы.

Таким образом, существование кнезеровских решений уравнения (0.10) в случае $k_0 + k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$ доказано.

Результаты теорем 1.7–1.9 можно обобщить в виде следующего критерия:

Теорема 1.10. *Пусть функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда существование у уравнения* (0.10) *отрицательных кнезеровских решений и положительных кнезеровских при убывании аргумента решений равносильно одновременному выполнению условий $k_0 + k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$.*

Следствие 1.2. *Пусть $k_1 < 2$ и $p(x, u, v) \equiv p_0 > 0$. Пусть $y(x)$ — μ-решение уравнения* (0.10), *удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) = y_0 < 0$, $y'(x_0) = y_1 > 0$ и*

$$\frac{y_1^{2-k_1}}{|y_0|^{k_0+1}} = p_0 \, \frac{2 - k_1}{k_0 + 1}$$

Тогда $y(x)$ — сингулярное решение первого рода в случае $k_0 + k_1 < 1$ и отрицательное кнезеровское решение на $(x_0, +\infty)$ иначе.

Доказательство. При $k_0+k_1 \geq 1$ утверждение следует из доказательства теоремы 1.9: при $p(x,u,v) \equiv p_0$ полоса L становится лучом $\left\{t \geq t_0, u = p_0\frac{2-k_1}{k_0+1}\right\}$, причём на этом луче $\dot{u} \equiv 0$.

В случае $k_0 + k_1 < 1$ утверждение следует из леммы 1.1, которая при $p(x,u,v) \equiv p_0$ гарантирует на промежутке, на котором $y(x) < 0$, равенство

$$(y')^{2-k_1} - y_1^{2-k_1} = p_0\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\,\left(|y|^{k_0+1} - |y_0|^{k_0+1}\right),$$

что в силу условия на начальные данные приводит к равенству

$$(y')^{2-k_1} = p_0\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\,|y|^{k_0+1},$$

откуда следует, что решение и его первая производная стремятся к нулю одновременно (а стремление производной к нулю следует из рассуждений в начале доказательства теоремы 1.7), причём в конечной точке, поскольку кнезеровских решений при $k_0+k_1 < 1$ не существует. Значит, в этом случае рассматриваемое решение $y(x)$ — сингулярное первого рода.

1.3 Качественное поведение возрастающих μ-решений

Сфокусируем внимание на особенностях качественного поведения возрастающих μ-решений в зависимости от значений показателей нелинейности.

Теорема 1.11. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3)*. Если $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения* (0.10)*, удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \geq 0$ и $y'(x_0) > 0$, то существование конечной точки $x^* > x_0$ такой, что $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty$, эквивалентно условию $k_0 + k_1 > 1$. Более того, при $k_0 + k_1 > 1$ существует такая положительная константа $\xi = \xi(m, k_0)$, что для любого решения $y(x)$, удовлетворяющего условиям теоремы,*

$$x^* - x_0 < \xi \cdot y'(x_0)^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}}.$$

Доказательство. Пусть условие $k_0 + k_1 > 1$ выполнено.

В соответствии с теоремой 1.5, решения с положительной производной являются возрастающим на всей области определения, поэтому при $x > x_0$ выполняются неравенства $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$, и, в силу уравнения (0.10), при $x > x_0$ также $y''(x) = p(x, y, y')\,|y|^{k_0}\,|y'|^{k_1} > 0$. Следовательно, решение и его первая производная возрастают при $x > x_0$, и, поскольку $y''(x) \geq m|y(x_0)|^{k_0}\,|y'(x_0)|^{k_1}$, первая производная стремится к $+\infty$ вблизи правой границы области определения. А это означает, что для любого $i \in \mathbb{N}$ существует такая точка $x_i > x_{i-1}$, что $y'(x_i) = 2y'(x_{i-1}) = 2^i y_1$, где $y_1 = y'(x_0)$.

Оценим разность $x_{i+1} - x_i$. При $x \in [x_i, x_{i+1}]$ справедливы неравенства

$$y'(x) \geq 2^i\, y_1, \quad y(x) - y(x_i) \geq 2^i\, y_1(x - x_i),$$

и, поскольку $y(x_i) \geq y(x_0) \geq 0$,

$$y(x) \geq 2^i\, y_1(x - x_i),$$

откуда

$$y^{k_0}(x) \geq \Big(2^i\, y_1(x - x_i)\Big)^{k_0} \ \text{ и } \Big(y'(x)\Big)^{k_1} \geq y_1^{k_1},$$

$$y''(x) = p(x, y, y')\,|y|^{k_0}|y'|^{k_1}\mathrm{sgn}\,(yy') \geq m\, 2^{i(k_0+k_1)}\, y_1^{k_0+k_1}\,(x - x_i)^{k_0}.$$

Интегрируя это неравенство на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, получаем

$$y'(x_{i+1}) - y'(x_i) \geq \frac{m}{k_0+1}\, 2^{i(k_0+k_1)}\, y_1^{k_0+k_1}\,(x_{i+1} - x_i)^{k_0+1},$$

значит,

$$2^i\, y_1 \geq \frac{m}{k_0+1}\, 2^{i(k_0+k_1)}\, y_1^{k_0+k_1}\,(x_{i+1} - x_i)^{k_0+1},$$

$$(x_{i+1} - x_i)^{k_0+1} \leq 2^{-i(k_0+k_1-1)}\, \frac{k_0+1}{m}\, y_1^{-(k_0+k_1-1)},$$

$$x_{i+1} - x_i \leq 2^{-i\,\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}}\, \left(\frac{k_0+1}{m}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\, y_1^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}}.$$

Таким образом, расстояние $x_{i+1} - x_i$ можно оценить сверху членом сходящегося ряда. Отсюда следует существование предела

$$x^* = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) + x_0 = \lim_{n\to+\infty} x_n,$$

и, поскольку решение уравнения (0.10) непрерывно, имеем также $\lim\limits_{x\to x^*-0} y'(x) = +\infty$. Более того,

$$x^* - x_0 = \sum_{i=0}^{+\infty} (x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i\,\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}} \left(\frac{k_0+1}{m}\right)^{\frac{1}{k_0+1}} y_1^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}},$$

$$x^* - x_0 \le \left(\frac{k_0+1}{m}\right)^{\frac{1}{k_0+1}} y_1^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i\,\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}},$$

откуда следует

$$x^* - x_0 < \xi\,\left(y'(x_0)\right)^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}},$$

где

$$\xi = \xi(m, k_0) = \left(\frac{k_0+1}{m}\right)^{\frac{1}{k_0+1}} \left(1 - 2^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}}\right)^{-1} > 0.$$

Если же, наоборот, выполнено условие $k_0 + k_1 \le 1$, то применима следующая теорема:

Теорема (К. М. Дулина, Т. А. Корчемкина, [108]) *Пусть $k > 0$, $k \ne 1$, а функция $P(x,\, u,\, v)$ непрерывна по x и липшицева по u, v. Пусть существуют такие константы $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ и $\alpha \le 1-k$, что при $u > u_0$, $v > v_0$ справедливо неравенство $P(x,\, u,\, v) \le C|v|^{-\alpha}$. Тогда любое максимально продолженное решение $y(x)$ уравнения*

$$y'' = P(x,\, y,\, y')\,|y|^k\ sgn\, y$$

с начальными данными $y(x_0) \ge u_0$, $y'(x_0) \ge v_0$ может быть продолжено вправо вплоть до $+\infty$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

Действительно, применительно к уравнению (0.10) имеем

$$P(x, u, v) = p(x, u, v)|v|^{k_1} \le M v^{k_1},$$

значит, заключение приведённой теоремы справедливо при $k_1 \le 1 - k_0$, то есть, при $k_0 + k_1 \le 1$.

Теорема 1.11 доказана.

Замечание 1.5. *В случае $k_0 + k_1 > 1$ для того, чтобы возрастающее решение уравнения* (0.10) *имело конечную правую границу x^* области определения, достаточно ограничения $p(x, u, v) \ge m$; условие $p(x, u, v) \le M$ не является необходимым.*

Замечание 1.6. *В условиях теоремы 1.11 в случае $k_0 + k_1 > 1$ решение $y(x)$ неограниченно возрастает при $x \to x^* - 0$.*

Доказательство. Утверждение замечания следует из леммы 1.1 и того факта, что при $x \in (x_0, x^*)$ решение $y(x)$ и его первая производная положительны, а также $\lim\limits_{x \to x^* - 0} y'(x) = +\infty$.

В силу замечания 1.2 справедливы также следующие утверждения:

Теорема 1.12. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Если $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения* (0.10), *удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \le 0$ и $y'(x_0) > 0$, то существование такой конечной точки $x_* < x_0$, что $\lim\limits_{x \to x_* + 0} y'(x) = +\infty$, эквивалентно условию $k_0 + k_1 > 1$. Более того, при $k_0 + k_1 > 1$ существует такая положительная константа $\xi = \xi(m, k_0)$, что для любого максимально продолженного решения $y(x)$ уравнения* (0.10), *удовлетворяющего условиям теоремы,*

$$x_0 - x_* < \xi \cdot y'(x_0)^{-\frac{k_0 + k_1 - 1}{k_0 + 1}}.$$

Замечание 1.7. *В условиях теоремы 1.12 в случае $k_0 + k_1 > 1$ решение $y(x)$ неограниченно убывает при $x \to x_* + 0$.*

Из теоремы [108, 3.4] следует, что в случае $k_1 > 2$ все положительные возрастающие решения являются *black hole* решениями ([63]), то есть, $\lim\limits_{x \to x^* - 0} y(x) < \infty$.

Применяя лемму 1.1 для $x_1 = x_0$, $x_2 = x$ и рассматривая неравенства (1.4) при $x \to x^* - 0$, получаем следующие оценки предела решения вблизи правой границы области определения:

Теорема 1.13. *Пусть $k_1 > 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x,* *липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Если $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения* (0.10), *удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \geq 0$ и $y'(x_0) > 0$, то для правой границы x^* области определения, конечность которой утверждается в теореме 1.11, предел $\lim\limits_{x \to x^* - 0} y(x) = y^*$ конечен, и*

$$\frac{k_0+1}{2-k_1}\frac{1}{M}\left(y'(x_0)\right)^{2-k_1} \leq (y^*)^{k_0+1} - \left(y(x_0)\right)^{k_0+1} \leq \frac{k_0+1}{2-k_1}\frac{1}{m}\left(y'(x_0)\right)^{2-k_1}. \quad (1.8)$$

Аналогично получаем подобное утверждение для предела решения вблизи левой границы области определения:

Теорема 1.14. *Пусть $k_1 > 2$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Если $y(x)$ — максимально продолженное решение уравнения* (0.10), *удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) \leq 0$ и $y'(x_0) > 0$, то для левой границы x_* области определения решения, конечность которой утверждается в теореме 1.12, предел $\lim\limits_{x \to x_* + 0} y(x) = y_*$ конечен и удовлетворяет неравенствам* (0.12) *с заменой y^* на y_*.*

Таким образом, в случае $k_1 > 2$ все возрастающие решения уравнения (0.10) являются black hole решениями вблизи обеих границ области определения.

1.4 Качественное поведение убывающих μ-решений

Перейдём к рассмотрению убывающих μ-решений. Покажем, что любое μ-решение такого типа при $k_1 \in (0,2)$ ограничено.

Теорема 1.15. *Пусть $k_0 > 0$, $0 < k_1 < 1$, а $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда любое μ-решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными $y(x_0) \leq 0$, $y'(x_0) < 0$ имеет конечную правую границу x^* области определения, причём существует конечное отрицательное значение $y^* < y(x_0)$, такое, что $\lim\limits_{x \to x^*} y(x) = y^*$. Более того, , предел y^* удовлетворяет неравенствам* (1.8).

Теорема 1.16. *Пусть $k_0 > 0$, $1 \leq k_1 < 2$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда любое*

μ-решение $y(x)$ уравнения (0.10) *с начальными данными $y(x_0) \le 0$, $y'(x_0) < 0$ определено при всех $x > x_0$, и существует конечное отрицательное значение $y^* < y(x_0)$, такое, что $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = y^*$. Более того, для значения y^* также выполнена оценка* (1.8).

Доказательство теорем (1.15) *и* (1.16). В силу теоремы 1.5, μ-решение $y(x)$, имеющее отрицательную производную в начальной точке, будет убывающим на всей области определения. Тогда, поскольку $y(x_0) \le 0$, получаем, что при $x > x_0$ само решение и первая его производная будут отрицательны, а значит, в силу уравнения (0.10), вторая производная будет положительна, следовательно, первая производная решения возрастает.

В соответствии с теоремами 1.1–1.4 Асташовой И.В., при $k_1 \ge 1$ любое максимально продолженное решение будет удовлетворять условию единственности на всей области определения, а при $k_1 < 1$ единственность решений нарушается в точках с нулевой производной.

Пусть $x^* > x_0$ — правая граница области определения (возможно, бесконечная) μ-решения $y(x)$. Покажем, что при $x \to x^*$ первая производная решения стремится к нулю. Предположим противное. Если при этом $x^* < +\infty$, то, поскольку в любой конечной точке μ-решение $y(x)$ и его первая производная $y'(x)$ конечны, как и, следовательно, правая часть уравнения (0.10), то μ-решение $y(x)$ продолжаемо вправо. В силу того, что единственность не нарушается в точках, где первая производная решения ненулевая, остаётся только рассмотреть возможность $x^* = +\infty$.

Предположим, что существует такая константа A, что $y'(x) \le -A < 0$ при всех $x \in (x_0, x^*)$. Тогда при $x > x_0 + \varepsilon$, где $0 \le \varepsilon < x^* - x_0$, справедливы неравенства $|y(x)| \ge |y(x_0 + \varepsilon)| > 0$ и $|y'| \ge A$, а также

$$y''(x) = p(x, y, y')\,|y(x)|^{k_0}\,|y'(x)|^{k_1} \ge m|y(x_0 + \varepsilon)|^{k_0}\,A^{k_1} = B > 0.$$

Но это означает, что $y'(x) \ge B(x - x_0 - \varepsilon) + y'(x_0 + \varepsilon) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ — противоречие. Таким образом, $y'(x) \to 0$ при $x \to x^*$.

На области определения μ-решения $y(x)$ его первая производная имеет постоянный (в данном случае, отрицательный) знак, поэтому из леммы 1.1

для $x_1 = x_0$ и $x_2 = x > x_0$ следует

$$\frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{|y'(x_0)|^{2-k_1}-|y'(x)|^{2-k_1}}{M} \le |y(x)|^{k_0+1}-|y(x_0)|^{k_0+1} \le$$

$$\le \frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{|y'(x_0)|^{2-k_1}-|y'(x)|^{2-k_1}}{m}.$$

Поскольку решение монотонно, существует предел $y^* = \lim\limits_{x\to x^*} y(x)$ (возможно, бесконечный). Тогда, рассматривая неравенства выше при $x \to x^*$, получаем

$$\frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{|y'(x_0)|^{2-k_1}}{M} \le |y^*|^{k_0+1}-|y(x_0)|^{k_0+1} \le \frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{|y'(x_0)|^{2-k_1}}{m},$$

откуда следует, что при любых $k_1 \in (0,2)$ решение $y(x)$ ограничено при $x > x_0$, то есть, $|y^*| < +\infty$.

Рассмотрим теперь x^* в зависимости от значения k_1. В силу уравнения (0.10) на интервале (x_0, x^*) имеем

$$y''|y'|^{-k_1} = p(x,y,y')|y|^{k_0}\operatorname{sgn}(yy'),$$

и, поскольку при $x > x_0$ выполнено $y(x) < 0$, $y'(x) < 0$, получаем

$$y''(-y')^{-k_1} = p(x,y,y')|y|^{k_0},$$

и при $k_1 \ne 1$

$$\frac{1}{1-k_1}\left(|y'(x_0)|^{1-k_1}-|y'|^{1-k_1}\right) = \int\limits_{x_0}^{x} p(x,y,y')|y|^{k_0}\,dx. \tag{1.9}$$

В случае $k_1 \in (0,1)$ обозначим $\tilde{x}_0 = x_0$, если $y(x_0) \ne 0$, и в противном случае $\tilde{x}_0 = x_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ таково, что $y(x) < 0$ и $y'(x) < 0$ на $(x_0, x_0+\varepsilon)$. Тогда $|y(x)|^{k_0} \ge |y(\tilde{x}_0)|^{k_0}$ на $(\tilde{x}_0, x^*)$, и из равенства (1.9) следует, что

$$\frac{1}{1-k_1}\left(|y'(\tilde{x}_0)|^{1-k_1}-|y'(x)|^{1-k_1}\right) \ge \int\limits_{\tilde{x}_0}^{x} m|y(\tilde{x}_0)|^{k_0}\,dx = m|y(\tilde{x}_0)|^{k_0}(x-\tilde{x}_0),$$

$$x-\tilde{x}_0 \le \frac{1}{m|y(\tilde{x}_0)|^{k_0}(1-k_1)}\left(|y'(\tilde{x}_0)|^{1-k_1}-|y'(x)|^{1-k_1}\right).$$

Поскольку $y'(x)\to 0$ при $x\to x^*$, а $1-k_1>0$, правая часть полученного неравенства стремится к постоянной величине $\frac{|y'(\tilde{x}_0)|^{1-k_1}}{m|y(\tilde{x}_0)|^{k_0}(1-k_1)}$ при $x\to x^*$, откуда следует $x^*<+\infty$, и, таким образом, решение $y(x)$ единственно только на интервале (x_0,x^*). Теорема 1.15 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.16: в случае $k_1\in(1,2)$ из равенства (1.9) получаем оценку

$$\frac{1}{1-k_1}\left(|y'(x_0)|^{1-k_1}-|y'(x)|^{1-k_1}\right)\le\int\limits_{x_0}^{x} M|y^*|^{k_0}\,dx = M|y^*|^{k_0}(x-x_0),$$

$$x-x_0 \ge \frac{1}{M|y^*|^{k_0}(k_1-1)}\left(|y'(x)|^{1-k_1}-|y'(x_0)|^{1-k_1}\right).$$

В силу того, что $y'(x)\to 0$ при $x\to x^*$, а $1-k_1<0$, правая часть полученного неравенства стремится к бесконечности при $x\to x^*$, откуда следует $x^*=+\infty$, и поэтому решение $y(x)$ определено на $(x_0,+\infty)$, и теорема 1.16 для $k_1\in(1,2)$ доказана.

Аналогично, в случае $k_1=1$ получаем

$$x-x_0\ge\frac{1}{M|y^*|^{k_0}}\left(\ln|y'(x_0)|-\ln|y'(x)|\right).$$

Опять же, из того, что $y'(x)\to 0$ при $x\to x^*$, следует, что правая часть полученного неравенства стремится к бесконечности при $x\to x^*$, откуда $x^*=+\infty$, и тогда решение $y(x)$ определено на $(x_0,+\infty)$. Таким образом, теорема 1.16 в случае $k_1=1$ также доказана.

В силу замечания 1.2 справедливы также следующие утверждения:

Теорема 1.17. *Пусть $k_0>0$, $0<k_1<1$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3)*. Тогда любое μ-решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными $y(x_0)\ge 0$, $y'(x_0)<0$ имеет конечную левую границу x_* области определения, причём существует конечное положительное значение $y_*>y(x_0)$, такое, что предел $\lim\limits_{x\to x_*}y(x)=y_*$. Более того, y_* удовлетворяет неравенствам* (1.8) *с заменой y^* на y_*.*

Теорема 1.18. *Пусть $k_0 > 0$, $1 \le k_1 < 2$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда любое μ-решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными $y(x_0) \ge 0$, $y'(x_0) < 0$ определено при всех $x < x_0$, и существует конечное отрицательное значение $y_* > y(x_0)$, такое, что $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = y_*$. Более того, y_* удовлетворяет неравенствам* (1.8) *с заменой y^* на y_*.*

Таким образом, все убывающие μ-решения уравнения (0.10) в случае $k_1 \in (0,1)$ — white hole решения вблизи обеих границ области определения, а в случае $k_1 \in (0,1)$ имеют горизонтальные асимптоты вблизи обеих границ области определения.

Замечание 1.8. *Несмотря на то, что при $0 < k_1 < 1$ решение как максимально продолженное не единственно вне промежутка (x_*, x^*), продолжить его вправо за x^* и влево за x_* можно лишь единственным образом — тождественными константами y^* и y_* соответственно.*

Полученные результаты позволяют также оценить в случае $k_1 \in (0,2)$ отношение пределов μ-решения при стремлении к правой и левой границам области определения:

Лемма 1.3. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 \in (0,2)$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда для любого убывающего μ-решения $y(x)$ уравнения* (0.10) *с областью определения (x_*, x^*), конечной при $k_1 \in (0,1)$ и совпадающей с числовой прямой при $k_1 \in [1,2)$, отношение пределов $y^* = \lim\limits_{x\to x^*} y(x)$ и $y_* = \lim\limits_{x\to x_*} y(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{k_0+1}} \le \left|\frac{y^*}{y_*}\right| \le \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}.$$

Доказательство. Действительно, пусть x_0 — нуль убывающего μ-решения $y(x)$ уравнения (0.10). Тогда пределы y_* и y^* конечны, и оценки (1.8) и (**??**) принимают вид

$$\frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{1}{M}\,|y'(x_0)|^{2-k_1} \le |y^*|^{k_0+1} \le \frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{1}{m}\,|y'(x_0)|^{2-k_1},$$

$$\frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{1}{M}\,|y'(x_0)|^{2-k_1} \le y_*^{k_0+1} \le \frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{1}{m}\,|y'(x_0)|^{2-k_1},$$

и тогда
$$\frac{m}{M} \le \left|\frac{y^*}{y_*}\right|^{k_0+1} \le \frac{M}{m},$$
откуда и следует утверждение леммы.

Применяя лемму 1.3 в случае постоянного потенциала $p(x,u,v) \equiv p_0$, получаем

Следствие 1.3. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 \in (0,2)$, $p(x,u,v) \equiv p_0 > 0$. Тогда для любого убывающего μ-решения $y(x)$ уравнения* (0.10) *с областью определения (x_*, x^*), конечной при $k_1 \in (0,1)$ и совпадающей с числовой прямой при $k_1 \in [1,2)$,*
$$\lim_{x\to x^*} y(x) = y^* = -y_* = -\lim_{x\to x_*} y(x).$$

Рассмотрим теперь убывающие μ-решения уравнения (0.10) при $k_1 \ge 2$.

Теорема 1.19. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 \ge 2$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3)*. Тогда любое μ-решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными $y(x_0) \le 0$, $y'(x_0) < 0$ неограниченно и определено на всей числовой прямой.*

Доказательство. В соответствии с замечанием 1.2 и теоремой 1.5, достаточно рассмотреть поведение решений при $x > x_0$.

Рассмотрим сначала случай $k_1 > 2$. В соответствии с доказательством теоремы 1.5, для любых $x > x_0$ выполнено $y(x) < 0$, $y'(x) < 0$, и поэтому $y''(x) > 0$. Отсюда следует, что $y'(x) \to 0$ при $x \to x^*$, где $x^* > x_0$ — правая граница области определения $y(x)$.

Обозначим $y_1 = |y'(x_0)| = -y'(x_0)$. Пока $y'(x) \ne 0$, в силу леммы 1.1 при $x_1 = x_0$ и $x_2 = x > x_0$ справедливо
$$m\left(\left|y(x)\right|^{k_0+1} - \left|y(x_0)\right|^{k_0+1}\right) \le \frac{k_0+1}{k_1-2}\left(\left|y'(x)\right|^{2-k_1} - y_1^{2-k_1}\right) \le$$
$$\le M\left(\left|y(x)\right|^{k_0+1} - \left|y(x_0)\right|^{k_0+1}\right).$$

Обозначим $Y = \lim\limits_{x\to x^*} y(x)$. Рассматривая неравенства выше при $x \to x^*$, получаем

$$\frac{k_0+1}{k_1-2}\,\frac{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}-y_1^{2-k_1}}{M}\le |Y|^{k_0+1}-|y(x_0)|^{k_0+1}\le \frac{k_0+1}{k_1-2}\,\frac{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}-y_1^{2-k_1}}{m},$$

и, поскольку $y'(x)\to 0$ при $x\to x^*$ и $2-k_1<0$, имеем $|Y|=+\infty$.

Аналогично, в случае $k_1=2$ получаем

$$\frac{k_0+1}{M}\,\bigl(\ln y_1-\ln|y'(x)|\bigr)\le |Y|^{k_0+1}-|y(x_0)|^{k_0+1}\le \frac{k_0+1}{m}\,\bigl(\ln y_1-\ln|y'(x)|\bigr),$$

и, поскольку $y'(x)\to 0$ при $x\to x^*$, имеем, опять же, $|Y|=+\infty$.

Рассмотрим теперь x^*. Пусть $\widetilde{x}>x_0$, $\widetilde{x}\le+\infty$ — ближайшая к x_0 точка, такая, что $\lim\limits_{x\to\widetilde{x}} y'(x)=0$.

Из уравнения (0.10) на интервале $(x_0,\widetilde{x})$ получаем

$$y''|y'|^{-k_1}=p(x,y,y')\,|y|^{k_0}\operatorname{sgn}(yy'),$$

и, поскольку при $x>x_0$ справедливо $y(x)<0$, $y'(x)<0$, имеем

$$y''(-y')^{-k_1}=p(x,y,y')\,|y|^{k_0},$$

$$\frac{1}{1-k_1}\bigl(|y'(x_0)|^{1-k_1}-|y'|^{1-k_1}\bigr)=\int\limits_{x_0}^{x}p(x,y,y')|y|^{k_0}\,dx,$$

и поэтому

$$\frac{1}{1-k_1}\bigl(|y'(x_0)|^{1-k_1}-|y'|^{1-k_1}\bigr)\le\int\limits_{x_0}^{x}M|Y|^{k_0}\,dx=M|Y|^{k_0}(x-x_0),$$

и

$$x-x_0\ge\frac{1}{M|Y|^{k_0}(k_1-1)}\,\bigl(|y'(x)|^{1-k_1}-|y'(x_0)|^{1-k_1}\bigr)\,.$$

Поскольку $y'(x)\to 0$ при $x\to\widetilde{x}$ и $1-k_1<0$, правая часть неравенства выше стремится к бесконечности при $x\to\widetilde{x}$, откуда следует $\widetilde{x}=+\infty$, и поэтому решение $y(x)$ определено на $(x_0,+\infty)$. Таким образом, теорема доказана.

1.5 Непрерывная зависимость границ областей определения и горизонтальных асимптот решений от начальных данных

Покажем сначала непрерывную зависимость правых границ области определения от начальных данных.

Теорема 1.20. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 + k_1 > 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1, удовлетворяющих условиям $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \geq 0$, $y_1 > 0$, $z_0 \geq 0$, $z_1 > 0$, максимально продолженные решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{1.10}$$

и

$$\begin{cases} y(\tilde{x}_0) = z_0, \\ y'(\tilde{x}_0) = z_1, \end{cases} \tag{1.11}$$

соответственно имеют конечные правые границы области определения $x_1^* > x_0$ и $x_2^* > \tilde{x}_0$ соответственно, причём $|x_2^* - x_1^*| < \varepsilon$.

Доказательство.

Из теоремы 1.11 следует, что $y'(x) \to +\infty$ при $x \to x_1^* - 0$, следовательно, существует такая точка x_1, что $\tilde{y}_1 = y'(x_1)$ удовлетворяет условию

$$\tilde{y}_1 > \left(\frac{\varepsilon}{2\xi}\right)^{-\frac{k_0+1}{k_0+k_1-1}}, \quad \xi\, \tilde{y}_1^{\,-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

где ξ — константа из теоремы 1.11. Тогда

$$x_1^* - x_1 < \xi\, \big(y'(x_1)\big)^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\tilde{\delta} > 0$, что если $|\tilde{z}_1 - \tilde{y}_1| < \tilde{\delta}$, то $\xi\, \tilde{z}_1^{\,-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Также для любой $\tilde{\delta} > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1, удовлетворяющих условиям $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \geq 0$, $y_1 > 0$, $z_0 \geq 0$, $z_1 > 0$, будет выполнено неравенство $|z'(x_1) - y'(x_1)| < \tilde{\delta}$. Тогда в силу теоремы 1.11 можно утверждать, что решение $z(x)$ с начальными данными (1.11) также имеет конечную границу области определения x_2^*, и, кроме того,

$$x_2^* - x_1 < \xi \left(z'(x_1)\right)^{-\frac{k_0+k_1-1}{k_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любого ε существует такая $\delta > 0$, что

$$|x_2^* - x_1^*| \leq |x_2^* - x_1| + |x_1 - x_1^*| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается непрерывная зависимость левой границы области определения решения от начальных данных:

Теорема 1.21. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 + k_1 > 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенстам* (1.3). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1 удовлетворяющих условиям $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \leq 0$, $y_1 > 0$, $z_0 \leq 0$, $z_1 > 0$, максимально продолженные решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными* (1.10) *и* (1.11) *соответственно имеют конечные левые границы области определения $x_{1*} < x_0$ и $x_{2*} < \tilde{x}_0$ соответственно, причём $|x_{2*} - x_{1*}| < \varepsilon$.*

Аналогично с помощью оценок из теорем 1.16 и 1.18 доказываются результаты о непрерывной зависимости пределов решений от начальных данных:

Теорема 1.22. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 \in (0, 2)$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1, удовлетворяющих условиям $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \leq 0$, $y_1 < 0$, $z_0 \leq 0$, $z_1 < 0$, максимально продолженные решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения* (0.10) *с начальными данными* (1.10) *и* (1.11) *соответственно имеют конечные пределы $y_+ < y(x_0)$ и $z_+ < z(\tilde{x}_0)$ соответственно при $x \to +\infty$, причём $|y_+ - z_+| < \varepsilon$.*

Теорема 1.23. *Пусть $k_0 > 0$, $k_1 \in (0, 2)$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для любых x_0, $\tilde{x}_0$, y_0, z_0, y_1, z_1, удовлетворяющие условиям $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|z_0 - y_0| < \delta$, $|z_1 - y_1| < \delta$, $y_0 \geq 0$,*

$y_1 < 0$, $z_0 \geq 0$, $z_1 < 0$, максимально продолженные решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (0.10) *с начальными данными* (1.10) *и* (1.11) *соответственно имеют конечные пределы $y_- > y(x_0)$ и $z_- > z(\tilde{x}_0)$ соответственно при $x \to -\infty$, причём $|x_- - z_-| < \varepsilon$.*

Глава 2. Асимптотическое поведение решений уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида

В предыдущей главе было изучено качественное поведение решений в зависимости от показателей нелинейности. В рамках качественного поведения решений удобнее было рассматривать отдельно возрастающие и невозрастающие решения; при исследовании асимптотического поведения, однако, удобнее рассматривать отдельно поведение μ-решений, неограниченных вблизи рассматриваемой границы области определения (в соответствии с результатами главы 1, такую границу имеют все возрастающие решения при $0 < k_1 \leq 2$ и все убывающие μ-решения при $k_1 \geq 2$), имеющих конечный ненулевой предел вблизи границы области определения (таковыми будут все возрастающие решения при $k_1 > 2$ и все убывающие μ-решения при $0 < k_1 < 2$) и, наконец, стремящихся к нулю вблизи границы области определения (такую границу имеют сингулярные μ-решения первого рода при $k_0 + k_1 < 1$ и кнезеровские решения при $k_0 + k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$).

В этой главе будет показано, что для решений уравнения (0.10) и их первых производных характерно степенное поведение вблизи границ области определения (за исключением случаев $k_0 + k_1 = 1$ и $k_1 = 2$, в которых уравнение (0.10) может быть сведено к уравнению первого порядка, что влечёт несколько иной характер поведения). Асимптотическое поведение неограниченных решений вблизи границ области определения в случаях $k_0+k_1 = 1$ и $k_1 = 2$ также будет исследовано.

2.1 Асимптотическое поведение решений, неограниченных вблизи границы области определения

Прежде чем перейти к изучению асимптотического поведения решений в случае потенциала общего вида, проведём рассуждения в случае постоянного потенциала.

2.1.1 Случай постоянного потенциала

Для каждого из типов неограниченных решений уравнения (0.10) исследуем сначала асимптотическое поведение решений уравнения с постоянным потенциалом, то есть,

$$y'' = p_0\,|y|^{k_0}|y'|^{k_1}\,\mathrm{sgn}\,(yy'), \quad p_0 > 0. \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. *В случае* $p\big(x, y, y'\big) \equiv p_0$ *из леммы 1.1 следует, что при* $k_0 > 0$*,* $k_1 > 0$*,* $k_1 \neq 2$ *любое решение* $y(x)$ *уравнения* (2.1)*, строго возрастающее и неотрицательное либо неположительное на отрезке* $[x_1, x_2]$*, удовлетворяет на нем следующим равенствам:*

$$\Big(\big|y(x_2)\big|^{k_0+1} - \big|y(x_1)\big|^{k_0+1}\Big)\ \mathit{sgn}\ y' = \frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\Big(\big|y'(x_2)\big|^{2-k_1} - \big|y'(x_1)\big|^{2-k_1}\Big).$$

Напомним обозначения (0.15): $\alpha = \frac{2-k_1}{k_0+k_1-1}$ и

$$C(P) = \left(\frac{|\alpha|^{1-k_1}|\alpha+1|}{P}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}},\ D(P) = \left(\frac{|\alpha|^{k_0}|\alpha+1|}{P}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}},\ P \in \mathbb{R}_+.$$

Рассмотрим возрастающие решения уравнения (2.1) вблизи правой границы области определения при $k_0 + k_1 > 1$, $k_1 < 2$.

Теорема 2.1. *Пусть* $k_0{+}k_1 > 1$*,* $k_1 < 2$*. Тогда* $\alpha > 0$*, и любое возрастающее решение уравнения* (2.1) *с положительными начальными данными и вертикальной асимптотой* $x = x^*$ *справа, существующей в силу теоремы 1.11, имеет следующее асимптотическое поведение вблизи правой границы области определения:*

$$y(x) = C(p_0)\,(x^* - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0,$$

$$y'(x) = D(p_0)\,(x^* - x)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0.$$

Доказательство. Поскольку рассматриваемое решение $y(x)$ — возрастающее и имеет вертикальную асимптоту справа, то существует такая точка x_0 из области определения решения, в которой выполнены условия $y(x_0) = y_0 \geq 0$,

$y'(x_0)=y_1>0$. Воспользуемся равенствами замечания 2.1 при $x_1=x_0$, $x_2=x$:

$$\big(y(x)\big)^{k_0+1}-y_0^{k_0+1}=\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\left(\big(y'(x)\big)^{2-k_1}-y_1^{2-k_1}\right).$$

С одной стороны, отсюда следует

$$\big(y(x)\big)^{k_0+1}\geq\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\left(\big(y'(x)\big)^{2-k_1}-y_1^{2-k_1}\right),$$

и, поскольку $y'(x)>0$ при $x>x_0$,

$$\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\geq\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\left(1-\frac{y_1^{2-k_1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\right).$$

С другой стороны,

$$\big(y(x)\big)^{k_0+1}-y_0^{k_0+1}\leq\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\,\big(y'(x)\big)^{2-k_1},$$

откуда, аналогично,

$$\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\leq\frac{y_0^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}+\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}.$$

Таким образом,

$$\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\left(1-\frac{y_1^{2-k_1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\right)\leq\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\leq\frac{y_0^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}+\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}.$$

В силу того, что $k_1<2$ и $y'(x)\to+\infty$ при $x\to x^*-0$, после предельного перехода получаем

$$\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\leq\lim_{x\to x^*-0}\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\leq\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)},$$

а это значит, что

$$\lim_{x\to x^*-0}\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}=\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)},$$

откуда

$$\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}} = \frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0, \tag{2.2}$$

$$y^{-\frac{k_0+1}{2-k_1}}\,y' = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{-\frac{1}{2-k_1}}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0,$$

$$\int\limits_x^{x^*} y^{-\frac{k_0+1}{2-k_1}}\,dy = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{-\frac{1}{2-k_1}} \int\limits_x^{x^*} dx\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0,$$

$$\lim_{x\to x^*-0} \frac{y(x)^{-\frac{k_0+1}{2-k_1}+1}}{-\frac{k_0+1}{2-k_1}+1} - \frac{y(x)^{-\frac{k_0+1}{2-k_1}+1}}{-\frac{k_0+1}{2-k_1}+1} =$$

$$= \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{-\frac{1}{2-k_1}}\,(x^*-x)\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0,$$

и, поскольку $-\frac{k_0+1}{2-k_1}+1 = -\frac{k_0+k_1-1}{2-k_1} = -\frac{1}{\alpha} < 0$, а $y(x) \to +\infty$ при $x \to x^*-0$, получаем

$$\alpha\,y(x)^{-\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{-\frac{1}{2-k_1}}\,(x^*-x)\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0,$$

$$y(x) = \alpha^\alpha \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}}\,(x^*-x)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0.$$

Вычислим константу в правой части:

$$\alpha^\alpha \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}} = \alpha^\alpha \left(\frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}} = \alpha^\alpha \left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}} =$$

$$= \left(\alpha^{2-k_1}\,\frac{\alpha+1}{\alpha}\,\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}} = \left(\frac{\alpha^{1-k_1}\,(\alpha+1)}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}} = C(p_0),$$

откуда, наконец, получаем асимптотическое выражение для положительного возрастающего вблизи правой границы области определения решения уравнения (2.1):

$$y(x) = C(p_0)\,(x^*-x)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0.$$

Найдем асимптотическое представление производной решения. Поскольку справедливо равенство (2.2), получаем

$$\big(y'(x)\big)^{2-k_1} = p_0\big(y(x)\big)^{k_0+1}\left(\frac{k_0+1}{2-k_1}\right)^{-1}(1+o(1)), \quad x \to x^* - 0,$$

и, с учетом полученного выше асимптотического представления для $y(x)$,

$$\big(y'(x)\big)^{2-k_1} = p_0\left(C(p_0)(x^*-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\right)^{k_0+1}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}(1+o(1)),$$

$$y'(x) = \left(p_0\left(C(p_0)\right)^{k_0+1}(x^*-x)^{-\alpha(k_0+1)}\,\frac{\alpha}{\alpha+1}\,(1+o(1))\right)^{\frac{1}{2-k_1}},\ x \to x^* - 0,$$

$$y'(x) = \left(p_0\left(C(p_0)\right)^{k_0+1}\,\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2-k_1}}(x^*-x)^{-\alpha\,\frac{k_0+1}{2-k_1}}\,(1+o(1)), \quad x \to x^* - 0,$$

$$y'(x) = \left(p_0\,\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2-k_1}}\,\big(C(p_0)\big)^{\frac{k_0+1}{2-k_1}}(x^*-x)^{-\alpha\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\,(1+o(1)),\ x \to x^* - 0,$$

$$y'(x) = \left(p_0\,\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2-k_1}}\,\big(C(p_0)\big)^{1+\frac{1}{\alpha}}(x^*-x)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)),\ x \to x^* - 0.$$

Вычислим константу:

$$\left(p_0\,\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2-k_1}}\,\big(C(p_0)\big)^{1+\frac{1}{\alpha}} = \left(p_0\,\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2-k_1}}\,\left(\frac{\alpha^{1-k_1}(\alpha+1)}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}\,\frac{\alpha+1}{\alpha}} =$$

$$= \left(p_0\,\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2-k_1}}\,\left(\frac{\alpha^{1-k_1}(\alpha+1)}{p_0}\right)^{\frac{\alpha+1}{2-k_1}} = \left(\frac{\alpha^{\alpha(1-k_1)+2-k_1}(\alpha+1)^{\alpha}}{p_0^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2-k_1}} =$$

$$= \left(\frac{\alpha^{1-k_1+k_0+k_1-1}(\alpha+1)}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}} = \left(\frac{\alpha^{k_0}(\alpha+1)}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}} = D(p_0),$$

а значит,

$$y'(x) = D(p_0)\,(x^*-x)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to x^* - 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $k_0 + k_1 = 1$. Тогда любое возрастающее решение $y(x)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) > 0$, $y'(x) > 0$, имеет следующее асимптотическое поведение вблизи* *правой границы области определения:*

$$y(x) = y(x_0)\, e^{p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = y(x_0) p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\; e^{p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x \to +\infty.$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.1, в случае $k_0+k_1 = 1$ можно прийти к уравнению, аналогичному равенству (2.2) при $x \to +\infty$, однако, в этом случае $k_0 + 1 = 2 - k_1$, и уравнение примет вид

$$\left(\frac{y(x)}{y'(x)}\right)^{k_0+1} = \frac{1}{p_0}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$(y(x))^{-1}\, y'(x) = p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\; (1 + o(1)), \quad x \to +\infty, \tag{2.3}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} y^{-1}\, dy = p_0^{\frac{1}{k_0+1}} \int\limits_{x_0}^{x} dx\; (1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$\ln y(x) - \ln y(x_0) = p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\; (x - x_0)\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y(x) = y(x_0)\, \mathrm{e}^{p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x \to +\infty.$$

Опять же, равенство (2.3) позволяет получить асимптотическое представление производной решения:

$$y'(x) = p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\, y(x)\; (1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = y(x_0)\, p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\; \mathrm{e}^{p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x \to +\infty,$$

и теорема 2.2 доказана.

Продолжим изучение асимптотического поведения возрастающих решений уравнения (2.1) вблизи правой границы области определения рассмотрением случая $k_0 + k_1 < 1$ — в этом случае μ-решения с положительными начальными данными продолжаемы вправо вплоть до бесконечности. Как показано в теоремах 1.11 и 1.6, такие μ-решения либо обращаются в ноль в некоторой точке, либо являются μ-решениями сингулярного рода и стремятся к нулю вблизи соответствующей границы области определения.

Теорема 2.3. *Пусть $k_0 + k_1 < 1$. Тогда $\alpha < -1$, и любое возрастающее решение $y(x)$, положительное вблизи правой границы области определения, имеет вид*

$$y(x) = C(p_0)\,(x - x_0)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = D(p_0)\,(x - x_0)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

где x_0 — такая точка, что $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = 0$.

Доказательство. Итак, $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} y'(x) = 0 = y_1$, причём $y_1 \geq 0$. Опять же, воспользовавшись замечанием 2.1 при $x_1 = x_0$, $x_2 = x$, получим

$$\big(y(x)\big)^{k_0+1} = \frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\left(\big(y'(x)\big)^{2-k_1} - y_1^{2-k_1}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}} = \frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\left(1 - \frac{y_1^{2-k_1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\right).$$

В силу того, что $k_1 < 2$ и $y'(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}} = \frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)},$$

то есть,

$$\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}} = \frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y^{-\frac{k_0+1}{2-k_1}}\,y' = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{-\frac{1}{2-k_1}}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} y^{-\frac{k_0+1}{2-k_1}}\,dy = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{-\frac{1}{2-k_1}}\int\limits_{x_0}^{x} dx\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$\frac{y(x)^{-\frac{k_0+1}{2-k_1}+1}}{-\frac{k_0+1}{2-k_1}+1} = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{-\frac{1}{2-k_1}}\,(x - x_0)\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

При этом $\alpha < \alpha + 1 = \frac{2-k_1+k_0+k_1-1}{k_0+k_1-1} = \frac{k_0+1}{k_0+k_1-1} < 0$, и

$-\frac{k_0+1}{2-k_1}+1=-\frac{k_0+k_1-1}{2-k_1}=-\frac{1}{\alpha}>0$, а это означает, что

$$-\alpha\, y(x)^{-\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{-\frac{1}{2-k_1}}\,(x-x_0)\,(1+o(1)),\quad x\to+\infty,$$

$$y(x)=|\alpha|^{\alpha}\left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}}\,(x-x_0)^{-\alpha}\,(1+o(1)),\quad x\to+\infty.$$

Вычислим константу в правой части:

$$|\alpha|^{\alpha}\left(\frac{k_0+1}{p_0\,(2-k_1)}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}}=|\alpha|^{\alpha}\left(\frac{k_0+1}{2-k_1}\,\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}}=|\alpha|^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}}=$$

$$=\left(|\alpha|^{2-k_1}\,\frac{|\alpha+1|}{|\alpha|}\,\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{\alpha}{2-k_1}}=\left(\frac{|\alpha|^{1-k_1}\,|\alpha+1|}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}}=C(p_0),$$

откуда, наконец, получаем асимптотическое выражение для положительного возрастающего вблизи правой границы области определения решения уравнения (2.1):

$$y(x)=C(p_0)\,(x-x_0)^{-\alpha}\,(1+o(1)),\quad x\to+\infty.$$

Аналогично рассуждениям теоремы 2.1, получаем асимптотическое представление производной решения:

$$y'(x)=D(p_0)\,(x-x_0)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)),\quad x\to+\infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Пусть $k_1=2$. Тогда любое возрастающее решение $y(x)$ уравнения (2.1) обращается в ноль в некоторой точке x_0, имеет конечную правую границу области определения x^* и удовлетворяет вблизи неё следующему равенству:*

$$\Gamma\left(\frac{1}{k_0+1},\frac{p_0}{k_0+1}\,(y(x))^{k_0+1}\right)=y'(x_0)\left(p_0(k_0+1)^{k_0}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x^*-x).$$

Доказательство. В силу теорем 1.6, 1.8, 1.11 и 1.21 при $k_1=2$ все решения обращаются в ноль в некоторой точке, имеют ограниченную область определения с вертикальными асимптотами вблизи обеих границ области определения.

Исследуем поведение решения вблизи правой границы области определения. Пусть $y(x_0)=0$. В силу уравнения (2.1) при $k_1=2$ имеем

$$y''(y')^{-1}=p_0\,y^{k_0}\,y',$$

$$\ln y'(x)-\ln y'(x_0)=\frac{p_0}{k_0+1}\,(y(x))^{k_0+1},$$

$$y'(x)=y'(x_0)\,\mathrm{e}^{\frac{p_0}{k_0+1}\,(y(x))^{k_0+1}},$$

откуда

$$\mathrm{e}^{-\frac{p_0}{k_0+1}\,(y(x))^{k_0+1}}y'(x)=y'(x_0),$$

значит, при $x\to x^*$

$$\int\limits_x^{x^*}\mathrm{e}^{-\frac{p_0}{k_0+1}\,(y(x))^{k_0+1}}\,dy(x)=y'(x_0)\,(x^*-x),$$

$$-\,(k_0+1)^{-1}\left(\frac{k_0+1}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\Gamma\left(\frac{1}{k_0+1},\frac{p_0}{k_0+1}\,(y(t))^{k_0+1}\right)\Bigg|_x^{x^*}=y'(x_0)\,(x^*-x)$$

и, поскольку при $x\to x^*$ имеем $y\to+\infty$,

$$(k_0+1)^{-1}\left(\frac{k_0+1}{p_0}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\Gamma\left(\frac{1}{k_0+1},\frac{p_0}{k_0+1}\,(y(x))^{k_0+1}\right)=y'(x_0)\,(x^*-x),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{k_0+1},\frac{p_0}{k_0+1}\,(y(x))^{k_0+1}\right)=y'(x_0)\,\big(p_0(k_0+1)^{k_0}\big)^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x^*-x),$$

где $\Gamma(s,t)$ — неполная верхняя гамма-функция.

Аналогичным образом получается соответствующий результат для убывающих решений при $k_1=2$.

В соответствии с замечанием 1.2, для возрастающих μ-решений, неограниченных вблизи левой границы области определения, справедливы следующие результаты.

Теорема 2.5. *Пусть* $k_0+k_1>1$, $k_1<2$. *Тогда* $\alpha>0$, *и любое возрастающее решение уравнения* (2.1), *отрицательное в некоторой точке и имеющее в силу теоремы 1.21 вертикальную асимптоту* $x=x_*$ *слева, имеет следующее* *асимптотическое поведение вблизи левой границы области определения:*

$$y(x) = -C(p_0)\,(x - x_*)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_* + 0,$$

$$y'(x) = D(p_0)\,(x - x_*)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_* + 0.$$

Теорема 2.6. *Пусть* $k_0 + k_1 = 1$. *Тогда любое возрастающее решение* $y(x)$ *уравнения* (2.1), *удовлетворяющее в некоторой точке* x_0 *условиям* $y(x_0) < 0$, $y'(x) > 0$, *имеет следующее асимптотическое поведение вблизи левой границы области определения:*

$$y(x) = y(x_0)\, e^{p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x_0 - x)\,(1+o(1))}, \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = |y(x_0)|\, p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\; e^{p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x_0 - x)\,(1+o(1))}, \quad x \to -\infty.$$

Перейдём к убывающим μ-решениям уравнения — в частности, к случаю $k_1 > 2$, в котором, согласно теореме 1.19, убывающие μ-решения строго убывают, неограничены и вблизи правой границы области определения отрицательны.

Теорема 2.7. *Пусть* $k_1 > 2$. *Тогда* $-1 < \alpha < 0$, *и любое убывающее решение уравнения* (2.1) *обращающется в ноль в некоторой точке* x_0 *и имеет следующее асимптотическое поведение вблизи правой границы области определения:*

$$y(x) = -C(p_0)\,(x - x_0)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = -D(p_0)\,(x - x_0)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Доказательство. Итак, согласно теореме 1.5, существует такая точка x_0, что $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = y_1 < 0$. Воспользовавшись замечанием 2.1 при $x_1 = x_0$ и $x_2 = x$, получим

$$\big|y(x)\big|^{k_0+1} = \frac{k_0 + 1}{p_0\,(k_1 - 2)} \left(\big|y'(x)\big|^{2-k_1} - \big|y_1\big|^{2-k_1} \right).$$

Отсюда

$$\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}} = \frac{k_0+1}{p_0\,(k_1-2)}\left(1-\frac{\left|y_1\right|^{2-k_1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\right) = \frac{k_0+1}{p_0\,(k_1-2)}\left(1-\frac{\left|y'(x)\right|^{k_1-2}}{\left|y_1\right|^{k_1-2}}\right).$$

В силу того, что $k_1 > 2$ и $y'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}} = \frac{k_0+1}{p_0\,(k_1-2)},$$

значит,

$$\left|y(x)\right|^{k_0+1}\left|y'(x)\right|^{k_1-2} = \frac{k_0+1}{p_0\,(k_1-2)}\,(1+o(1)), \quad x\to+\infty,$$

$$\left|y(x)\right|^{\frac{k_0+1}{k_1-2}}\left|y'(x)\right| = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(k_1-2)}\right)^{\frac{1}{k_1-2}}(1+o(1)), \quad x\to+\infty,$$

$$\int\limits_{x_0}^{x}\big(-y(x)\big)^{\frac{k_0+1}{k_1-2}}\,d\big(-y(x)\big) = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(k_1-2)}\right)^{\frac{1}{k_1-2}}\int\limits_{x_0}^{x}dx\;(1+o(1)), \quad x\to+\infty,$$

$$\frac{\left|y(x)\right|^{\frac{k_0+1}{k_1-2}+1}}{\frac{k_0+1}{k_1-2}+1} = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(k_1-2)}\right)^{\frac{1}{k_1-2}}(x-x_0)\,(1+o(1)), \quad x\to+\infty,$$

При этом $\alpha = \frac{2-k_1}{k_0+k_1-1} < 0$, $\alpha+1 = \frac{2-k_1+k_0+k_1-1}{k_0+k_1-1} = \frac{k_0+1}{k_0+k_1-1} > 0$, и, кроме того, $\frac{k_0+1}{k_1-2}+1 = \frac{k_0+k_1-1}{k_1-2} = -\frac{1}{\alpha} > 0$, и тогда

$$-\alpha\left|y(x)\right|^{-\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{k_0+1}{p_0\,(k_1-2)}\right)^{\frac{1}{k_1-2}}(x-x_0)\,(1+o(1)), \quad x\to+\infty,$$

$$|y(x)| = |\alpha|^{\alpha}\left(\frac{k_0+1}{p_0\,(k_1-2)}\right)^{\frac{\alpha}{k_1-2}}(x-x_0)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x\to+\infty,$$

откуда, поскольку $y(x) < 0$, получаем

$$y(x) = -C(p_0)\,(x-x_0)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x\to+\infty.$$

Проводя вычисления, аналогичные рассуждениям теоремы 2.1, можно получить асимптотическое представление производной решения:

$$y'(x) = -D(p_0)\,(x-x_0)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x\to+\infty.$$

Теорема доказана.

В соответствии с замечанием 1.2, вблизи левой границы области определения вблизи левой границы области определения убывающие решения имеют следующее асимптотическое поведение.

Теорема 2.8. *Пусть* $k_1 > 2$. *Тогда* $-1 < \alpha < 0$, *и любое убывающее решение уравнения* (2.1) *обращающется в ноль в некоторой точке* x_0 *и имеет следующее асимптотическое поведение вблизи левой границы области определения:*

$$y(x) = C(p_0)\,(x_0 - x)^{-\alpha}(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = -D(p_0)\,(x_0 - x)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

2.1.2 Случай потенциала общего вида

Вернемся к рассмотрению уравнения (0.10) с потенциалом общего вида

$$y'' = p(x, y, y')\,|y|^{k_0}|y'|^{k_1}\,\mathrm{sgn}\,(yy').$$

Введем следующую замену переменных при $k_1 \neq 2$:

$$\begin{cases} u = |y|^{-(k_0+1)}\,|y'|^{2-k_1}\,\mathrm{sgn}\,(yy') \\ t = \ln|y(x)|\,\mathrm{sgn}\,(yy') \end{cases} \tag{2.4}$$

В результате этой замены при $\mathrm{sgn}\ y' = 1$ получаем

$$\dot{u} = u'_x\,x_t = u'_x\,(t_x)^{-1} =$$

$$= \Big(-(k_0+1)|y|^{-(k_0+2)}(y')^{3-k_1} + (2-k_1)|y|^{-(k_0+1)}(y')^{1-k_1}y''\ \mathrm{sgn}\ y\Big)\,|y|(y')^{-1},$$

и, в силу уравнения (0.10),

$$\dot{u} = -(k_0+1)\,|y|^{-(k_0+1)}(y')^{2-k_1} + (2-k_1)\,\varphi(t)\,|y|^{-(k_0+1)+k_0+1}(y')^{1-k_1+k_1-1},$$

$$\dot{u} = (2-k_1)\,\varphi(t) - (k_0+1)|u|, \tag{2.5}$$

где $\varphi(t) = p\big(x(t),\,y(x(t)),\,y'(x(t))\big)$.

В случае $\operatorname{sgn}\, y' = -1$ получаем

$$\dot{u} = \Big((k_0+1)|y|^{-(k_0+2)}|y'|^{3-k_1} + (2-k_1)|y|^{-(k_0+1)}|y'|^{1-k_1} y'' \operatorname{sgn}\, y \Big)\, |y||y'|^{-1},$$

и, проводя аналогичные рассуждения, приходим к уравнению

$$\dot{u} = (k_1-2)\,\varphi(t) - (k_0+1)|u|, \tag{2.6}$$

где $\varphi(t) = p\big(x(t),\, y(x(t)),\, y'(x(t))\big)$.

При постоянном потенциале, то есть, при $p(x,y,y') \equiv p_0$, соответствующие уравнения будут иметь вид

$$\dot{u} = (2-k_1)\,p_0 - (k_0+1)|u|. \tag{2.7}$$

и

$$\dot{u} = (k_1-2)\,p_0 - (k_0+1)|u|. \tag{2.8}$$

В случае $k_1 = 2$ проведём замену

$$\begin{cases} u = |y|^{-(k_0+1)}\, \ln|y'| \operatorname{sgn}(yy') \\ t = \ln|y| \operatorname{sgn}(yy') \end{cases}, \tag{2.9}$$

в силу которой при $\operatorname{sgn}\, y' = 1$ получаем

$$\dot{u} = u'_x\, x_t = u'_x\, (t_x)^{-1} =$$

$$= \Big(-(k_0+1)|y|^{-(k_0+2)} y' \ln y' + (2-k_1)|y|^{-(k_0+1)} (y')^{-1} y'' \operatorname{sgn}\, y \Big)\, |y|(y')^{-1},$$

и, в силу уравнения (0.10),

$$\dot{u} = -(k_0+1)\,|y|^{-(k_0+1)} \ln y' + (2-k_1)\,\varphi(t)\,|y|^{-(k_0+1)+k_0+1} (y')^{-2+2},$$

что снова приводит к уравнению (2.5)

$$\dot{u} = (2-k_1)\,\varphi(t) - (k_0+1)|u|,$$

где $\varphi(t) = p\big(x(t),\, y(x(t)),\, y'(x(t))\big)$.

В случае $k_1 = 2$ и $\operatorname{sgn}\, y' = -1$, аналогично, замена (2.9) приводит к уравнению (2.6)

$$\dot{u} = (k_1 - 2)\,\varphi(t) - (k_0 + 1)|u|,$$

где $\varphi(t) = p\big(x(t),\, y(x(t)),\, y'(x(t))\big)$, и при постоянном потенциале получаем, соответственно, уравнения (2.7) для возрастающих и (2.8) для убывающих решений уравнения.

Прежде чем перейти к основным результатам, докажем несколько вспомогательных утверждений в терминах проведенной замены переменных.

Лемма 2.1. *Пусть функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3), *а $y(x)$ — макисмально продолженное решение уравнения* (0.10), *стремящееся по модулю к бесконечности при стремлении к правой границе области определения. Тогда существуют положительные константы C_1 и C_2, такие, что вблизи правой границы области определения решения при $k_1 \neq 2$ справедливо*

$$C_1 \le \frac{\big|y(x)\big|^{k_0+1}}{\big|y'(x)\big|^{2-k_1}} \le C_2,$$

а при $k_1 = 2$

$$C_1 \le \big|y(x)\big|^{k_0+1}\, \ln\big|y'(x)\big| \le C_2,$$

Доказательство. Начнём со случая $k_1 \neq 2$. В силу результатов главы 1 если решения уравнения (0.10) неограниченны, то выполнено одно из двух условий:

1. $k_1 < 2$, решение положительно и возрастает вблизи правой границы области определения;

2. $k_1 > 2$, решение отрицательно и убывает вблизи правой границы области определения;

откуда следует, что $\operatorname{sgn}(yy') = 1$ и $\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn}(2 - k_1)$.

Пусть решение знакопостоянно при $x \ge x_0$. Обозначим $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_1$; тогда в силу леммы 1.1 для $x_1 = x_0$ и $x_2 = x$ имеем

$$m\left(\big|y(x)\big|^{k_0+1} - \big|y_0\big|^{k_0+1}\right) \le \frac{k_0+1}{|2-k_1|}\left(\big|y'(x)\big|^{2-k_1} - \big|y_1\big|^{2-k_1}\right) \le$$

$$\leq M\left(\left|y(x)\right|^{k_0+1}-\left|y_0\right|^{k_0+1}\right),$$

$$m\,\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}-\left|y_0\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\leq\frac{k_0+1}{|2-k_1|}\left(1-\frac{\left|y_1\right|^{2-k_1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\right)\leq M\,\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}-\left|y_0\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}.$$

В случае 1 получаем

$$\frac{k_0+1}{M\,(2-k_1)}\left(1-\left(\frac{y_1}{y'(x)}\right)^{2-k_1}\right)\leq\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}-\frac{y_0^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\leq$$

$$\leq\frac{k_0+1}{m\,(2-k_1)}\left(1-\left(\frac{y_1}{y'(x)}\right)^{2-k_1}\right).$$

Обозначим правую границу области определения (конечную или бесконечную) за $\tilde{x}$. Зафиксируем произвольную точку $x_1\in(x_0,\,\tilde{x})$ и обозначим $y'(x_1)=y_2$. Поскольку при $x\geq x_1$ справедливо $y'(x)\geq y_2>y_1$, можно заключить, с учетом неравенства $2-k_1>0$, что для $x\geq x_1$ справедливо

$$0<\frac{k_0+1}{M\,(2-k_1)}\left(1-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{2-k_1}\right)\leq\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}-\frac{y_0^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\leq\frac{k_0+1}{m\,(2-k_1)},$$

$$\frac{k_0+1}{M\,(2-k_1)}\left(1-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{2-k_1}\right)+\frac{y_0^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\leq\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\leq$$

$$\leq\frac{k_0+1}{m\,(2-k_1)}+\frac{y_0^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}},$$

$$\frac{k_0+1}{M\,(2-k_1)}\left(1-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{2-k_1}\right)\leq\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\leq\frac{k_0+1}{m\,(2-k_1)}+\frac{y_0^{k_0+1}}{y_1^{2-k_1}},$$

то есть, для любого возрастающего решения $y(x)$ уравнения (0.10) при $k_1<2$ существуют положительные константы C_1 и C_2, такие, что вблизи правой границы области определения

$$C_1\leq\frac{\big(y(x)\big)^{k_0+1}}{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}\leq C_2.$$

В случае 2 имеем

$$\frac{k_0+1}{M\,(k_1-2)}\left(1-\frac{\left|y_1\right|^{2-k_1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\right)\leq\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}-\left|y_0\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\leq$$

$$\leq\frac{k_0+1}{m\,(k_1-2)}\left(1-\frac{\left|y_1\right|^{2-k_1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\right),$$

то есть,

$$\frac{k_0+1}{M\,(k_1-2)}\left(1-\frac{\left|y'(x)\right|^{k_1-2}}{\left|y_1\right|^{k_1-2}}\right)\leq\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}-\left|y_0\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\leq$$

$$\leq\frac{k_0+1}{m\,(k_1-2)}\left(1-\frac{\left|y'(x)\right|^{k_1-2}}{\left|y_1\right|^{k_1-2}}\right).$$

В данном случае решение продолжаемо вправо вплоть до бесконечности, а его производная отрицательна и стремится к нулю, то есть, ее модуль убывает. Зафиксируем произвольную точку $x_1>x_0$ и обозначим $y'(x_1)=y_2$. Поскольку при $x\geq x_1$ справедливо $|y'(x)|\leq|y_2|<|y_1|$, можно заключить, с учётом неравенства $2-k_1<0$, что для $x\geq x_1$ справедливо

$$0<\frac{k_0+1}{M\,(k_1-2)}\left(1-\left|\frac{y_2}{y_1}\right|^{k_1-2}\right)\leq\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}-\frac{|y_0|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\leq\frac{k_0+1}{m\,(k_1-2)},$$

$$\frac{k_0+1}{M\,(k_1-2)}\left(1-\left|\frac{y_1}{y_2}\right|^{2-k_1}\right)+\frac{|y_0|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\leq\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\leq$$

$$\leq\frac{k_0+1}{m\,(k_1-2)}+\frac{|y_0|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}},$$

$$\frac{k_0+1}{M\,(k_1-2)}\left(1-\left|\frac{y_1}{y_2}\right|^{2-k_1}\right)\leq\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\leq\frac{k_0+1}{m\,(k_1-2)}+\frac{|y_0|^{k_0+1}}{|y_1|^{2-k_1}},$$

то есть, при $k_1>2$ для любого возрастающего решения $y(x)$ уравнения (0.10) существуют положительные константы C_1 и C_2, такие, что вблизи правой границы области определения

$$C_1\leq\frac{\left|y(x)\right|^{k_0+1}}{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}\leq C_2.$$

Рассмотрим теперь случай $k_1 = 2$. В этом случае неограничены как возрастающие, так и убывающие решения уравнения (0.10), и в силу теоремы 1.8 любое непостоянное решение в этом случае обращается в ноль в некоторой точке x_0. В силу уравнения (0.10) при $k_1 = 2$ имеем

$$y''|y'|^{-1} = p(x, y, y')|y|^{k_0}\,|y'|\mathrm{sgn}\,(y\,y').$$

В силу замечания 1.2, достаточно рассмотреть поведение решений при $x > x_0$, а в этом случае либо $\mathrm{sgn}\,y = \mathrm{sgn}\,y' = 1$, либо $\mathrm{sgn}\,y = \mathrm{sgn}\,y' = -1$, поэтому $\mathrm{sgn}\,(y\,y') = 1$. Тогда в силу неравенств (1.3)

$$m|y|^{k_0}\,|y'| \le y''|y'|^{-1} \le M|y|^{k_0}\,|y'|,$$

$$\frac{m}{k_0+1}|y|^{k_0+1} \le \ln|y'| - \ln|y'(x_0)| \le \frac{M}{k_0+1}|y|^{k_0+1},$$

а значит,

$$\frac{m}{k_0+1} \le \frac{\ln|y'|}{|y|^{k_0+1}} - \frac{\ln|y'(x_0)|}{|y|^{k_0+1}} \le \frac{M}{k_0+1},$$

откуда

$$\frac{m}{k_0+1} + \frac{\ln|y'(x_0)|}{|y|^{k_0+1}} \le \frac{\ln|y'|}{|y|^{k_0+1}} \le \frac{M}{k_0+1} + \frac{\ln|y'(x_0)|}{|y|^{k_0+1}},$$

откуда, поскольку вблизи правой границы области определения $|y|^{k_0+1} \to +\infty$, и следует утверждение леммы.

Таким образом, лемма 2.1 доказана.

Из леммы 2.1 напрямую следует следующее утверждение:

Лемма 2.2. *Для любого решения $y(x)$ уравнения (0.10), стремящегося по модулю к бесконечности при стремлении к границе его области определения, функция $u(t)$, определяемая формулами (2.4) при $k_1 \neq 2$ или (2.9) при $k_1 = 2$, ограничена при $t \to +\infty$.*

Лемма 2.3. *Для любого решения $y(x)$ уравнения (0.10), стремящегося по модулю к бесконечности при стремлении к правой границе x^* (конечной или бесконечной) его области определения, $t \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $x \to x^*$.*

Доказательство. Пусть решение $y(x)$ знакопостоянно при $x \ge x_0$. Тогда утверждение леммы следует из вида $t = \ln|y(x)|\mathrm{sgn}\,(yy')$.

Лемма 2.4. *Множество предельных точек решений уравнения* (2.5) *разбивается на траектории решений уравнения* (2.7).

Доказательство. Без ограничения общности докажем лемму для положительных $u(t)$.

Покажем, что траектория любого решения уравнения (2.7), содержащая предельную точку решения уравнения (2.5), полностью состоит из его предельных точек.

Пусть функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.5), а u^* — предельная точка $u(t)$. Проведем через u^* траекторию решения $v(t)$ уравнения (2.7) с начальным условием $v(0) = u^*$.

Предположим противное: пусть существует такое T, что $v^* = v(T)$ не является предельной точкой $u(t)$. Это означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что при достаточно больших t справедливо $|u(t) - v^*| > \varepsilon$.

С другой стороны, в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий и правой части существует такое число $\delta > 0$, что при выполнении условия $|\varphi(t) - p_0| < \delta$ любая функция $u(t)$, удовлетворяющая уравнению (2.5), а также условию $|u(t_0) - u^*| < \delta$ для некоторого t_0, удовлетворяет также неравенству $|u(t_0+T) - v(T)| < \varepsilon$. Кроме того, поскольку u^* — предельная точка $u(t)$, существует такая последовательность точек $\{t_j\}$, что $u(t_j) \to u^*$ и $t_j \to \infty$ при $j \to \infty$. А это значит, что для t_j, достаточно больших, чтобы выполнялись условия $|u(t_0) - u^*| < \delta$ и $|\varphi(t) - p_0| < \delta$, одновременно должны выполняться неравенства $|u(t_j+T) - v^*| < \varepsilon$ и $|u(t_j) - v^*| > \varepsilon$, что приводит к противоречию.

Лемма доказана.

Рассмотрим решения уравнения (0.10), имеющие вертикальную асимптоту.

Обозначим $u^* = u^*(p_0) = p_0\,\frac{|2-k_1|}{k_0+1}$; тогда $\pm u^*$ — неподвижные точки уравнения (2.7) при $k_1 < 2$ и неподвижные точки уравнения (2.8) при $k_1 > 2$.

Теорема 2.9. *Пусть $k_0 + k_1 > 1$, $k_1 < 2$, а функция $p(x, u, v)$ положительна, непрерывна по x и липшицева по u, v и для любого $a \in \mathbb{R}$ имеет при $x \to a$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P_a. Тогда $\alpha > 0$, и любое возрастающее решение уравнения* (0.10) *имеет вертикальную асимптоту $x = x^*$ справа и вблизи нее имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$y(x) = C(P_{x^*})\,(x^* - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0,$$

$$y'(x) = D(P_{x^*})\,(x^* - x)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0.$$

Доказательство. Рассмотрим замену (2.4) и произвольное положительное решение $u(t)$ получаемого после замены уравнения (2.5). Построим функцию $\theta(t)\colon [0, +\infty) \to [0, 1]$ следующим образом: значению t сопоставляется такое число θ, что $u(t) \in I_\theta = \left\{u^*\theta, \frac{u^*}{\theta}\right\}$. В силу леммы 2.2 функция $u(t)$ ограничена и отделена от нуля, а значит, начиная с некоторого момента, полностью лежит в отрезке с границей I_θ для некоторого $\theta \in (0, 1]$. Кроме того, из теоремы 2.1 об асимптотическом поведении решений с вертикальной асимптотой в случае постоянного потенциала (в частности, из выражения (2.2)) следует, что все положительные решения уравнения (2.7) стремятся к u^*, и, таким образом, в силу леммы 2.4 u^* будет предельной точкой и для $u(t)$.

Отсюда следует, что если $u(t)$ имеет хотя бы одну предельную точку помимо u^*, то все предельные точки $u(t)$ лежат внутри некоторого отрезка с границей I_θ, $0 < \theta < 1$. Однако, траектория решения уравнения (2.7) не может оставаться целиком внутри некоторого такого отрезка: в силу уравнения (2.7) для любого $0 < \theta < 1$ имеем $\dot{u}\big(u^*\theta\big) \neq 0$ и $\dot{u}\left(\frac{u^*}{\theta}\right) \neq 0$. А поскольку в силу леммы 2.4 все точки траектории решения уравнения (2.7), содержащей хотя бы одну предельную точку, помимо u^*, сами будут являться предельными, приходим к противоречию.

Значит, у любого положительного решения $u(t)$ уравнения (2.5) есть только одна предельная точка, а именно, u^*. Отсюда

$$u = u^*\,(1 + o(1)), \quad t \to +\infty,$$

$$y^{k_0+1}(y')^{k_1-2} = \frac{k_0 + 1}{P_{x^*}\,|2 - k_1|}\,(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0,$$

откуда, аналогично доказательству теоремы 2.1, получаем искомое выражение асимптотического поведения решения

$$y(x) = C(P_{x^*})\,(x^* - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0.$$

Найдем асимптотическое представление производной решения. Имеем

$$y^{k_0+1}(y')^{k_1-2} = \frac{k_0 + 1}{P_{x^*}\,|2 - k_1|}\,(1 + o(1)), \quad x \to x^* - 0,$$

откуда
$$(y')^{2-k_1} = y^{k_0+1}\,\frac{k_0+1}{P_{x^*}\,|2-k_1|}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0,$$
и, с учетом полученного выше асимптотического поведения решения $y(x)$,
$$(y')^{2-k_1} = \big(C(P_{x^*})\,(x^*-x)^{-\alpha}\big)^{k_0+1}\,\frac{k_0+1}{P_{x^*}\,|2-k_1|}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0.$$
Повторяя вычисления из доказательства теоремы 2.1, получаем искомое выражение для производной решения:
$$y'(x) = D(P_{x^*})\,(x^*-x)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0.$$
Теорема 2.9 доказана.

Аналогично находится асимптотический вид неограниченных решений в остальных случаях:

Теорема 2.10. *Пусть $k_0+k_1<1$, а функция $p(x,u,v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x\to+\infty$, $u\to+\infty$, $v\to+\infty$ положительный предел P. Тогда $\alpha<-1$, и любое возрастающее μ-решение уравнения* (0.10)*, положительное вблизи правой границы области определения, имеет вид*
$$y(x) = C(P)\,(x-x_0)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x\to+\infty,$$
$$y'(x) = D(P)\,(x-x_0)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x\to+\infty,$$
где x_0 — такая точка, что $\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=0$.

Теорема 2.11. *Пусть $k_0+k_1=1$, а функция $p(x,u,v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x\to+\infty$, $u\to+\infty$, $v\to+\infty$ положительный предел P. Тогда любое возрастающее решение $y(x)$ уравнения* (2.1)*, удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0)>0$, $y'(x)>0$, имеет следующее асимптотическое поведение вблизи правой границы области определения:*
$$y(x) = y(x_0)\,e^{P^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x\to+\infty,$$

$$y'(x) = y(x_0)\, P^{\frac{1}{k_0+1}}\, e^{P^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x \to +\infty.$$

Теорема 2.12. *Пусть $k_1 = 2$, а функция $p(x,u,v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to a$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел p_a. Тогда любое возрастающее решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *обращается в ноль в некоторой точке x_0, имеет конечную правую границу области определения x^* и удовлетворяет вблизи неё следующему равенству:*

$$\Gamma\left(\frac{1}{k_0+1}, \frac{p_{x^*}}{k_0+1}\,(y(x))^{k_0+1}\right) = y'(x_0)\,\left(p_{x^*}(k_0+1)^{k_0}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x^*-x).$$

Теорема 2.13. *Пусть $k_1 > 2$, а функция $p(x,u,v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to +\infty$, $u \to -\infty$, $v \to 0$ положительный предел p_0. Тогда $-1 < \alpha < 0$, и любое убывающее решение уравнения* (0.10) *обращается в ноль в некоторой точке x_0, определено на $[x_0, +\infty)$ и имеет вид*

$$y(x) = -C(p_0)\,(x-x_0)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = -D(p_0)\,(x-x_0)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty.$$

И, опять же, в силу замечания 1.2, справедливы следующие результаты об асимптотическом поведении решений, неограниченных вблизи левой границы области определения:

Теорема 2.14. *Пусть $k_0 + k_1 > 1$, $k_1 < 2$, а функция $p(x,u,v)$ положительна, непрерывна по x и липшицева по u, v и для любого $a \in \mathbb{R}$ имеет при $x \to a$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P_a. Тогда $\alpha > 0$, и любое возрастающее решение уравнения* (0.10) *имеет вертикальную асимптоту $x = x_*$ слева и вблизи нее имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$y(x) = -C(P_{x_*})\,(x-x_*)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to x_* + 0,$$

$$y'(x) = D(P_{x_*})\,(x-x_*)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to x_* + 0.$$

Теорема 2.15. *Пусть $k_0 + k_1 = 1$, а функция $p(x, u, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P. Тогда любое возрастающее решение $y(x)$ уравнения* (2.1), *удовлетворяющее в некоторой точке x_0 условиям $y(x_0) > 0$, $y'(x) > 0$, имеет следующее асимптотическое поведение вблизи правой границы области определения:*

$$y(x) = -y(x_0)\, e^{P^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x_0-x)\,(1+o(1))}, \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = y(x_0)\, P^{\frac{1}{k_0+1}}\, e^{P^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x_0-x)\,(1+o(1))}, \quad x \to -\infty.$$

Теорема 2.16. *Пусть $k_0 + k_1 < 1$, а функция $p(x, u, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P. Тогда $\alpha < -1$ и любое возрастающее μ-решение уравнения* (0.10), *отрицательное вблизи правой границы области определения, имеет вид*

$$y(x) = -C(P)\,(x_0 - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = D(P)\,(x_0 - x)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

где x_0 — такая точка, что $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = 0$.

Теорема 2.17. *Пусть $k_1 = 2$, а функция $p(x, u, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to a$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел p_a. Тогда любое возрастающее решение $y(x)$ уравнения* (0.10) *обращается в ноль в некоторой точке x_0, имеет конечную левую границу области определения x_* и удовлетворяет вблизи неё следующему равенству:*

$$\Gamma\left(\frac{1}{k_0+1}, \frac{p_{x_*}}{k_0+1} - |y(x)|^{k_0+1}\right) = y'(x_0)\left(p_{x_*}(k_0+1)^{k_0}\right)^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x - x_*).$$

Теорема 2.18. *Пусть $k_1 > 2$, а функция $p(x, u, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to 0$ положительный предел p_0. Тогда $-1 < \alpha < 0$, и любое убывающее решение уравнения* (0.10) *обращается в ноль в некоторой точке x_0, определено на $(-\infty, x_0)$*

и имеет вид

$$y(x) = C(p_0)\,(x_0 - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = -D(p_0)\,(x_0 - x)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

2.2 Асимптотическое поведение решений, стремящихся к нулю вблизи границы области определения

В силу замечания 1.2 достаточно рассмотреть асимптотическое поведение решений, стремящихся к нулю вблизи правой границы области определения. Таковыми будут только отрицательные возрастающие решения; ниже соответствующую границу области определения будем обозначать $x^* \le \infty$ — для сингулярных решений при $k_0 + k_1 < 1$ имеем $x^* < \infty$, а для кнезеровских решений при $k_0 + k_1 \ge 1$, $k_1 < 2$ имеем $x^* = \infty$.

Поскольку рассматриваются отрицательные возрастающие решения, при $x_0 \le x < \tilde{x} \le +\infty$ выполнено $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$.

Как было показано в предыдущем параграфе, уравнение (0.10) с помощью замены (2.4) сводится к уравнению (2.5)

$$\dot{u} = (k_1 - 2)\,\varphi(t) - (k_0 + 1)|u|,$$

где $\varphi(t) = p\big(x(t),\, y(x(t)),\, y'(x(t))\big)$, и при $p(x, y, y') \equiv p_0$ — к уравнению (2.7)

$$\dot{u} = (k_1 - 2)\,p_0 - (k_0 + 1)|u|.$$

Уравнение (2.8) имеет неподвижную точку $-u^*(p_0) = p_0\,\frac{|2-k_1|}{k_0+1}$. Заметим, что $u(t)$ возрастает при $-u^* < u < 0$ и убывает при $u < -u^*$ (действительно, можно убедиться, что при $u < u^*$ выполнено неравенство $\dot{u} < 0$, а при $u > -u^*$ справедливо $\dot{u} > 0$).

Заметим, что для рассматриваемых решений условие $x \to x^* - 0$ равносильно условию $|y(x)| \to 0$, что, в свою очередь, в силу замены (2.4) эквивалентно условию $t \to -\infty$.

Напомним обозначения (0.15):

$$\alpha = \frac{2-k_1}{k_0+k_1-1}, \quad C(P) = \left(\frac{|\alpha|^{1-k_1}\,|\alpha+1|}{P}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}}, P \in \mathbb{R}.$$

Сначала рассмотрим случай постоянного потенциала $p(x,u,v) \equiv p_0 > 0$.

Теорема 2.1. *Пусть $k_0 + k_1 < 1$, $p(x,u,v) \equiv p_0 > 0$, а $y(x)$ — отрицательное сингулярное первого рода в точке x_0 μ-решение уравнения* (2.1). *Тогда*

$$y(x) = -C(p_0)(x_0-x)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to x_0 - 0.$$

$$y'(x) = D(p_0)\,(x_0-x)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to x_0 - 0.$$

Теорема 2.2. *Пусть $k_0 + k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$, $p(x,u,v) \equiv p_0 > 0$, а $y(x)$ — отрицательное кнезеровское решение уравнения* (2.1). *Тогда при $k_0 + k_1 > 1$*

$$y(x) = -C\,(p_0)\,x^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = D\,(p_0)\,x^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty;$$

и при $k_0 + k_1 = 1$

$$y(x) = -e^{-p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\,x}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty.$$

$$y'(x) = y'(x_0)\,p_0^{\frac{1}{k_0+1}}\;e^{-p_+^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x \to +\infty.$$

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 аналогичны доказательству теоремы 2.1.

Заметим, что для рассматриваемых решений справедлива

Лемма 2.1. *Пусть функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3), *а $y(x)$ — μ-решение уравнения* (0.10), *стремящееся к нулю при стремлении к правой границе области определения. Тогда существуют положительные константы C_1 и C_2, такие, что вблизи правой границы области определения решения справедливо*

$$C_1 \leq \frac{\left|y'(x)\right|^{2-k_1}}{\left|y(x)\right|^{k_0+1}} \leq C_2.$$

Доказательство. Из замечания 1.4 следует, что такое решение удовлетворяет на всей области определения условию (1.5), то есть

$$m\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\,|y(x)|^{k_0+1} \le \big(y'(x)\big)^{2-k_1} \le M\,\frac{2-k_1}{k_0+1}\,|y(x)|^{k_0+1}.$$

Отсюда немедленно следует ограниченность величины $\frac{|y'(x)|^{2-k_1}}{|y(x)|^{k_0+1}}$, поскольку

$$m\,\frac{2-k_1}{k_0+1} \le \frac{\big(y'(x)\big)^{2-k_1}}{|y(x)|^{k_0+1}} \le M\,\frac{2-k_1}{k_0+1}.$$

Лемма 2.1 доказана.

Из леммы 2.1 автоматически следует лемма

Лемма 2.2. *Для любого μ-решения $y(x)$ уравнения* (0.10)*, стремящегося к нулю вблизи границы его области определения, функция $u(t)$ ограничена при $t \to -\infty$.*

Кроме того, для любого μ-решения $y(x)$ уравнения (0.10), стремящегося к нулю вблизи правой границы x^* (конечной или бесконечной) области определения, $t = \ln|y(x)| \to -\infty$ тогда и только тогда, когда $x \to x^*$. Поскольку в этом случае также справедлива лемма 2.4, повторяя с помощью лемм 2.1–2.4 рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2.9, получаем следующие результаты о поведении μ-решений, стремящихся к нулю вблизи правой границы области определения.

Теорема 2.3. *Пусть $k_0 + k_1 < 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам* (1.3)*. Тогда $\alpha < -1$, и если $y(x)$ — отрицательное сингулярное первого рода в точке x_0 μ-решение уравнения* (0.10)*, то*

$$y(x) = -C\big(p(x_0, 0, 0)\big)(x_0 - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_0 - 0,$$

$$y'(x) = D\big(p(x_0, 0, 0)\big)\,(x_0 - x)^{-\alpha-1}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_0 - 0.$$

Теорема 2.4. *Пусть $k_0 + k_1 \ge 1$, $k_1 < 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам* (1.3)*, а также имеет предел p_+ при $x \to +\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$. Пусть $y(x)$ — отрицательное кнезеровское решение уравнения* (0.10)*. Тогда при $k_0 + k_1 > 1$ имеем $-1 < \alpha < 0$*

и

$$y(x) = -C\,(p_+)\,x^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = D\,(p_+)\,x^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty;$$

и при $k_0 + k_1 = 1$

$$y(x) = -e^{-p_+^{\frac{1}{k_0+1}}\,x}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = y'(x_0)\,p_+^{\frac{1}{k_0+1}}\;e^{-p_+^{\frac{1}{k_0+1}}\,(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x \to +\infty.$$

В силу замечания 1.2 справедливы также следующие результаты для положительных сингулярных решений первого рода и положительных кнезеровских при убывании аргумента решений.

Теорема 2.5. *Пусть* $k_0 + k_1 < 1$, *а функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Тогда* $\alpha < -1$, *и если* $y(x)$ *— положительное сингулярное первого рода в точке* x_0 μ*-решение уравнения* (0.10), *то*

$$y(x) = C\big(p(x_0, 0, 0)\big)(x - x_0)^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to x_0 + 0,$$

$$y'(x) = D\big(p(x_0, 0, 0)\big)\,(x - x_0)^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to x_0 + 0.$$

Теорема 2.6. *Пусть* $k_0 + k_1 \geq 1$, $k_1 < 2$, *а функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (1.3), *а также имеет предел* p_- *при* $x \to -\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$. *Пусть* $y(x)$ *— положительное кнезеровское при убывании аргумента решение уравнения* (0.10). *Тогда при* $k_0 + k_1 > 1$ *имеем* $-1 < \alpha < 0$ *и*

$$y(x) = C\,(p_-)\,|x|^{-\alpha}\,(1+o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = D\,(p_-)\,|x|^{-\alpha-1}\,(1+o(1)), \quad x \to -\infty;$$

и при $k_0 + k_1 = 1$

$$y(x) = e^{p_-^{\frac{1}{k_0+1}}\,x}\,(1+o(1)), \quad x \to -\infty,$$

$$y'(x) = y'(x_0)\, p_-^{\frac{1}{k_0+1}}\, e^{p_-^{\frac{1}{k_0+1}}(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x \to -\infty.$$

2.3 Асимптотическое поведение решений, имеющих конечный ненулевой предел вблизи границы области определения

Перейдём к рассмотрению асимптотического поведения ограниченных μ-решений уравнения (0.10) и их первых производных. Опять же, в силу замечания 1.2, достаточно рассмотреть поведение решений вблизи правой границы области определения.

Обозначим для $s > 0$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\widetilde{D}(s,t) = \left(|1-k_1|\, s\, |t|^{k_0}\right)^{\frac{1}{1-k_1}}.$$

Рассмотрим сначала возрастащие ограниченные решения. Как было показано в главе 1, возрастающие решения ограничены только при $k_1 > 2$ — так называемые *black hole* решения.

Теорема 2.7. *Пусть $k_1 > 2$, а функция $p(x,u,v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам (1.3) и для любых a и $b > 0$ имеет предел предел P_{ab} при $x \to a$, $u \to b$, $v \to +\infty$. Пусть $y(x)$ — возрастающее решение уравнения (0.10), а x^* — правая граница его области определения, конечная в силу теоремы 1.11. Обозначим $y^* = \lim\limits_{x \to x^*-0} y(x)$. Тогда*

$$y'(x) = \widetilde{D}(P_{x^*y^*}, y^*)\,(x^*-x)^{-\frac{1}{k_1-1}}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0.$$

Доказательство. Поскольку $y' \to +\infty$ при $x \to x^*-0$, из уравнения (0.10) получаем

$$y''(x) = p^*(y^*)^{k_0}(y'(x))^{k_1}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0,$$

$$y''(x)(y'(x))^{-k_1} = p^*(y^*)^{k_0}\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0,$$

$$\left.\frac{(y'(x))^{1-k_1}}{1-k_1}\right|_x^{x^*} = p^*(y^*)^{k_0}(x^*-x)\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0.$$

Поскольку $k_1 > 2$ и, следовательно, $1-k_1 < 0$, получаем

$$(y'(x))^{1-k_1} = p^*(k_1-1)(y^*)^{k_0}(x^*-x)\,(1+o(1)), \quad x \to x^*-0,$$

откуда

$$y'(x) = \widetilde{D}(p^*, y^*)\,(x^* - x)^{-\frac{1}{k_1-1}}\,(1 + o(1)),\ x \to x^* - 0,$$

и теорема доказана.

Теперь рассмотрим убывающие μ-решения.

В силу теоремы 1.15 при $0 < k_2 < 1$ любое убывающее μ-решение имеет конечную правую границу области определения x^* и конечный предел $y^* = \lim\limits_{x\to x^*} y(x)$, причём $-\infty < y^* < 0$.

Теорема 2.8. *Пусть* $0 < k_1 < 1$, *а функция* $p(x, u, v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v *и удовлетворяет неравенствам* (1.3). *Пусть* $y(x)$ *— убывающее* μ*-решение уравнения* (0.10) *а* x^* *— правая граница его области определения, конечная в силу теоремы 1.15. Обозначим* $y^* = \lim\limits_{x\to x^*-0} y(x)$ *и* $p_+ = p(x^*, y^*, 0)$. *Тогда*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_+, y^*)\ (x^* - x)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)),\quad x \to x^* - 0.$$

Доказательство. Для убывающих решений из уравнения (0.10) следует

$$y'' = p_+|y^*|^{k_0}|y'|^{k_1}\,(1 + o(1)),\quad x \to x^* - 0,$$

$$y''(-y'(x))^{-k_1} = p_+|y^*|^{k_0}\,(1 + o(1)),\quad x \to x^* - 0,$$

и, поскольку $y' \to -0$ при $x \to x^* - 0$,

$$\left.\frac{(-y'(x))^{1-k_1}}{1 - k_1}\right|_x^{x^*} = -p_+|y^*|^{k_0}(x^* - x)\,(1 + o(1)),\quad x \to x^* - 0.$$

Так как $0 < k_1 < 1$ и, следовательно, $1 - k_1 > 0$, получаем

$$(-y'(x))^{1-k_1} = p_+(1 - k_1)|y^*|^{k_0}(x^* - x)\,(1 + o(1)),\quad x \to x^* - 0,$$

откуда

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_+, y^*)\,(x^* - x)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)),\quad x \to x^* - 0,$$

и теорема 2.8 доказана.

В силу теоремы 1.16 при $1 \le k_1 < 2$ любое убывающее μ-решение определено на всей числовой прямой и имеет вблизи правой границы области определения конечный предел $y^* = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$, $-\infty < y^* < 0$.

Теорема 2.9. *Пусть* $k_1 = 1$, *а функция* $p(x,u,v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (1.3) *и имеет предел* p_+ *при* $x \to +\infty$, $u \to y^*$, $v \to 0$. *Если* $y(x)$ *— убывающее* μ*-решение уравнения* (0.10), $y(x_0) \le 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *то*

$$y'(x) = -|y'(x_0)|\, e^{-p_+|y^*|^{k_0}\,(x-x_0)}(1+o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, получаем, что

$$(-y'(x))^{-1}y'' = p_+|y^*|^{k_0}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$\ln(-y')\Big|_{x_0}^{x} = -p_+|y^*|^{k_0}(x-x_0)\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty,$$

и

$$\ln(-y'(x)) - \ln(-y'(x_0)) = -p_+|y^*|^{k_0}(x-x_0)\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty,$$

откуда

$$y'(x) = y'(x_0)\, e^{-p_+|y^*|^{k_0}(x-x_0)\,(1+o(1))}, \quad x \to +\infty,$$

$$y'(x) = -|y'(x_0)|\, e^{-p_+|y^*|^{k_0}\,(x-x_0)}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty,$$

и теорема 2.9 доказана.

Теорема 2.10. *Пусть* $1 < k_1 < 2$, *а функция* $p(x,u,v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (1.3) *и имеет предел* $p(x,u,v) \to p_a^+$ *при* $x \to +\infty$, $u \to a$, $v \to 0$. *Если* $y(x)$ *— убывающее* μ*-решение уравнения* (0.10), $y(x_0) \le 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *и* $y^* = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$, *то*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_{y^*}^+, y^*)\ (x-x_0)^{\frac{1}{1-k_1}}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Доказательство. Опять же, из уравнения (0.10) следует, что

$$(-y'(x))^{-k_1}y'' = p_+|y^*|^{k_0}\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty,$$

и, поскольку $y' \to -0$ при $x \to x^* - 0$, справедливо

$$\frac{(-y')^{1-k_1}}{1-k_1}\Bigg|_{x_0}^{x} = -p_+|y^*|^{k_0}(x-x_0)\,(1+o(1)), \quad x \to +\infty.$$

Так как $1 < k_1 < 2$ и, следовательно, $1 - k_1 < 0$, имеем

$$(-y'(x))^{1-k_1} - (-y'(x_0))^{1-k_1} = p_+(k_1 - 1)|y^*|^{k_0}(x - x_0)\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

откуда

$$(-y'(x))^{1-k_1} = p_+(k_1 - 1)|y^*|^{k_0}(x - x_0)\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

и

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_+, y^*)\ (x - x_0)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to +\infty.$$

и теорема 2.10 доказана.

Для поведения решений вблизи левой границы области определения в силу замечания 1.2 справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.11. *Пусть $k_1 > 2$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам (1.3) и для любых a и $b < 0$ имеет предел предел P_{ab} при $x \to a$, $u \to b$, $v \to +\infty$. Пусть $y(x)$ — возрастающее решение уравнения (0.10), а x_* — левая граница его области определения, конечная в силу теоремы 1.21. Обозначим $y_* = \lim\limits_{x \to x_*+0} y(x)$. Тогда*

$$y'(x) = \widetilde{D}(P_{x_*y_*}, y_*)\,(x - x_*)^{-\frac{1}{k_1-1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to x_* + 0.$$

Теорема 2.12. *Пусть $0 < k_1 < 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v и удовлетворяет неравенствам (1.3). Пусть $y(x)$ — убывающее μ-решение уравнения (0.10) а x_* — левая граница его области определения, конечная в силу теоремы 1.17. Обозначим $y_* = \lim\limits_{x \to x_*+0} y(x)$ и $p_- = p(x_*, y_*, 0)$. Тогда*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_-, y_*)\ (x - x_*)^{\frac{1}{1-k_1}}\ (1 + o(1)), \quad x \to x_* + 0.$$

Теорема 2.13. *Пусть $k_1 = 1$, а функция $p(x, u, v)$ непрерывна по x, липшицева по u, v, удовлетворяет неравенствам (1.3) и имеет предел p_- при $x \to -\infty$, $u \to y_*$, $v \to 0$. Если $y(x)$ — убывающее μ-решение уравнения (0.10), $y(x_0) \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, то*

$$y'(x) = -|y'(x_0)|\, e^{-p_-|y^*|^{k_0}\,(x_0 - x)}(1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

Теорема 2.14. *Пусть* $1 < k_1 < 2$, *а функция* $p(x,u,v)$ *непрерывна по* x, *липшицева по* u, v, *удовлетворяет неравенствам* (1.3) *и имеет предел* $p(x,u,v) \to p_a^-$ *при* $x \to -\infty$, $u \to a$, $v \to 0$. *Если* $y(x)$ — *убывающее* μ*-решение уравнения* (0.10), $y(x_0) \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *и* $y_* = \lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$, *то*

$$y'(x) = -\widetilde{D}(p_{y_*}^-, y_*)\ (x_0 - x)^{\frac{1}{1-k_1}}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty.$$

Глава 3. Сравнение свойств решений уравнения при $k_1 \neq 0$ и $k_1 = 0$

Проанализируем результаты, полученные в настоящей работе для уравнения (0.10) второго порядка с нелинейностями общего вида

$$y'' = p(x, y, y')|y|^{k_0}|y'|^{k_1}\operatorname{sgn}(y\,y'), \quad k_0, k_1 > 0$$

и результаты, полученные К. М. Дулиной в работах [95, 8, 109, 9, 108, 10] для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка

$$y'' = P(x, y, y')|y|^{k}\operatorname{sgn} y, \quad k > 0 \tag{3.1}$$

с непрерывными по x и липшицевыми по u, v знакопостоянными функциями $p(x, u, v)$ и $P(x, u, v)$.

3.1 Качественное поведение решений

Начнём с качественного поведения решений. На участках знакопостоянности решений и их производных уравнения (0.10) и (3.1) при ограниченных потенциалах принимают одинаковый вид (с точностью до знаков потенциалов $p(x, u, v)$ и $P(x, u, v)$).

Таким образом, поведению μ-решений уравнения (3.1) при $P(x, u, v) > 0$ соответствует поведение возрастающих μ-решений уравнения (0.10) при $p(x, u, v) > 0$ и убывающих μ-решений при $p(x, u, v) < 0$, и наоборот: поведению μ-решений уравнения (3.1) при $P(x, u, v) < 0$ соответствует поведение убывающих μ-решений уравнения (0.10) при $p(x, u, v) > 0$ и возрастающих μ-решений при $p(x, u, v) < 0$.

На рисунке 3.1 показано, как изменяется качественное поведение решений обоих уравнений в зависимости от значений соответствующих показателей нелинейности k, k_0 и k_1. Справа синим и красным цветом показаны типы μ-решений, соответствующие уравнению (0.10) с положительной функцией

$p(x,u,v)$, а оранжевым и голубым цветом — решения, соответствующие уравнению (0.10) при $p(x,u,v)<0$.

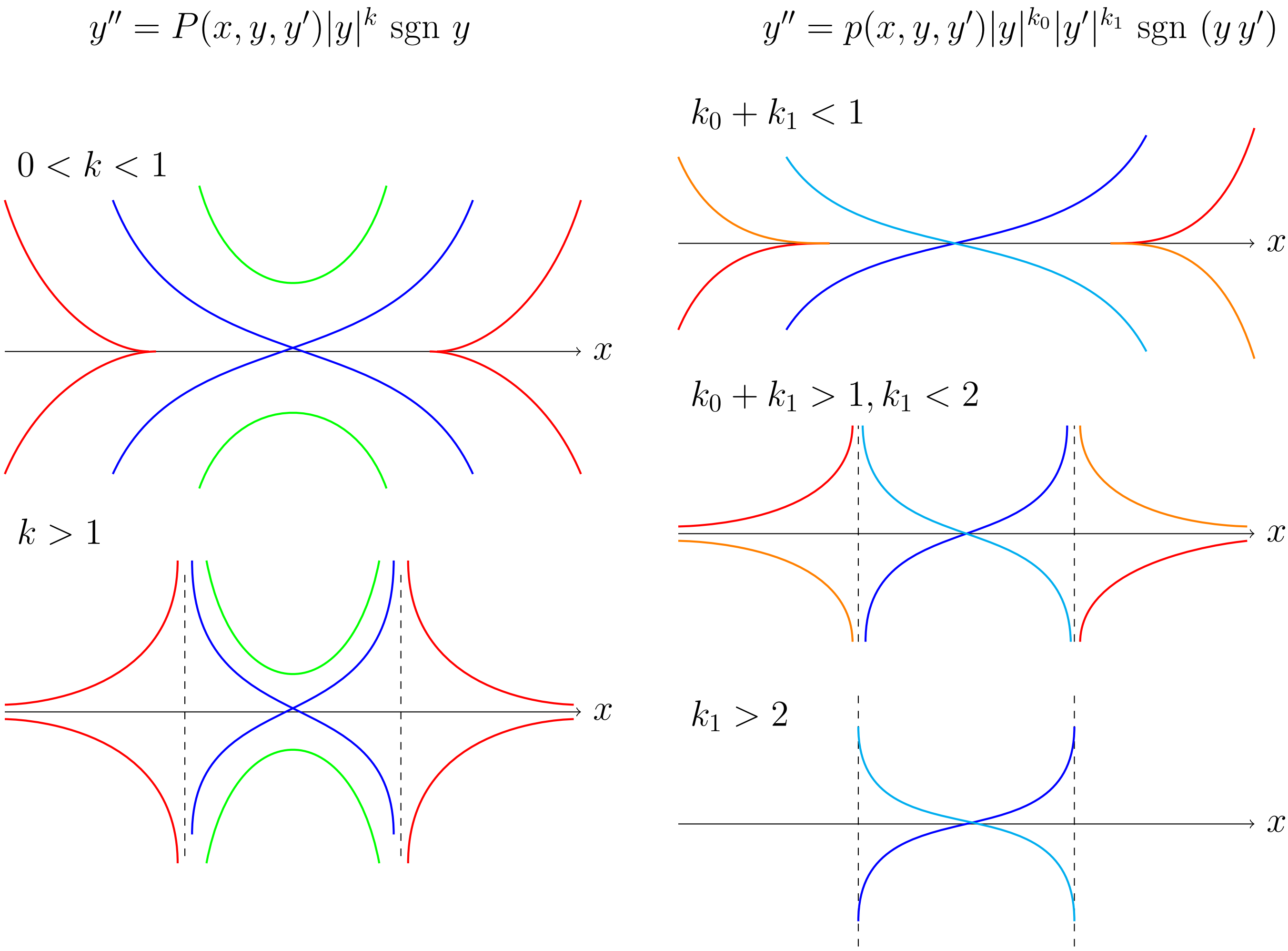

Рисунок 3.1

Как видно, при соответствующих знаках потенциалов случай сингулярной нелинейности уравнения (3.1) $k<1$ соответствует случаю $k_0+k_1<1$ для уравнения с нелинейностями общего вида (0.10): в обоих случаях (и только в них) существуют сингулярные μ-решения первого рода с полубесконечной областью определения и решения, определённые на всей числовой прямой, меняющие знак ровно один раз и стремящиеся к бесконечности вместе с первыми производными.

В случае же $k<1$ для уравнения (3.1) и $k_0+k_1<1$, $k_1<2$ для уравнения (0.10) при соответствующих знакак потенциалов существуют кнезеровские решения, и любое решение имеет хотя бы одну конечную границу области определения, которая является положением вертикальной асимптоты решения.

Наконец, при $k_1>2$ все возрастающие решения уравнения (0.10) оказываются black hole решениями: для уравнения (3.1) в соответствии с результатами, полученными в [108], решений такого типа не существует при ограниченной $P(x,u,v)$, и даже при неограниченной $P(x,u,v) \equiv f(x,u)$ — на существование black hole решений влияет характер зависимости потенциала именно от первой производной решения.

Рассмотрим решения уравнения (3.1) при $P(x,u,v) < 0$ и, соответственно, убывающие μ-решения уравнения (0.10) при $p(x,u,v) > 0$ и возрастающие μ-решения при $p(x,u,v) < 0$.

На рисунке 3.2 показано, как изменяется качественное поведение решений обоих уравнений в зависимости от показателей нелинейности.

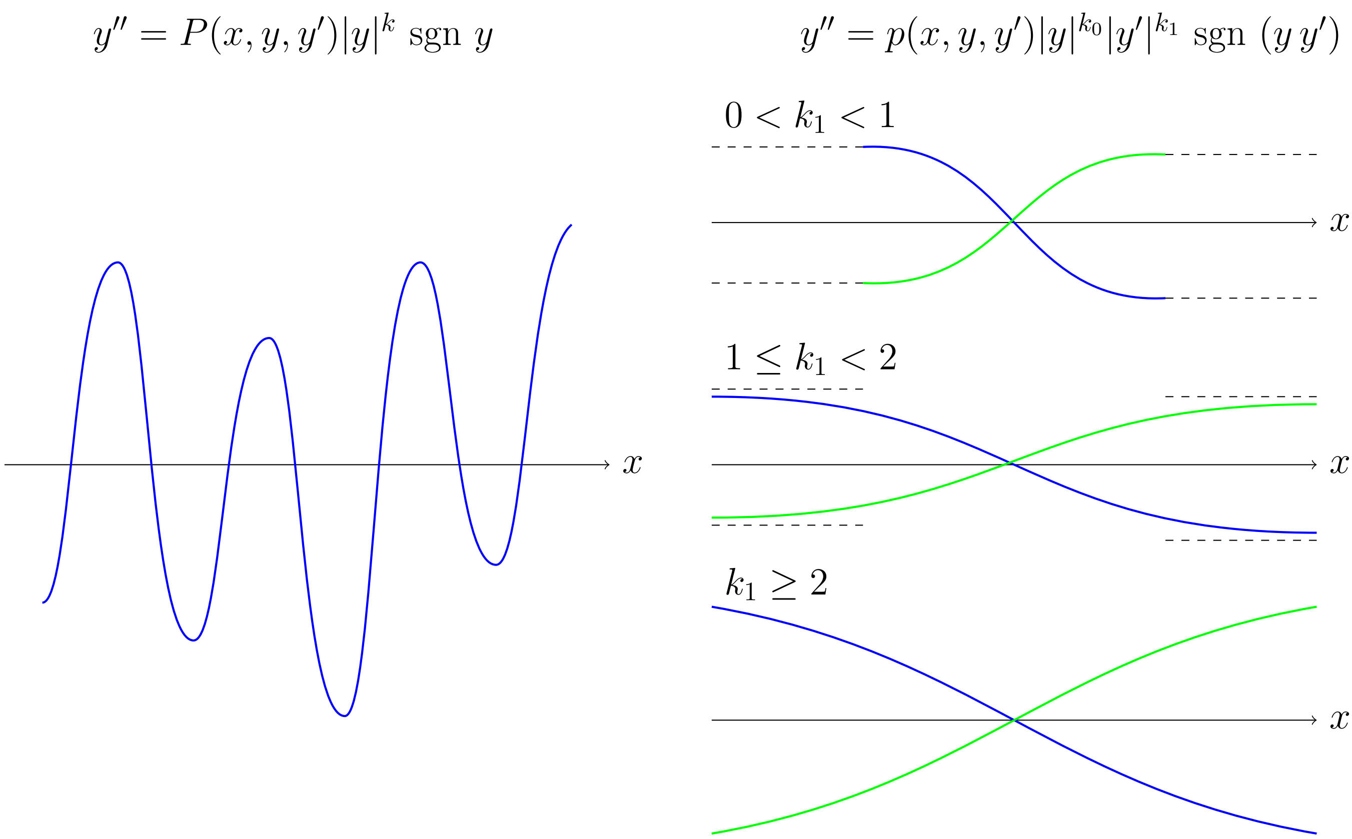

Рисунок 3.2

В этом случае все решения уравнения (3.1) типа Эмдена–Фаулера, независимо от показателя $k > 0$, являются колеблющимися. На рисунках справа синим показаны решения уравнения (0.10) при $p(x,u,v) > 0$, зелёным — решения уравнения (0.10) при $p(x,u,v) < 0$. Что характерно, μ-решения уравнения (0.10) с нелинейностями общего вида при малых значениях показателя k_1 (то есть, при $0 < k_1 < 1$) являются white hole решениями, что соответствует поведению решений уравнения (3.1) между соседними экстремумами. В случае же, когда k_1 возрастает, решения уравнения (0.10) становятся определены на всей числовой прямой и ограничены (при $1 \le k_1 < 2$) или даже неограничены (при $k_1 \ge 2$).

Таким образом, из доказательств теорем 1.16 и 1.19 вытекают следующие результаты для решений уравнения (3.1).

Следствие 3.1. *Пусть функция $P(x, u, v)$ отрицательна, непрерывна по x, липшицева по u, v и для некоторых ε, $0 < \varepsilon < 1$, $M > 0$ и $m > 0$ удовлетворяет неравенствам*

$$m|v| \le |P(x, u, v)| \le M|v|^{2-\varepsilon}.$$

Тогда все непостоянные решения уравнения (3.1) *определены на всей числовой прямой, имеют ровно один ноль и имеют горизонтальные асимптоты при $x \to \pm\infty$.*

Следствие 3.2. *Пусть функция $P(x, u, v)$ отрицательна, непрерывна по x, липшицева по u, v и для некоторой константы $m > 0$ удовлетворяет неравенству $|P(x, u, v)| \ge M|v|^2$. Тогда все непостоянные решения уравнения* (3.1) *определены на всей числовой прямой, имеют ровно один ноль и неограничены.*

Таким образом, качественная картина поведения решений уравнения (3.1) согласуется с поведением решений уравнения (0.10) при формальной подстановке $k_1 = 0$.

3.2 Асимптотическое поведение решений

Сравним асимптотическое поведение решений уравнений (3.1) при $P(x, u, v) > 0$ и возрастающих решений уравнения (0.10) на примере нескольких типов решений.

Рассмотрим сначала случай $k < 1$ в уравнении (3.1) и соответствующий ему случай $k_0 + k_1 < 1$ в уравнении (0.10). В этих случаях для решений, имеющих ноль, справедливы следующие результаты об асимптотическом поведении.

Теорема 3.1 ([95]). *Пусть $0 < k < 1$, а функция $P(x, u, v)$ положительна, непрерывна по x, липшицева по u, v и имеет при $x \to +\infty$, $u \to +\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P_+, а также при $x \to -\infty$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$ положительный предел P_-. Тогда любое возрастающее μ-решение* *уравнения* (3.1)*, обращающееся в ноль в некоторой точке* x_0*, определено на всей числовой прямой и*

$$y(x) = C(P_+)\,(x - x_0)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y(x) = -C(P_-)\,(x_0 - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

где

$$\alpha = \frac{2}{k-1}, \quad C(\widetilde{p}) = \left(\frac{|\alpha|\,|\alpha+1|}{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.2. *Пусть* $k_0 + k_1 < 1$*, а функция* $p(x, u, v)$ *положительна, непрерывна по* x*, липшицева по* u*,* v *и имеет при* $x \to +\infty$*,* $u \to +\infty$*,* $v \to +\infty$ *положительный предел* p_+*, а также при* $x \to -\infty$*,* $u \to -\infty$*,* $v \to +\infty$ *положительный предел* p_-*. Тогда* $\alpha < -1$*, и любое возрастающее* μ*-решение уравнения* (0.10)*, обращающееся в ноль в некоторой точке* x_0*, определено на всей числовой прямой и*

$$y(x) = C(p_+)\,(x - x_0)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

$$y(x) = -C(p_-)\,(x_0 - x)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to -\infty,$$

где

$$\alpha = \frac{2 - k_1}{k_0 + k_1 - 1}, \quad C(\widetilde{p}) = \left(\frac{|\alpha|^{1-k_1}|\alpha+1|}{\widetilde{p}}\right)^{\frac{1}{k_0+k_1-1}}. \tag{3.3}$$

Приведём также пример асимптотического поведения отрицательных кнезеровских решений вблизи обеих границ области определения в случае $k > 1$ для уравнения (3.1) и в случае $k_0 + k_1 > 1$, $k_1 < 2$ для уравнения (0.10).

Теорема 3.3 ([95]). *Пусть* $k > 1$*, а функция* $P(x, u, v)$ *положительна, непрерывна по* x *и липшицева по* u*,* v *и для любого* $a \in \mathbb{R}$ *имеет при* $x \to a$*,* $u \to -\infty$*,* $v \to +\infty$ *положительный предел* P_a*, а также имеет предел* P_+ *при* $x \to +\infty$*,* $u \to 0$*,* $v \to 0$*. Тогда* $\alpha > 0$*, и любое отрицательное кнезеровское решение уравнения* (0.10) *имеет вертикальную асимптоту* $x = x_*$ *слева, определено на* $(x_*, +\infty)$ *и имеет следующее асимптотическое поведение вблизи границ области определения:*

$$y(x) = -C(P_{x_*})\,(x - x_*)^{-\alpha}\,(1 + o(1)), \quad x \to x_* + 0,$$

$$y(x) = -C(P_+)\, x^{-\alpha}\, (1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

где константы α *и* C *определяются формулами* (3.2).

Теорема 3.4. *Пусть* $k_0 + k_1 > 1$, $k_1 < 2$, *а функция* $p(x, u, v)$ *положительна, непрерывна по* x *и липшицева по* u, v *и для любого* $a \in \mathbb{R}$ *имеет при* $x \to a$, $u \to -\infty$, $v \to +\infty$ *положительный предел* p_a, *а также имеет предел* p_+ *при* $x \to +\infty$, $u \to 0$, $v \to 0$. *Тогда* $\alpha > 0$, *и любое отрицательное кнезеровское решение уравнения* (0.10) *имеет вертикальную асимптоту* $x = x_*$ *слева, определено на* $(x_*, +\infty)$ *и имеет следующее асимптотическое поведение вблизи границ области определения:*

$$y(x) = -C(p_{x_*})\, (x - x_*)^{-\alpha}\, (1 + o(1)), \quad x \to x_* + 0,$$

$$y(x) = -C(p_+)\, x^{-\alpha}\, (1 + o(1)), \quad x \to +\infty,$$

где константы α *и* C *определяются формулами* (3.3).

Как видно из приведённых теорем и выражений (3.2) и (3.3), для решений обоих уравнений характерно степенное поведение, причём асимптотическое поведение решений уравнения типа Эмдена–Фаулера соответствует асимптотическому поведению решений уравнения с нелинейностями общего вида при формальной подстановке $k_1 = 0$.

Заключение

В настоящей диссертации получены полная качественная и полная асимптотическая классификации μ–решений уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида для ограниченного и отделенного от нуля потенциала, зависящего от всех фазовых переменных. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Показано, что все μ-решения уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида строго монотонны; причём возрастающие μ-решения либо имеют один нуль, либо знакопостоянны на всей области определения, а все убывающие μ-решения имеют ровно один нуль.

2. Изучен вопрос существования различных типов решений в зависимости от значений показателей нелинейности; в частности, показано, при каких условиях на показатели нелинейности у рассматриваемого уравнения существуют те или иные знакопостоянные решения — сингулярные μ-решения первого рода или кнезеровские решения.

3. Исследовано поведение возрастающих μ-решений в зависимости от значений показателей нелинейности: найден критерий существования у решения вертикальной асимптоты, получена оценка расстояния от начальной точки до вертикальной асимптоты и показано, что при $k_1 > 2$ все решения являются black hole решениями; для black hole решений также получены оценки сверху и снизу предела решения при стремлении к границе области определения; показана непрерывная зависимость положения асимптоты от начальных данных.

4. Исследовано качественное поведение убывающих μ-решений: показано, что тип решений зависит только от показателя нелинейности, отвечающего за производную решения, и найдены все возможные типы решений в зависимости от значений этого показателя; для ограниченных μ-решений получены оценки сверху и снизу предела μ-решения при стремлении к границе области определения.

5. Получены результаты о степенном характере асимптотического поведения решений и их первых производных для всех возможных типов решений.

6. Проведён сравнительный анализ полученных в диссертации результатов для уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида с результатами, известными для уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка.

Дальнейшее исследование темы диссертации может быть связано с изучением качественного и асимптотического поведения решений уравнений с нелинейностями общего вида третьего и высокого порядков.

Список литературы

[1] Асташова И. В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание по ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

[2] Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью // Дифференциальные уравнения. 2014, Т. 50, № 11, с. 1551–1552.

[3] Асташова И. В. Об асимптотической классификации решений нелинейных уравнений третьего и четвертого порядков со степенной нелинейностью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 3–25.

[4] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.

[5] Белозерова М. А. Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями близкими к степенным // Нелинейные уравнения. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 3–15.

[6] Белозерова М. А. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями// Вестник Одесского нац. ун-та. Математика и механика. 2010. Т. 15. № 18. С. 7–21.

[7] Белозерова М. А. Асимптотические представления решений с медленно меняющимися производными существенно нелинейных диффренциальных уравнений второго порядка// Вестник Одесского нац. ун-та. Математика и механика. 2015. Т. 20. № 1(25). С. 7–19.

[8] Дулина К. М. Об асимптотическом поведении решений с бесконечной производной регулярных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 2. С. 207–214.

[9] Dulina K. M. On asymptotic behavior of solutions to the second-order Emden–Fowler type differential equations with unbounded negative potential // Functional differential equations. 2016. № 23(1-2). P. 3–8.

[10] Дулина К. М. Асимптотическая классификация решений дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 16.06.2017 // Дулина Ксения Михайловна. — Москва, 2017. 116 стр.

[11] Евтухов В. М., Белозерова М. А. Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. Мат. журнал. 2008. Т. 60, № 3. С. 310–331.

[12] Евтухов В. М., Костин А. В. Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения. ДАН СССР, 1976. Т. 231, № 5. С. 1059–1062.

[13] Евтухов В. М. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. 1982. Т. 106, № 3. С. 474–476.

[14] Евтухов В. М. Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. 1984. Т. 115. С. 215–236.

[15] Евтухов В. М. Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 5. С. 776–787.

[16] Евтухов В. М. Об асимптотике монотонных решений нелинейных дифференциальных уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1076–1078.

[17] Евтухов В. М. Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена–Фаулера // Докл. РАН. 1992. Т. 324. № 2. С. 258–260

[18] Евтухов В. М. Об условиях неколеблемости решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Матем. заметки. 2000. Т. 67. Вып 2. С. 201–210.

[19] Евтухов В. М., Касьянова В. А. Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. Мат. журнал. 2006. Т. 58, № 7. С.901–921.

[20] Евтухов В. М., Клопот А. М. Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n- го порядка с правильно меняющимися нелинейностями// Укр. Мат. Ж. 2013 Т. 56, № 3. С. 354–380.

[21] Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями // Укр. Мат. Ж. 2017. Т. 69, № 10. С. 1345–1363.

[22] Изобов Н. А. Об уравнениях Эмдена–Фаулера с неограниченными бесконечно продолжимыми решениями // Математические заметки. 1984. Т. 35. № 2. С. 189–198.

[23] Кигурадзе И. Т. Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$ // Čas. pěst. mat. 1962. V. 87. № 4. 492–495.

[24] Кигурадзе И. Т. Об асимптотических свойствах решений уравнения $u'' + a(t)u^n = 0$ // Сообщ. АН ГССР. 1963. Т. 30. № 2. С. 129–136.

[25] Кигурадзе И. Т. О неколеблющихся решениях уравнения $u'' + a(t)u^n \operatorname{sgn} u = 0$ // Сообщ. АН ГССР. 1964. Т. 35. № 1. С. 15–22.

[26] Кигурадзе И. Т. Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера // Известия АН СССР, мат. 1965. Т. 29. № 5. С. 965–986.

[27] Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд-во Тбилисского университета, 1975.

[28] Кигурадзе И. Т., Шехтер Б. Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. — В сб.: «Современные проблемы математики. Новейшие достижения», т. 30 /Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР/, М.: 1987, с. 105-201.

[29] Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.

[30] Клопот А. М. Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Вiсник Одеського нацiонального унiверситету. Математика. Механiка. 2013. Т. 18, Вип. 3. С. 16–34.

[31] Кондратьев В. А., Никишкин В. А. О положительных решениях уравнения $y'' = p(x)\, y^k$ // В сб.: Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением. Саранск. 1980. С. 131–141.

[32] Кондратьев В. А., Никишкин В. А. Об изолированных особенностях решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 6. С. 1025–1038.

[33] Кондратьев В. А., Самовол В. С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 4. С. 749–750.

[34] Коньков А. А. О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия РАН, сер. Математика. 2001. Т. 65. № 2. С. 81–126.

[35] Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988.

[36] Костин А. В. Об асимптотике непродолжаемых решении уравнений типа Эмдена Фаулера // ДАН СССР. 1971. Т. 200, № 1. С. 28–31.

[37] Ломтатидзе А. Г. Об одной краевой задаче для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярностями // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 3. С. 416–426.

[38] Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, Т. 1,2. 1954.

[39] Садырбаев Ф. Ж. О решениях уравнения типа Эмдена–Фаулера // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 5. С. 799–805.

[40] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[41] Чантурия Т. А. Об асимптотическом представлении решений уравнения $u'' = a(t)u^n \operatorname{sgn} u$ // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 7. С. 1195–1206.

[42] Чантурия Т. А. Об асимптотическом представлении колеблющихся решений уравнений типа Эмдена Фаулера // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 6. С. 1035–1040.

[43] Astashova I. V. On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to emden-fowler type higher-order equations // Advances in Difference Equations. SpringerOpen Journal. 2013. № 2013:220. P. 1–15.

[44] Astashova I. V. On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden–Fowler type differential equation // Boundary Value Problems. 2014. V. 174. P. 1–8.

[45] Astashova I. V. On asymptotic behavior of solutions to emden-fowler type higher-order differential equations // Mathematica Bohemica. 2015. V. 140, № 4. P. 479–488.

[46] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to fourth-order differential equations with singular power nonlinearity // Mathametical Modeling and Analysis. 2016. V. 21. № 4. P. 502–521.

[47] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power

nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. United States: New York. 2016. P. 185–197.

[48] Astashova I. V. Uniqueness of solutions to second order emden–fowler type equations with general power-law nonlinearity // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 255, № 5. P. 543–550.

[49] Atkinson F. V. On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math. 1955. V. 5. № 1. P. 643–647.

[50] Bartušek M. On proper oscillatory solutions of the nonlinear differential equations of the n-th order // Archivum Mathematicum. 1988. V. 24. № 2. P. 89–98.

[51] Bartušek M. On the existence of unbounded noncontinuable solutions // Annali di Matematica. 2006. V. 185. P. 93–107.

[52] Belohorec S. A criterion for oscillation and nonoscillation // Acta F. R. N. Univ. Comen. Math. 1969. V. 20. P. 75–79.

[53] Burkotová J., Hubner M., Rachůnková I., Weinmüller E. B. Asymptotic properties of Kneser solutions to nonlinear second order ODEs with regularly varying coefficients // Applied Mathematics and Computation. 2016. V. 274. P. 65–82.

[54] Došlá Z., Cecchi M., Marini M. On the dynamics of the generalized Emden-Fowler equation // Georgian Mathematical Journal. 2000. V. 7. № 2. P. 269–282.

[55] Došlá Z. and Marini M. On super-linear Emden–Fowler type differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 416. P. 497–510.

[56] Došlá Z. and Marini M. A coexistence problem for nonoscillatory solutions to Emden–Fowler type differential equations // EPAM. 2016. V. 2, Issue 1. P. 87–104.

[57] Došlá Z. and Marini M. Monotonicity conditions in oscillation to superlinear differential equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. № 54. P. 1–13.

[58] Emden R. Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Warmtheorie auf Kosmologie und meteorologische Probleme. Leipzig-Berlin: Teubner, 1907. 497 p.

[59] Belozerova M. A., Evtukhov V. M. Asymptotic representations of solutions of the differential equation $y^(n) = \alpha_0 p(t) \prod_{i=0}^{n-1} \phi_i(y(i))$ // Miskolc Mathematical Notes. 2012. Vol. 13, № 2. P. 249–270.

[60] Fermi E. Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprieta dell'atomo // Rend. R. Ace. Naz. dei Lincei. 1927. V. 6, P. 602–607.

[61] Fowler R. H. Further studies of Emden's and similar differential equations // Quart. Journ. Math. 1931. V. 2. № 2. P. 259–288.

[62] Jasny M. On the existence of an oscillatory solution of the nonlinear differential equation of the second order $y" + f(x)y^{2m\ l} = 0, f(x) > 0$ // Casopis Pest. Mat. 1960. V. 85. 78–83.

[63] Jaroš J., Kusano T. On black hole solutions of second order differential equations with a singular nonlinearity in the differential operator // Funkcialaj Ekvacioj. 2000. V. 43. № 5. P. 491–509.

[64] Jaroš J., Kusano T. On white hole solutions of a class of nonlinear ordinary differential equations of the second order // Funkcialaj Ekvacioj. 2002. V. 45. № 3. P. 319–339.

[65] Jaroš J., Kusano T., Manojlović J. Asymptotic analysis of positive solutions of generalized Emden–Fowler differential equations in the framework of regular variation // Cent. Eur. J. Math. 2013. № 11(12). P. 2215–2233.

[66] Karamata J. Sur un mode de croissance reguliere des functions // Mathematica. 1930 V. 4. P. 38-–53.

[67] Kitano M., Kusano T. On a class of second order quasilinear ordinary differential equations // Hiroshima Math. J. 1995. V. 25. P. 321–355.

[68] Kiguradze I. T. On the oscilattory and monotone solutions of ordinary differential equations // Arch. Math. 1978. V. 14. № 1. P. 21–44.

[69] Kneser A. J. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen beigrosser reden // Wethen der Arguments, I. J. Reine und angew. Math. 1898. V. 116. P. 173–212.

[70] Kozlov V. A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. 1999. V. 37. № 2. P. 305–322.

[71] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czechosl.Math. Journ. 1958. V. 8. № 3. P. 360–588.

[72] Kusano T., Naito M. Unbounded nonoscillatory solutions of nonlinear ordinary differential equations of arbitrary order // Hiroshima Math. J. 1988. V. 18. P. 361–372.

[73] Kusano T., Tanigawa T. Positive solutions to a class of second order differential equations with singular nonlinearities // Applicable Analysis. 1998. V. 69. № 3–4. P. 315–331.

[74] Kusano T., Naito M. Singular solutions of a singular differential equation // Journal of Inequalities and Applications. 2000. V. 5. № 5. P. 487–496.

[75] Kusano T., Manojlović J. Asymptotic behavior of positive solutions of sublinear differential equations of Emden–Fowler type // Computers and Mathematics with Applications. 2011. V. 62. P. 551–565.

[76] Kusano T., Naito M., Manojlović J. Asymptotic analysis of Emden–Fowler differential equations in the framework of regular variation // Annali di Matematica. 2011. V. 190. P. 619–644.

[77] Lomtatidze A., Malaguti L. On a two-point boundary value problem for the second order ordinary differential equations with singularities // Nonlinear Analysis. 2003. V. 52. P. 1553–1567.

[78] Malaguti L., Marcelli C., Partsvania N. On transitional solutions of second order nonlinear differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 303. P. 258–273.

[79] Masci J. W., Wong J. S. W. Oscillation of solutions to second-order nonlinear differential equations // Pacif. J. Math. 1968. V. 24. № 1. P. 111–117.

[80] Naito M. On the asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second order quasilinear ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 381. P. 315–327.

[81] Naito M. Integral averages and the asymptotic behavior of solutions of second order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 164(2). P. 370–380.

[82] Naito M. and Naito Y. Solutions with prescribed numbers of zeroes for nonlinear second-order differential equations // Funkcialaj Ekvacioj. 1994. V. 37. P. 505–520.

[83] Naito M. On the number of bounded nonoscillatory solutions to higher-order nonlinear ordinary differential equations // Archivum Mathematicum. 2007. V. 43. P. 39–53.

[84] Nehari Z. On a class of nonlinear second-order differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95. № 1. P. 101–123.

[85] Partsvania N. On one problem with the condition at infinity for second order singular ordinary differential equations // Georgian Mathematical Journal. 2008. V. 15. № 4. P 753–758.

[86] Partsvania N. On extremal solutions of two-point boundary value problems for second order nonlinear singular differential equations // Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. 2011. V. 5. № 2. P 31–36.

[87] Rachůnková I. Boundary value problems with nonlinear conditions // Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis.1994. V. 2. P. 71–77.

[88] Rachůnková I., Rachůnek L., Tomeček J. Existence of oscillatory solutions of singular nonlinear differential equations // Abstract and Applied Analysis. 2011. Article ID 408525. 20 pages.

[89] Sadyrbaev F, Yermachenko I. Quasilinearization and multiple solutions of the Emden–Fowler type equation // Mathematical Modelling and Analysis. 2005. V. 10. № 1. P. 41–50.

[90] Taliaferro S. On the positive solutions of $y''+\phi(t)y^{-\lambda}=0$ // Nonlinear Analysis. 1978. V. 2. 437–446.

[91] Thomas L. H. The calculation of atomic fields // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1927. V. 23. P. 542–548.

[92] Waltman P. Some properties of solutions of $u" + a(t)f(u) = 0$ // Monatsh. Math. 1963. V. 67. P. 50–54.

[93] Wong J. S. W. On second-order nonlinear oscillation // Funkcialaj Ekvacioj 1968. V. 11. P. 207–234.

[94] Wong J. S. W. On the Generalized Emden-Fowler Equation // SIAM Review. 1975. V. 17. P. 339–360.

Публикации автора по теме диссертации

В журналах Scopus, Web of Science, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[95] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнения типа Эмдена—Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Математика. — 2015. — Т. 6, № 128. — С. 50–56.

[96] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О классификации решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 6. — С. 830–832.

[97] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1547–1548.

[98] Корчемкина Т. А. О непродолжаемых решениях уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Вестник Удмуртского университета. Серия Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. № 2. С. 231–238 (импакт-фактор 0.636)

[99] Korchemkina T. A. On the Behavior of Solutions to Second-Order Differential Equation with General Power-Law Nonlinearity // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2018. Vol. 73. P. 101–111. (импакт-фактор 0.26)

[100] Korchemkina T. A. Asymptotic Behavior of Unbounded Solutions of Second-Order Differential Equations with General Nonlinearities // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 244. № 2. P. 267–277. (импакт-фактор 0.33)

В журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, опубликованы работы [?],[96],[97],[98],[100], а также

[101] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с неограниченным потенциалом в случаях регулярной и сингулярной нелинейности // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1574–1576.

Личный вклад автора: Корчемкиной Т.А. принадлежат леммы 1 и 2, теорема 1; теоремы 2, 3 4 и следствие принадлежат Дулиной К.М.

[102] Корчемкина Т. А. О решениях с горизонтальными асимптотами уравнения типа Эмдена–Фаулера второго порядка, нелинейного относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1572–1573.

[103] Корчемкина Т. А. О возрастающих решениях уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 847–848.

[104] Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнения второго порядка с нелинейностями общего вида // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 895–896.

[105] Корчемкина Т. А. Об асимптотическом поведении ограниченных решений уравнения второго порядка со степенной нелинейностью общего вида // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1583–1584.

[106] Корчемкина Т. А. О поведении решений с неотрицательными начальными данными уравнения третьего порядка с нелинейностями общего вида

и постоянным потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1558–1558.

[107] Корчемкина Т. А. Об асимптотическом поведении стремящихся к нулю решений уравнений второго порядка со степенной нелинейностью общего вида // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 6. С. 861–862.

Иные публикации

[108] Dulina K. and Korchemkina T. On asymptotic behavior of solutions to second-order regular and singular Emden–Fowler type differential equations with negative potential // International Workshop on the Qualitative Theoty of Differential Equations "QUALITDE – 2016". Tbilisi, Geprgia. December 24–26, 2016. P. 71–76.

[109] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О колеблемости решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом // Современные проблемы математики и механики. Математика. К 80-летию механико-математического факультета. Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 9. Вып. 3. С. 88–97.

[110] Korchemkina T. On Existence of Solutions with Prescribed Domain to Second-Order Emden-Fowler type Differential Equations // Functional Differential Equations. 2016. Vol. 23. № 1–2. P. 11–17.

[111] Korchemkina T. On the behavior of solutions with positive initial data to higher-order differential equations with general power-law nonlinearity // Differential and Difference Equations with Applications. ICDDEA 2019, S. Pinelas et al. (eds.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2019. Vol. 333. P. 705–712.

[112] Корчемкина Т. А. Об асимптотическом поведении неограниченных решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями общего вида // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 2019. Vol. 32. P. 239–256.

[113] Korchemkina T. On Some Positive Solutions to Differential Equations with General Power-Law Nonlinearities // International Workshop QUALITDE – 2020. 2020. P. 127–130.

Тезисы докладов на конференциях и научных школах (см. [114]–[136]).

[114] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О существовании решений с заданной областью определения уравнений типа Эмдена-Фаулера второго порядка // Сборник трудов Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения". М.: МЭСИ, 2014. С. 19–28.

[115] Dulina K., Korchemkina T. On classification of solutions to emden-fowler type second-order differential equations // Abstracts of International Conference on Differential and Difference Equations and Applications. Jasna, Slovak Republic, 2014. P. 21–22.

[116] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Классификация решений уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка // Материалы международной математической конференции «Краевые задачи, теория функций и их применение». Украина, Славянск, 2014. С. 30–31.

[117] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Существование решения с заданной областью определения уравнения типа Эмдена-Фаулера второго порядка // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXV" в рамках XXV Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач. 2014. С. 4–5.

[118] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXVI" в рамках XXVI Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач". 2015. С. 86–86.

[119] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О колеблемости решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом // Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНОСОВ-2015. МАКС Пресс Москва, 2015. С. 1–2.

[120] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Классификация решений сингулярных нелинейных уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Сборник

трудов международной конференции и молодежной школы "Информационные технологии и нанотехнологии(ИТНТ-2015). СГАУ, Самара: Самарский научный центр РАН, 2015. С. 45–46.

[121] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Асимптотическая классификация решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXVII" в рамках XXVII Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач". 2016. С. 89–91.

[122] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений с бесконечной производной уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом // Материалы Международного молодежного научного форума Ломоносов-2016. МАКС Пресс Москва, 2016. С. 1–2.

[123] Dulina K., Korchemkina T. On global solutions with given limits to second-order emden–fowler type differential equation // Conference on Differential and Difference Equations and Applications.. Jasna, Slovak Republic, June 26–30, 2017. Abstracts. CDDEA 2017. Publishing House of Poznan University of Technology Poznan, Poland, 2017. P. 22–22.

[124] Dulina K., Korchemkina T. On oscillation of solutions to second-order emden–fowler type differential equations with positive potential // Abstracts of Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems. 2017. P. 1–2.

[125] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка, нелинейного относительно производной // Материалы Всероссийской научной конференции "Понтрягинские чтения – XXVIII" в рамках XXVIII Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач". 2017. С. 197–199.

[126] Дулина К. М., Корчемкина Т. А. Об асимптотическом поведении колеблющихся решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // XVII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения - 2017): Тезисы докладов Международной научной конференции, Минск, 16-20 мая 2017 г. Т. 1. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2017. С. 26–27.

[127] Korchemkina T. On solutions with “blow-up” derivative to nonlinear second-order differential equation // Abstracts of The conference Differential Equations and Applications. Brno, Czech Republic, 2017.

[128] Korchemkina T. On the behavior of decreasing solutions to second-order differential equation with general power-law nonlinearity // Abstracts of The 6th Ariel Conference on Functional Differential Equations and Applications. Ariel University, Israel. August 21-27, 2017, Ariel University, Israel. P. 3–3.

[129] Корчемкина Т. А. О поведении решений уравнения второго порядка в зависимости от показателей нелинейности правой части // Современные методы теории краевых задач. "Понтрягинские чтения-XXIX серия Материалы Международной конференции посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина (Москва, 2–6 мая 2018 г.), С. 134–136.

[130] Корчемкина Т. А. Об асимптотическом поведении решений уравнения второго порядка с нелинейностью общего вида и постоянным потенциалом // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения - 2018): Тезисы докладов Международной научной конференции. Гродно, 15-18 мая 2018 г. Часть 1, С. 46–47.

[131] Korchemkina T. On Asymptotic Behavior of Solutions to Second-Order Differential Equations with General Power-Law Nonlinearities // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations QUALITDE – 2018 Dedicated to the 100th Anniversary of I. Javakhishvili Tbilisi State University. December 1 – 3, 2018. Tbilisi, Georgia. Abstracts, Tbilisi, Georgia. P. 103–106.

[132] Корчемкина Т. А. О положительных возрастающих решениях уравнения третьего порядка со степенной нелинейностью общего вида // Современные методы теории краевых задач, Материалы медународной конференции Воронежская весенняя математическая школа ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - XXX. С. 173–174.

[133] Korchemkina T. On the behavior of solutions to a third-order differential equation with general power-law nonlinearity // Book of abstracts

"International Conference on Differential & Difference Equations and Applications, 2019 Lisboa, Portugal. P. 83–84.

[134] Korchemkina T. On the Behavior of Solutions with Positive Initial Data to Third Order Differential Equations with General Power-Law // International workshop on the qualitative theory of differential equations, QUALITDE-2019, December 7–9. P. 112–117.

[135] Корчемкина Т. А. О поведении решений с положительными начальными данными уравнения третьего порядка с нелинейностями общего вида // Тезисы докладов Международной конференция Дифференциальные уравнения и динамические системы DIFF-2020, ВлГУ Владимир. С. 76–77.

[136] Korchemkina T. A. On the asymptotic behavior of vanishing solutions to second order differential equations with general power-law nonlinearity // Материалы Международной научной конференции Седьмые Богдановские чтения по дифференциальным уравнениям, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Ю.С.Богданова. Минск 1-4 июня 2021 г. Ин-т математики НАН Беларуси Минск, 2021. P. 49–51.