РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА (Санкт-Петербург, Россия)

Кафедра математического анализа
Кафедра компьютерной инженерии и программотехники

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы научной КОНФЕРЕНЦИИ
«ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2021»,

5–10 апреля 2021 г.

LXXIV

Санкт-Петербург
2021

ББК 22.1.431
Н 47

Печатается по решению
Оргкомитета конференции

Редакционная коллегия: д. ф. -м. н., профессор **Будаев В. Д.**
д. ф. -м. н., профессор **Флегонтов А. В.**
к. ф. -м. н., доцент **Якубсон М.Я.**

Рецензенты: д. ф. -м. н., профессор **Ханин С. Д.**
д. ф. -м. н., профессор **Широков Н. А.**

Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2021. Материалы научной конференции, 5–10 апреля 2021 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2021. – 242 с.
ISBN 978-5-9651-1335-4

Материалы 74-ой научной конференции "Герценовские чтения", проходившей при кафедре математического анализа и кафедре информационных систем и программного обеспечения РГПУ им. А. И. Герцена 5–10 апреля 2021 г. Представленные статьи подготовлены по наиболее содержательным докладам четырёх основных секций: "Современные проблемы теории дифференциальных уравнений", "Современные проблемы теории функций и функционального анализа", "Актуальные проблемы математического образования" и "Актуальные информационные системы и технологии моделирования".

Результаты работ рекомендуется использовать при чтении спецкурсов, а также как материал для научной работы аспирантов, магистрантов, студентов старших курсов математических факультетов.

ББК 22.1.431

© Коллектив авторов, 2021

История и современность

УДК 51(092)

ПАМЯТИ АНДРЕЯ ВИТАЛЬЕВИЧА КОЛДУНОВА 1948–2021

Одинец В. П.
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина
Санкт-Петербург
e-mail: w.p.odyniec@mail.ru

Odyniec W. P. In memory of Andrey Vitalievich Koldunov 1948–2021. The article is devoted to the life and works of A. V. Koldunov. Keywords: A. V. Koldunov, partially ordered spaces

Статья посвящена жизни и научным трудам А. В. Колдунова

Колдунов А.В.

1948–2021

Андрей Витальевич Колдунов родился в Ленинграде 29 июля 1948 года. После окончания средней школы в 1965 году поступил на математическое отделение математико-механического факультета (мат.-мех) Ленинградского государственного университета (ЛГУ) им. А. А. Жданова. В 1970 году как проявивший склонность к научной работе и активный участник семинара по полуупорядочнным пространствам был рекомендован в аспирантуру мат.-меха ЛГУ.

Его научным руководителем стал профессор, заведующий кафедрой анализа Борис Захарович Вулих (1913-1978). Весной 1975 г. Андрей Витальевич успешно защитил диссертацию на тему: “О внутренних нормальных векторных решетках”[1]. К этому моменту он уже работал ассистентом кафедры математического анализа Ленинградского государственного Педагогического института им. А. И. Герцена, и там же состоялась защита его диссертации. Вся дальнейшая научная и педагогическая жизнь А. В. Колдунова прошла в этом вузе.

Вулих Б. З.

В 1976 г. А. В. Колдунов в работе [2] вводит понятие σ-пополнения и o-пополнения пространства $C(B)$, т.е. на два года раньше Ю. Флаксмайера (р. 1935) [3]. Работа [2] докладывалась на семинаре Б. З. Вулиха еще в 1975 г. В сентябре 1978 г. внезапно умирает Б. З. Вулих, и семинар продолжил работу под руководством профессора А. И. Векслера (1933–2011), с которым у Андрея Витальевича уже была совместная работа в сборнике "Современная алгебра" (1977, вып. 6, с. 66), посвящённая характеризации тех полувекторных решёток, которые являются векторными решётками.

А. И. Векслер (у доски) в 2003 г. во время конференции, посвящённой 90-летней годовщине со дня рождения Б.З Вулиха

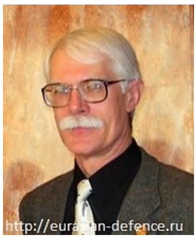
В мае 1978 г. академик Л. В. Канторович (1912–1986) представляет в Доклады Академии Наук статью А. В. Колдунова, А. И. Векслера и будущего профессора из США Ю. А. Абрамовича (1945–2003): "Об операторах, сохраняющих дизъюнктность", существенно усиливающую знаменитую теорему Хидегоро Накано (1909–1974), утверждающую, что в банаховой решётке порядок однозначно определяет топологию. (См. ДАН СССР, 1979, № 5, с. 1033–1036).

Другие обобщения, но в том же направлении, были получены к 1996 г. аспиранткой А. В. Колдунова Ольгой Альбертовной Блудовской в её диссертации "Алгебраические и порядковые свойства множества линейных регулярных операторов, сохраняющих дизъюнктность". В феврале 1980 г. академиком

Ю. А. Абрамович (сидит слева) во время конференции в Познани за год до смерти

П. С. Александровым (1896–1982) была представлена статья А. В. Колдунова и будущего профессора МГУ им. М. В. Ломоносова В. К. Захарова (р. 1947): “Секвенциальный абсолют и его характеризации” (См. ДАН СССР, 1980, т. 253, № 2, с. 280–284), существенно опиравшаяся на статью А. В. Колдунова в сборнике “Симпозиум по общей топологии и её приложениям” (См 1979, т. 4, с. 63, Тирасполь) и более раннюю работу Колдунова [2].

В мае 1980 г. академик Л. В. Канторович представляет в ДАН статью А. И. Векслера, В. К. Захарова и А. В. Колдунова: “Пространства непрерывных расширенных функций” (См. 1981, т. 256, № 6, с. 1301–1305), давшую ответы на вопросы, остававшиеся нерешёнными более двух десятилетий. Вообще, 1980 г. оказался на редкость плодотворным для А. В. Колдунова. В ноябре этого года они с В. К. Захаровым посылают статью в “Сибирский математический журнал”: “Характеризация σ-накрытия компакта” (Опубликована в 1982 г., т. 23, № 6, с. 91–99).



В. К. Захаров

В 1987 г. А. В. Колдунов публикует в “Чехословацком математическом журнале” статью совместно с доцентом ЛГПИ им. А. И. Герцена Г. Я. Ротковичем: “Архимедовы решёточно упорядоченные группы со свойством отщепляемости”, обобщающую результаты профессора Я. Якубика. Далее до 2001 года совместных статей по теории упорядоченных пространств у Колдунова не было. В значительной мере сокращение его научной активности было связано с тем, что Андрей Витальевич очень тяжело переживал события “перестройки” и последующие 90-е годы. Когда я в 1989 году возглавил кафедру анализа в ЛГПИ, то обратил внимание на его резко отрицательную реакцию на события в стране, а он ведь был членом парткома ЛГПИ. Когда мне довелось рассказать членам кафедры о поездке в 1991 г. в США, Андрей Витальевич вскользь заметил, что ему довелось быть на стажировке в Англии.

В 90-е годы А.В. Колдунов пишет статьи по темам преподаваемых в РГПУ математическим курсов, в том числе и совместно с защитившейся под его руководством О. А. Блудовской: "Особенности практических занятий по курсу «история науки»". (См. межвузовский сб. "Теоретические и методические проблемы подготовки учителя в системе непрерывного образования (математика, информатика)", 1997 , с. 121–125).

Начиная с 2001 года и до 2007 г. Андрей Витальевич публикует совместно с профессором А. И. Векслером семь статей по различным вопросам теории упорядоченных пространств, в том числе в американском журнале "Positivity" (См. 2005, т. 9, № 3, с. 413–435).

В 2013 г. Андрей Витальевич пишет совместно с заведующим кафедрой анализа РГПУ им. А. И. Герцена профессором Виктором Дмитриевичем Будаевым и старейшей ученицей Б. З. Вулиха Ольгой Сергеевной Корсаковой (1932–2014) статью, посвященную 100-летию своего Учителя Бориса Захаровича Вулиха. (См. материалы научной конференции ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ–2013, т. 66, с. 3–6)

Всего им было опубликовано более 60 научных работ. Светлый образ настоящего ученого и прекрасного педагога навсегда останется с нами.

Литература

[1] Колдунов Андрей Витальевич. О внутренних нормальных векторных решетках: Автореферат дис. на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. (01.01.01) // Ленингр. пед. ин-т им. А. И. Герцена. – Ленинград. – 1975. – 13 с.

[2] Колдунов А. В. σ-пополнение и o-пополнение $C(B)$. // Функциональный анализ. – Ульяновск. Ульяновский пед. институт. 1976. №6. – С. 76-83.

[3] Flachsmeyer J. Dedeckind-Mc Neille extensions of Boolean algebras and of vector lattices of continuous functions and their structure spaces. // Gen. Top. Appl. 1978. Vol. 8 № 1. – P. 63-66.

УДК 51(092)

ВОСПОМИНАНИЯ О МОЁМ ДРУГЕ, АНДРЕЕ ВИТАЛЬЕВИЧЕ КОЛДУНОВЕ

Захаров В. К.
Московский государственный университет
Москва

Zaharov V.K. Memories of my friend Andrey Vitalievich Koldunov On the life and works of A. V. Koldunov

Описаны жизнь и творчество А.В. Колдунова

Андрей Витальевич принадлежит к петербургской математической школе, созданной академиком Л. В. Канторовичем и профессорами Б. З. Вулихом и А. Г. Пинскером. Эта школа развивала теорию линейных упорядоченных пространств, основы которой были заложены венгерским математиком Ф. Риссом. В 1950 году была издана фундаментальная книга: Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. – М.: Гостехиздат. 1950.

Учеником Б. З. Вулиха был А. И. Векслер, который объединил вокруг себя своих учеников, к которым относятся В. К. Захаров, А. В. Колдунов и др. Под влиянием идей А. И. Векслера Андрей Витальевич после окончания аспирантуры стал заниматься изучением и построением различных расширений $u : C_b(T) \mapsto B$ линейного решёточного пространства $C_b(T)$ всех непрерывных ограниченных функций на вполне регулярном топологическом пространстве T.

Согласно результатам Г. Огасавары и Б.З. Вулиха линейное решёточное пространство B погружается в множество $C_\infty(H)$ всех непрерывных функций $f : H \mapsto \bar{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, \infty]$ на некотором вполне регулярном топологическом пространстве H, принимающих значения $-\infty$ и ∞ только на нигде не плотных замкнутых множествах. Поэтому расширение $u : C_b(T) \rightarrowtail B$ порождает единственное сюръективное неприводимое отображение $\tau : T \twoheadleftarrow H$ топологических пространств T и H.

Самым известным таким расширением является K-пополнение $u : C_b(T) \mapsto D(C_b(T))$ Дедекинда–Макнилла, которое порождает абсолют $\tau : T \twoheadleftarrow aT$ Глисона–Пономарёва. Другим известным таким расширением является канторово пополнение $u : C_b(T) \mapsto C(C_b(T))$ Кантора–Папангелоу. Ему соответствует секвенциальный абсолют $\tau : T \twoheadleftarrow a_sT$ Захарова–Колдунова [Захаров В. К., Колдунов А. В. Секвенциальный абсолют и его характеризации // ДАН СССР. 1980. Т. 253, № 2. – С. 280-284].

Андрей Витальевич обладал чрезвычайными доказательными и обобщательными способностями. Поэтому он создал общую теорию (M, I)–абсолютов и теорию (M, I)–расширений линейного решёточного пространства $C_b(T)$, кратко изложенную в статье [Колдунов А. В. Расширения канторова типа и их применение. // ДАН СССР. 1985. Т. 285, № 5. – С. 1050–1053].

К сожалению, оторванность петербургского математического мира от центральных журналов и диссертационных советов в трудные для российской науки перестроечные времена не позволили Андрею Витальевичу проявить свои выдающиеся таланты в полной мере.

Андрей Витальевич был моим старым другом. Он был прекрасным знатоком мировой культуры и обладал широчайшей философской и искусствоведческой эрудицией. Поэтому с ним всегда было потрясающе интересно.

УДК 51(092)

О ТРЁХ ЛЕНИНГРАДСКИХ МАТЕМАТИКАХ, ПОГИБШИХ В 1941-45 ГГ.

Одинец В. П.
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина
Санкт-Петербург
e-mail: w.p.odyniec@mail.ru

Odyniec W. P. On three mathematicians from Leningrad deceased in 1941-1945. On the life and work of three Leningrad mathematicians: Yu. F. Sirvint (1913–1945), E. M. Livenson (1907–1941), B.M. Kojalovitch (1867–1941).

Описаны жизнь и творчество трёх ленинградских математиков: Ю. Ф. Сирвинта (1913–1945), Е. М. Ливенсона (1907–1941) и Б. М. Кояловича (1867–1941).

1. Юрий Фёдорович Сирвинт родился 18(31) марта 1913 г. в Харькове. После гражданской войны родители Юры перебрались в Ленинград. Отец умер, и мать вышла замуж за архитектора Оля[1]. Вот как описывает Юру его школьный друг В. А. Лившиц ([1],209): "Юра – высокий, гибкий, с тонким смугловатым лицом. Он приёмный сын известного архитектора Оля. Много читал, много знал. На летние каникулы несколько раз ездил с матерью во Францию. Тогда это было ещё возможно. Хорошо знал французский. Нас подружила любовь к стихам... А потом выяснилось, что Юра – талантливый математик".

В 1931 г. он поступает в Ленинградский государственный университет (ЛГУ) на физико-математический факультет. В 1933 г. в связи с образованием на базе физико-математического факультета двух новых факультетов: физического и математико-механического Юрий продолжает учебу на математико-механическом факультете. В 1935 г. Юрий выбирает тему дипломной работы "Асимптотический ряд Дирихле", предложенную профессором Григорием Михайловичем Фихтенгольцем (1888–1959). Год спустя, в Докладах АН СССР выходит статья Ю. Ф. Сирвинта "Об асимптотическом ряде Дирихле"[2] [2], пред-

[1] Оль Андрей Андреевич (1883–1958), окончил реальное училище Карла Мая (1901) и Институт гражданских инженеров императора Николая I (1910); стажировался (1905–1906) у финского архитектора Элиеля Сааринена (1873–1950); автор и соавтор многих построек в Ленинграде, Москве и других городах.

[2] Функциональный ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/s^n$, где a_n – коэффициенты, а $s = \sigma+it$ – комплексное переменное, называют рядом Дирихле. Петер Дирихле (Peter Dirichlet: 1805–1859) начал их изучение в 1837 г.

ставленная 29 марта 1936 г. академиком С. Н. Бернштейном. В этой работе Ю. Ф. Сирвинт не только обобщает понятие класса (k) функций, рассмотренных в 1918 г. в работе[3] Ф. Неванлинны[4], но и даёт некоторое достаточное условие равномерного асимптотического разложения функции.

Поступив в 1936 г. по окончании учебы в ЛГУ, в аспирантуру к Г. М. Фихтенгольцу[5], Ю. Ф. Сирвинт в 1937 г. публикует в "Математическом сборнике" статью на французском языке [3], посвященную исправлению ошибки, допущенной Владимиром Бернштейном[6] при доказательстве достаточности условий теоремы (В. Бернштейна), посвящённой выбору коэффициентов ряда Дирихле.

Следующая статья Ю. Ф. Сирвинта в Докладах АН СССР, представленная в декабре 1937 г. С. Н. Бернштейном [4], посвящена построению класса линейных трансформаций пространства L, для которых среди операций имеются не вполне непрерывные, но квадрат операций из этого класса будет вполне непрерывен, и, следовательно, все следующие степени вполне непрерывны.

Статья Ю. Ф. Сирвинта в Докладах АН "К геометрии линейных пространств" [5] была переходом к изучению функционалов линейных пространств. В этой статье Ю. Сирвинт вводит аналог единичной сферы нормированных пространств для линейных пространств. Представлена эта статья академиком С. Н. Бернштейном была 25 ноября 1939 г., а за три дня до этого (20.11.1939) Юрий Фёдорович Сирвинт защищает на математико-механическом факультете ЛГУ кандидатскую диссертацию "Выпуклые множества. Линейные функционалы" [6]. Две части диссертации будут опубликованы в Известиях АН СССР. Серия матем. (т. 6 (1942), с. 143–170 и 189–226).

В начале 1940 г. Юрий Фёдорович Сирвинт был принят на работу в Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР на должность научного сотрудника. В том же году Ю.Ф. Сирвинт анонсирует в ДАН СССР (28 (1940), 199–201) свои исследования по слабой компактности в банаховых пространствах. Изложение с доказательствами появится в 1949 г. уже после гибели Ю. Ф. Сирвинта в журнале "Studia Mathematica" (v. 11 (1949), 71–94) на английском языке.

В 1941 г. Юрий Фёдорович возвращается к изучению рядов Дирихле и посылает две заметки с одинаковым названием: "Некоторые примеры рядов Дирихле с густой последовательностью показателей" на французском языке в журнал "Математический сборник". Функцию, представленную в виде ряда Дирихле:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \text{ где } s = \sigma + it$$

[3] F. Nevanlinna. Zur Theorie der asimptotischen Potenzreihen. Akad. Abhandl. Helsingfors, (13) (1918), 1–81.

[4] Ф. Неванлинна (Frithiof Nevalinna: 1894-1977) – финский математик, профессор, старший брат известного математика Рольфа Неванлинны (1895–1980).

[5] При Научно-исследовательском институте математики и механики ЛГУ.

[6] Владимир Бернштейн (1900–1936), родившийся в Петербурге, уехал в 1919 г. через Финляндию и Англию во Францию, где учился в Сорбонне. Преподавал в университетах Гента и Милана; основные работы по целым функциям и рядам Дирихле.

изучал еще Владимир Бернштейн (1933)[7], а также С. Риос (1937)[8]. Обе заметки вышли в 1942 г. в томе 10, №1-2, с. 59–66 и томе 12, №3, с. 370–376.

Вернёмся теперь вновь к воспоминаниям В. А. Лифшица: "С начала войны [Юра] ушел в ополчение. Был ранен. Попал в плен. В плену дожил в Германии в концлагере почти до конца войны, но имел неосторожность вести дневник и был кем-то предан. Его расстреляли…"

2. Евгений Максимиллианович Ливенсон родился 19 июня 1907 г. в Санкт-Петербурге. Окончив в 1923 г. единую трудовую школу, поступил в Петроградский университет на физико-математический факультет. После первого курса был вынужден прервать учёбу. Евгений продолжил учёбу с осени 1927 г. Попал он на один курс с Леонидом Витальевичем Канторовичем (1912-1986). С осени же 1927 г. профессор Г. М. Фихтенгольц начал вести со студентами второго курса научный кружок, темой которого стали условия интегрируемости по Риману. Активными участниками кружка стали Л. Канторович и Е. Ливенсон.

Как пишет Л. В. Канторович ([7], с. 25): "[мои] результаты оказались известными, так же как и попутно полученный результат – *характеристика функций, которые могут быть колебаниями функции одной переменной – $Oscf(x)$. Это любая полунепрерывная сверху функция.* Оказалось, что эту теорему пару лет назад доказал Е. М. Ливенсон, соавтор ряда моих дальнейших работ. Совсем короткое её доказательство и наш совместный доклад на эту тему должны были войти в бюллетень студенческого научного кружка, который, однако, так и не был издан."

С начала 1928 г. Григорий Михайлович Фихтенгольц открыл семинар по изучению A-множеств[9] и смежным вопросам. Кроме уже состоявшихся математиков, таких как Д. К. Фаддеев, С. Л. Соболев, И. П. Натансон, семинар посещали Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон. За период работы семинара "…были получены некоторые теоремы о том, как меняются множества индексов при объединении соответствующих множеств, при составлении сложной операции и т.д. Эта работа была проделана ещё в первый год занятий семинара Е. М. Ливенсоном и мной" ([7], с. 29).

"В следующем учебном году [1929-1930] семинар уже не продолжался, но мы с Е. М. Ливенсоном осенью провели интенсивную работу. В частности, существенное значение имела простая идея схемы: класс множеств, получаемых в результате δs-операции над данными множествами (если базу δs-операции изобразить множеством вещественных чисел), имеет простую двумерную геометрическую картину, из которой можно легко извлечь различные следствия" ([7], с. 29). Результаты, представленные Ж. Адамаром (1865–1963) через Н. Н. Лузина (1883-1950), были анонсированы в Comptes Rendus в 1930 г. [8-9]. Подробные результаты были опубликованы в "Fundamenta Mathematicae" в 1932 и 1933 гг. [10-11].

---

[7]V. Bernstein, Leçons sur les progress récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933, p. 141.

[8]S. Rios, Hiperconvergencia de las series de Dirichlet. Bol. Del Sem. Mat., vol. IV, №22 (1937) (Inst. Mat. Hispano-Americano)

[9]Подмножество польского пространства X (т.е сепарабельного вполне метризуемого топологического пространства) называется аналитическим множеством (A-множеством), если является непрерывным образом польского пространства. A-множества были открыты в 1917 г. М. Я. Суслиным (1894–1919).

В этой связи отметим, что 1 февраля 1930 г. Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон делают доклады на заседании Московского математического общества ([7], с. 23 в сноске 1) и после заседания они были приглашены в гости А. Н. Колмогоровым и П. С. Александровым. В письме от 15 апреля 1930 г. Колмогоров пишет Л. В. Канторовичу: "Желаю всего лучшего Вам и Ливенсону" ([12], с. 435). В другом письме А. Н. Колмогорова от 5 января 1931 г.: "Привет Г. М. [Фихтенгольцу] и Ливенсону." ([12], с. 438).

Совместная работа Л. В. Канторовича и Е. М. Ливенсона была прервана высылкой в 1931 г. отца Ливенсона в Уфу, вынудившая переехать в Уфу на некоторое время и самого Е. М. Ливенсона ([7], с. 30, сноска 7). Отмечу, что в 1930 году Е. М. Ливенсон принимает участие в работе Первого Всесоюзного съезда математиков, зарегистрировавшись под номером 251, а 25 июня делает доклад "Об аналитических операциях над множествами"[10] ([13], с. 363–372).

В начале 1934 г. Ливенсон возвращается в Ленинград и делает на Втором Всесоюзном математическом съезде ([14], с. 440–441) доклад о независимости аксиом III и II группы системы геометрических аксиом Гильберта. Доклад Е. М. Ливенсона существенно опирался на систему аксиом Гильберта в формулировке Хуго Штейнгауза (1887–1972) и результатов его ученицы Салы Вайнлёз[11] (Sala Weinlös). В докладе Е. М. Ливенсона дано полное описание того, какие аксиомы из III группы независимы; кроме того, доказано, что аксиома II из второй группы оказывается зависящей от остальных аксиом I и II групп.

С осени 1934 г. Е. М. Ливенсон преподает в ЛГУ. Встречается и с Л. В. Канторовичем, но их интересов разошлись. Е. М. Ливенсона всё более интересуют проблемы оснований анализа и геометрии. В 1936 г. он заканчивает работу над диссертацией на тему "О независимости аксиом III группы системы аксиом геометрии Гильберта", но её защита состоится только 28 июня 1939 года (научный руководитель А. А. Марков) [6]. Практически сразу Е. М. Ливенсона утверждают в звании доцента, но он избирает другой путь – поступает в докторантуру ЛОМИ (к А. А. Маркову).

В промежутке, в 1936 г., Е. М. Ливенсон всё-таки пишет совместную работу с Л. В. Канторовичем "Несколько теорем, касающихся теории проективных систем", опубликованную в Comptes Rendus и представленную туда Эмилем Борелем[12] (1871–1956) [15]. В этот же год выходит в Ann. of Math. (Vol. 38, № 4 (1937), p. 920–922) статья Е. М. Ливенсона "Пример незамкнутой связной подгруппы двумерного векторного пространства", опровергающей одно утверждение Ханса Фройденталя[13] (1905-1990), опубликованное в том же журнале годом ранее (Vol. 37, (1936), p. 157–177).

В 1940 г. в "Математическом сборнике" вышла последняя статья Е. М. Ли-

[10] Опубликован в Comptes Rendus Acad. Sci. 190 (1930), p.352, 1114, 1267.

[11] С. Вайнлёз в 1928 г. защитила диссертацию в Бреслау (ныне Вроцлав) под руководством Х. Штейнгауза.

[12] Э. Борель (Emile Borel) – французский математик, выпускник Нормальной школы (1893), там же профессор (1897). Один из создателей теории меры и её приложений в теории вероятностей.

[13] Х. Фройденталь (Hans Freudenthal) – немецко-голландский математик, выпускник Берлинского университета, до 1946 г. преподавал в Амстердамском университете, с 1946 года профессор Утрехтского университета, член Королевской Нидерландской академии. Автор работ по алгебраической топологии, математической логике и истории науки.

венсона, в которой дано более короткое доказательство теоремы Стоуна[14] о том, что для всякого булевского кольца существует изоморфное ему кольцо множеств [16].

С началом Великой Отечественной войны ЛОМИ не эвакуировали, и Е. М. Ливенсон остался в Ленинграде. Приведем фрагмент из воспоминаний Д. К. Фаддева[15]: "Ливенсон был в последние годы перед войной, как мне помнится, в докторантуре у А. А. Маркова в ЛОМИ. Жил он недалеко от Павловска, там у него или у его семьи был собственный домик. Когда началась война, он никуда не эвакуировался и погиб во время оккупации" ([17], с. 434).

3. Борис Коялович родился в Петербурге 14 (2) мая 1867 г. в семье преподавателя Санкт-Петербургской духовной Академии, ставшего впоследствии известным историком, Михаила Осиповича Кояловича (1828-1891) и Надежды Платоновны Коялович (Менчиц). В 1885 г. Борис окончил шестую Санкт-Петербургскую гимназию с золотой медалью и поступил на физико-математический факультет Санкт-Петербургского университета. В 1889 г. Борис окончил учебу в университете, два года спустя сдал магистерский экзамен. С 1890 г. он состоит членом Санкт-Петербургского математического общества. Под влиянием профессора Александра Николаевича Коркина (1837-1908) Борис выбирает темой исследования уравнение

$$ydy - ydx = R(x)\,dx. \tag{3.1}$$

В 1894 г. Борис Михайлович защищает магистерскую диссертацию "Исследования о дифференциальном уравнении $ydy - ydx = R(x)\,dx$", а восемь лет спустя – докторскую диссертацию "Об одном уравнении с частными производными четвёртого порядка".

С 1893 г. до 1918 г. Б. М. Коялович преподавал в Технологическом институте, с 1903 г. он становится там профессором. Десять лет (с 1896 по 1906 гг.) он читает в Санкт-Петербургском университете курс теории дифференциальных уравнений в частных производных. До 1918 г., начиная с 1904 г., Б.М.Коялович работал одновременно в Женском педагогическом институте. Уже при советской власти он работал с 1918 по 1920 гг. в Первом педагогическом Институте Петрограда. С 1925 г. по 1938 г. Б. М. Коялович работал в Главной палате мер и весов. Там, в частности, им были составлены таблицы плотности водно-спиртовых растворов. В 1928 г. ему было присвоено звание Заслуженного работника науки [18].

До 1917 г. Б. М. Коялович издал в Петербурге семь учебных курсов: по теории вероятностей (1893), по аналитической геометрии (1895), по высшей алгебре (1901) , по дифференциальному исчислению (1903), по теории дифференциальных уравнений (1908), по интегральному исчислению (1909), по аналитической механике (1909). В типографии Академии Наук (Санкт-Петербург) им были изданы две монографии: "Исследования о дифференциальном уравнении

---

[14]Маршалл Стоун (Marshall Harvey Stone: 1903-1989), американский математик, выпускник Гарвардского университета, член Национальной академии наук США (1938). Знаменит своими трудами в области математического и функционального анализа, булевых алгебр, математической физики и квантовой механики.

[15]Фаддеев Д. К. Со студенческих лет (Воспоминания о Канторовиче Л. В.) http://Kantorovich.vixpo.nsu.ru

$ydy - ydx = R(x)dx$" (1894) и "Об одном уравнении с частными производными четвёртого порядка" (1902).

После 1917 г. Б. М. Кояловичем была издана в Петрограде в 1922 г. в издательстве "ACADEMIA" монография "Аналитическая геометрия".

Б. М. Коялович (1917)

В советский период научные интересы Б. М. Кояловича делятся на две части: до 1927 года он продолжает изучение дифференциальных уравнений, точнее, неопределённых обыкновенных дифференциальных уравнений. С 1927 его интересы сместились в сторону изучения бесконечных систем линейных уравнений.

В 1926 г. Б. М. Коялович делает на заседании Ленинградского Физико-математического общества первый доклад "О неопределённых дифференциальных уравнениях" [19]. Б.М. Коялович называет неопределёнными те обыкновенные дифференциальные уравнения, в которых число неизвестных больше числа уравнений. Начало изучения этих уравнений было положено Г. Монжем[16]. Обобщил эти результаты Монжа Эдуард Гурса[17] (Édouard Goursat: 1858–1936). В 1913 г. появился мемуар Давида Гильберта (Math. Ann. T. 73, p. 95) и непосредственно за ним мемуар В. Гросса[18], излагающего более подробно некоторые части этой теории. В своем докладе Б. М. Коялович останавливается на изучении простейшего неопределённого уравнения в форме

$$dz/dx = \Phi(x, y, z, dy/dx). \tag{3.2}$$

[16] Г. Монж (Gaspard Monge: 1746-1818) – французский математик, творец начертательной геометрии, академик Парижской Академии Наук (1780), морской министр. В 1815 г. после падения Наполеона был лишен всех званий, наград и пенсии.

[17] Э. Гурса (Édouard Goursat: 1858-1936), французский математик, выпускник École Normale Supérieure, где позже читает ставший знаменитым курс математического анализа, изданный – первый том в 1904 г., второй – в 1916 г., построенный на широком применении комплексного анализа, в частности, аналитических функций. В СССР этот курс был переведён и издан в 1936 г.

[18] В. Гросс (Wilhelm Gross: 1886- 1918) – австрийский математик, выпускник Венского университета (1910), защитил диссертацию (1910). Стажировка в Гёттингене (1910–1912); в 1913 г. получил звание профессора Венского университета. Основные труды по теории функций, дифференциальных уравнений, теории меры, геометрии и теории инвариантов. Умер от «испанки».

Далее Б. М. Коялович представляет интегральный эквивалент уравнения (3.2) в виде системы

$$\begin{cases} F(x,y,z,u) = \rho(u) \\ F'_u(x,y,z,u) = \rho'(u) \\ F''_{uu}(x,y,z,u) = \rho''(u) \end{cases}, \tag{3.3}$$

где ρ – произвольная функция, а u – параметр, подлежащий исключению из системы уравнений (3.32), если желаем получить прямо зависимости между x,y и z, и работает уже с системой (3.3).

В 1927 г. весенний семестр Б. М. Коялович проводит в Пермском университете и там публикует второй доклад о неопределённых дифференциальных уравнениях [20]. В нём он останавливается на исключительных решениях уравнения (3.2), т.е. тех решениях (3.2), которые соответствуют постоянным значениям для u, т.е. удовлетворяют таким уравнениям:

$$\begin{cases} F(x,y,z,\alpha) = \beta, \\ F'_u(x,y,z,\alpha) = \gamma, \text{ где } \alpha, \beta, \gamma \text{ – постоянные.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Уже летом 1927 г. на Всероссийском съезде математиков в Москве доклад Б. М. Кояловича "О некоторых системах линейных уравнений с бесчисленным множеством неизвестных" вызвал оживлённую дискуссию, в которой приняли участие, в частности, чл.-корр. АН СССР Д. А. Граве[19] и профессор В. И. Смирнов[20]. В докладе отчётливо прозвучала идея последовательных приближений к решению при наложении на эти системы некоторых ограничений.

На I Всесоюзном съезде математиков в Харькове (24-29 июня 1930 г.) Б. М. Коялович делает два доклада: "Об одной новой формуле интегрирования" и "Закон асимптотических выражений для бесконечных систем линейных уравнений" ([13], с. 373).

В 1930 г. в "Трудах Физико-математического института АН" появилась большая статья Б. М. Кояловича "Исследование о бесконечных системах линейных уравнений". Коротко её содержание описано В.И. Смирновым в [21], с. 606-607: "Рассмотрим линейную систему:

$$x_i = b_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_{i,k} x_i, \tag{3.5}$$

с двумя условиями:

---

[19]Дмитрий Александрович Граве (1863-1939), родился в Кириллове, рядом с Кирилло-Белозерским монастырём, окончил Санкт-Петербургский университет (1885), защитил диссертацию на степень магистра чистой математики в 1889 г., в 1896 г. – докторскую на тему "Об основных задачах математической теории построения географических карт". Из-за проблем со здоровьем (туберкулёз) переехал на Украину, где преподавал в университетах Харькова и Киева, академик Украинской АН, чл.-корр. АН СССР, создатель украинской алгебраической школы.

[20]Владимир Иванович Смирнов (1887-1974), родился в Петербурге , окончил Санкт-Петербургский университет в 1910 г., получил звание профессора в 1915 г., чл.-корр. АН СССР (1932), академик АН СССР (1943), автор популярного "Курса высшей математики" (т.1–5, 1924–1947); основные научные труды по теории функций комплексного переменного.

$$\rho_i = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_{i,k}| > 0, \tag{3.6}$$

$$|b_i| \leqslant K\rho_i, \tag{3.7}$$

где K – постоянная.[21] Систему (3.5) при при условии (3.6) называют *регулярной*.

Исследование таких систем при несколько иной записи была проведена Б. М. Кояловичем, причем он рассматривал ограниченные решения, т.е. такие, что $|x_i| \leqslant C$, где C – постоянная. Им был дан, между прочим, метод оценки в некоторых случаях неизвестных x_i при больших значениях i. Пользуясь этим методом, он выделил такой класс регулярных систем с единственным ограниченным решением, для которых x_i имеет предел при $i \to \infty$" [22].

Год спустя в Трудах того же института (Т. II, вып. 2 (1931)) появилась статья Р. О. Кузьмина, посвящённая якобы ошибке в главе 4 из работы Б. М. Кояловича. 30 января 1932 г. редакцией Трудов был получен ответ профессору Р. О. Кузьмину в статье Б. М. Кояловича "К теории бесконечных систем линейных уравнений", опубликованной в октябре того же 1932 г. На 16 страницах Б. М. Коялович опровергает утверждения Р. О. Кузьмина, проистекающие из неучёта последним одного условия, налагаемого на систему уравнений [23].

На Втором[22] Всесоюзном математическом съезде, проходившем в Ленинграде (24–30 июня 1934 г.) Б. М. Коялович делает два доклада: "Об основных понятиях теории бесконечных систем линейных уравнений" и "К теории лимитантов"[23]. Подробное изложение первого доклада было дано Б. М. Кояловичем в 1937 г. в "Учёных записках Педагогического института" (им. А. И. Герцена) (с.83-100), где он преподавал в 1932–1938 гг.

В 1940 г. в "Сборнике памяти академика Граве" (с. 79–87) вышла последняя статья Бориса Михайловича Кояловича, вернувшегося к теме своей магистерской диссертации "К вопросу об интегрировании дифференциального уравнения $ydy - ydx = R(x)\,dx$".

Летом 1938 г. Б. М. Коялович был отправлен на пенсию и уволен как из Педагогического института, так и из Главной палаты мер и весов. Увольнению предшествовала история, связанная с выходом в 1936 г. книги Л. В. Канторовича и В. И. Крылова "Методы приближённого решения уравнений в частных производных", М.-Л.: с. 1–528. В 1937 г. Б. М. Коялович обратился с заявлением в авторско-правовое бюро Ленинградского дома учёных с требованием "привлечь Л. В. Канторовича и В. И. Крылова к товарищескому суду по обвинению в плагиате..." В апреле 1938 г. дело разбиралось на Президиуме группы математиков Академии Наук, который установил, что "Б. М. Коялович вместо

[21] Условие (3.6) используется в теореме единственности главного решения системы (3.4) Р. О. Кузьмина ([21], с. 607).

[22] На Первом Всесоюзном съезде математиков в Харькове (1930) Б. М. Коялович присутствовал, но не выступал.

[23] В статье ([14], с. 187–188) введено "понятие об особых выражениях, которые позволяют находить границы для всех искомых по значениям одного или нескольких из этих искомых. По этому замечательному свойству [Б. М. Коялович] и назвал их лимитантами".

того, чтобы продумать возражения своих оппонентов, просто от них отмахивался, пытаясь дискредитировать своих оппонентов, приписывая им ошибки" ([7], с. 38, сноска 19). К счастью, эта история, кроме как для Б. М. Кояловича, никаких последствий не имела, хотя это было временем разгара "ежовщины".

Свой досуг Борис Михайлович проводил за шахматами. В 1921 г. он был избран председателем Петроградского шахматного собрания. В 1937 г. был организатором матча между учёными Москвы и Ленинграда.

В 1894 г. Борис Михайлович женился на Вере Семеновне Михельсон. В семье было четыре дочери.

Борис Михайлович Коялович скончался от голода 29 декабря 1941 г. в осаждённом Ленинграде. Как написано в Книге Памяти ([24], с. 595), место захоронения Б. М. Кояловича неизвестно.

Литература

[1] Лифшиц В. А. Я был... // Звезда. 2003. №11. – С. 205–215.

[2] Сирвинт Ю. Ф. Об асимптотическом ряде Дирихле // ДАН СССР. 1936. Т. 2(11), № 4. – С. 129–132.

[3] G. Sirvint, Sur un théorèm de Vladimir Bernstein // Матем. сб. 1937. Т. 6 (48). – С. 175–184.

[4] Сирвинт Ю. Ф. Об интегральных преобразованиях пространства L // ДАН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. – С. 255-257.

[5] Сирвинт Ю. Ф. Пространство линейных функционалов // ДАН СССР. 1940. Т. 26, № 2. – С. 123–126.

[6] Диссертации, защищенные в Ленинградском ордена Ленина государственном университете им. А.А. Жданова 1934–1954. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1955.

[7] Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый. Том I. – Новосибирск: Издательство СО РАН, Филиал "ГЕО", 2002. – 543 с.

[8] Kantorovitch L.,Livenson E. Sur les $\delta s-$functions de M. Hausdorf // Compte Rendus Academ. Sci. 1930. V. 190. – P. 352-354.

[9] Kantorovitch L., Livenson E. Sur les ensembles projectifs de M. Lusin // Compte Rendus Academ. Sci. 1930. V. 190. – P. 1113-1115.

[10] Kantorovitch L., Livenson E. Memoir on the analytical operations and projective sets, I // Fundamenta math. 1932. V. 18. – P. 214-279.

[11] Kantorovitch L., Livenson E. Memoir on the analytical operations and projective sets, II // Fundamenta math. 1933. V. 20. – P. 54-97.

[12] Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый. Том II. – Новосибирск: Издательство СО РАН, Филиал "ГЕО", 2002. – 567 с.

[13] Труды Первого Всесоюзного съезда математиков (Харьков, 1930). Т.1. – М.-Л.: ОНТИ, Главн. ред. общетехн. литер.и номографии, 1936. – 376 с.

[14] Труды Второго Всесоюзного математического съезда (Ленинград 24-30 июня 1934). т.2. Секционные доклады. – Л.: Изд-во Академии Наук СССР, 1936. – 469 с.

[15] Kantorovitch L., Livenson E. Sur quelques théorèmes concernant la théorie des ensembles projectifs // Compte Rendus Acad. Sci. 1937. V. 204. – P. 466-468.

[16] Livenson E. On the realization of Boolean algebra by algebra of sets // Матем. сб. 1940. Т. 7 (49). – С. 309-312.

[17] Математика в СССР за сорок лет 1917-1957. Т.2 Биобиблиография. – М.: Физматлит, 1959. – 819 с.

[18] Профессора Российского государственного педагогического университета имени А.И. Герцена в XX веке. Биографический справочник. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена, 2000. – 591 с.

[19] Коялович Б. М. О неопределённых дифференциальных уравнениях // Л.: Журнал Физ.-мат. общества. 1926. Т. 1. – С. 66-76.

[20] Коялович Б. М. О неопределённых дифференциальных уравнениях // Пермь: Журнал Физ.-мат. общества. 1927. Т. 4. – С. 103-112.

[21] Математика в СССР за тридцать лет 1917-1947. – М.-Л.: ОГИЗ ГТТЛ, 1948. – 1042 с.

[22] Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений // Труды Физико-математического института АН. 1930. – С. 41-167.

[23] Коялович Б. М. К теории бесконечных систем линейных уравнений // Труды Физико-математического института АН. 1932. Т. 2:4. – С. 1-16.

[24] Блокада. Книга памяти 1941-1945. Т.15. К-К, (Константинов - Крестьянинова). – СПб.: "Селеста", 2004. – 717 с.

УДК 51(092)

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИКАХ, ПОЛЯКАХ ПО ПРОИСХОЖДЕНИЮ, РАБОТАВШИХ В РОССИИ В XIX ВЕКЕ,

Одинец В. П.
Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина
Санкт-Петербург
e-mail: w.p.odyniec@mail.ru

Odyniec W. P. On several Polish mathematicians working in Russia in XIX-th century. On the life and work of several Polish mathematicians working in Russia in XIX-th century

Описаны жизнь и творчество нескольких математиков польского происхождения, работавших в России в XIX веке

В статье речь пойдёт о пяти математиках и одном астрономе, родившихся в XIX веке, когда большая часть Польши в результате её III Раздела 1795 г. вошла в состав Российской империи. О наиболее известных математиках, первых творцах польской математической школы, написано довольно много (см., например, [1])[1] . В данной статье остановимся на математиках (и астрономе)

[1]Из известных математиков в [1] отсутствует разве что И. В. Слешинский (1854–1931)

условно «второго» плана, работавших в России, но сохранивших связь с Польшей.

1. Игнатий Янушевский (Ignacij Januszewski) родился в 1804 г. в Вильне в семье знатного виленского шляхтича, владельца собственного дома Семёна Янушевского. В 1817 г. Игнатий поступил в Виленский университет на философский факультет. К 1824 г. он уже был кандидатом философских наук. В том же году поехал в Петербург и поступил в Институт путей сообщения. Учился очень хорошо. Не случайно, по окончании в 1928 г. учёбы, был там оставлен для приготовления к должности профессора.

И. Янушевский

В 1833 году женился на Казимире Забельской из дворянского рода Забелло. (В 1848 году у них родилась четвёртая дочка Елена (ум. в 1896 г.), мать Феликса Дзержинского[2]).

В 1837/38 уч. г. вёл курс теоретической механики в Институте корпуса горных инженеров (от 1866г. – Горный Институт).

Умер профессор И. Янушевский в Петербурге в 1875 г.

2. Эраст Янишевский (Erast Janiszewski) родился в 1829 г. в Москве в семье чиновника Петра Янишевского, родившегося в Польше. После перевода П. Янишевского в Казань сын Эраст учился во 2-й казанской гимназии. После её окончания поступил в Казанский университет на физико-математический факультет. Одним из его учителей был профессор Н. И. Лобачевский (1792–1856). В 1850 году окончил Казанский университет с золотой медалью и со степенью кандидата физико-математических наук. В 1854 г. защитил магистерскую

(Jan Śleszyński), родившийся в с. Лысянка Киевской губернии, учившийся в Ришельевской гимназии (Одесса) и окончивший в 1875 г. Новороссийский университет. В 1880 г. был (после сдачи магистерского экзамена) командирован в Берлин для учебы у К. Вейерштрасса. По возвращении в 1883 г. преподавал в учебных заведениях Одессы. С 1893 г. профессор университета, с 1908 г. – заслуженный профессор. В 1911 г. выехал в Польшу, где преподавал в Ягеллонском университете (Краков) математическую логику, теорию вероятностей и теорию чисел до 1924 г.

[2]В ноябре 1989 г. мне довелось видеть, как сносили памятник Дзержинскому (1877–1926) в Варшаве. Позже на том же месте был установлен памятник поэту Юлиушу Словацкому (1809–1849). Парадокс в том, что это был предок Дзержинского – у Словацкого матерью была Саломея Янушевская.

диссертацию и начал читать в университете лекции по математике в качестве адъюнкта.

В 1859 г. университетская типография издала «Сферическую тригонометрию» с подзаголовком «Из лекций адъюнкта Янишевского». Год спустя вышли его же «Алгебраический анализ» и «Теория численных уравнений».

В 1861 г. Эраст Петрович утвержден экстраординарным профессором по кафедре математики, а после защиты докторской диссертации(1865) – ординарным профессором.

Одновременно в 1863-67 гг. заведовал ботаническим садом университета. В этот период он тесно сотрудничает с группой поляков, сосланных в Казань [3].

В 1871 г. Э. П. Янишевский был избран городским головой Казани, сохранив должность университетского профессора. При нем в Казани было устроено газовое освещение, водопровод, конно-железная дорога, по которой позже пошли трамваи, замощен ряд улиц и площадей. За выслугой лет в 1881 г. был уволен в звании заслуженного профессора университета, но еще 23 года работал управляющим вначале Пермской, а позже Казанской контрольных палат. В этот период он издал ряд художественных произведений. В частности, в 1893 г. в типографии В. М. Ключникова (Казань) им издана книга «Из воспоминаний старого казанского студента».

Умер Э. П. Янишевский в 1906 г. ([4], с. 9–10).

Из трёх сыновей два: Михаил и Дмитрий остались в России. Михаил (1871–1949), известный геолог и палеонтолог, профессор ЛГУ, Дмитрий (1875–1944), хранитель музея при ботаническом кабинете Казанского университета. Третий Алексей (1873–1936), профессор-невропатолог и психиатр, эмигрировал.

3. Эразм Шпачинский (Erazm Szpaczyński) (псевдоним Вандалин Хабданк) родился в 1848 г. в городе Каменец–Подольском в семье Корнелия Шпачинского, участника «январского» восстания 1863 г., сосланного в Вятку (1863-1870). По окончании гимназии в 1866 г. начал учебу на факультете физики и математики Императорского университета св. Владимира (Киев), который окончил в 1873 г. Вначале работал учителем в гимназии в Лубнах, а год спустя в реальном училище в Кременчуге. В 1880 г. подал в отставку и вернулся в Киев. В Киеве познакомился с профессором Василием Петровичем Ермаковым (1845-1922), который в 1884 г. начал издавать «Журнал элементарной математики», став его помощником.

21 августа 1886 г вышел первый номер нового научно-популярного журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики», чьим главным редактором и издателем до 1896 г. стал Э. Шпачинский. Такой журнал стал первым в истории издательского дела России. (Фактически он стал предшественником современного «Кванта»). В 1891 г. Эразм получил место столоначальника в канцелярии Попечителя Одесского учебного округа, перенеся в Одессу и издание журнала. С 1895 г. постепенно передает управление журналом В. А. Гернету, а сам, прекратив работу в канцелярии, начинает преподавать математику и физику в 1-м Одесском реальном училище. В 1900 г. переезжает в Лодзь (Польша), где преподает в коммерческом училище. В 1912 г. умирает от воспаления легких [5].

4. Антон Жбиковский родился 6 сентября 1829 г. в городе Петроков (Piotrków Trybunalski) Люблинской губернии (Царство Польское) в семье Ксаверия Жбиковского. По окончании петроковской гимназии в 1846 г. Антон поступил на второе (физико-математическое) отделение философского факультета Петербургского университета. Одним из его учителей был проф. П. Л. Чебышёв (1821-1894) ([6], с. 200). Окончив в 1850 г. университет, он готовится занять должность учителя геодезии и землемерия в Вильне в межевом училище. Для этого, кроме дополнительного экзамена, он проходит межевую практику. После закрытия Межевого училища А. Жбиковский переходит в 1855 г. на службу в минскую гимназию старшим учителем математики и физики. В 1864 г. А. Жбиковский переходит на службу в Казанский учебный округ, став старшим учителем математики и физики в вятской гимназии, а затем (с 1866 г.) занимает ту же должность в 1-й Казанской императорской гимназии.

Уже в 1860 г. в Бюллетене Академии Наук (III том) напечатана его заметка о делимости чисел. С 1860 г. по 1866 г. в первом в России периодическом издании физико-математического профиля «Вестнике Математических Наук», издаваемых астрономом Матвеем Матвеевичем Гусевым (1826–1866), он печатает 8 статей, в основном, по теории чисел. В 1867 г. в Ученых Записках Казанского университета (стр. 212-276) он печатает диссертацию «Об Эйлеровых интегралах», за которую он был удостоен Санкт-Петербургским университетом степени магистра. С 1 мая 1868 г. А. Жбиковский был утверждён приват-доцентом по кафедре чистой математики. 26 октября 1871 г. Антон Ксавериевич получил от Казанского университета степень доктора чистой математики по защите диссертации «О некоторых приложениях формулы Эйлера и Стирлинга к теории вероятностей». Работая в Казанском университете, А. Жбиковский не прерывал до самой смерти преподавания в 1-й казанской гимназии, и в 1876 г. был удостоен звания «Заслуженного преподавателя». Скончался А. К. Жбиковский 17 марта 1900 года ([4], с. 349-351).

5. Блажеевский Ромуальд (Błaźejewski Romuald) родился 26 мая 1839 г. в губернском городе Гродно в семье наследника старинного шляхетского рода Осипа (Józefa) Блажеевского. По окончании в 1855 г. местной гимназии поступил на медицинский факультет московского университета, но уже со второго курса перешёл на первый курс физико-математического факультета. В 1860 г., окончив учебу кандидатом физ.-мат. наук, по рекомендации проф. Н. Д. Брашмана послан в Париж, где специально занимался геометрией у проф. Мишеля Шаля (Michel Shasles: 1793–1880). Там же в Париже защитил диссертацию и стал преподавать. В 1864 г. в Москве вышла его монография «Об эллиптических интегралах 3-го вида». В 1869 г. Р. Блажеевский вернулся в Москву и в звании приват-доцента стал читать в университете курс математической физики. В 1870 г. Ромуальд Осипович был приглашен в гимназию во Влоцлавек, уездный городок на Висле Варшавской губернии, один из древнейших польских городов. В 1873 г. в Варшаве Ромуальд публикует книгу «О современном состоянии высшей оптики». К сожалению, болезнь жены и собственное состояние здоровья не позволили продолжать преподавание во Влоцлавке. Ромуальд Осипович вышел в отставку после двух лет преподавания, поселившись по месту рождения жены в Уфе.

В 1888 г. он переселился в Казань, где с октября того же года стал приват-доцентом местного университета, опубликовав во Франции в журнале “Nouvelles annales des mathematiques" (1894-1895) две статьи по геометрии и теории вероятностей. Умер Р. О. Блажеевский в 1916 году и похоронен в Казани ([4], с. 261).

6. Ковальский Мариан (Kowalski Marian) родился 3(15) октября 1821 г. в городке Добржин Плоцкой губернии на р. Древенце, притоке Вислы, в семье чиновника из шляхтичей Царства Польского Альберта Ковальского. В 1832 г. он поступил в губернскую плоцкую гимназию, которую с успехом окончил в 1840 г. Не попав в Институт инженеров путей сообщения, Мариан в августе 1841 г. поступает в Петербургский университет на 2-е отделение философского факультета, разряда математических наук. В 1844 г. за рассуждение на тему «Исследование общих свойств движения системы тел» Мариан получает золотую медаль, а год спустя оканчивает курс со степенью кандидата.

Проведя весь 1846 г. в Пулковской обсерватории и сдав магистерский экзамен, Мариан в марте 1847 г. за сочинение «О возмущениях в движении комет» получает степень магистра астрономии. С января 1847 г. М. Ковальский был прикомандирован на два года к экспедиции Императорского Русского Географического Общества на северный Урал для проведения астрономических и геодезических работ от Богословска (ныне Карпинск) до берега Ледовитого океана. Результаты своих уральских наблюдений М. Ковальский опубликовал в 1853 г. в Санкт-Петербурге в сочинении «Северный Урал и береговой хребет Пай-Хой».

В августе 1850 г. по рекомендации академика В. Я. Струве (1793–1864) Мариан Альбертович получил назначение в Казанский университет адъюнктом по кафедре астрономии. В 1851 г. вместе с профессором казанского университета А. Ф. Поповым (1815–1879) и кандидатом М. М. Гусевым он участвовал в наблюдении полного солнечного затмения (16(28) июля) в Бердянске.

Сдав в феврале и марте 1852 г. докторский экзамен, в июне того же года М. Ковальский получил степень доктора математики и астрономии за диссертацию «Теория движения Нептуна». За эту же работу вместе с сочинением «Северный Урал» в апреле 1854 г. Мариан получает Демидовскую премию второй степени. В декабре того же года его утверждают ординарным профессором. В январе 1855 г. М. Ковальский был назначен заведующим обсерваторией Казанского университета [3]. В течение 1860/61 уч. года М. Ковальский побывал в Германии, по дороге навестив места своего детства на Висле и приобретя в Германии некоторые астрономические инструменты. 13 февраля 1863 г. Академия Наук избрала М. Ковальского своим членом-корреспондентом. За научные заслуги избран членом Астрономического общества в Лондоне и в Берлине. Избирался он трижды и деканом факультета. С октября 1875 г. Мариан Альбертович получил звание заслуженного профессора. С 1869 г. Мариан Альбертович начал определение положения звезд между 75–80 градусами северного склонения. Им были определены 4281 звезд Казанского каталога, изданного в 1898 г. уже после его смерти 25 апреля 1879 года. ([4], с. 358–365).

Литература

[1] Одинец В. П. Предтечи и первые творцы польской математической школы (1869-1922). Учебное пособие. – Сыктывкар: Коми пединститут, 2014. – 60 с.

[2] Игнатий Семёнович Янушевский (р. 1804-ум. 1875). Родовод. (Rodovid. Org).
[3] Шарифжанов И. И. Польские профессора и преподаватели в Императорском Казанском университете. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2002. – 19 с.
[4] Биографический словарь профессоров и преподавателей императорского казанского университета за сто лет (1804–1904): в 2-х ч. (Под ред. заслужен.орд. проф. Н. П. Загоскина). Ч. 1, – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1904.
[5] Э. К. Шпачинский (1848-1912). Некролог // Одесса. Вестник опытной физики и элементарной математики. 1913. № 1 (577). С. 3–8.
[6] Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. – Киев: Радянска школа, 1979. – 607 с.

УДК 51(092)

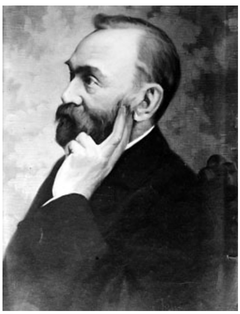
МАТЕМАТИКИ И НОБЕЛЕВСКАЯ ПРЕМИЯ

Якубсон М. Я.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: michaeljackubson@mail.ru

Yakubson M. Ya. Mathematicians and Nobel Prize Several biographies of Mathematicians awarded by Nobel Prize for economics are presented.

Приведены биографии некоторых математиков – лауреатов Нобелевской премии по экономике.

Альфред Нобель (1833-1896).



Альфред Нобель родился в Стокгольме 21 октября 1833 года. Дела его отца Эммануила Нобеля, инженера и изобретателя, в Швеции шли плохо. Семья бедствовала, дети торговали спичками на улице. Альфред ходил в школу только полтора года, в возрасте 8-9 лет. В 1837 году отец переехал в Петербург. Здесь он основал литейный и механический завод, выпускающий как военную, так и гражданскую продукцию. В 1842 году жена Эммануила Нобеля с сыновьями также приехала в Петербург. Альфред получил хорошее домашнее образование, среди его учителей был знаменитый русский химик Н. Н. Зинин.

В 1850 году Альфред отправился в путешествие по Европе и Америке. В Париже он работал в лаборатории известного химика Теофиля Жюля Пелуза, который в 1836 году установил состав глицерина. В лаборатории Пелуза с 1840 по 1843 г. работал Асканио Собреро, который впервые получил нитроглицерин. Многие химики в это время пытались сделать из нитроглицерина промышленную взрывчатку. В 1863–65 гг. Альфред Нобель изобрёл и усовершенствовал детонатор из гремучей ртути. Но проблемой оставалась нестабильность нитроглицерина, приводившая к большому количеству несчастных случаев. В 1864 году при взрыве нитроглицерина погибли 5 человек, в том числе младший брат Альфреда Эмиль. Альфред Нобель стал искать вещество, которое можно смешать с нитроглицерином для того, чтобы получившаяся смесь не детонировала самопроизвольно. Он перебирал различные замедлители, и остановился на кизельгуре – пористой осадочной породе. Смесь нитроглицерина с кизельгуром Нобель запатентовал под названием «динамит». Позже он создал ещё несколько мощных взрывчаток – «гремучий студень», бездымный порох «баллистит». Динамит стал активно применяться в строительстве и в горном деле, и, независимо от желания автора, в военном деле.

Нобель был убеждённым противником войн, его мечтой был международный арбитраж, в котором государства могли бы разрешать свои споры. Динамит он считал «оружием Страшного Суда», настолько мощным, что его наличие у обоих противников сделает его боевое применение невозможным. Увы, он ошибался.

Нобель никогда не был женат и не имел прямых наследников. 14 марта 1893 года Альфред Нобель подписал завещание. Своё огромное состояние он решил оставить «для образования фонда, доходы от которого будут ежегодно распределяться Академией в награду за наиболее важные и самобытные открытия или интеллектуальные достижения в широкой сфере знаний и прогресса ... Я бы желал, хотя и не ставлю это непременным условием, чтобы особое внимание уделялось тем, кто преуспел словом или делом в борьбе со специфическими предрассудками, которые до сих пор бытуют среди народов и правительств и препятствуют созданию европейского мирного трибунала. Мое непременное желание состоит в том, чтобы премии присуждались наиболее достойному кандидату вне зависимости от того, является ли он шведом или иностранцем, мужчиной или женщиной» [1].

Следующее завещание от 27 ноября 1895 года конкретизирует распределение процентов от капитала Нобеля. «Указанные проценты необходимо разделить на пять равных частей, которые предназначаются: одна часть – тому, кто сделает наиболее важное открытие или изобретение в области физики; другая – тому, кто сделает наиболее важное открытие или усовершенствование в области химии; третья – тому, кто сделает наиболее важное открытие в области физиологии или медицины; четвёртая – тому, кто создаст наиболее выдающееся литературное произведение идеалистического направления; пятая – тому, кто внёс наиболее существенный вклад в сплочение наций, уничтожение рабства или снижение численности существующих армий и содействие проведению мирных конгрессов...» [2]

Нам, конечно, интересно, почему в этом списке нет математики, притом что в первоначальном проекте завещания математика присутствовала. Есть множество легенд на эту тему, касающихся ссор Нобеля с современными ему шведскими математиками. В частности, популярна версия, что знаменитый математик Миттаг-Леффлер отбил у Альфреда невесту. Эти легенды ничем не подтверждены, однако женщина действительно повлияла на Нобеля в этом вопросе. В 1876 году он познакомился с австрийской баронессой Бертой Кински, с которой он потом переписывался всю жизнь. Берта была убеждённой пацифисткой, и включение в число Нобелевских премий премии мира приписывается её влиянию. Однако причиной исключения из списка именно математики, скорее всего, был собственный опыт Нобеля, инженера-практика и химика-экспериментатора. Тогдашние химики (в отличие от физиков), вероятно, не особенно нуждались в знании современной им математики.

Впоследствии делались неоднократные попытки дополнить список Нобелевских премий, например, математики с 2002 года (200-летия Нильса Хенрика Абеля) получают Абелевскую премию, которую считают аналогом Нобелевской премии для математиков. Однако только одна из новых премий была признана Нобелевским комитетом, присуждается той же Шведской Королевской академией наук, что и престижные Нобелевские премии по физике и химии, наконец, вручается шведским королём 10 декабря в годовщину смерти Альфреда Нобеля. Это учреждённая в 1969 г. Премия Шведского национального банка по экономическим наукам памяти Альфреда Нобеля, неофициально называемая Нобелевской премией по экономике. Именно этой премией за 50 лет её существования было награждено несколько математиков, работавших в области методов оптимизации и особенно теории игр.

Перечислим их.

Год	Лауреаты, страна	Обоснование награды
1971	Кеннет Эрроу, США	За новаторский вклад в теорию общего экономического равновесия и теорию благосостояния
1975	Леонид Канторович, СССР	За вклад в теорию оптимального распределения ресурсов
	Тьяллинг Купманс, США	
1994	Джон Харсаньи, США	За анализ равновесия в теории некооперативных игр
	Джон Нэш, США	
	Райнхард Зельтен, Германия	
2005	Роберт Ауман, Израиль	За углубление нашего понимания сути конфликта и сотрудничества путём анализа теории игр
	Томас Шеллинг, США	
2012	Ллойд Шепли, США	За теорию стабильного распределения и практики устройства рынков
	Элвин Рот, США	

Кеннет Эрроу (1921-2017).

Кеннет Эрроу родился в Нью-Йорке в еврейской семье, его родители эмигрировали в США из Румынии. В 1940 году получил степень бакалавра, а в 1941 – магистра по математике. С 1942 по 1946 года был офицером метеослужбы ВВС США. Уволился в звании капитана, первую научную работу написал по метеорологии. В аспирантуру Эрроу поступил уже по экономике, много лет работал как профессор экономики и исследования операций в Стэнфордском и Гарвардском университетах.

В 1951 Эрроу опубликовал книгу «Общественный выбор и индивидуальные ценности» [3]. В этой книге, в частности, приведена знаменитая теорема Эрроу о диктаторе. Он сформулировал систему из четырех естественных аксиом, описывающих процедуру голосования. Пусть $N \geqslant 2$ избирателей должны выбрать одну из $n \geqslant 3$ альтернатив. Пусть система голосования обладает следующими 4 свойствами:

1. независимость от посторонних альтернатив: если профиль голосования изменится так, что альтернативы x и y для всех N избирателей останутся в том же порядке, то не изменится их порядок и в окончательном результате;

2. монотонность: если для всех N избирателей некоторая альтернатива x останется на месте или поднимется выше, а порядок остальных не изменится, в общем списке x должен остаться на месте или подняться;

3. единодушие: если у каждого избирателя альтернатива x в списке стоит выше y, это же должно быть и в окончательном результате;

4. линейная упорядоченность: для любого профиля голосования существует результат – упорядоченный список из n альтернатив.

Эрроу доказал грустный, но жизненный результат: из этих четырех аксиом следует необходимость существования диктатора. В экономике из результатов Эрроу следует, что общество не может договориться об экономических приоритетах.

Известна также модель общего равновесия Эрроу-Дебрё, изложенная в 1954 году в совместной статье «Существование равновесия для конкурентной экономики». Авторы доказывают существование равновесного вектора цен и распределения благ при условии свободного обмена любого блага на любое. Доказательство основано на теореме Какутани о неподвижной точке для многозначных отображений [4]. Именно за новаторский вклад в теорию общего экономического равновесия и теорию благосостояния Кеннет Эрроу получил Нобелевскую премию по экономике 1971 г.

Леонид Витальевич Канторович (1912-1986).

Леонид Витальевич Канторович родился в Санкт-Петербурге в семье врачей. Его родители приехали в столицу из Вильно. Леонид был вундеркиндом – он поступил в Ленинградский университет в 1926 году в возрасте 14 лет. В 1934 году стал профессором ЛГУ, в 1935 получил докторскую степень без защиты диссертации.

В математике Л. В. Канторович был учеником Г. М. Фихтенгольца и В. И. Смирнова. В середине 30-х годов он начал изучение в рамках функционального анализа нового для того времени класса пространств, названных им **линейными полуупорядоченными**. Если в классической теории нормированных пространств основным понятием является норма, обобщающая понятие абсолютной величины вещественного числа, то в теории Канторовича изучается упорядоченность, в частности, связь порядка и нормы. Впоследствии теорию полуупорядоченных пространств разрабатывали ученики Канторовича Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер и их ученики, в частности А. И. Векслер и А. В. Колдунов.

С 1939 г. Леонид Витальевич заведовал кафедрой в Военно–инженерном техническом университете (ныне им. генерала Хрулёва), во время войны работал над оборонной тематикой. В 1948 году вернулся в Ленинград в чине подполковника. Принимал участие в работах по атомному проекту, в 1949 году стал лауреатом Сталинской премии «за работы по функциональному анализу».

Перейдем к экономическим работам Л. В. Канторовича. Как он пишет в [5], первый раз он работал в качестве экономиста в 1929 году в Ташкенте на практике после третьего курса, причём его руководителем оказалась Мария

Спиридонова, бывший лидер партии левых эсеров. Этот эпизод был, конечно случайностью. Однако в конце 30-х годов, в обстановке приближающейся войны, Канторович хотел заниматься более практическими вопросами, чем чистая математика. Он заинтересовался вопросами экономики, понимая их важность для страны.

На консультацию к Канторовичу в Институт математики и механики ЛГУ, где он заведовал отделом, пришла группа инженеров фанерного треста с задачей о наилучшем распределении сырья между станками. Размышления об этой задаче привело Леонида Витальевича к понятию задачи линейного программирования и разработке метода решения этой задачи, по сути, равносильного симплекс-методу, позже разработанному в США Дж. Данцигом. Интересно, что первый доклад на эту тему был сделан в 1938 г. на Октябрьской научной сессии Герценовского института [5]. В 1939 году новые методы были изложены в книге «Математические методы организации и планирования производства». Идеи Канторовича критиковались советскими экономистами и партийными органами как «антимарксистские», однако в 50-е годы они получили признание. В 1958 году он избран членом-корреспондентом АН СССР по отделению экономики, с 1964 года академик (математика). В 1975 году стал лауреатом Нобелевской премии по экономике (совместно с Тьяллингом Купмансом) «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

С 1960 по 1971 год Л. В. Канторович жил в Новосибирске, был одним из создателей Сибирского отделения АН СССР. С 1971 года жил и работал в Москве, умер 7 апреля 1986 года, похоронен на Новодевичьем кладбище.

Джон Форбс Нэш (1928-2015).

Джон Нэш родился в семье инженера-электрика и школьной учительницы. Учился в государственной школе средне, математику не любил – её скучно преподавали. В 14 лет прочёл книгу Эрика Белла «Творцы математики», после чего без посторонней помощи доказал малую теорему Ферма. После школы учился в Политехническом институте Карнеги, пытался изучать химию и международную экономику, но окончательно выбрал математику.

В 1947 году Нэш поступил в Принстонский университет, там он впервые услышал о теории игр. В 1949 году в 21 год он написал диссертацию по теории игр, в которой сформулировал знаменитое понятие равновесия Нэша. Это ситуация в игре с ненулевой суммой, из которой ни одному из игроков невыгодно уходить в одиночку. Также он разработал схему переговоров, которые приводят к кооперативному решению, более выгодному обоим игрокам, чем равновесное.

Кроме теории игр Нэш занимался и более классическими разделами математики. Он написал ряд статей по вещественной алгебраической геометрии, теории римановых многообразий и непрерывности решений параболических и эллиптических уравнений [6].

В конце 50-х годов Нэш психически заболел, ему поставили диагноз «параноидная шизофрения». В 80-е годы к удивлению врачей Нэшу удалось научиться жить со своей болезнью, он снова стал заниматься математикой.

В 1994 году Джон Нэш получил Нобелевскую премию по экономике «За анализ равновесия в теории некооперативных игр» совместно с венгерским экономистом Джоном Ч. Харсаньи и немецким математиком Рейнхардом Зелтеном. В 2015 году ему была присуждена Абелевская премия за вклад в изучение дифференциальных уравнений.

В 1998 году американская журналистка узбекско-немецкого происхождения Сильвия Назар написала ставшую бестселлером биографию Нэша «A Beautiful Mind: The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash» («Игры разума. История жизни гениального математика и лауреата Нобелевской премии Джона Нэша). В 2001 году по мотивам книги был снят фильм «A Beautiful Mind». Фильм получил четыре «Оскара».

В 1957 году Нэш женился на студентке Алисии Лард родом из Сальвадора. Одновременно с рождением их сына Нэш заболел и потерял работу. В 1962 году они развелись. В 1970 снова стали жить вместе. В 2001 году снова поженились.

23 мая 2015 года супруги возвращались в Штаты из Норвегии, где Нэшу вручили Абелевскую премию. Такси, в котором они ехали, попало в аварию. Джон и Алисия погибли на месте. Они жили долго и не всегда счастливо и умерли в один день.

Литература

[1] http://www.vokrugsveta.ru/encyclopedia/index.php title=Альфред Нобель.

[2] http://nobeliat.ru/index6.php

[3] Kenneth J. Arrow, 2nd ed., 1963. Social Choice and Individual Values, Yale University Press, 1951.

[4] Васина Л. Л. Нобелевские лауреаты XX века. Экономика. Энциклопедический словарь. – М.: РОССПЭН, 2001.

[5] Канторович Л. В. Мой путь в науке // УМН 1987. Вып. 2(254). – С. 183–213.

[6] Дж. Нэш. О непрерывности решений параболических и эллиптических уравнений // Математика. – 1960. – Т. 4, № 1. – С. 31–52.

Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

УДК 517.927.25

БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

К. Ф. Абдуллаева
Сумгаитский Государственный Университет
Сумгаит, Азербайджан
e-mail: konul.abdullayeva.15@mail.ru

Abdullaeva K. F. Basic properties of root functions of a spectral problem with a boundary condition depending on the spectral parameter

Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\ell(y)(x) \equiv y^{(4)}(x) \;-\; (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\; 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y'(0)\cos\alpha - y''(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{3}$$

$$(a\lambda + b)y'(1) + (c\lambda + d)y''(1) = 0, \tag{4}$$

$$y(1)\cos\delta - Ty(1)\sin\delta = 0, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $q(x)$ – положительная абсолютно непрерывная функция на $[0, 1]$, α, β, δ, a, b, c, d – действительные постоянные такие, что α, β, $\delta \in [0, \pi/2]$ и $\sigma = bc - ad < 0$.

Задача (1)-(5) в случае $\alpha = \beta = 0$ и $\sigma > 0$ ранее была исследована в [1], где изучены расположения собственных значений на вещественной оси и осцилляционные свойства собственных функций, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, установлена базисность системы собственных функций в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, после удаления одной произвольной функции.

Следует отметить, что знак параметра σ играет важную роль. В случае $\sigma > 0$ задача (1)-(5) сводится к задаче на собственные значения для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, 1) \oplus \mathbb{C}$; при этом все собственные значения задачи (1)-(5) являются вещественными и простыми. В случае $\sigma < 0$ эту задачу можно реализовать как спектральную задачу для самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина $\Pi_1 = L_2(0, 1) \oplus \mathbb{C}$ с соответствующим внутренним произведением [2]; при этом задача (1)-(5) может иметь вещественное кратное либо невещественные собственные значения.

Пусть $A_k = (\mu_{k-1}, \mu_k)$, где μ_k – k-е собственное значение задачи (1), (2), (3), (5) и $y'(1) = 0$, которое является простым [3], а $\mu_0 = -\infty$.

Теорема 1. Для задачи (1)-(5) имеет место одно из следующих утверждений:

(а) все обственные значения задачи (1)-(5) являются вещественными, при этом интервал A_1 содержит либо одно двукратное, либо два простых собственных значения, а интервал A_k, $k = 2, 3, \dots$, содержит одно простое собственное значение;

(б) все собственные значения задачи (1)-(5) являются вещественными, при этом существует натуральное число $m \geq 2$ такое, что интервал A_m содержит либо одно трехкратное, либо одно двукратное и одно простое, либо три простых собственных значения, интервал A_1 не содержит собственных значений, а интервал A_k, $k = 2, 3, \dots, k \neq m$, содержит одно простое собственное значение;

(в) задача (1)-(5) имеет одну пару невещественных сопряженных друг к другу собственных значений, при этом интервал A_1 не содержит собственных значений, а интервал A_k, $k = 2, 3, \dots$, содержит одно простое собственное значение.

Пусть $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – система корневых функций, соответствующая системе собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ спектральной задачи (1)-(5).

Теорема 2. Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. Если $m_r = ay_r'(1) - cy_r''(1) \neq 0$, то система $\{y_k(x)\}_{k=1,\, k\neq r}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, причем при $p = 2$ этот базис является безусловным базисом. Если $m_r = 0$, то эта система неполна и не минимальна в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Литература

[1] Aliyev Z. S. Basis properties of a fourth order differential operator with spectral parameter in the boundary condition // Cent. Eur. J. Math. 2010. Vol. 8. № 2. – P. 378-388.

[2] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986. – 352 с.

[3] Banks D. O., Kurovski G. J. Prufer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces // J. Differential Equations. 1977. Vol. 24. № 1. – P. 57-74.

УДК 517.9

ПРОСТЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Аксенов А. В.[1,*], Полянин А. Д.[2,**]
[*]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
[**]Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
e-mail: [1]aksenov@mech.math.msu.su, [2]polyanin@ipmnet.ru

Aksenov A. V., Polyanin A. D. Simple methods for constructing exact solutions to mathematical physics equations. A number of simple, but quite effective, methods for constructing exact solutions of nonlinear partial differential equations that do not require special training and require a small amount of intermediate calculations are described. These methods are based on the following two main ideas: (i) simple exact solutions can serve as the basis for constructing more complex solutions of the equations under consideration; (ii) exact solutions of some equations can serve as the basis for constructing solutions of more complex equations. In particular, a method for constructing complex solutions based on simple solutions using translation and scaling transformations is proposed; it is shown that in some cases it is possible to obtain rather complex solutions by adding terms to simpler solutions; situations when using similar simple solutions you can build a more complex composite solution (nonlinear superposition of solutions) are considered; a method for constructing complex exact solutions linear equations by introducing a complex parameter into more simple solutions is described. The effectiveness of the proposed methods is illustrated by a large number of concrete examples.

Описан ряд простых, но достаточно эффективных, методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными, которые не требуют специальной подготовки и проводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях: (i) простые точные решения могут служить основой для построения более сложных решений рассматриваемых уравнений; (ii) точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений более сложных уравнений. В частности, предложен метод построения сложных решений, исходя из простых решений, с помощью преобразований сдвига и масштабирования; показано, что в некоторых случаях можно получать достаточно сложные решения путем добавления слагаемых к более простым решениям; рассматриваются ситуации, когда с помощью однотипных простых решений можно построить более сложное составное решение (нелинейная суперпозиция решений); описан метод построения сложных точных решений линейных уравнений путем введения комплексного параметра в более простые решения. Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров.

Исследование свойств и методы построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений необходимы для разработки, анализа и тестирования различных математических моделей, используемых в естествознании и технике. Существует несколько основных методов поиска точных решений уравнений математической физики: метод группового анализа дифференциальных уравнений (метод поиска классических симметрий), методы поиска неклассических симметрий, прямой метод Кларксона–Крускала, методы обобщенного разделения переменных разделения переменных, методы функционального разделения переменных, метод дифференциальных связей, метод усеченных разложений Пенлеве (см., например, [1-6]). Применение этих методов требуют специальной подготовки и, как правило, сопровождается трудоемким анализом и большим объемом аналитических преобразований и промежуточных вычислений.

В данной работе описан ряд более простых, но достаточно эффективных, методов построения точных решений уравнений с частными производными, которые не требуют специальной подготовки и проводят к небольшому объему промежуточных вычислений. Эти методы базируются на следующих двух основных идеях:

• простые точные решения могут служить основой для построения более сложных решений рассматриваемых уравнений,

• точные решения одних уравнений могут служить основой для построения решений других более сложных уравнений.

Эффективность предложенных методов иллюстрируется большим числом конкретных примеров. Рассматриваются нелинейные уравнения теплопроводности, реакционно-диффузионные уравнения, нелинейные волновые уравнения, уравнения движения в пористых средах, уравнения гидродинамического пограничного слоя, уравнения движения жидкой пленки, уравнения газовой динамики, уравнения Навье–Стокса и др. Помимо точных решений обычных уравнений с частными производными описаны также некоторые точные решения нелинейных функционально-дифференциальных уравнений типа пантографа с частными производными, которые кроме искомой функции содержат также функции с растяжением или сжатием независимых переменных. Сформулирован принцип аналогии, позволяющий эффективно строить точные решения таких функционально-дифференциальных уравнений.

Основные результаты доклада подробно описаны в статьях [7,8].

Литература

[1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[2] Ibragimov N. H. (Ed.) CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. – Boca Raton: CRC Press, 1994. – 429 p.

[3] Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. – Новосибирск: Наука, 1994. – 319 с.

[4] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

[5] Полянин А.Д., Журов А.И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – М.: Издательство "ИПМех РАН", 2020. – 384 с.

[6] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики, 2-е изд. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. – 368 с.

[7] Aksenov A.V., Polyanin A.D. Methods for constructing complex solutions of nonlinear PDEs using simpler solutions // Mathematics. 2021. Vol. 9, № 4, 345 (https://www.mdpi.com/2227-7390/9/4/345).

[8] Полянин А.Д., Аксенов А.В. Использование простых решений нелинейных уравнений математической физики для построения более сложных решений // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". 2020. Т. 9, № 5. – С. 420-437.

УДК 517.927.25

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ТРЕХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

З. С. Алиев, В. А. Мехрабов
Бакинский Государственный Университет
Баку, Азербайджан
e-mail: z_aliyev@mail.ru, v-mekhrabov@mail.ru

Aliev Z. S., Mekhrabov V. A. Some spectral properties of a boundary value eigenvalue problem with a spectral parameter in three boundary conditions.

Известная математическая модель, описывающая изгибные колебания однородной балки состоит из гиперболического уравнения четвёртого порядка и соответствующих граничных условий. Если на одном из концов балки сосредоточен груз, а на другом – инерционный груз, то граничные условия, моделирующие силы, содержат вторые производные по времени (см. [1, 152-154]). Решая соответствующую математическую задачу методом разделения переменных, получаем следующую спектральную задачу:

$$\ell(y)(x) \equiv y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x), \; 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y''(0) = 0, \tag{2}$$

$$Ty(0) - a\lambda y(0) = 0, \tag{3}$$

$$y''(1) - b\lambda y'(1) = 0, \tag{4}$$

$$Ty(1) - c\lambda y(1) = 0, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $q(x)$ – положительная абсолютно непрерывная на $[0, 1]$ функция, a, b, c, – действительные постоянные такие, что $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Имеет место следующая

***Теорема* 1**. Собственные значения задачи (1)-(5) являются вещественными, простыми, за исключением собственного значения $\lambda = 0$, в случае, когда $c < 1$ и $a = c - 1$, и образуют неограниченно неубывающую последовательность

$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 < \ \ldots\ < \lambda_k < \ \ldots$; при этом $\lambda_2 < 0 = \lambda_3$ при $c < 1$ и $a > c - 1$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ при $c < 1$ и $a = c - 1$; $\lambda_2 = 0 < \lambda_3$ при $c < 1$ и $a < c - 1$ либо $c \geq 1$.

Пусть $H = L_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^3$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\hat{y}, \hat{v}) = (\{y, m, n, \tau\}, \{v, s, t, \chi\}) = \int\limits_0^1 y(x)\,\overline{v(x)}\,dx + |a|^{-1} m\bar{s} + |b|^{-1} n\bar{t} + |c|^{-1}\tau\bar{\chi}.$$

Определим оператор

$$L\hat{y} = L\{y, m, n, \tau\} = \{\ell(y),\, Ty(0),\, y''(1),\, Ty(1)\}$$

на области

$$D(L) = \{\{y\,(x),\, m,\, n\} \in H \,:\, y \in W_2^4(0,1),\, \ell(y) \in L_2(0,1),$$
$$y''(0) = 0,\, m = ay(0),\, n = by'(1),\, \tau = cy(1)\},$$

которая всюду плотна в H. Тогда задача (1)–(5) сводится к следующей спектральной задаче

$$L\hat{y} = \lambda\hat{y},\, y \in D(L),$$

т.е., собственные значения λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачи (1)–(5) и оператора L совпадают между собой (с учётом их кратности), а между собственными функциями задачи (1)-(5) и собственными векторами оператора L можно установить взаимно-однозначное соответствие:

$$y_k(x) \leftrightarrow\ \hat{y}_k = \{y_k(x),\, m_k,\, n_k, \tau_k\},\ m_k = ay_k(0),\, n_k = by_k'(1),\, \tau_k = cy_k(1),\, k \in \mathbb{N}.$$

В случае $a > 0$, $b > 0$ и $c < 0$ из [2, теорема 4.1] следует, что оператор L является самосопряженным оператором в H и система собственных векторов этого оператора образуют ортогональный базис в H.

В случае $a < 0$, $b > 0$ и $c > 0$ оператор L не является симметричным в H. В этом случае определяем оператор $J : H \to H$ следующим образом:

$$J\hat{y} = J\{y, m, n, \tau\} = \{y, -m, n, -\tau\}.$$

Заметим, что оператор J унитарен и симметричен в H, а его спектр состоит из двух собственных значений: -1 с кратностью 2 и 1 с бесконечной кратностью. Тогда оператор J порждает пространство Понтрягина $\Pi_2 = L_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^3$ с внутренним произведением [3]

$$(\hat{y}, \hat{v})_{\Pi_2} = (J\hat{y}, \hat{v})_H = (\{y, -m, n, -l\}, v\{s, t, r\})_H =$$
$$\int\limits_0^1 y(x)\,\overline{v(x)}\,dx\ + a^{-1} m\,\bar{s} + b^{-1}\,n\,\bar{t} - c^{-1}\,l\,\bar{r}.$$

Теорема 2. Справедливы утверждения: (а) оператор L является J-самосопряжённым в Π_2; (б) $L^* = JLJ$, где L^* – оператор, сопряжённый к оператору L в H; (в) система корневых векторов $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $m_k = ay_k(0)$, $n_k = by_k'(1)$, $\tau_k = cy_k(1)$, оператора L образует безусловный базис в H.

Пусть $\{\hat{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $v_k = \{v_k(x), s_k, t_k, \chi_k\}$, – система, сопряжённая к системе $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$, j, r, l, – произвольные фиксированные различные натуральные числа и

$$\Delta_{j,r,l} = \begin{vmatrix} s_j & t_j & \chi_j \\ s_r & t_r & \chi_r \\ s_l & t_l & \chi_l \end{vmatrix}.$$

Теорема 3. Если $\Delta_{j,r,l} \neq 0$, то система корневых функций $\{y_k(x)\}_{k=1,\, k\neq j,r,l}^{\infty}$ задачи (1)-(5) образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, причём в $L_2(0,1)$ этот базис является безусловным базисом. Если $\Delta_{j,r,l} = 0$, то эта система является неполной и неминимальной в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Теорема 4. Справедливы асимптотические формулы

$$\rho_k = \sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{11}{4}\right)\pi + O\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$y_k(0) = 4(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\, bc\rho_k^{12} e^{\rho_k}\left(1 + \frac{q_0}{4\rho_k}\right)\left(1 + \frac{2}{a\rho_k} - \frac{2}{c\rho_k} + O\left(\frac{1}{\rho_k^2}\right)\right),$$

$$y_k(1) = 4ab\rho_k^{12} e^{\rho_k}\left(1 + \frac{q_0}{4\rho_k}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho_k^2}\right)\right),$$

$$y_k'(1) = 4ac\rho_k^{11} e^{\rho_k}\left(1 + \frac{q_0}{4\rho_k}\right)\left(1 + \frac{1}{a\rho_k} - \frac{1}{c\rho_k} + O\left(\frac{1}{\rho_k^2}\right)\right),$$

где $q_0 = \int\limits_0^1 q(x)dx$.

С помощью теорем 3 и 4 можно установить достаточные условия для базисности системы $\{y_k(x)\}_{k=1,\, k\neq j,r,l}^{\infty}$ в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Теорема 5. Существует число $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что если j, r, $l \geq k_0$ и не имеют одинаковой чётности, то система $\{y_k(x)\}_{k=1,\, k\neq j,r,l}^{\infty}$ образует базис в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, причём при $p = 2$ этот базис является безусловным базисом.

Литература

[1] Артобелевский И. И., Боголюбов А. Н., Болотин В. В. и др. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем. М., 1978. – 352 с.

[2] Aliyev Z. S., Mamedova G. T. Some properties of eigenfunctions for the equation of vibrating beam with a spectral parameter in the boundary conditions. J. Differential Equations. 2020. Vol. 269. № 2. – P. 1383-1400.

[3] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986. – 352 с.

УДК 517.956.27

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО РОДА

Андреев В. К.
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск
e-mail: andr@icm.krasn.ru

Andreev V. K. On the solution of an inverse problem for a parabolic equation with second tipe boundary conditions. An inverse second initial boundary value problem for a linear parabolic equation is considered. The unknown function of time is added in the right part of equation and can be found from additional condition of integral overdetermination. The stationary solution is found and it is shown that under some conditions the non-stationary solution tends to a stationary regime in uniform metric with increasing time. *Keywords*: inverse problem, parabolic equation, apriory estimates, stability.

Рассматривается обратная вторая начально-краевая задача для линейного параболического уравнения. Неизвестная функция времени входит в правую часть уравнения аддитивно и находится из дополнительного условия интегрального переопределения. Найдено стационарное решение. Методом априорных оценок установлены достаточные условия на входные данные, при которых решение с ростом времени стремится в равномерной метрике к стационарному режиму. *Ключевые слова*: обратная задача, параболическое уравнение, априорные оценки, устойчивость.

1. Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t = \nu u_{xx} + f(t) + g(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t \in [0,T]; \tag{1.1}$$

$$-\beta_1 u_x(0,t) = q_1(t), \quad \beta_2 u_x(l,t) = q_2(t), \quad x \in (0,l), \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \int\limits_0^l u(x,t)dx = q_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

В (1.1)-(1.3) функции $g(x,t)$, $u_0(x)$, $q_i(t), (i = 1,2,3)$ и постоянные $\nu > 0$, $T > 0$, $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0$ считаются заданными, а $u(x,t)$, $f(t)$ – искомыми. Таким образом, поставленная задача является обратной. Для её гладких решений необходимо потребовать выполнение условий согласования

$$-\beta_1 u_{0x}(0) = q_1(0), \quad \beta_2 u_{0x}(l) = q_2(0), \quad \int\limits_0^l u_0(x)dx = q_3(0). \tag{1.4}$$

Следует отметить, что обратные задачи для параболических уравнений с интегральным условием переопределения более общего вида, чем (1.3), рассматривались в достаточно большом количестве работ, например, [1,2,3] и другие. Более полный обзор имеется в [4]. Как правило, в них доказывается существование и единственность решения, рассматриваются и обосновываются методы построения приближённых решений для случая, когда неизвестная функция $f(t)$ входит в правую часть уравнения (системы) мультипликативным образом.

Задача (1.1)-(1.4) моделирует однонаправленное движение плоского слоя с двумя свободными границами и известным распределением температуры [2]. При этом неизвестная функция $f(t)$ есть продольный вдоль слоя градиент давления, ν – кинематическая вязкость. Интегральное условие (1.3) представляет собой заданный расход жидкости через поперечное сечение слоя.

Пользуясь спецификой задачи (1.1)-(1.4), её одномерностью, удаётся получить достаточные условия на входные данные, при которых решение сходится при $t \to \infty$ к стационарному в равномерной метрике. Как показывают простые примеры, для краевых условий второго рода такой сходимости нет. Более того, стационарный режим для краевых условий второго рода и прямых задач не является единственным. Однако для обратной задачи, сформулированной выше, при определённых условиях, такая сходимость имеет место.

2. Решение обратной задачи (1.1)-(1.4). Интегрируя уравнение (1.1) по x от 0 до l и используя интегральное условие (1.3), найдём

$$f(t) = \frac{1}{l}\left[q_3'(t) - \nu\left(\beta_1^{-1}q_1(t) + \beta_2^{-1}q_2(t)\right) - \int\limits_0^l g(x,t)dx\right]. \qquad (2.1)$$

Таким образом, неизвестная функция $f(t)$ сразу определяется по входным данным задачи. Подстановка (2.1) в уравнение (1.1) приводит к прямой задаче на функцию $u(x,t)$ с начальным условием (1.2) и первыми краевыми условиями (1.3).

Замечание 1. Если в (1.1) в правой части $f(t)$ даётся равенством (2.1), то условие переопределения (1.3) выполняется автоматически.

Согласно замечанию 1 и формуле (2.1) функция $u(x,t)$ есть решение классической второй начально-краевой задачи с известной правой частью. Её решение даётся формулой [6], стр. 58, содержащей четыре интегральных слагаемых. Оценка $|u(x,t)|, x \in [0,l], t \in [0,T]$ из этого представления есть довольно трудоёмкая задача с длинными выкладками [7,8]. Поэтому, пользуясь спецификой задачи, сведём её к вспомогательной классической первой начально-краевой задаче. Дифференцируя уравнение (1.1) по переменной x, получим первую начально-краевую задачу на $w(x,t) = u_x(x,t)$:

$$\begin{gathered} w_t = \nu w_{xx} + g_x(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t \in [0,T]; \\ w(x,0) = w_0(x) = u_{0x}(x), \quad x \in [0,l]; \\ w(0,t) = -\beta_1^{-1}q_1(t), \quad w(l,t) = \beta_2^{-1}q_2(t), \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \qquad (2.2)$$

Это прямая задача имеет стационарное решение

$$w^s(x) = -\beta_1^{-1}q_1^s + \frac{1}{l}\left[\beta_1^{-1}q_1^s + \beta_2^{-1}q_2^s + \frac{1}{\nu}\int\limits_0^l g^s(y)dy\right]x - \frac{1}{\nu}\int\limits_0^x g^s(y)dy, \qquad (2.3)$$

где q_1^s, q_2^s, $g^s(x)$ – заданные постоянные и функция соответственно.

Предположим, что $q_j(t)$ определены при всех $t \geq 0$ и

$$\begin{gathered} |q_j(t)| \leq N_j(1+\tau)^{-\alpha}, \quad j=1,2, \\ |g(x,t)| \leq N_3(1+\tau)^{-\alpha}, \quad |g_x(x,t)| \leq N_4(1+\tau)^{-\alpha} \end{gathered} \tag{2.4}$$

с некоторыми положительными постоянными $N_1, ..., N_4, \alpha$ для любых $x \in [0,l], \tau = \nu l^{-2}t$ – безразмерное время. Тогда [9] с новой постоянной $N_5 > 0, x \in [0,l]$

$$|w(x,t| \leq N_5(1+\tau)^{-\alpha}. \tag{2.5}$$

Стационарное решение $u^s(x)$ находится интегрированием (2.3):

$$u^s(x) = -\beta_1^{-1}q_1^s x - \frac{1}{\nu}\left(f^s\frac{x^2}{2} + \int\limits_0^x (x-y)g^s(y)dy\right) + C; \tag{2.6}$$

$$f^s = -\frac{\nu}{l}\left(\beta_1^{-1}q_1^s + \beta_2^{-1}q_2^s + \frac{1}{\nu}\int\limits_0^l g^s(y)dy\right), \tag{2.7}$$

$$C = l^{-1}q_3^s + \frac{\beta_1^{-1}l}{3}\,q_1^s - \frac{\beta_2^{-1}l}{6}\,q_2^s + \frac{1}{\nu l}\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^x (x-y)g^s(y)dydx - l^2\int\limits_0^l g^s(y)dy\right). \tag{2.8}$$

Замечание 2. Если $q_3'(t) \to 0$, $q_j(t) \to q_j^s$, $g(x,t) \to g^s(x)$ при $t \to \infty$, $x \in [0,l]$, тогда $f(t) \to f^s$, $t \to \infty$ ($f(t)$ определяется из (2.1), а f^s – из (2.7)).

Перейдём к получению априорной оценки $|u(x,t)|$. Из интегральной теоремы о среднем найдётся точка $x_0 \in (0,l)$ такая, что $u(x_0,t) = l^{-1}q_3(t)$, см. (1.3). Поэтому для любого $x \in [0,l]$, $t \geq 0$ в силу (2.5),

$$|u(x,t)| \leq l^{-1}|q_3(t)| + \int\limits_0^l |w(y,t|dy \leq l^{-1}|q_3(t)| + N_5 l(1+\tau)^{-\alpha}. \tag{2.9}$$

Пусть $|q_3'(t)| \to 0$, $t \to \infty$ и выполнены неравенства

$$\begin{gathered} |q_j(t) - q_j^s| \leq D_j(1+\tau)^{-\alpha}, \quad j=1,2,3; \\ |g(x,t) - g^s(x)| \leq D_4(1+\tau)^{-\alpha}, \quad |g_x(x,t) - g_x^s(x)| \leq D_5(1+\tau)^{-\alpha} \end{gathered} \tag{2.10}$$

с постоянными $D_i > 0\,(i=1,...,5)$, $\alpha > 0$ для любого $x \in [0,l]$. Тогда

$$\begin{gathered} |u(x,t) - u^s(x)| \leq D_6(1+\tau)^{-\alpha}, \quad |u_x(x,t) - u_x^s| \leq D_7(1+\tau)^{-\alpha}, \\ |f(t) - f^s| \leq D_8(1+\tau)^{-\alpha}. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Оценки (2.11) следуют последовательно из (2.5), (2.9), формул (2.1), (2.7) и предположений (2.10), D_6, D_7, D_8 – положительные постоянные. Для вывода оценок (2.11) достаточно в исходной задаче сделать замену $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - u^s(x)$, $\tilde{w}(x,t) = w(x,t) - w^s(x)$, $\tilde{f}(t) = f - f^s$. При этом входные данные заменяются на $\tilde{q}_j(t) = q_j(t) - q_j^s$, $j=1,2,3$; $\tilde{g}(x,t) = g(x,t) - g^s(x)$.

Замечание 3. Если правые части неравенств (2.10) ограничены экспонентой ($\exp(-\alpha\tau)$, $\alpha > 0$), тогда решение обратной начально-краевой задачи экспоненциально с ростом времени стремится к стационарному режиму $u^s(x)$, f^s, определяемому формулами (2.6)-(2.8).

Замечание 4. Полученные результаты можно интерпретировать как устойчивость стационарного решения (2.6)-(2.8) при выполнении, например, условий (2.10).

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта РФФИ № 20-01-00234

Литература

[1] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N. Y., Marcel Dekker, 1999.

[2] Cannot J. R., Lin Y. Determination of a Parameter $p(t)$ in Some Quassi-Liner Parabolic Defferential Equations // Inverse Problems. 1998. Vol. 4. – P. 35-45.

[3] Kozhanov A. I. Parabolic Equations with an Unknown Time-Dependent Coefficient // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2005. Vol. 45. № 12. – P. 2085-2101.

[4] Pyatkov S. G., Safonov E. I. On Some Classes on Linear Inverse Problems for Parabolic Equations // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. – P. 777-799 (In Russian).

[5] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. Изд-во "Мир 1968. (A. Friedman. Partial Differential Equations of Parabolic Type.)

[6] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

[7] Андреев В. К., Лемешкова Е. Н. Линейные задачи конвективных движений с поверхностями раздела. Красноярск: Сиб. федер. ун-т. 2018. – 204 с.

[8] Andreev V. K., Magdenko E. P. On the Asymptotic Behavior of the Conjugate Problem Describing a Creeping Axisymetric Thermocapillary Motion // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2020. Vol. 13. № 1. – P. 26-36.

УДК 517.927.25

О ГЛОБАЛЬНЫХ КОНТИНУУМАХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Х. А. Асадов
Бакинский Государственный Университет
Баку, Азербайджан
e-mail: xaqani314@mail.ru

Asadov H. A. On global continuums of solutions to some nonlinear eigenvalue problems.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$(p(x)y'')'' - (q(x)y')' = \lambda r(x)y + g(x, y, y', y'', y''', \lambda)y, \; x \in (0, 1), \tag{1}$$

при граничных условиях

$$y'(0)\cos\alpha - (py)''(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{3}$$

$$y'(1)\cos\gamma + (py'')(1)\sin\gamma = 0, \tag{4}$$

$$(a\lambda + b)y(1) - (c\lambda + d)Ty(1) = 0, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{R} -$ спектральный параметр, $Ty \equiv y''' - qy'$, функция $p(x) -$ положительна и имеет абсолютно непрерывную производную на $[0, 1]$, функция $q(x) -$ положительна и абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, функция $r(x) -$ положительна и непрерывна на $[0, 1]$, α, β, γ, $a, b, c, d -$ действительные постоянные такие, что α, β, $\gamma \in [0, \pi/2]$, $bc - ad > 0$. Функция h представима в виде $f + g$, где функции $f, g \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^5; \mathbb{R})$ удовлетворяют следующим условиям: существует число $M > 0$ такое, что

$$\left|\frac{f(x, y, s, v, w, \lambda)}{y}\right| \leq M, \; (x, u, s, v, w) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^5, \; y \neq 0; \tag{6}$$

$$g(x, u, s, v, w, \lambda) = o\,(|y| + |s| + |\upsilon| + |w|) \text{ при } |y| + |s| + |v| + |w| \to 0 \tag{7}$$

и

$$g(x, u, s, v, w, \lambda) = o\,(|y| + |s| + |\upsilon| + |w|) \text{ при } |y| + |s| + |v| + |w| \to +\infty, \tag{8}$$

равномерно по $(x, \lambda) \in [0, 1] \times \Lambda$ для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

Собственные значения линейной задачи, полученной из (1)–(5) при $h \equiv 0$, являются действительными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lambda_k > 0$ при $k \geq 2$ [1, теорема 2.2].

Пусть $E = C^3[0,1] \cap B.C.-$ банахово пространство с нормой $||y||_3 = \sum_{i=0}^{3} ||y^{(s)}||_\infty$, $||y||_\infty = \max_{x\in[0,1]} |y(x)|$, где $B.C.-$ множество функций, удовлетворяющих граничным условиям (2)-(4).

Отметим, что нелинейная задача (1)–(5) в случае, когда функции f и g удовлетворяют условиям (6) и (7), соответственно, в окрестности точки $(u, s, v, w) = 0$, исследована в работе [2], а в случае, когда функции f и g удовлетворяет условиям (6) и (8), соответственно, в окрестности точки $(u, s, v, w) = \infty$, – в [3]. В силу [2, теорема 3] для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\nu \in \{+, -\}$ существует связная компонента C_k^ν замыкания множества нетривиальных решений задачи (1)-(5), которая содержит $I_k \times \{0\}$, содержится в $(\mathbb{R} \times S_k^\nu) \cup (I_k \times \{0\})$ и неограниченна в $\mathbb{R} \times E$, где $S_k^\nu-$ множество функции $y \in E$, обладающих узловыми свойствами собственных функций линейной задачи, полученной из (1)-(5) при $h \equiv 0$, $I_k = [\lambda_k - M/r_0, \lambda_k + M/r_0]$, $r_0 = \min_{x\in[0,1]} r(x)$.

***Замечание* 1**. Мы добавив бесконечно удаленные точки $\{(\lambda, \infty) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ в наше пространство $\mathbb{R} \times E$ и определив соответствующую топологию на результирующем множестве, получаем, что (λ, ∞) является элементом пространства $\mathbb{R} \times E$.

В силу [3, теорема 1] для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\nu \in \{+, -\}$ существуют окрестность Q_k^ν отрезка $I_k \times \{\infty\}$ и связная компонента D_k^ν замыкания множества нетривиальных решений задачи (1)-(5), содержащая $I_k \times \{\infty\}$ такие, что $(D_k^\nu \backslash (I_k \times \{\infty\}) \cap Q_k^\nu) \subset \mathbb{R} \times S_k^\nu$ и либо D_k^ν пересекает отрезок $I'_k \times \{\infty\}$ вдоль множества $\mathbb{R} \times S_{k'}^{\nu'}$ при некотором $(k', \nu') \neq (k, \nu)$, либо D_k^ν пересекает $\mathbb{R} \times \{0\}$ при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$, либо $Pr_{\mathbb{R}\times\{0\}}(D_k^\nu)$ неограничена, где через $Pr_{\mathbb{R}\times\{0\}}(D_k^\nu)$ обозначена естественная проекция D_k^ν на $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Основным результатом настоящей заметки является следующая

***Теорема* 1**. Пусть выполняются условия (6)-(8). Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\nu \in \{+, -\}$ имеет место соотношение: $(D_k^\nu \backslash (I_k \times \{\infty\}) \subset \mathbb{R} \times S_k^\nu$, и следовательно, D_k^ν не пересекает отрезок $I'_k \times \{\infty\}$ вдоль множества $\mathbb{R} \times S_{k'}^{\nu'}$ при всех $(k', \nu') \neq (k, \nu)$. Кроме того, если D_k^ν пересекает $\mathbb{R} \times \{0\}$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda \in I_k$, а если C_k^ν пересекает $\mathbb{R} \times \{\infty\}$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda \in I_k$.

Литература

[1] Керимов Н. Б., Алиев З. С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. – С. 886-895.

[2] Aliyev Z. S., Asadov X. A. Global bifurcation from zero in some fourth-order nonlinear eigenvalue problems // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2021. Vol. 44, № 2. – P. 981-992.

[3] Асадов Х. А. Глобальная бифуркация от бесконечности в некоторых нелинейных задачах на собственные значения со спектральным параметром в граничном условии // Материалы Международной конференции "Воронежская зимняя школа". Воронеж. 2021. С. 38-39.

УДК 536.25

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОЛЗУЩЕМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОЛОСЕ

Азанов А. А.
Сибирский федеральный университет
Красноярск
e-mail: andreiazanov@mail.ru
Андреев В. К.
ИВМ СО РАН
Красноярск
e-mail: andr@icm.krasn.ru

Azanov A. A., Andreev V. K. Solution of the problem of creeping motion of a fluid with a free boundary with a special velocity field in a three-dimensional band. In this paper, we study the problem of creeping convective motion of a viscous heat-conducting liquid with a flat free boundary. To describe it, we use the linear Oberbeck-Boussinesq model, which includes the Stokes system and the heat equation. It is assumed that the velocity field has a special form [1], and the temperature is a quadratic function x and y. Then the problem is reduced to a system of five equations. The resulting initial-boundary value problem is the inverse of the pressure gradients. In the process of solving the problem, a stationary flow regime was found. The non-stationary solution is obtained in the form of quadratures in Laplace images. The conditions for the input data are determined, under which the non-stationary solution enters the stationary mode over time.

В работе изучается задача о ползущем конвективном движении вязкой теплопроводной жидкости с плоской свободной границей. Для его описания используется линейная модель Обербека-Буссинеска, которая включает в себя систему Стокса и уравнение теплопроводности. Предполагается, что поле скоростей имеет специальный вид [1], температура есть квадратичная функция по x и y. Тогда задача редуцируется к системе пяти уравнений. Возникающая начально-краевая задача является обратной относительно градиентов давления. В процессе решения поставленной задачи был найден стационарный режим течения. Нестационарное решение получено в виде квадратур в образах по Лапласу. Определены условия на входные данные, при которых со временем нестационарное решение выходит на стационарный режим.

1 Постановка задачи и вывод основных уравнений

Будем искать решение уравнений Обербека-Буссинеска в следующей форме

$$u^1(x,y,z,t) = (f(z,t)+h(z,t))x,\ u^2(x,y,z,t) = (f(z,t)-h(z,t))y,$$
$$u^3(x,y,z,t) = -2\int_0^z f(\xi,t)d\xi,\ p(x,y,z,t) = \bar{p}(x,y,z,t) - \rho g z, \qquad (1)$$
$$T(x,y,z,t) = a(z,t)x^2 + c(z,t)y^2 + \theta(z,t).$$

где $u(x,y,z,t) = (u^1(x,y,z,t), u^2(x,y,z,t), u^3(x,y,z,t))$ – вектор скорости, u^1, u^2, u^3 – его проекции на оси декартовой системы координат.

В (1) функция $\bar{p}(x,y,z,t)$ носит название модифицированного давления: оно есть отклонение истинного давления от гидростатического.

Будем интерпретировать формулы (1) как движение жидкости между неподвижной пластиной $z=0$ и плоской свободной границей $z=l$. Тогда на нижней стенке должны быть выполнены условия прилипания $u^1(x,y,0,t) = u^2(x,y,0,t) = u^3(x,y,0,t) = 0$, и задана температура: $T(x,y,0,t) = a_1(t)x^2 + c_1(t)y^2$.

Рассмотрим условия на свободной границе. [2] Кинематическое условие имеет вид

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = V_n,$$

откуда (т.к. $V_n = 0$) при $z=l$ с учетом (1) получим

$$\int_0^l f(\xi,t)d\xi = 0. \qquad (2)$$

Поскольку поверхность плоская, динамическое условие имеет вид

$$\mathcal{P}\cdot\mathbf{n} + p_g\,\mathbf{n} = \nabla_\Gamma\sigma$$

где $\mathcal{P} = -(\bar{p}-\rho g z)I + 2\mu\,D(\mathbf{u})$ – тензор напряжений, p_g – давление газа, $\sigma(T) = \sigma_0 - \varkappa(T-T_0)$ – коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{n} = (0,0,1)$.

Проектируя интегральное равенство на касательные к границе векторы $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ и на нормаль $\mathbf{n}$, после некоторых выкладок получим условия на функции f и h и условие на p при $z=l$

$$\rho\nu(f_z+h_z) = -2\varkappa a,\ \rho\nu(f_z-h_z) = -2\varkappa c. \qquad (3)$$

$$p_g - \bar{p} + \rho g z - 2\rho\nu f = 0. \qquad (4)$$

Также используется условие третьего рода для температуры на свободной границе [2]

$$k\frac{\partial T}{\partial n} + b(T-\theta_g) = 0. \qquad (5)$$

Обращаясь к (1) из (2), (3), (5), условий прилипания на нижней стенке и задания температуры, выводим граничные условия для функций $a(z,t)$, $c(z,t)$

$\theta(z,t)$ $f(z,t)$ $h(z,t)$:

$$
\begin{gathered}
f(0,t)=h(0,t)=0,\ \int_0^l f(\xi,t)d\xi=0,\\
a(0,t)=a_1(t),\ c(0,t)=c_1(t),\ \theta(0,t)=0,\\
ka_z(l,t)+ba(l,t)=0,\ kc_z(l,t)+bc(l,t)=0,\ k\theta_z(l,t)+b(\theta(l,t)-\theta_g)=0,\\
f_z(l,t)=-\frac{\varkappa}{\rho\nu}(a(l,t)+c(l,t)),\ h_z(l,t)=-\frac{\varkappa}{\rho\nu}(a(l,t)-c(l,t)),
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где b – положительная эмпирическая постоянная, называемая коэффициентом межфазного взаимодействия, $\theta_g(t)$ – известная температура газа, k – коэффициент теплопроводности. Кроме того, выполнены начальные условия

$$
\begin{gathered}
a(z,0)=a_0(z),\ c(z,0)=c_0(z),\ \theta(z,0)=0,\\
f(z,0)=0,\ h(z,0)=0
\end{gathered}
\tag{7}
$$

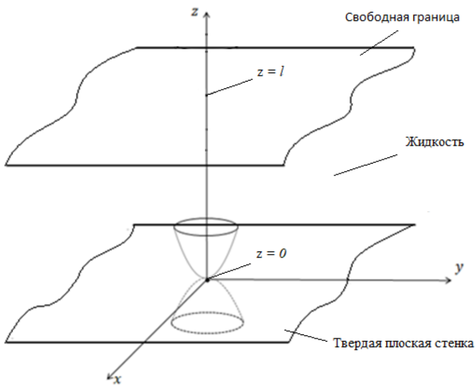


Рис. 1: Схема области течения

Замечание 1. Поскольку $rot\mathbf{u}=((h_z-f_z)y,(h_z+f_z)x,0)\neq 0$, то движение является вихревым.

Подставим выражения (1) в уравнения систему Обербека-Буссинеска. После некоторых преобразований получим систему уравнений

$$
\begin{gathered}
a_t+2a(f+h)-2a_z\int_0^z f(\xi,t)d\xi=\chi a_{zz},\\
c_t+2c(f-h)-2c_z\int_0^z f(\xi,t)d\xi=\chi c_{zz},\\
\theta_t-2\theta_z\int_0^z f(\xi,t)d\xi=2\chi(a+c)+\chi\theta_{zz},\\
f_t+f^2+h^2-2f_z\int_0^z f(\xi,t)d\xi=\nu f_{zz}-\beta g\int_0^z[a(\xi,t)+c(\xi,t)]d\xi+n_1(t),\\
h_t+2fh-2h_z\int_0^z f(\xi,t)d\xi=\nu h_{zz}-\beta g\int_0^z[a(\xi,t)-c(\xi,t)]d\xi+n_2(t),
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где $n_1(t), n_2(t)$ – пока произвольные функции времени, физически представляющие собой добавочные градиенты давления. Модифицированное давление (функция $\bar{p}(x,y,z,t)$) найдется в следующем виде

$$\frac{1}{\rho}\bar{p}(x,y,z,t) = x^2(g\beta\int_0^z a(\xi,t)d\xi - \frac{1}{2}(n_1(t)+n_2(t))) + y^2(g\beta\int_0^z c(\xi,t)d\xi -$$
$$-\frac{1}{2}(n_1(t)-n_2(t))) - 2\nu f(z,t) - gz + g\beta\int_0^z \theta(\xi,t)d\xi +$$
$$+2\int_0^z (z-\xi)f_t(\xi,t)s\xi + 2(\int_0^z f(\xi,t)d\xi)^2 + \alpha_0(t),$$

где $\alpha_0(t)$ - произвольная функция времени, которая определится из (4). Заметим, что задача (2), (4), (5) является обратной, поскольку функции $n_j(t)$ – неизвестные.

Перепишем (5) в безразмерном виде. Для этого введем безразмерные параметры и величины: $\xi = z/l$, $\xi \in [0,1]$, $\tau = t\chi/l^2$, $a_* = \max(\max_{z\in(0,l)}|a_0(z)|, \max_{t\geq 0}|a_1(t)|)$, $a(z,t) = a_*A(\xi,\tau)$, $c(z,t) = a_*C(\xi,\tau)$, $\theta(z,t) = a_*l^2\Theta(\xi,\tau)$, $f(z,t) = \chi/l^2MF(\xi,\tau)$, $h(z,t) = \chi/l^2MH(\xi,\tau)$, $n_j(t) = \chi^2/l^4MN_j(\tau)$, $j=1,2$, $R = RaPr/M = Pr\rho\beta gl^2/\varkappa = O(1)$.

$$\begin{gathered}
A_\tau + 2MA(F+H) - 2MA_\xi\int_0^\xi F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon = A_{\xi\xi},\\
C_\tau + 2MC(F-H) - 2MA_\xi\int_0^\xi F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon = C_{\xi\xi},\\
\Theta_\tau - 2M\Theta_\xi\int_0^\xi F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon = 2(A+C) + \Theta_{\xi\xi},\\
F_\tau + MF^2 + MH^2 - 2MF_\xi\int_0^\xi F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon = PrF_{\xi\xi} -\\
-R\int_0^\xi [A(\varepsilon,\tau)+C(\varepsilon,\tau)]d\varepsilon + N_1(\tau),\\
H_\tau + 2MFH - 2MH_\xi\int_0^\xi F(\varepsilon,\tau)d\varepsilon = PrH_{\xi\xi} -\\
-R\int_0^\xi [A(\varepsilon,\tau)-C(\varepsilon,\tau)]d\varepsilon + N_2(\tau).
\end{gathered} \tag{9}$$

2 Линейная начально-краевая задача

В системе (6) "вычеркнем" все нелинейные слагаемые. Основанием для этого является то, что мы считаем число Марангони малым. $M = \varkappa a_* l^3/\rho\nu\chi$. Тогда неизвестные функции $F(\xi,\tau)$, $H(\xi,\tau)$, $A(\xi,\tau)$, $C(\xi,\tau)$, $\Theta(\xi,\tau)$, $N_1(\tau)$, $N_2(\tau)$ удовлетворяют в области $(0,1)\times(0,\tau_0)$ уравнениям

$$
\begin{gathered}
A_\tau = A_{\xi\xi},\ C_\tau = C_{\xi\xi},\ \Theta_\tau = 2(A+C) + \Theta_{\xi\xi},\\
F_\tau = PrF_{\xi\xi} - R\int_0^\xi [A(\varepsilon,\tau) + C(\varepsilon,\tau)]d\varepsilon + N_1(\tau),\\
H_\tau = PrH_{\xi\xi} - R\int_0^\xi [A(\varepsilon,\tau) - C(\varepsilon,\tau)]d\varepsilon + N_2(\tau),
\end{gathered} \tag{10}
$$

с граничными и начальными условиями

$$
\begin{gathered}
A(0,\tau) = A_1(\tau),\ C(0,\tau) = C_1(\tau),\ \Theta(0,\tau) = F(0,\tau) = H(0,\tau) = 0,\\
A_\xi(1,\tau) + BiA(1,\tau) = 0,\ C_\xi(1,\tau) + BiC(1,\tau) = 0,\ \Theta_\xi(1,\tau) + Bi\Theta(1,\tau) - \Theta_g = 0,\\
F_\xi(1,\tau) = -(A(1,\tau) + C(1,\tau)),\ H_\xi(1,\tau) = -(A(1,\tau) - C(1,\tau)),
\end{gathered} \tag{11}
$$

$$
\int_0^1 F(\xi,\tau)d\xi = 0, \tag{12}
$$

$$
A(\xi,0) = A_0(\xi),\ C(\xi,0) = C_0(\xi),\ \Theta(\xi,0) = 0, \tag{13}
$$

$$
F(\xi,0) = H(\xi,0) = 0, \tag{14}
$$

где $Ra = g\beta l^5 a_*/\nu\chi$ – число Рэлея, $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля, $Bi = bl/k$ – число Био.

Условия (14) физически означают, что жидкость в начальный момент времени находилась в покое. Функции $A_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ являются заданными, $N_j(\tau)$ (наряду с $F(\xi,\tau)$, $H(\xi,\tau)$, $A(\xi,\tau)$, $C(\xi,\tau)$, $\Theta(\xi,\tau)$) – искомыми на промежутке $0 \le \tau \le \tau_0$. Тем самым, поставленная задача является обратной. Однако, для определения функций $N_j(\tau)$ имеется только одно условие, именно (9). Еще одно условие появится, если

$$
\int_0^1 H(\xi,\tau)d\xi = 0, \tag{15}
$$

Замечание 2. Условия (9) и (15) фактически означают, что движение по x и y рассматривается в некоторой кювете, ограниченной по x и y.

Заметим, что для гладкого решения должны быть выполнены условия согласования при $\tau = 0$: $A_1(0) = A_0(0)$, $C_1(0) = C_0(0)$.

3 Стационарное решение

Найдем стационарное решение поставленной задачи (7)-(15), для которого $A(\xi,\tau) = A^0(\xi)$, $C(\xi,\tau) = C^0(\xi)$, $F(\xi,\tau) = F^0(\xi)$, $H(\xi,\tau) = H^0(\xi)$, $N_1 = N_1^0$, $N_2 = N_2^0$, (N_j^0- постоянные), при этом начальные условия (13), (14) не учитываются. Такое решение легко находится прямым интегрированием всех уравнений. Удовлетворяя соответствующим граничным условиям, находим $A^0(\xi)$, $C^0(\xi)$, $\Theta^0(\xi)$. Постоянные N_1^0 и N_2^0 входят в уравнения для $F^0(\xi)$, $H^0(\xi)$ и определяются из условий (9), (15). Считаем, что $A_1^0 \ne 0$ и введем безразмерную величину $\delta_1 = C_1^0/A_1^0$. После некоторых вычислений получим представление стационарного решения в безразмерной форме:

$$
\begin{gathered}
\bar{A}(\xi) = \frac{A^0(\xi)}{A_1^0} = -\frac{Bi}{1+Bi}\xi + 1, \ \bar{C}(\xi) = \frac{C^0(\xi)}{A_1^0} = -\frac{\delta_1 Bi}{1+Bi}\xi + \delta_1, \\
\bar{\Theta}(\xi) = \frac{\Theta^0(\xi)}{A_1^0} = \frac{Bi}{3}\frac{(1+\delta_1)}{1+Bi}\xi^3 - (1+\delta_1)\xi^2 + \\
+[\frac{Bi\Theta_g}{1+Bi} + \frac{(2+Bi)(1+\delta_1)}{1+Bi} - Bi\frac{(\frac{1}{3}Bi+1)(1+\delta_1)}{(1+Bi)^2}]\xi, \\
\bar{F}(\xi) = \frac{F^0(\xi)}{A_1^0} = \frac{R}{Pr}[\frac{1}{8}\frac{Bi(1+\delta_1)}{1+Bi}\xi^4 - \frac{1}{3}(1+\delta_1)\xi^3] - \frac{1}{2}\frac{1}{Pr}\xi^2 N_1^0 + \\
+[\frac{Bi(1+\delta_1)}{1+Bi} - (1+\delta_1)]\xi, \\
\bar{H}(\xi) = \frac{H^0(\xi)}{A_1^0} = \frac{R}{Pr}[\frac{1}{8}\frac{Bi(1-\delta_1)}{1+Bi}\xi^4 - \frac{1}{3}(1-\delta_1)\xi^3] - \frac{1}{2}\frac{1}{Pr}\xi^2 N_2^0 + \\
+[\frac{Bi(1-\delta_1)}{1+Bi} - (1-\delta_1)]\xi, \\
N_1^0 = \frac{1}{2}R[\frac{3}{10}\frac{Bi(1+\delta_1)}{1+Bi} - (1+\delta_1)] + 3Pr[\frac{Bi(1+\delta_1)}{1+Bi} - (1+\delta_1)], \\
N_2^0 = \frac{1}{2}R[\frac{3}{10}\frac{Bi(1-\delta_1)}{1+Bi} - (1-\delta_1)] + 3Pr[\frac{Bi(1-\delta_1)}{1+Bi} - (1-\delta_1)],
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Величина δ_1 может принимать произвольные значения.

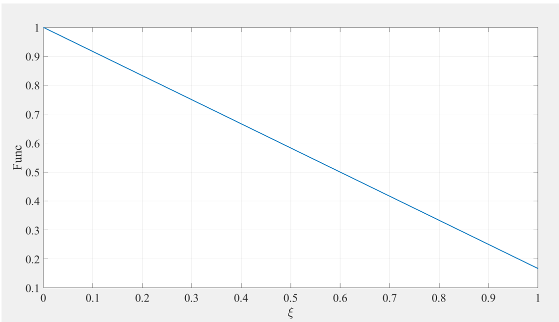


Рис. 2: График функции $\bar{A}(\xi)$ при: $Bi = 5$

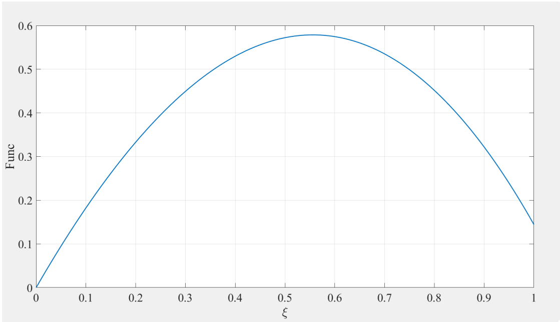


Рис. 3: График функции $\bar{\Theta}(\xi)$ при: $Bi = 2,\ \delta_1 = 0.5,\ \Theta_g = 0.8$

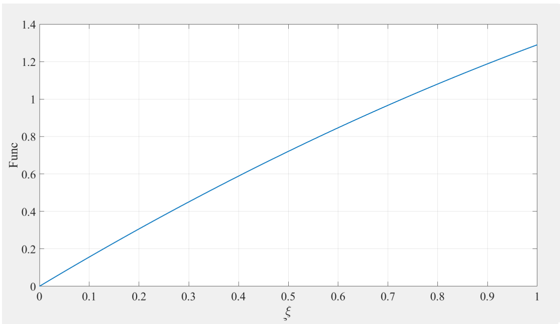


Рис. 4: График функции $\bar{F}(\xi)$ при: $Bi = 1.6,\ \delta_1 = 2,\ R = 40,\ Pr = 7 * 10^4$

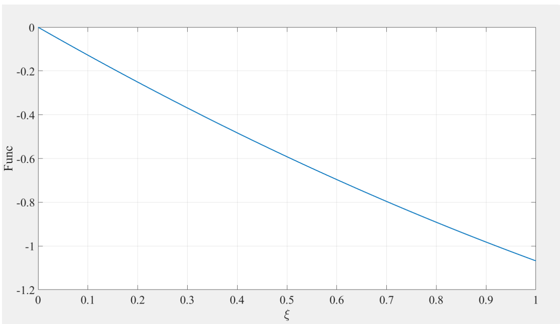


Рис. 5: График функции $\bar{H}(\xi)$ при: $Bi = 1.2,\ \delta_1 = 0.2,\ R = 40,\ Pr = 7 * 10^4$

Таким образом, в рассматриваемом классе решений полностью определен режим конвективного стационарного течения в зависимости от физических параметров, жидкости и толщины слоя.

4 Нестационарное решение

При решении линейных начально-краевых задач уравнений математической физики, когда коэффициенты уравнений и граничных условий не зависят от времени, часто применяется преобразование Лапласа [3]. Оно применимо для широкого класса функций, в частности, имеющих конечное число точек разрыва 1-го рода.

Найдем нестационарное решение задачи (7)-(15) с помощью преобразования Лапласа. Метод сводит решение поставленной нестационарной задачи с частными производными к решению системы ОДУ.

Применим преобразование Лапласа для следующей начально-краевой задачи

$$A_\tau(\xi,\tau) = A_{\xi\xi}(\xi,\tau),$$
$$A(\xi,0) = A_0(\xi),$$
$$A(0,\tau) = A_1(\tau),\ A_\xi(1,\tau) + BiA(1,\tau) = 0.$$

В образах по Лапласу получим краевую задачу для ОДУ

$$\begin{gathered}\hat{A}_{\xi\xi}(\xi,s) - s\hat{A}(\xi,s) = -A_0(\xi),\\ \hat{A}(0,s) = \hat{A}_1(s),\ \hat{A}_\xi(1,s) + Bi\hat{A}(1,s) = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Проводя простые выкладки, найдем $\hat{A}(\xi,s)$. Далее, учитывая (17), получим

$$\hat{A}(\xi,s) = c_1 sh(\sqrt{s}\xi) + \hat{A}_1(s)ch(\sqrt{s}\xi) - \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\xi A_0(\varepsilon)sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon, \tag{18}$$

$$c_1 = \frac{\frac{Bi}{\sqrt{s}}\int_0^1 A_0(\varepsilon)sh(\sqrt{s}(1-\varepsilon))d\varepsilon - \hat{A}_1(s)[\sqrt{s}sh(\sqrt{s}) + Bi\,ch(\sqrt{s})] + \frac{A_0(0)}{\sqrt{s}}sh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}ch(\sqrt{s}) + Bi\,sh(\sqrt{s})}$$

Аналогично, для функции $\hat{C}(\xi,s)$ имеем задачу

$$\hat{C}_{\xi\xi}(\xi,s) - s\hat{C}(\xi,s) = -C_0(\xi),$$
$$\hat{C}(0,s) = \hat{C}_1(s),\ \hat{C}_\xi(1,s) + Bi\hat{C}(1,s) = 0.$$

Откуда

$$\hat{C}(\xi,s) = c_2 sh(\sqrt{s}\xi) + \hat{C}_1(s)ch(\sqrt{s}\xi) - \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\xi C_0(\varepsilon)sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon, \tag{19}$$

$$c_2 = \frac{\frac{Bi}{\sqrt{s}}\int_0^1 C_0(\varepsilon)sh(\sqrt{s}(1-\varepsilon))d\varepsilon - \hat{C}_1(s)[\sqrt{s}sh(\sqrt{s}) + Bi\,ch(\sqrt{s})] + \frac{C_0(0)}{\sqrt{s}}sh(\sqrt{s})}{\sqrt{s}ch(\sqrt{s}) + Bi\,sh(\sqrt{s})}$$

Следовательно, $\hat{A}(\xi,s)$ и $\hat{C}(\xi,s)$ – известные функции. Аналогично найдем функцию $\hat{\Theta}(\xi,s)$

$$\hat{\Theta}(\xi,s) = c_3 sh(\sqrt{s}\xi) - \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\xi (\hat{A}(\varepsilon,s) + \hat{C}(\varepsilon,s))sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon, \tag{20}$$

$$c_3=\frac{\frac{2Bi}{\sqrt{s}}\int_0^1(\hat{A}(\varepsilon,s)+\hat{C}(\varepsilon,s))sh(\sqrt{s}(1-\varepsilon))d\varepsilon+2sh(\sqrt{s})\int_0^1(\hat{A}(\varepsilon,s)+\hat{C}(\varepsilon,s))sh(\sqrt{s}\varepsilon)d\varepsilon}{\sqrt{s}ch(\sqrt{s})+Bi\,sh(\sqrt{s})}+$$

$$+\frac{2ch(\sqrt{s})\int_0^1(\hat{A}(\varepsilon,s)+\hat{C}(\varepsilon,s))ch(\sqrt{s}\varepsilon)d\varepsilon+Bi\hat{\Theta}_g(s)}{\sqrt{s}ch(\sqrt{s})+Bi\,sh(\sqrt{s})}$$

Применим операционный метод для функции $F(\xi,\tau)$, считая функции $\hat{A}(\xi,s)$ и $\hat{C}(\xi,s)$ – известными, получим в образах по Лапласу задачу

$$\begin{gathered}\hat{F}_{\xi\xi}(\xi,s)-\frac{s}{Pr}\hat{F}(\xi,s)=\frac{R}{Pr}\int_0^\xi(\hat{A}(\varepsilon,s)+\hat{C}(\varepsilon,s))d\varepsilon+\frac{1}{Pr}\hat{N}_1(s),\\ \hat{F}(0,s)=0,\ \hat{F}(1,s)=-(\hat{A}(1,s)+\hat{C}(1,s)).\end{gathered}\tag{21}$$

Тогда решение (21) имеет вид

$$\begin{gathered}\hat{F}(\xi,s)=-\frac{sh(\sqrt{s}\xi)}{\sqrt{s}ch(\sqrt{s})}(\hat{A}(1,s)+\hat{C}(1,s))-\\ -\frac{R}{Pr}\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\xi\int_0^\varepsilon(\hat{A}(z,s)+\hat{C}(z,s))dz sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon+\\ +\frac{1}{Pr\sqrt{s}}[\int_0^\xi sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon-\frac{th(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}]\hat{N}_1(s).\end{gathered}\tag{22}$$

Находим $\hat{N}_1(s)$ из (15)

$$\begin{gathered}\hat{N}_1(s)=\frac{Pr\frac{ch(\sqrt{s})-1}{ch(\sqrt{s})}(\hat{A}(1,s)+\hat{C}(1,s))}{\int_0^1\int_0^\xi sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon d\xi-\frac{th(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}}+\\ +\frac{R\int_0^1\int_0^\xi\int_0^\varepsilon(\hat{A}(z,s)+\hat{C}(z,s))dz sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon d\xi}{\int_0^1\int_0^\xi sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon d\xi-\frac{th(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}}.\end{gathered}\tag{23}$$

Аналогично находим функцию $\hat{H}(\xi,s)$

$$\begin{gathered}\hat{H}(\xi,s)=-\frac{sh(\sqrt{s}\xi)}{\sqrt{s}ch(\sqrt{s})}(\hat{A}(1,s)-\hat{C}(1,s))-\\ -\frac{R}{Pr}\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\xi\int_0^\varepsilon(\hat{A}(z,s)-\hat{C}(z,s))dz sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon+\\ +\frac{1}{Pr\sqrt{s}}[\int_0^\xi sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon-\frac{th(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}]\hat{N}_2(s).\end{gathered}\tag{24}$$

Функция $\hat{N}_2(s)$ определится из (9):

$$\begin{gathered}\hat{N}_2(s)=\frac{Pr\frac{ch(\sqrt{s})-1}{ch(\sqrt{s})}(\hat{A}(1,s)-\hat{C}(1,s))}{\int_0^1\int_0^\xi sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon d\xi-\frac{th(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}}+\\ +\frac{R\int_0^1\int_0^\xi\int_0^\varepsilon(\hat{A}(z,s)-\hat{C}(z,s))dz sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon d\xi}{\int_0^1\int_0^\xi sh(\sqrt{s}(\xi-\varepsilon))d\varepsilon d\xi-\frac{th(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}}.\end{gathered}\tag{25}$$

5 Условия стремления нестационарного решения к заданному стационарному режиму

Предположим, что существуют пределы

$$\lim_{\tau\to\infty} A_1(\tau) = A_1^0,\ \lim_{\tau\to\infty} C_1(\tau) = C_1^0, \tag{26}$$

и производные $A_1'(\tau)$, $C_1'(\tau)$ имеют изображения по Лапласу. Тогда [3]

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} s\hat{A}_1(s) = \lim_{\tau\to\infty} A_1(\tau) = A_1^0, \\ &\lim_{s\to 0} s\hat{C}_1(s) = \lim_{\tau\to\infty} C_1(\tau) = C_1^0. \end{aligned} \tag{27}$$

Далее нам понадобятся асимптотические выражения при $\tau \to 0$ функций

$$sh(\tau) \sim \tau + \frac{\tau^3}{6},\ ch(\tau) \sim 1 + \frac{\tau^2}{2}.$$

Доказательство приведем для функции $\hat{A}(\xi, s)$:

$$\lim_{s\to 0} s\hat{A}(\xi, s) \sim \lim_{s\to 0}(s\xi\frac{\frac{Bi}{\sqrt{s}}\int_0^1 A_0(\varepsilon)sh(\sqrt{s}(1-\varepsilon))d\varepsilon - \hat{A}_1(s)[s+Bi] + \frac{A_0(0)}{\sqrt{s}}\sqrt{s}}{1+Bi} +$$
$$+s\hat{A}_1(s)) = -A_1^0(\tau)\frac{Bi}{1+Bi} + A_1^0(\tau) = A^0(\xi).$$

Остальные доказательств проводятся аналогично.

Таким образом, для полученных в квадратурах формул (18)-(20), (22)-(25) имеет место

Лемма 1. При условиях (26), (27) нестационарное решение задачи (7)-(15) выходит на стационарный режим (16).

6 Нахождение оригиналов искомых функций

Функции (18), (19) являются изображениями по Лапласу. Для вычисления оригиналов используется обратное преобразование Лапласа. Предполагается, что $A_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ имеют вид

$$A_1(\tau) = A_{10} + \varepsilon_1 \exp{[-\gamma_1\tau]}sin(\omega_1\tau),\ C_1(\tau) = C_{10} + \varepsilon_2 \exp{[-\gamma_2\tau]}sin(\omega_2\tau)$$

Тогда их образы легко находятся из таблицы преобразования Лапласа [4]

$$\hat{A}_1(\tau) = \frac{A_{10}}{s} + \frac{\varepsilon_1\omega_1}{(s+\gamma_1)^2+\omega_1^2},\ \hat{C}_1(\tau) = \frac{C_{10}}{s} + \frac{\varepsilon_2\omega_2}{(s+\gamma_2)^2+\omega_2^2} \tag{28}$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, т.е. граничный режим стабилизируется со временем. Если одно из значений $\gamma_1 \le 0$, $\gamma_2 \le 0$, то эффект стабилизации решения нет. Начальные условия $A_0(\xi)$, $C_0(\xi)$ предполагаем равные нулю. В этом случае нарушаются условия согласования, так как получаем $A_1(0) \ne A_0(0)$, $C_1(0) \ne C_0(0)$, то есть возникают разрывы 1 рода. Это допустимо, так как интегральное преобразование Лапласа применимо для функций, имеющих конечное число разрывов 1 рода. Тогда, подставляя (28) в (18), получим

$$\hat{A}(\xi, s) = (\frac{A_{10}}{s} + \frac{\varepsilon_1 \omega_1}{(s+\gamma_1)^2 + \omega_1^2})(-sh(\sqrt{s}\xi)\frac{\sqrt{s}sh(\sqrt{s}) + Bi\,ch(\sqrt{s})}{\sqrt{s}ch(\sqrt{s}) + Bi\,sh(\sqrt{s})} + ch(\sqrt{s}\xi)).$$

Применяя численный метод обратного преобразования Лапласа [5], получаем график функции $a(\xi, \tau)$

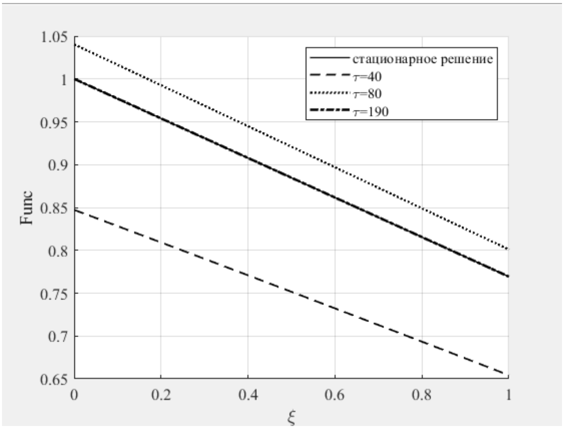


Рис. 6: График функции $A(\xi, \tau)$

при: $A_{10} = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\gamma_1 = 0.04$, $\omega_1 = 0.1$.

Функция $\hat{C}(\xi, s_1)$ будет иметь вид

$$\hat{C}(\xi, s) = (\frac{C_{10}}{s} + \frac{\varepsilon_2 \omega_2}{(s+\gamma_2)^2 + \omega_2^2})(-sh(\sqrt{s}\xi)\frac{\sqrt{s}sh(\sqrt{s}) + Bi\,ch(\sqrt{s})}{\sqrt{s}ch(\sqrt{s}) + Bi\,sh(\sqrt{s})} + ch(\sqrt{s}\xi)).$$

График функции $C(\xi, \tau)$ аналогичен графику $A(\xi, \tau)$.

После обратного преобразования получим график функции $\Theta(\xi, \tau)$:

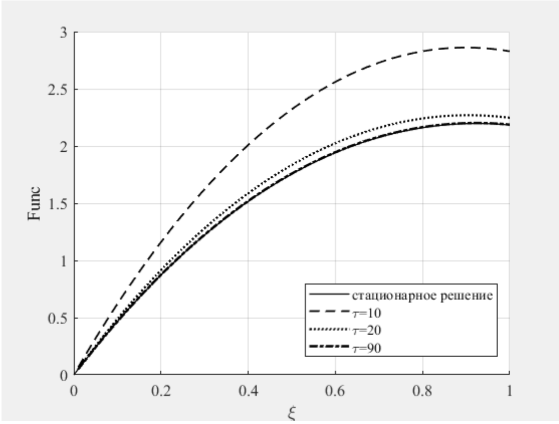


Рис. 7: График функции $\Theta(\xi, \tau)$

при $A_{10} = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\gamma_1 = 0.04$, $\omega_1 = 0.1$, $C_{10} = 2$, $\varepsilon_2 = 1$, $\gamma_2 = 0.06$, $\omega_2 = 0.2$.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

1. произведена редукция к решению линейных начально-краевых задач;
2. найдено стационарное решение с заданной температурой на нижней стенке;
3. получено нестационарное решение задачи в образах по Лапласу;
4. установлено, что нестационарное решение выходит на полученный стационарный режим с ростом времени;
5. для получения оригиналов функций нестационарного решения был использован численный метод обращения преобразования Лапласа.

Физические постоянные были взяты для воды при температуры $20°C$.

Полученные результаты могут быть использованы для проверки эффективности численных методов, использующихся для расчет конвективного движения вязких жидкостей.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1631)

Литература

[1] V. K. Andreev [and etc.], Mathematical Models of Convection, *Walter de*

Gruyter GmbH & Co. KG Berlin/Boston, 2012, 417 p.

[2] В. К. Андреев, Ю.А. Гапоненко, Математическое моделирование конвективных течений: учеб. пособие, *Красноярск: КрасГУ*, 2006, 392 с.

[3] М. А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, Методы Теории Функций Комплексного Переменного, *4-е изд., перер б. и доп. – М.: Наука*, 1973, 749 с.

[4] Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, *М.: Наука*, 1964, 488 с.

[5] F. R. Hoog, J. H. Knight, A. N. Stokes, An improved method for numerical inversion of Laplace transforms, *SIAM J.Sci.Stat.Comp.*, 1992, № 3, p. 357-366.

УДК 519.71

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЦИКЛОВ В ДВУМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ РАУСА-ГУРВИЦА [1]

Звягинцева Т. Е.
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург
e-mail: zv_tatiana@mail.ru, t.zvyagintceva@spbu.ru

Zvyagintseva T. E. The existence of cycles in a second-order discrete-time system with nonlinearity satisfying the Routh-Hurwitz condition. In this paper, a second-order discrete-time automatic control system is studied. It is assumed that the nonlinearity of this system is 2-periodic and satisfies the generalized Routh-Hurwitz condition. Systems with nonlinearities of this type are used in solving various applied natural science and technical problems. This system is explored for all allowed values of the parameters. Conditions on the parameters under which it is possible to construct the nonlinearity so that the system is not globally asymptotically stable are provided. In this case the system has a family of non-isolated cycles of period four.

Keywords: discrete-time second-order system, Aizerman's problem, absolute stability, periodic solution.

В работе изучается система автоматического управления второго порядка с дискретным временем, нелинейность которой является 2-периодической и удовлетворяет обобщенному условию Рауса-Гурвица. Системы с нелинейностями такого типа возникают при решении различных прикладных естественнонаучных и технических задач. Указанная система исследуется при всех допустимых значениях параметров. Выписываются условия на параметры, при выполнении которых нелинейность может быть построена так, что система не является глобально асимптотически устойчивой. При этом в системе существует семейство неизолированных циклов периода четыре.

Ключевые слова: система второго порядка с дискретным временем, проблема Айзермана, абсолютная устойчивость, периодическое решение.

Основы теории абсолютной устойчивости систем автоматического управления были заложены в сороковых годах прошлого столетия в работе А. И. Лу-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант РФФИ № 19-01-00388)

рье, В. Н. Постникова [1]. В классической формулировке задачи изучается система с непрерывным временем $\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma)$, $\sigma = c^*x$, состоящая из устойчивой стационарной линейной части и нелинейного блока. Предполагается, что функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет секторному условию $k_1\sigma^2 \le \varphi(\sigma)\sigma \le k_2\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Если указанная система асимптотически устойчива при замене $\varphi(\sigma)$ на линейную функцию $S\sigma$ для любой константы $S \in [k_1, k_2]$, то говорят, что нелинейность удовлетворяет обобщенным условиям Рауса-Гурвица, или лежит в гурвицевом угле.

В работе М. А. Айзермана [2] сформулирована известная гипотеза о том, что система с нелинейностью, лежащей в гурвицевом угле, является глобально асимптотически устойчивой. В. А. Плисс [3] построил систему третьего порядка, которая является контрпримером к гипотезе Айзермана, и разработал метод поиска периодических колебаний в системах с непрерывным временем, удовлетворяющих обобщенным условиям Рауса-Гурвица. В работах Г. А. Леонова и Н. В. Кузнецова [4,5] предложен новый метод построения контрпримеров и поиска периодических решений в таких системах.

Решению различных задач теории абсолютной устойчивости посвящено в последние десятилетия большое количество работ, интенсивно строится и развивается данная теория и для систем с дискретным временем, что обусловлено широким применением дискретных систем при изучении прикладных проблем, возникающих во многих областях современной науки и техники. Большой теоретический и практический интерес представляют системы с периодическими секторными нелинейностями.

Результаты классической теории для систем с непрерывным временем автоматически не переносятся на дискретный случай, системы с дискретным временем требуют отдельного изучения. В работах У. Хита, Дж. Карраско, М. де ла Сена [6,7] построены две системы второго порядка, которые служат контрпримерами к гипотезе Айзермана в дискретном случае. В одной из указанных систем существует цикл периода четыре, а в другой – цикл периода три.

В данной работе исследуется при всех допустимых значениях параметров дискретная система второго порядка с 2-периодической нелинейностью, удовлетворяющей обобщенным условиям Рауса-Гурвица. Результаты работы сформулированы в виде двух теорем. В первой теореме выписаны коэффициентные условия на параметры, при выполнении которых нелинейность системы может быть построена таким образом, что в системе существует семейство неизолированных циклов периода четыре. Во второй теореме предполагается, что нелинейность системы не только лежит в гурвицевом угле, но и удовлетворяет дополнительному секторному условию. Такая постановка вопроса встречается во многих работах по данной тематике. И в этом случае явно указаны условия, при выполнении которых в системе существует семейство циклов. Из доказательства теорем следует способ построения указанных нелинейностей.

Сформулируем строго задачу и результаты работы.

Рассмотрим систему второго порядка с дискретным временем

$$\begin{cases} x_{j+1} = y_j, \\ y_{j+1} = -\alpha y_j - \beta x_j - \varphi(\sigma_j), \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma_j = ay_j + bx_j$, $j \in N$, $a^2\beta - ab\alpha + b^2 \neq 0$. Будем считать, что при $\varphi(\sigma_j) \equiv 0$ система (1) асимптотически устойчива, то есть $(\alpha, \beta) \in \Delta$, где $\Delta = \{(\alpha, \beta) : |\alpha| - 1 < \beta < 1\}$. Будем считать для определенности, что $a > 0$.

Обозначим через Ω множество таких $S = const$, для которых система (1) с линейной функцией $\varphi(\sigma_j) = S\sigma_j$ асимптотически устойчива. Нетрудно показать, что множество Ω есть интервал (S_{min}, S_{max}) для каждого фиксированного набора параметров a, b, α, β. Значения S_{min} и S_{max} в явном виде выписаны в работе [8].

Положим в системе (1)

$$\varphi(\sigma_j) = S_j\sigma_j = S_j(ay_j + bx_j), \tag{2}$$

где $S_j \in \Omega$, $j \in N$. Определенная таким образом нелинейность удовлетворяет обобщенным условиям Рауса-Гурвица.

Если $4\beta \leq \alpha^2$, то положим $b_\pm = \frac{a}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)$.

Теорема 1. Если параметры системы (1) с нелинейностью вида (2) удовлетворяют одному из следующих условий 1–6:

1. $\alpha > 0$, $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$;
2. $\alpha > 0$, $4\beta \leq \alpha^2$, $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha},\ b_-\right) \cup \left(b_+,\ \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$;
3. $\alpha = 0$, $\beta > 0$;
4. $\alpha = 0$, $\beta \leq 0$, $b \in (-\infty,\ b_-) \cup (b_+,\ +\infty)$;
5. $\alpha < 0$, $4\beta > \alpha^2$, $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha},\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$;
6. $\alpha < 0$, $4\beta \leq \alpha^2$, $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha},\ b_-\right) \cup \left(b_+,\ -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$;

то существует 2-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, такая, что система имеет 4-периодические решения.

Заметим, что теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1'. Если $-\frac{\alpha}{a} \in \Omega$ и $b^2 - ab\alpha + a^2\beta > 0$, то существует 2-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Omega$, такая, что система (1) с нелинейностью вида (2) имеет циклы периода четыре.

Теперь будем считать, что нелинейность (2) системы (1) не только лежит в гурвицевом угле, но и удовлетворяет дополнительному секторному условию

$$\varphi(\sigma_j)\,\sigma_j \geq 0$$

для всех $j \in N$. Обозначим через Θ множество таких неотрицательных $S = const$, для которых система (1) с линейной функцией $\varphi(\sigma_j) = S\sigma_j$ асимптотически устойчива. Для каждого фиксированного набора параметров a, b, α, β множество Θ есть промежуток $[0, S_{max})$.

Рассмотрим систему (1) с нелинейностью вида (2), где $S_j \in \Theta$, $j \in N$.

<u>Теорема 2</u>. Если $\alpha < 0$, $b \in \left(B_0, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$, где $B_0 = \frac{a\left(\alpha(1+\beta)+(1-\beta)^2\right)}{\alpha^2+(2-\alpha)(1-\beta)}$, то существует такая 2-периодическая последовательность $\{S_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Theta$, что система (1) с нелинейностью вида (2) имеет 4-периодические решения.

Для доказательства теорем запишем систему (1) с 2-периодической нелинейностью (2) в виде

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = P_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $P_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_j & -\alpha_j \end{pmatrix}$, $\alpha_j = \alpha + aS_j$, $\beta_j = \beta + bS_j$, матрица P_j - 2-периодическая.

Существование цикла периода четыре у системы (3) равносильно существованию цикла периода два у линейной системы

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = P_{j+1}P_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \tag{4}$$

с постоянной матрицей $P_{j+1}P_j = P_2P_1 = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 - \beta_2 \end{pmatrix}$, $j = 2m - 1, m \in N$.

Система (4) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда

$$|Sp\,(P_2P_1)| - 1 < Det\,(P_2P_1) < 1.$$

Если верно равенство $Sp\,(P_2P_1) + Det\,(P_2P_1) + 1 = 0$, то есть

$$\alpha_2\alpha_1 + \left(1 - \beta_2\right)\left(1 - \beta_1\right) = 0, \tag{5}$$

то решения системы (4) с начальными условиями $\binom{x_1}{y_1}$, где $x_1 \neq 0$, $y_1 = \frac{1-\beta_1}{\alpha_1}x_1$, – циклы периода два, а решения системы (3) с такими начальными данными – циклы периода четыре, состоящие из точек $\binom{x_j}{y_j}$, где $x_2 = y_1$, $y_2 = x_3 = -x_1$, $y_3 = x_4 = -y_1$, $y_4 = x_1$, и $x_{j+4} = x_j$, $y_{j+4} = y_j$ для всех $j \in N$.

Заметим, что равенство (5) может быть верно, только если $\alpha_2\alpha_1 < 0$. Следовательно, система (1) с 2- периодической нелинейностью вида (2), где $S_j \in \Omega$, может иметь цикл периода четыре только если $-\frac{\alpha}{a} \in \Omega$, то есть только при $b \in \left(-\frac{a(1-\beta)}{\alpha}, \frac{a(1+\beta)}{\alpha}\right)$ в случае $\alpha > 0$, при $b \in (-\infty, +\infty)$ в случае $\alpha = 0$, и при $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha}, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$ в случае $\alpha < 0$.

Система (1) с 2-периодической нелинейностью вида (2), где $S_j \in \Theta$, может иметь цикл периода четыре, если $-\frac{\alpha}{a} \in \Theta$, то есть только при $\alpha < 0$ и $b \in \left(\frac{a(1+\beta)}{\alpha}, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$.

Из равенств $\alpha_j = \alpha + aS_j$, $\beta_j = \beta + bS_j$ следует, что $\beta_j = \frac{b\alpha_j + c}{a}$, где $c = a\beta - b\alpha$. И равенство (5) верно, если $H\,(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, где

$$H\,(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1\alpha_2 + \left(1 - \frac{b\alpha_1 + c}{a}\right)\left(1 - \frac{b\alpha_2 + c}{a}\right). \tag{6}$$

Для доказательства теоремы 1 положим $\alpha_{min} = \alpha + aS_{min}$, $\alpha_{max} = \alpha + aS_{max}$,

$$H_1 = H(\alpha_{min}, \alpha_{max}), H_2 = H\left(\frac{\alpha_{min} + \alpha_{max}}{2}, \frac{\alpha_{min} + \alpha_{max}}{2}\right).$$

Заметим, что $H_2 > 0$, поскольку $H(\alpha_1, \alpha_1) > 0$ для всех $\alpha_1 \in (\alpha_{min}, \alpha_{max})$ (по построению множества Ω).Поэтому, в силу непрерывности функции H, для тех значений параметров, при которых $H_1 < 0$, существуют значения $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha_{min}, \alpha_{max})$ такие, что $H(\alpha_1, \alpha_2) = 0$.

Вычисляя H_1 для каждого фиксированного набора параметров a, b, α, β, и собирая все значения параметров, для которых $H_1 < 0$, получим требуемое.

Для доказательства теоремы 2 положим

$$H_3 = H(\alpha, \alpha_{max}), H_4 = H\left(\frac{\alpha + \alpha_{max}}{2}, \frac{\alpha + \alpha_{max}}{2}\right).$$

Из определения множества Θ следует, что $H_4 > 0$. Поэтому для тех значений параметров a, b, α, β, при которых $H_3 < 0$, существуют такие значения $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha, \alpha_{max})$, что $H(\alpha_1, \alpha_2) = 0$.

Вычисляя H_3 для каждого фиксированного набора параметров и собирая все значения параметров, для которых $H_3 < 0$, получим, что система (1) с 2-периодической нелинейностью вида (2), где $S_j \in \Theta$, имеет 4-периодическое решение при $\alpha < 0$, $b \in \left(B_0, -\frac{a(1-\beta)}{\alpha}\right)$.

Более подробное доказательство теорем 1, 2 дано в работах [8,9].

Литература

[1] Лурье А. И., Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8, № 3. – С. 246-248.

[2] Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости "в большом" динамических систем // Успехи математических наук. 1949. Т. 4, Вып. 4. – С. 187-188.

[3] Плисс В. А. О проблеме Айзермана для случая системы трех дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. 1958. Т. 121, № 3. – С. 422-425.

[4] Леонов Г. А. О проблеме Айзермана // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. – С. 37-49.

[5] Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Брагин В. О. О проблемах Айзермана и Калмана // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2010. Вып. 3. – С. 31-47.

[6] Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexample to the discrete-time Kalman conjecture // Proceedings of the European Control Conference (ECC). Linz, Austria. 2015. – P. 981-985.

[7] Heath W. P., Carrasco J., de la Sen M. Second-order counterexamples to the discrete-time Kalman conjecture // Automatica. 2015. Issue C. Vol. 60. – P. 140-144.

[8] Звягинцева Т. Е. О проблеме Айзермана: коэффициентные условия существования цикла периода четыре в двумерной дискретной системе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2020. Т. 7(65). Вып. 1. – С. 50-59.

[9] Звягинцева Т. Е. Об условиях существования циклов в двумерной дискретной системе с секторной нелинейностью // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2021. Т. 8(66). Вып. 1. – С. 63-72.

УДК 517.9

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ДИФРАКЦИИ ЧАСТИЦ НА ЭКРАНЕ СО ЩЕЛЯМИ

Лагодинский В. М.
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения
Санкт-Петербург
e-mail: lagodinskiy@mail.ru

Lagodinskiy V.M. Boundary value problem for the Schrödinger equation corresponding to the diffraction of particles on a screen with slits The boundary value problem for the nonrelativistic stationary Schrödinger equation in two-dimensional space with conditions on the line $x = 0$, which ensure the continuity of the solution on the entire line and the approximate equality of the solution to zero on one segment of this line and the continuity of the derivative with respect to x on other segments by the method of least squares, is posed and approximately solved. The problem is considered periodic with respect to the variable y, which makes it possible to use the Fourier series expansion. Using the obtained solution, we construct a vector field and curves for which this vector field is the field of tangents at each point. Considerations are given according to which these curves can be considered as the trajectories of particles, some of which fly through the slits of the screen, and some of which are reflected from it. This calls into question the generally accepted ("Copenhagen") interpretation of quantum mechanics.

Ставится и приближенно решается граничная задача для нерелятивистского стационарного уравнения Шрёдингера в двухмерном пространстве с условиями на прямой $x = 0$, которые обеспечивают непрерывность решения на всей этой прямой и приближенно равенство нулю решения на одних отрезках этой прямой и непрерывность производной по x на других отрезках по методу наименьших квадратов. Задача считается периодической по переменной y, что дает возможность использовать разложение в ряд Фурье. С помощью полученного решения строятся векторное поле и кривые, для которых это векторное поле является полем касательных в каждой точке. Приводятся соображения, в соответствии с которыми эти кривые можно рассматривать как траектории частиц, часть которых пролетает сквозь щели экрана, часть отражается от него. Тем самым ставится под сомнение общепринятая ("копенгагенская") интерпретация квантовой механики.

Под теорией дифракции понимают обычно раздел математической физики, посвященный изучению распространения колебаний, электромагнитных или акустических [1]. Эти колебания описываются уравнениями в частных производных гиперболического типа с определенными граничными условиями. Основной метод решения этих задач – метод функций Грина, при этом чаще всего интересуются асимптотикой решений. Но задача дифракции существует и в математическом аппарате квантовой механики, основой которого является уравнение Шредингера параболического типа. И решение этой задачи очень существенно для понимания физического смысла квантовой механики.

Принято считать [2], что наблюдение дифракции частиц на экране со щелями противоречит возможности описания движения элементарных частиц посредством траекторий, так как распределение точек попадания частиц на второй экран, расположенный за экраном со щелями, не является простым наложением точек попадания частиц, пролетевших через все щели. В соответствии с общепринятой ("копенгагенской") интерпретацией квантовой механики полагают, что состояние замкнутой физической системы в любой момент времени полностью определяется ее волновой функцией, которая является решением временно́го уравнения Шредингера. Но эта функция почти никогда не дает возможность определить значения всех физических величин, характеризующих физическую систему в данный момент времени, например, волновая функция частицы, движущейся свободно вдоль оси X, имеет вид:

$$\Psi(t,x) = \exp[i(px - (2m)^{-1}p^2 t)], \qquad \forall t, x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда делают вывод, что физическая система, в частности, отдельная частица, сама по себе не обладает какими-либо конкретными значениями координат, как и других физических величин, приобретает их в процессе измерения с помощью приборов – устройств, действующих по законам классической механики. При этом, как считают, нельзя одновременно точно измерить положение и импульс частицы. Погрешности любого измерения координаты и импульса, полагают, должны удовлетворять принципу неопределенности:

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar/2.$$

Однако в работе [3] выполнен приближенный расчёт дифракции частиц на экране со щелью, и результаты расчёта показывают возможность измерения координаты и импульса, при котором это неравенство нарушается. Но само существование неустранимых погрешностей не опровергается. Можно, однако показать, что реалистическая интерпретация решения уравнения Шрёдингера, подчиненного определенным граничным условиям, позволяет рассчитать траектории частиц и, кроме того, обнаружить такое свойство пространств , которое не выявляется копенгагенской интерпретацией квантовой механики.

Будем рассматривать уравнение Шрёдингера для одной частицы в евклидовом пространстве:

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\Psi(t,x,y,z) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \tag{1}$$

где $m > 0$ масса частицы (используем систему единиц, в которой постоянная Планка $\hbar = 1$).

Как известно [1], из этого уравнения следует уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\mathbf{r}) = -\nabla \mathbf{j}(t,\mathbf{r}), \tag{2}$$

где

$$\rho(t,\mathbf{r}) = \left|\Psi(t,\mathbf{r})\right|^2, \quad \mathbf{j}(t,\mathbf{r}) = -i(2m)^{-1}(\Psi^*(t,\mathbf{r})\nabla\Psi(t,\mathbf{r}) - \Psi(t,\mathbf{r})\nabla\Psi^*(t,\mathbf{r})\right].$$

Первую из этих функций физики называют плотностью вероятности пространственной локализации частицы, вторую – вектором плотности вероятности. Позднее будут приведены соображения, ставящие под сомнение такую интерпретацию этих функций.

Очевидно, время отделяется подстановкой:

$$\Psi(t,\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{p},\mathbf{r})\exp[-i\mathbf{p}^2(2m)^{-1}t],$$

где вектор $\mathbf{p}$ имеет смысл импульса частицы. Функция $\psi(\mathbf{p},\mathbf{r})$ удовлетворяет стационарному уравнению Шрёдингера:

$$\left(\mathbf{p}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\mathbf{p},x,y,z) = 0, \quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Уравнение (2) превращается в уравнение:

$$\nabla\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0, \qquad \forall\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3.$$

Таким образом, уравнению (3) соответствует бездивергентное векторное поле. Частному решению уравнения (1) вида

$$\psi(\mathbf{p},\mathbf{r}) = A\exp(i\mathbf{pr}), \quad \forall\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3$$

соответствует однородное векторное поле

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{m}|A|^2, \qquad \forall\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3.$$

Введем теперь граничные условия, соответствующие наличию экрана со щелями. Пусть он находится в плоскости $x = 0$, щели параллельны оси Z. Будем считать, что частицы налетают на экран слева и их импульсы вдали от экрана параллельны оси X. Тогда пространство нашей задачи однородно вдоль оси Z. Поэтому зависимость от z можно отделить. Теперь стационарное уравнение Шредингера можно записать в виде:

$$\left(p^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(p,x,y) = 0, \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{4}$$

В отличие от работы [3] будем предполагать наличие не одной щели, а бесконечной периодической системы щелей. Удобно, чтобы период был равен 2π. В каждом периоде есть щель $P_n = (-a+2n\pi, a+2n\pi)$ и непроницаемая часть экрана $Q_n = [(2n-1)\pi, -a+2n\pi] \cup [a+2n\pi, (2n+1)\pi]$. В принципе, решение нашей задачи должно обращаться в нуль в любой точке объединения множеств Q_n, на объединении множеств P_n должны быть непрерывными и решение, и его производная по x. Однако точно такую задачу решить невозможно. Существует метод Кирхгофа [4], согласно которому на множествах Q_n полагают решение и его производную по x равными нулю, на множествах P_n такими, которые были бы там в отсутствии экрана. Но этот метод представляется слишком неточным. Хочется иметь метод, который хотя бы в принципе давал возможность предельного перехода к точному решению. Этому критерию удовлетворяет метод наименьших квадратов. Выберем множество решений уравнения (4), зависящих от конечного числа параметров. Очевидно, если это число задано, упомянутые граничные условия будут выполняться максимально точно, если будет минимальна следующая сумма интегралов:

$$S = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_0^a |\psi'_x(p,\delta,y) - \psi'_x(p,-\delta,y)|^2 dy + \int_a^\pi |\psi(p,0,y)|^2 dy\right], \tag{5}$$

Можно показать, что такие граничные условия приводят к "приближенной" ортогональности решений, то есть скалярное произведение решений, соответствующих разным значениям p очень мало.

Для простоты будем считать, что $p < 1$. Представим непрерывное по x при всех y решение уравнения (4) с помощью отрезка ряда Фурье:

$$\psi(p,x,y) = \begin{cases} e^{ipx} + (A_0 + iB_0)e^{-ipx} + \sum_{n=1}^N (A_n + iB_n)e^{\varkappa_n x}\cos ny, & \forall x \leqslant 0, \\ e^{ipx}(1 + A_0 + iB_0) + \sum_{n=1}^N (A_n + iB_n)e^{-\varkappa_n x}\cos ny, & \forall x > 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\varkappa_n = \sqrt{n^2 - p^2}$, $n = 1,\, 2\, \ldots$. Тогда сумма (5) принимает вид:

$$\begin{aligned} S &= S(A_0, A_1, \ldots, A_N, B_0, B_1, \ldots, B_N) = \\ &= \int_0^a \left[\left(pA_0 - \sum_{n+1}^N B_n\varkappa_n\cos ny\right)^2 + \left(pB_0 + \sum_{n=1}^N A_n\varkappa_n\right)^2\right] dy + \\ &\quad + \int_a^\pi \left[\left(1 + A_0 + \sum_{n=1}^N A_n\cos ny\right)^2 + \left(B_0 + \sum_{n=1}^N B_n\cos ny\right)^2\right] dy. \end{aligned} \tag{7}$$

Условие минимальности суммы (5) приводит к системе уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial A_n} S(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_N, B_0, B_1, \ldots, B_N) = 0, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, N. \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial B_n} S(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_N, B_0, B_1, \ldots, B_N) = 0, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, N. \tag{9}$$

Используя (7), получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=0}^N C_{m,n}x_n = D_m, \qquad m = 0,\, 1,\, 2, \ldots,\, 2N+2, \tag{10}$$

где: $C_{0,0} = C_{1,1} = 2(\pi - a) + 8p^2a$, $C_{0,1} = C_{1,0} = 0$, $C_{0,2k} = C_{2k,0} = -2k^{-1}\sin ka$, $C_{0,2k+1} = C_{2k+1,0} = -8p\varkappa_k k^{-1}\sin ka$, $C_{2n,2k} = C_{2n+1,2k+1} = 8\varkappa_n\varkappa_k\alpha_{n,k} + 2\beta_{n,k}$, $x_{2k} = A_k$, $x_{2k+1} = B_k$,

$$\alpha_{n,k} = \int_0^a \cos ny\cos ky\, dy, \qquad \beta_{n,k} = \int_a^\pi \cos ny\cos ky\, dy,$$

n, $k = 0, 1, \ldots, N$.

Система (10) имеет единственное решение, причем оно обязательно соответствует минимуму суммы (5). Это решение получено численно методом Гаусса. Используя его, получаем выражение для компонент векторного поля $\mathbf{j}(x, y)$ в полупространстве $x \leqslant 0$:

$$
\begin{aligned}
j_x(x, y) = p(1 - A_0^2 - B_0^2) + \\
+ m^{-1} \sum_{n=1}^{N} \{[-A_n \sin px + B_n \cos px + (A_0 A_n + B_0 B_n) \sin px + \\
+ (A_0 B_n - A_n B_0) \cos px]\varkappa_n + [A_n \cos px + B_n \sin px + (A_0 A_n + B_0 B_n) \cos px + \\
+ (A_0 B_n - A_n B_0) \sin px]p\} e^{\varkappa_n x} \cos ny, \quad \forall x \leqslant 0, \quad \forall y \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j_y(x, y) = m^{-1} \sum_{n=1}^{N} [A_n \sin px - B_n \cos px - \\
- (A_0 A_n + B_0 B_n) \sin px - (A_0 B_n - A_n B_0) \cos px] n e^{\varkappa_n x} \sin ny, \quad \forall x \leqslant 0. \quad \forall y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

А в полупространстве $x > 0$:

$$
\begin{aligned}
j_x(x, y) = pm^{-1}[(1 + A_0)^2 + B_0^2] + m^{-1} \sum_{n=1}^{N} \{[(B_n + A_0 B_n - B_0 A_n) \cos px - \\
- (A_n + A_0 A_n + B_0 B_n) \sin px]\varkappa_n + [(A_n + A_0 A_n + B_0 B_n) \cos px + \\
+ (B_n + A_0 B_n - B_0 A_n) \sin px]p\} e^{-\varkappa_n x} \cos ny, \quad \forall x > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j_y(x, y) = m^{-1} \sum_{n=1}^{N} \{[A_n + A_0 A_n + B_0 B_n) \sin px - \\
- (B_n + A_0 B_n - B_0 A_n) \cos px] n e^{-\varkappa_n x} \sin ny, \quad \forall x > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Если взять точку $(0, y_0)$ на щели, то есть на промежутке $(0, a)$ оси Y, то мы можем получить визуально плавную кривую в полупространстве $x < 0$ по формулам

$$
x_{n+1} = x_n - j_x(x_n, y_n)h, \qquad y_{n+1} = y_n - j_y(x_n, y_n)h,
$$

в полупространстве $x > 0$ по формул м

$$
x_{n+1} = x_n + j_x(x_n, y_n)h, \qquad y_{n+1} = y_n + j_y(x_n, y_n)h,
$$

где h – достаточно малая положительная величина, при этом плавность сохраняется и в точке $x = 0$. За достаточно большое число таких шагов приходим к тем значениям x, при которых компонента $j_y(x, y)$ становится пренебрежимо малой. Если же точка $(0, y_0)$ на непроницаемой части экрана, $y_0 \in (a, \pi)$, мы можем двигаться в полуплоскость $x < 0$ по двум путям в соответствии с тем, что компонента $j_x(x,y)$ представляется в виде суммы двух слагаемых: $j_x(x,y) = j_x^+(x,y) + j_x^-(x,y)$, где

$$j_x^+(x,y) = \frac{p}{m} + \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}[A_n(p\cos px - \varkappa_n \sin px + B_n(p\sin px + \varkappa_n \cos px)]e^{\varkappa_n x}\cos ny,$$

$$j_x^-(x,y) = -\frac{p}{m}\,(A_0^2 + B_0^2) +$$
$$+\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}[(A_0A_n + B_0B_n)(\varkappa_n \sin px - p\cos px + (A_0B_n - A_nB_0)(\varkappa_n \cos px - p\sin px)]e^{\varkappa_n x}\cos ny.$$

При этом компонента $j_y(x,y)$ является одинаковой для обоих слагаемых. Графики полученных кривых приведены на Рис. 1 для значения ширины щели $a = \pi/2$ и $p = 0,3$, на Рис. 2 для ширины щели $a = \pi/2$ и $p = 0,6$, на Рис. 3 для ширины щели $a = 0,3\pi$ и $p = 0,6$.

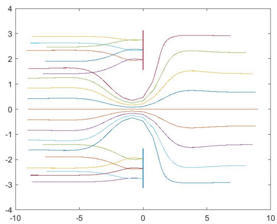


Рис. 1

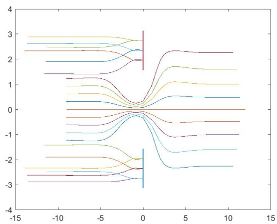


Рис. 2

Итак, в результате решения уравнения Шрёдингера получается семейство плавных кривых. Возникает вопрос об их физической интерпретации. Представляется странным название "поток вероятности", поскольку та функция, которую называют плотностью вероятности здесь не зависит от времени (да она и не интегрируема по всему пространству!), вероятность, по-видимому, никуда не течет. Что движется по этим кривым? Можно ли предположить, что

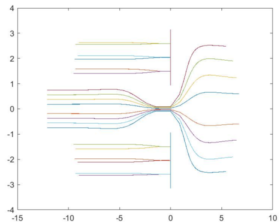


Рис. 3

это траектории частиц? Почему они кривые? Казалось бы, не сталкиваясь с чем-либо, частица должна двигаться по прямой. Но прямизна траекторий следует из закона сохранения импульса, однако, по теореме Нётер, этот закон следует из однородности пространства. В нашей задаче пространство неоднородно. Можно сделать предположение, что уравнение Шрёдингера, будучи уравнением в частных производных, описывает не эволюцию конкретной физической системы, а геометрию пространств относительно этой системы, поскольку множество кривых, соответствующих поставленным граничным условиям, зависит от энергии частиц и направления их движения вдали от экрана. Тогда получается, что квантовая механика является частью общей теории относительности А. Эйнштейна. Очевидно, наличие траекторий опровергает принцип неопределенности координат-импульс. Следует заметить, что достаточно далеко от экрана при $x > 0$ импульс частицы, если он достаточно мал, становится снова равным исходному. То есть несмотря на то, что диапазон значений координаты y сужается, импульс частицы вдали от экрана не меняется. Это противоречит утверждению, что измерение координаты меняет импульс. В работе [5] автором совместно с А. В. Головиным было показано, что решение задачи об отражении частицы от идеального зеркала конечной массы с помощью релятивистского уравнения Шрёдингера опровергает соотношение неопределенности энергия-время (конечно, то же самое справедливо и в нерелятивистском пределе). Утверждение о том, что граничные условия меняют геометрию пространства, кажется парадоксальным, но предлагаемая интерпретация избавляет квантовую механику от гораздо более парадоксального утверждения, что ни одна физическая величина, характеризующая движение частицы, не имеет никакого конкретного значения в любой момент времени, когда она не измеряется.

Литература

[1] Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. – М.: "НАУКА", 1966. – 455 с.

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. III Квантовая механика. Нерелятивистская теория – М.: “ФИЗМАТЛИТ”, 2001. – 803 с.

[3] Bec G., Nussenzveig H. M. Uncertanty relation and diffraction by a slit. Nuov. Cim. v. IX, № 6 1958. c. 1068.

[4] Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. – М.: "НАУКА", 1978. – 438 с.

[5] Головин А. В., Лагодинский В. М. Задача о столкновении частицы с идеальным зеркалом конечной массы в релятивистской квантовой механике. Вестник СПбГУ сер. Физика и Химия, в. 4, 2012, сс. 3-13.

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ОБОБЩЁННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Линчук Л. В.
Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru

Linchuk L. V. The inverse problem for ordinary differential equations and alternative generalized operators. The article deals with the alternative generalized operators. Some inverse problems of group analysis for the 3rd order ordinary differential equations is solved. The factorization of the equations is investigated.

В статье рассматриваются альтернативные обобщённые операторы. Решается обратная задача группового анализа для обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка. Исследуется вопрос о факторизации уравнений этого класса.

Известно, что групповой анализ является мощным и перспективным инструментом поиска симметрий и интегрирования дифференциальных уравнений. Исторически это способствовало обобщению его понятий, средств и методов с целью расширения класса решаемых задач. В настоящий момент имеется большое многообразие рассматриваемых в групповом анализе симметрий: точечные, касательные, динамические, экспоненциальные нелокальные. В работе [1] предложен иной подход к обобщению классических симметрий. Исходя из понятия инварианта, введён в рассмотрение альтернативный обобщенный оператор. В классическом групповом анализе мы исходим из понятия группы и, в результате, приходим к понятию оператора. Обобщённые симметрии возникают как следствие решения задач на факторизацию: требование записи исходного дифференциального уравнения через выражения определённой структуры (инварианты оператора) приводят к формулам на координаты допускаемого оператора. Поэтому априори мы получаем класс операторов, порождающих все возможные факторизации для исходного уравнения.

Применение альтернативных обобщённых симметрий было рассмотрено в нескольких работах для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка [2-5]. В этой статье мы рассмотрим решение некоторых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка. В групповом анализе хорошо известно, что с повышением порядка уравнения увеличивается количество расщеплений задачи на более простые. Поэтому в некоторых случаях ситуации с уравнениями более старших порядков оказываются более перспективными. Альтернативные обобщённые операторы не являются исключением в этом смысле. Поэтому применение этого типа операторов для обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка может оказаться интересным как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка, не содержащее предстаршей производной,

$$y''' = F\left(x, y, y'\right), \tag{1}$$

и класс альтернативных обобщённых операторов

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta_1\partial_{y'}, \tag{2}$$

где $\xi = \xi(x, y, y')$, $\quad \eta = \eta(x, y, y')$, $\quad \zeta_1 = \zeta_1(x, y, y')$. Координаты продолженного оператора

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta_1\partial_{y'} + \zeta_2\partial_{y''} + \zeta_3\partial_{y'''}$$

вычисляются по формуле (см.[1])

$$\zeta_i = D_x(\zeta_{i-1}) - y^{(i)}D_x\xi + \frac{(\zeta_{i-1} - y^{(i)}\xi)(\zeta_1 - D_x\eta + y'D_x\xi)}{\eta - y'\xi} \quad (i = 1, 2). \tag{3}$$

Предположим, что допускаемый оператор имеет в качестве нулевого инварианта x. Это означает, что первая координата $\xi = 0$ (при этом $\eta \neq 0$):

$$X = \eta\partial_y + \zeta_1\partial_{y'}.$$

Альтернативный обобщённый оператор (2) и его продолжения не меняют множество своих инвариантов при домножении его на произвольное выражение $\mu(x, y, y') \not\equiv 0$ ([1]). Эта операция не меняет формулы вычисления координат продолжения (3). В результате этого свойства мы имеем возможность убрать излишний произвол в координатах оператора, положив в данном случае, например, $\eta = 1$. Таким образом, рассматриваемый класс операторов имеет вид

$$X = \partial_y + \zeta_1\partial_{y'}. \tag{4}$$

Перейдём теперь к решению обратной задачи для уравнения (1) в классе альтернативных обобщённых операторов (4). Определяющее уравнение в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\zeta_{1y'y'}(y'')^2 + \left(3\zeta_{1y'}\zeta_1 + 2\zeta_{1yy'}y' + \zeta_{1y} + 2\zeta_{1xy'}\right)y'' - \zeta_1F_{y'} - F_y + \zeta_{1y'}F+ \\ + \zeta_{1xx} + 2y'\zeta_{1xy} + (y')^2\zeta_{1yy} + 3\zeta_1\zeta_{1x} + 3y'\zeta_1\zeta_{1y} + \zeta_1^3 = 0.\end{aligned}$$

Расщепляя по y'' это уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} \zeta_{1y'y'} = 0, \\ 3\zeta_{1y'}\zeta_1 + 2\zeta_{1yy'}y' + \zeta_{1y} + 2\zeta_{1xy'} = 0, \\ -\zeta_1 F_{y'} - F_y + \zeta_{1y'}F + \zeta_{1xx} + 2y'\zeta_{1xy} + (y')^2\zeta_{1yy} + 3\zeta_1\zeta_{1x} + 3y'\zeta_1\zeta_{1y} + \zeta_1^3 = 0. \end{cases}$$

Решение первых двух уравнений определяет структуру ζ_1

$$\zeta_1 = \frac{y(y+2\beta(x))\beta' + 3\alpha(x)}{(y+\beta(x))^3} + \frac{y'}{y+\beta(x)},$$

где $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ – произвольные функции. Это позволяет уже ограничить вид инвариантов, которые могут быть использованы при факторизации уравнения (1). Если выполнить вычисления, то окажется что в соответствующем классе уравнений, который будет факторизоваться через эти инварианты можно выполнить замену $y(x) + \beta(x) \to v(x)$, упрощающую внешний вид факторизуемого уравнения. Поэтому для упрощения вычислений можно положить $\beta(x) = 0$, а далее полученный класс уравнений вида (1) можно "размножить" подстановкой

$$y(x) \to y(x) + \beta(x). \tag{5}$$

Заметим, что эта подстановка оставляет уравнение в классе (1). Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\zeta_1 = \frac{y'}{y} + \frac{3\alpha(x)}{y^3},$$

найти из последнего уравнения определяющей системы неизвестную F и записать структуру уравнения (1)

$$y''' = yG\left(x, \frac{y'}{y} + \frac{\alpha}{y^3}\right) + \frac{(y')^3}{y^2} + \frac{(3\alpha' y^3 + 3\alpha^2)y'}{y^6} - \frac{\alpha'' y^3 + 3\alpha\alpha'}{y^5}. \tag{6}$$

Запишем теперь факторизацию полученного класса уравнения (6), используя инварианты допускаемого оператора

$$X = \partial_y + \left(\frac{3\alpha(x)}{y^3} + \frac{y'}{y}\right)\partial_{y'}. \tag{7}$$

Искомой факторсистемой будет

$$\begin{cases} u'' = -3uu' + G(x,u), \\ u = \dfrac{\alpha(x)}{y^3} + \dfrac{y'}{y}. \end{cases} \tag{8}$$

Проанализируем полученный результат. Дальнейшее решение уравнения (6) зависит от технической разрешимости первого уравнения факторсистемы (8) для конкретной функции $G(x,u)$. В общем случае уравнение (6) не решается, но указанным методом мы, по крайней мере, можем расщепить нашу задачу на более простые.

Применение различных инструментов в данном случае даёт совершенно разные по сложности решения, а также различные по структуре ответы. Так, например, в классе уравнений (6) имеется представитель с квадратичной зависимостью правой части по первой производной

$$y''' = -\frac{3\alpha}{y^4}(y')^2 + \frac{3(\alpha' y^3 + 2\alpha^2)}{y^6}y' - \frac{\alpha'' y^6 + 3\alpha\alpha' y^3 + \alpha^3}{y^8}. \tag{9}$$

Уравнение (9) средствами компьютерной математики (например, Maple) не решается. Оно также не допускает никаких точечных операторов (при произвольной α), но допускает обобщённый нелокальный оператор (7). Поэтому оно факторизуется до системы

$$\begin{cases} u'' = -3uu' - u^3, \\ u = \dfrac{\alpha(x)}{y^3} + \dfrac{y'}{y}, \end{cases}$$

первое уравнение которой решается

$$u = \frac{2C_1x + C_2}{C_1x^2 + C_2x + 2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Поэтому уравнение (9) сводится к уравнению Бернулли

$$y' = \frac{2C_1x + C_2}{C_1x^2 + C_2x + 2}y - \alpha y^{(-2)},$$

решением которого будет

$$y = (C_1x^2 + C_2x + 2)\left(C_3 - 3\int \frac{\alpha(x)}{(C_1x^2 + C_2x + 2)^3}\,dx\right)^{1/3}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Положив в уравнении (9) функцию $\alpha = -C$ $(C \in \mathbb{R})$, получаем достаточно простое уравнение

$$y''' = \frac{3C}{y^4}(y')^2 + \frac{6C^2}{y^6}y' + \frac{C^3}{y^8} \tag{11}$$

с общим решением (10), которое может быть записано без квадратур. Казалось бы, это уравнение допускает двумерную точечную алгебру, один из операторов которой (оператор переноса) очевиден, поэтому с лёгкостью может быть получен указанный ответ. Но факторсистемы для точечных операторов будут более сложными:

$$\begin{cases} t = y, \\ u = y', \\ u'' = -u^{-1}(u')^2 + 3Ct^{-4} + 6C^2t^{-6}u^{-1} + C^3t^{-8}u^{-2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} t = x^{-1/3}y, \\ u = x^{2/3}y', \\ u'' = \dfrac{3}{t-3u}(u')^2 - \dfrac{8}{t-3u}u' + \dfrac{27Ct^4u^2 + 2(27C^2 - 5t^6)ut^2 + 9C^3}{t^8(t-3u)^2}. \end{cases}$$

Общие решения внешних уравнений этих двух факторсистем, если их решать, например, средствами компьютерной математики, имеют громоздкий, неявный вид с квадратурами (из-за объёма ответа мы их здесь не приводим). Такой же структуры будет и общее решение исходного уравнения (11), если его решать без применения методов группового анализа компьютерными математическими пакетами. Поэтому в данном случае применение альтернативных обобщённых операторов оказывается технически более оправдано, чем использование классических методов группового анализа или непосредственных компьютерных вычислений.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что ни один метод группового анализа не является универсальным, и даже применение компьютерных вычислительных систем не всегда даёт оптимальное решение. Построенный пример также показывает перспективность использования альтернативных обобщённых операторов при рассмотрении обратных задач и поиске новых решений дифференциальных уравнений.

Литература

[1] Линчук Л. В. Альтернативные обобщенные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. – Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции "Герценовские чтения - 2010", СПб., 2010. – С. 46–53.

[2] Линчук Л. В. Двумерные алгебры альтернативных обобщенных операторов, допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями 2-го порядка. – "Известия РГПУ им. А.И.Герцена", №135(2010). – С. 7–23

[3] Линчук Л. В. Алгебры обобщенных операторов, допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. – Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции "Герценовские чтения - 2011", СПб., 2011. – С. 89–97.

[4] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В. Поиск первых интегралов и альтернативные симметрии. – Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции "Герценовские чтения - 2015", СПб., 2015. – С. 50–53.

[5] Линчук Л .В. Альтернативные обобщённые операторы, допускаемые обобщённым уравнением Рэлея. – Дифференциальные уравнения и процессы управления, №2, 2017. Электронный журнал, рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010. http://www.math. spbu.ru/diffjournal – С.86-92.

УДК 517.956.27

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА НА ТРЁХМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

Магденко Е. П.
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск
e-mail: magdenko_evgenyi@icm.krasn.ru

Magdenko E. P. The influence of changes in the interface internal energy on a three-dimensional stationary creeping flow in a rotating cylinder In this paper, the exact solution for the equations of the creeping flow model with a field of velocities of the Himenz type is considered. This solution describes thermocapillary convection in layers. It is interpreted as the three-dimensional axisymmetric motion of viscous heat-conducting fluids in a rotating cylinder with solid walls and a common mobile non-deformable interface. At the same time, there are no mass forces. From a mathematical point of view, the initial-boundary problem arising is inverse and nonlinear, since the total energy condition at the interface is taken into account. The influence of the fluids physical parameters and the container geometry on the flow intensity has been investigated.

Keywords: nonlinear inverse problem, Marangoni number, energy condition, creeping thermocapillary motion, Himenz decision.

В данной работе исследуется точное решение для уравнений модели ползущего течения с полем скоростей типа Хименца, описывающее термокапиллярную конвекцию в слоях. Оно интерпретируется как трёхмерное осесимметричное движение вязких теплопроводных жидкостей во вращающемся цилиндре с твёрдыми стенками и общей подвижной недеформируемой поверхностью раздела. При этом массовые силы отсутствуют. С математической точки зрения, возникающая начально-краевая задача является обратной и нелинейной, так как учитывается полное энергетического условие на границе раздела. Исследовано влияние физических параметров жидкости и геометрии контейнера на интенсивность течения.

Ключевые слова: нелинейная обратная задача, число Марангони, энергетическое условие, ползущее термокапиллярное движение, решение Хименца.

1. Постановка задачи. Уравнения стационарного осесимметрического движения жидкости во вращающемся цилиндре имеют вид [1]

$$\frac{1}{\rho}p_r + uu_r + wu_z - 2\omega v - \frac{1}{r}v^2 + \beta\omega^2 r\theta = = \nu\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} - \frac{1}{r^2}u\right), \tag{1}$$

$$uv_r + wv_z + 2\,\omega u + \frac{1}{r}uv = \nu\left(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + v_{zz} - \frac{1}{r^2}v\right), \tag{2}$$

$$\frac{1}{\rho}p_z + uw_r + ww_z = \nu\left(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + w_{zz}\right), \tag{3}$$

$$u_r + \frac{1}{r}u + w_z = 0, \tag{4}$$

$$u\theta_r + w\theta_z = \chi\left(\theta_{rr} + \frac{1}{r}\theta_r + \theta_{zz}\right). \tag{5}$$

Здесь $u(r,z)$, $w(r,z)$ – радиальная и осевая компоненты скорости; $v(r,z)$ – отклонение окружной компоненты векторы скорости от скорости твердотельного вращения ωr; $p(r,z)$ – характеризует отклонение давления от равновесного; $\theta(r,z)$ – отклонение температуры от некоторого среднего значения.

Ищем решение системы (1)-(5) в виде трёхмерного осесимметрического аналога решения Хименца [2, 3]

$$u(r,z) = u(r), \quad v(r,z) = v(r), \quad w(r,z) = w(r)z, \quad \theta(r,z) = a(r)z^2 + b(r). \tag{6}$$

После подстановки (6) в (1)-(5) и некоторых преобразований, получим систему уравнений

$$uv_r + 2\,\omega u + \frac{1}{r}\,uv = \nu\left(v_{rr} + \frac{1}{r}\,v_r - \frac{1}{r^2}\,v\right), \tag{7}$$

$$uw_r + w^2 = \nu\left(w_{rr} + \frac{1}{r}\,w_r\right) + \left(f + \beta\omega^2\int\limits_{r_0}^{r} radr\right), \tag{8}$$

$$u_r + \frac{1}{r}\,u + w = 0, \tag{9}$$

$$ua_r + 2wa = \chi\left(a_{rr} + \frac{1}{r}\,a_r\right), \tag{10}$$

$$ub_r = \chi\left(b_{rr} + \frac{1}{r}\,b_r\right) + 2\chi a. \tag{11}$$

Здесь $f = \mathrm{const}$, $r_0 = \mathrm{const}$, $\left(f + \beta\omega^2\int\limits_{r_0}^{r} radr\right)$ – градиент давления по z.

Давление восстанавливается квадратурой

$$\frac{1}{\rho}\,p = \nu\left(u_r + \frac{1}{r}\,u\right) - \frac{1}{2}\,u^2 + \int\limits_{r_0}^{r}\frac{v^2}{r}dr + 2\,\omega\int\limits_{r_0}^{r} vdr - \beta\omega^2\int\limits_{r_0}^{r} rbdr -$$

$$-\left(\beta\omega^2\int\limits_{r_0}^{r} radr + \frac{f}{2}\right)z^2 + d, \tag{12}$$

где $d = \mathrm{const}$.

Рассмотрим сопряжённую стационарную нелинейную краевую задачу, описывающую трёхмерное двухслойное осесимметрическое движение вязкой теплопроводной жидкости во вращающейся цилиндрической трубе, которая имеет твёрдую стенку (Рис. 1). Тогда система уравнений для функций $u_j(r)$,

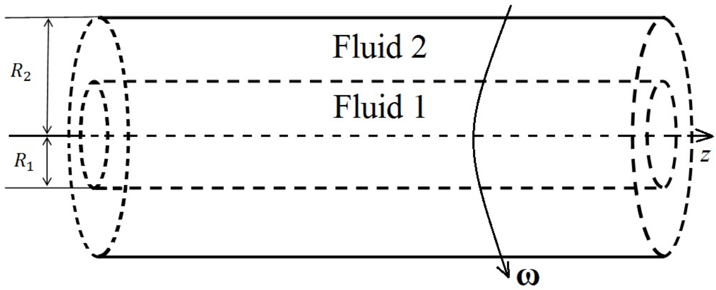


Рис. 8: Схема области решения.

$v_j(r)$, $w_j(r)$, $a_j(r)$, $b_j(r)$ имеет вид ($j = 1, 2$ – индекс, фиксирующий жидкость)

$$u_j v_{jr} + 2\,\omega u_j + \frac{1}{r}\,u_j v_j = \nu_j \left(v_{jrr} + \frac{1}{r}\,v_{jr} - \frac{1}{r^2}\,v_j \right), \tag{13}$$

$$u_j w_{jr} + w_j^2 = \nu_j \left(w_{jrr} + \frac{1}{r}\,w_{jr} \right) + f_j + \beta_j \omega^2 \int\limits_{r_0}^{r} r a dr, \tag{14}$$

$$u_{jr} + \frac{1}{r}\,u_j + w_j = 0, \tag{15}$$

$$u_j a_{jr} + 2 w_j a_j = \chi_j \left(a_{jrr} + \frac{1}{r}\,a_{jr} \right), \tag{16}$$

$$u_j b_{jr} = \chi_j \left(b_{jrr} + \frac{1}{r}\,b_{jr} \right). \tag{17}$$

На твёрдой стенке $r = R_2$ для искомых функций заданы условия

$$\begin{gathered} u_2(R_2) = 0, \quad v_2(R_2) = 0, \quad w_2(R_2) = 0, \\ a_2(R_2) = a_0, \quad b_2(R_2) = b_0, \end{gathered} \tag{18}$$

с заданными постоянными a_0, b_0. Заметим, что при $a_0 > 0$ температура на стене трубы принимает в точке $z = 0$ минимальное значение, а при $a_0 < 0$ – максимальное значение.

С учётом зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры ($\sigma = \sigma_0 - \varkappa(\theta - \theta_0)$) и (6) на поверхности раздела ($r = R_1$) получим условия

$$u_1(R_1) = u_2(R_1), \quad v_1(R_1) = v_2(R_1), \quad w_1(R_1) = w_2(R_1), \tag{19}$$

$$a_1(R_1) = a_2(R_1), \quad b_1(R_1) = b_2(R_1), \tag{20}$$

$$\mu_2 \left(v_{2r} - \frac{1}{r}\,v_2 \right) - \mu_1 \left(v_{1r} - \frac{1}{r}\,v_1 \right) = 0, \quad \mu_2 w_{2r} - \mu_1 w_{1r} = -2\varkappa a_1, \tag{21}$$

$$k_2 a_{2r} - k_1 a_{1r} = \varkappa a_1 \left(\frac{u_1}{R_1} + w_1 \right), \quad k_2 b_{2r} - k_1 b_{1r} = \varkappa b_1 \left(\frac{u_1}{R_1} + w_1 \right), \tag{22}$$

$$u_1(R_1) = 0. \tag{23}$$

Условия (19)-(20) – это равенства скоростей и температур жидкостей на поверхности раздела. Условия (21) – равенство касательных напряжений, (22) – энергетическое условие для потоков тепла, (23) – кинематическое условие. Здесь μ_j – коэффициент динамической вязкости. Кроме того, функции $u_1(r)$, $v_1(r)$, $w_1(r)$, $a_1(r)$ и $b_1(r)$ ограничены при $r = 0$.

Отметим, что поставленная задача является нелинейной и обратной, поскольку наряду с $v_j(r)$, $w_j(r)$, $a_j(r)$, $b_j(r)$ постоянные f_j (градиенты давлений вдоль слоёв) также являются искомыми. Если из уравнений (15) с учётом условий прилипания на стенках исключить $u_j(r)$, то получим сопряжённую задачу для нахождения функций $w_j(r)$, $a_j(r)$. При известных $w_j(r)$, $a_j(r)$ задача для функций $v_j(r)$, $b_j(r)$ отделяется. Функции $d_j(r)$ восстанавливаются квадратурами из (12), где необходимо ввести индекс j: p_j, ρ_j, ν_j, u_j, v_j, β_j, b_j, a_j, f_j, d_j. Кроме того, $r_0 = 0$ для $j = 1$ и $r_0 = R_1$ для $j = 2$.

Введём безразмерные функции и параметры

$$\begin{gathered}
\xi = \frac{r}{R_2}, \quad \gamma = \frac{R_1}{R_2}, \quad \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \\
\mathrm{Pr}_j = \frac{\nu_j}{\chi_j}, \quad \Omega = \frac{R_2^2}{\chi_1}\,\omega, \\
V_j(\xi) = \frac{R_2}{\mathrm{M}\chi_1}\,v_j(r), \quad W_j(\xi) = \frac{R_2^2}{\mathrm{M}\chi_1}\,w_j(r), \quad F_j = \frac{R_2^4}{\mathrm{M}\chi_1^2} f_j, \\
A_j(\xi) = \frac{a_j(r)}{a_0}, \quad B_j(\xi) = \frac{b_j(r)}{\mathrm{M}b_0},
\end{gathered} \tag{24}$$

где Pr_j – числа Прандтля, $\mathrm{M} = \varkappa a_0 R_2^2/(\mu_2\chi_1)$ – число Марангони. Тогда в безразмерных переменных нелинейная сопряжённая обратная краевая задача (постоянная F_j должна находиться вместе с решением) для функций $W_j(\xi)$ и $A_j(\xi)$ примет вид

$$\mathrm{Pr}_1\left(W_{1\xi\xi} + \frac{1}{\xi}\,W_{1\xi}\right) + \frac{\mathrm{M}}{\xi}\,W_{1\xi}\int\limits_0^\xi xW_1dx - \mathrm{M}W_1^2 + F_1 + \Omega^2\beta\mathrm{K}\int\limits_0^\xi xA_1dx = 0, \tag{25}$$

$$A_{1\xi\xi} + \frac{1}{\xi}\,A_{1\xi} + \frac{\mathrm{M}}{\xi}\,A_{1\xi}\int\limits_0^\xi xW_1dx - 2W_1A_1 = 0, \quad 0 < \xi \le \gamma, \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{Pr}_2}{\chi}\left(W_{2\xi\xi} + \frac{1}{\xi}\,W_{2\xi}\right) - \frac{\mathrm{M}}{\xi}\,W_{2\xi}\int\limits_\xi^1 xW_2dx - \mathrm{M}W_2^2 + F_2 - \Omega^2K\int\limits_\xi^1 xA_2dx = 0, \tag{27}$$

$$\frac{1}{\chi}\left(A_{2\xi\xi} + \frac{1}{\xi}\,A_{2\xi}\right) - \frac{\mathrm{M}}{\xi}\,A_{2\xi}\int\limits_\xi^1 xW_2dx - 2W_2A_2 = 0 \quad \gamma \le \xi \le 1. \tag{28}$$

Здесь $\mathrm{K} = \beta a_0 R_1^2$ – безразмерный параметр. На твёрдой стенке ($\xi = 1$) условия примут вид

$$W_2(1) = 0, \quad A(1) = 1, \tag{29}$$

На поверхности раздела ($\xi = \gamma$) выполняется ряд условий

$$\int_0^{\gamma} xW_1 dx = 0, \quad \int_{\gamma}^{1} xW_2 dx = 0, \tag{30}$$

$$W_1(\gamma) = W_2(\gamma), \quad A_1(\gamma) = A_2(\gamma), \tag{31}$$

$$V_{2\xi} - \frac{1}{\xi} V_2 - \mu \left(V_{1\xi} - \frac{1}{\xi} V_1 \right) = 0, \tag{32}$$

$$W_{2\xi} - \mu W_{1\xi} = -2A_1, \tag{33}$$

$$A_{2\xi} - kA_{1\xi} = \mathrm{E} A_1 W_1, \tag{34}$$

где $\mathrm{E} = M_0 \mathrm{M} = \varkappa^2 a_0 R_2 / k_2 \mu_2$ – параметр, определяющий влияние внутренней межфазной энергии на динамику жидкостей внутри слоёв, $M_0 = \varkappa \chi_1 / k_2 R_2$ – безразмерный параметр. Интегральные условия (30) позволяют определить неизвестные постоянные F_j, $j = 1, 2$. Также функции $W_1(\xi)$ и $A_1(\xi)$ ограничены при $\xi = 0$, то есть

$$|W_1(0)| < \infty, \quad |A_1(0)| < \infty. \tag{35}$$

2. Решение модельной задачи. Известно, что при малых числах Рейнольдса уравнения движения и температуры упрощаются, если пренебречь конвективным ускорением. Такие движения обычно называют ползущими. Если поперечные размеры каналов или скорости течения малы, или вязкость текущей жидкости велика, то ползущее течение имеет место во многих конструктивных элементах механизмов, оборудования и инструментов [4, 5]. В нашем случае физические параметры жидкости и толщины каналов могут быть небольшими. Соответственно, при таких предположениях, согласно (24), число Марангони является малым параметром системы (25)-(35). Поэтому предположим, что термокапиллярное течение является ползущим, то есть $\mathrm{M} \ll 1$. В результате получаем линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений из системы (25)-(28), решение которой, с учётом условия ограниченности (29), имеет вид

$$W_1 = -\frac{1}{32} \frac{\mathrm{K}\Omega^2 \beta}{\mathrm{Pr}_1} Q_{11} \xi^4 - \frac{1}{4} \frac{1}{\mathrm{Pr}_1} F_1 \xi^2 + S_{11}, \quad A_1 = Q_{11}, \quad 0 < \xi \le \gamma; \tag{36}$$

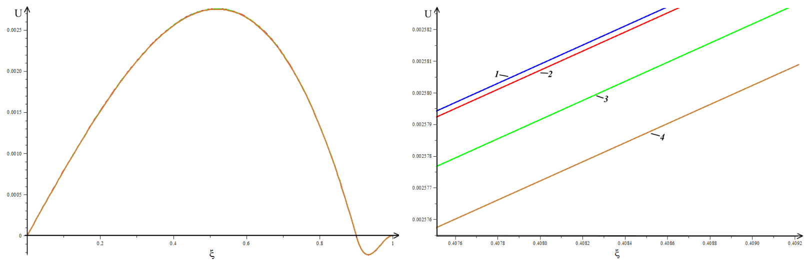
$$W_2 = -\frac{1}{32} \frac{\mathrm{K}\Omega^2 \chi}{\mathrm{Pr}_1} \left(Q_{21} (\ln(\xi) - 1) + Q_{22} \right) \xi^4 -$$
$$-\frac{1}{16} \frac{\chi}{\mathrm{Pr}_1} \left(\mathrm{K}\Omega^2 (Q_{21} - 2Q_{22}) + 4F_2 \right) \xi^2 - S_{21} \ln(\xi) - S_{22}, \tag{37}$$

$$A_2 = Q_{21} \ln(\xi) + Q_{22}, \quad \gamma \le \xi \le 1. \tag{38}$$

Здесь S_{11}, S_{21}, S_{22}, Q_{11}, Q_{21}, Q_{22} – постоянные, которые совместно с F_1, F_2 определяются из граничных условий (30), (34). Стоит отметить, что энергетическое условие (34) остаётся нелинейным.

Далее, рассмотрены конкретные жидкости, а именно, когда во внутреннем цилиндре ($0 < \xi \le \gamma$) расположен глицерин, а во внешнем ($\gamma \le \xi \le 1$)

– силиконовое масло. Параметры жидкостей таковы: $\rho = \{1.25, 0.935\}$ кг/см^3, $\nu = \{1.44, 0.1\}$ см^2/с, $\chi = \{0.0009, 0.00096\}$ см^2/с, $\beta = \{0.00061, 0.00108\}$ К$^{-1}$, $k = \{28000, 13400\}$ Вт/(см·К), $\varkappa = 0.0598$ Н/(см·К). Также были заданы геометрические параметры: $\varepsilon = 0.9$, $R_1 = 10^{-5}$ см. Кроме того, $g = 981$ см/с и $\Omega = 0.1$. Далее, на представленных графиках (Рис. 2-4) изображены профили скорости U_j и температурный коэффициент A_j в зависимости от радиальной координаты ξ, где $j = 1$ соответствует интервалу $0 < \xi \leq \gamma$, а $j = 2$ – $\gamma < \xi \leq 1$. На Рис. 2а показана зависимость $U_j(\xi)$ при различных значениях параметра $\mathrm{E} = \{0.05, 0.1, 0.5, 1\}$. Установлено, что при увеличении параметра внутренней энергии межфазной границы значения функций $U_j(\xi)$ уменьшаются, но влияние это достаточно мало, что иллюстрирует Рис. 2б, являющийся фрагментом Рис. 2а. Стоит отметить, что в области $\gamma < \xi \leq 1$ возникает возвратное течение. Изменение параметра Е подобным образом влияет на темпе-



а) б)

Рис. 9: Влияние параметра Е на значение профилей скорости $U_j(\xi)$. *1* – $\mathrm{E} = 0.05$, *2* – $\mathrm{E} = 0.1$, *3* – $\mathrm{E} = 0.5$, *4* – $\mathrm{E} = 1$.

ратурный коэффициент $A_j(\xi)$ (Рис. 3). На Рис. 4 построена зависимость профиля скорости $U_j(\xi)$ от отношения радиусов внутреннего и внешнего цилиндров $\gamma = \{0.75, 0.8, 0.9., 0.95\}$. Стоит отметить, что характер зависимости $U_j(\xi)$ не изменился. Но, как видно из Рис. 4, при увеличении γ максимальное значение функции $U_1(\xi)$ возрастает, а у функции $U_2(\xi)$ – уменьшается. Также было получено, что изменение параметра Ω незначительно влияет на скорость течения. С ростом Ω значения функции $U_j(\xi)$ возрастают.

Таким образом, было исследовано влияние параметров системы на двухслойное трёхмерное течение в цилиндре. В частности было установлено, что изменение параметра внутренней межфазной энергии оказывает незначительное влияние на интенсивность движения, а именно, с ростом Е значения скорости увеличиваются.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта РФФИ № 20-01-00234

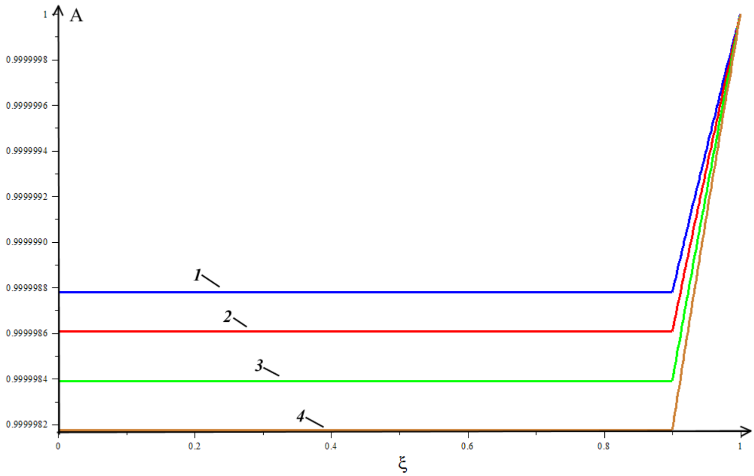


Рис. 10: Влияние параметра E на значение профилей скорости $U_j(\xi)$. *1* – $\mathrm{E} = 0.05$, *2* – $\mathrm{E} = 0.1$, *3* – $\mathrm{E} = 0.5$, *4* – $\mathrm{E} = 1$.

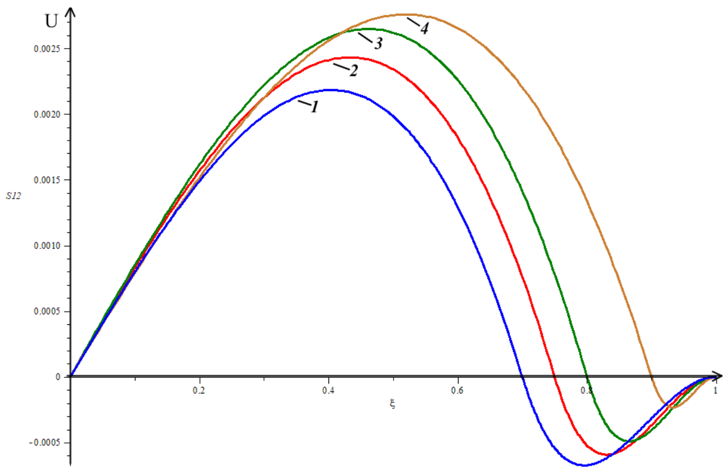


Рис. 11: Влияние параметра γ на значение профилей скорости $U_j(\xi)$. *1* – $\gamma = 0.75$, *2* – $\gamma = 0.8$, *3* – $\gamma = 0.9$, *4* – $\gamma = 0.95$.

Литература

[1] Andreev V. K., Gaponenko Y. A., Goncharova O. N., Pukhnachev V. V. Mathematical models of convection, Walter de Gruyter, 2012.

[2] Howarth L. The boundary layer in three-dimensional flow. Part II. The flow near a stagnation point // Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag. 1951. Vol. 7. № 42 (335) – P. 1433-1440.

[3] Davey A. Boundary-layer flow at a saddle point of attachment // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 10, №. 4. – P. 593-610.

[4] Antanovskiy L. K. Kopbosynov B. K., Non-stationary thermocapillary drift of a viscous fluid droplet // J. Appl Mech Tech Phy. 1986. Vol. 2 – P. 59-64.

[5] Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость: монография, Новосибирск: Наука, 2000.

УДК 517.956

О задаче Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка

Миронов А. Н.
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт,а
г. Елабуга
Самарский государственный технический университет,
г. Самара
e-mail: miro73@mail.ru

Mironov A. N. On the Darboux problem for the fourth-order Bianchi equation. The existence and uniqueness of the solution of the Darboux problem for the fourth-order Bianchi equation are proved. We defined Riemann — Hadamard function of Darboux problem. The solution of the Darboux problem in terms of the Riemann — Hadamard function is constructed.

Доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка. Определена функция Римана — Адамара задачи Дарбу. Построено решение задачи Дарбу в терминах функции Римана — Адамара.

В статье [1] для уравнения Бианки третьего порядка в терминах введенной там функции Римана — Адамара построено решение задачи Дарбу.

Здесь рассматривается уравнение Бианки четвертого поряка. Уравнение Бианки четвертого и произвольного порядка с разных точек зрения исследовалось в работах [2]–[17].

Уравнением Бианки четвертого порядка называют уравнение

$$L(u) \equiv u_{xyzt} + a_{1110}u_{xyz} + a_{1101}u_{xyt} + a_{1011}u_{xzt} + a_{0111}u_{yzt}+$$
$$+a_{1100}u_{xy} + a_{1010}u_{xz} + a_{1001}u_{xt} + a_{0110}u_{yz} + a_{0101}u_{yt} + a_{0011}u_{zt}+$$
$$+a_{1000}u_{x} + a_{0100}u_{y} + a_{0010}u_{z} + a_{0001}u_{t} + a_{0000}u = f(x,y,z,t). \qquad (1)$$

Коэффициенты уравнения (1) зависят от (x, y, z, t).

Определим класс функций $C^{(k,l,m,n)}(D)$ следующим образом: функция $u \in C^{(k_1,k_2,k_3,k_4)}(D)$, если в области D существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3+r_4}u}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}\partial t^{r_4}}$ $(r_i = 0, \ldots, k_i)$. Решение класса $C^{(1,1,1,1)}(D)$ назовем регулярным в области D.

Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $y = y_1 > 0$, $z = 0$, $z = z_1 > 0$, $t = x$, $t = t_1 > 0$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ijkl} \in C^{(i,j,k,l)}(\overline{D})$. Обозначим через X, Y, Z, S грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = x$ соответственно.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered}
u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y, z, t), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x, z, t),\\
u|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x, y, t), \quad u|_{\overline{S}} = \psi(x, y, z),\\
\varphi_1(y, 0, t) = \varphi_3(0, y, t),\ \varphi_1(0, z, t) = \varphi_2(0, z, t),\ \varphi_2(x, 0, t) = \varphi_3(x, 0, t),\\
\varphi_1(y, z, 0) = \psi(0, y, z),\ \varphi_2(x, z, x) = \psi(x, 0, z),\ \varphi_3(x, y, x) = \psi(x, y, 0),\\
\varphi_1 \in C^{(1,1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}),\\
\varphi_3 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}), \quad \psi \in C^{(1,1,1)}(\overline{S}).
\end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\begin{gathered}
v(x, y, z, t) - \int_\tau^t a_{1110}(x, y, z, \delta)v(x, y, z, \delta)d\delta - \int_\zeta^z a_{1101}(x, y, \gamma, t)v(x, y, \gamma, t)d\gamma -\\
- \int_\eta^y a_{1011}(x, \beta, z, t)v(x, \beta, z, t)d\beta - \int_\xi^x a_{0111}(\alpha, y, z, t)v(\alpha, y, z, t)d\alpha +\\
+ \int_\zeta^z \int_\tau^t a_{1100}(x, y, \gamma, \delta)v(x, y, \gamma, \delta)d\delta d\gamma + \int_\eta^y \int_\tau^t a_{1010}(x, \beta, z, \delta)v(x, \beta, z, \delta)d\delta d\beta +\\
+ \int_\xi^x \int_\tau^t a_{0110}(\alpha, y, z, \delta)v(\alpha, y, z, \delta)d\delta d\alpha + \int_\eta^y \int_\zeta^z a_{1001}(x, \beta, \gamma, t)v(x, \beta, \gamma, t)d\gamma d\beta +\\
+ \int_\xi^x \int_\zeta^z a_{0101}(\alpha, y, \gamma, t)v(\alpha, y, \gamma, t)d\gamma d\alpha + \int_\xi^x \int_\eta^y a_{0011}(\alpha, \beta, z, t)v(\alpha, \beta, z, t)d\beta d\alpha -\\
- \int_\eta^y \int_\zeta^z \int_\tau^t a_{1000}(x, \beta, \gamma, \delta)v(x, \beta, \gamma, \delta)d\delta d\gamma d\beta -\\
- \int_\xi^x \int_\zeta^z \int_\tau^t a_{0100}(\xi, y, \gamma, \delta)v(\xi, y, \gamma, \delta)d\delta d\gamma d\xi -\\
- \int_\xi^x \int_\eta^y \int_\tau^t a_{0010}(\xi, \beta, z, \delta)v(\xi, \beta, z, \delta)d\delta d\beta d\xi -\\
- \int_\xi^x \int_\eta^y \int_\zeta^z a_{0001}(\xi, \beta, \zeta, t)v(\xi, \beta, \zeta, t)d\zeta d\beta d\xi +\\
+ \int_\xi^x \int_\eta^y \int_\zeta^z \int_\tau^t a_{0000}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)v(\alpha, \beta, \gamma, \delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha = 1.
\end{gathered}$$

Решение этого уравнения представляет собой функцию Римана [2] для (1). Решение v указанного уравнения существует и единственно. Очевидно, v зависит от ξ, η, ζ, τ. Если нужно подчеркнуть эту зависимость, пишут $v = R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$.

Введем обозначения:

$$A_{0001} = R_t - a_{1110}R, \quad A_{0010} = R_z - a_{1101}R,$$

$$A_{0100} = R_y - a_{1011}R, \quad A_{1000} = R_x - a_{0111}R,$$
$$A_{0011} = R_{zt} - (a_{1110}R)_z - (a_{1101}R)_t + a_{1100}R,$$
$$A_{0101} = R_{yt} - (a_{1110}R)_y - (a_{1011}R)_t + a_{1010}R,$$
$$A_{0110} = R_{yz} - (a_{1101}R)_y - (a_{1011}R)_z + a_{1001}R,$$
$$A_{1001} = R_{xt} - (a_{1110}R)_x - (a_{0111}R)_t + a_{0110}R,$$
$$A_{1010} = R_{xz} - (a_{1101}R)_x - (a_{0111}R)_z + a_{0101}R,$$
$$A_{1100} = R_{xy} - (a_{1011}R)_x - (a_{0111}R)_y + a_{0011}R,$$
$$A_{0111} = R_{yzt} - (a_{1110}R)_{yz} - (a_{1101}R)_{yt} - (a_{1011}R)_{zt} + (a_{1100}R)_y +$$
$$+ (a_{1010}R)_z + (a_{1001}R)_t - a_{1000}R,$$
$$A_{1011} = R_{xzt} - (a_{1110}R)_{xz} - (a_{1101}R)_{xt} - (a_{0111}R)_{zt} + (a_{1100}R)_x +$$
$$+ (a_{0110}R)_z + (a_{0101}R)_t - a_{0100}R,$$
$$A_{1101} = R_{xyt} - (a_{1110}R)_{xy} - (a_{1101}R)_{xt} - (a_{0111}R)_{yt} + (a_{1010}R)_x +$$
$$+ (a_{0110}R)_y + (a_{0011}R)_t - a_{0010}R,$$
$$A_{1110} = R_{xyz} - (a_{1101}R)_{xy} - (a_{1011}R)_{xz} - (a_{0111}R)_{yz} + (a_{1001}R)_x +$$
$$+ (a_{0101}R)_y + (a_{0011}R)_z - a_{0001}R,$$

где коэффициенты уравнения (1) зависят от x, y, z, t, а функция R — от x, y, z, t, ξ, η, ζ, τ.

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости тождества

$$(Ru)_{xyzt} \equiv RL(u) + (A_{0001})_{xyz} + (A_{0010})_{xyt} + (A_{0100})_{xzt} + (A_{1000})_{yzt} -$$

$$-(A_{0011})_{xy} - (A_{0101})_{xz} - (A_{0110})_{xt} - (A_{1001})_{yz} - (A_{1010})_{yt} - (A_{1100})_{zt} +$$
$$+ (A_{0111})_x + (A_{1011})_y + (A_{1101})_z + (A_{1110})_t, \tag{3}$$

где a_{ijkl} зависят от (x, y, z, t), $R = R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$, а $u(x, y, z, t)$ — любая функция класса $C^{(1,1,1,1)}$.

Возьмем внутри области D произвольную точку $P(\xi, \eta, \zeta, \tau)$. Она определяет область D_P, ограниченную плоскостями $x = 0$, $x = \xi$, $y = 0$, $y = \eta$, $z = 0$, $z = \zeta$, $t = \tau$, $t = x$. Очевидно, область D_P можно разбить на две части: D^1, которая ограничена плоскостями $x = 0$, $x = \xi$, $y = 0$, $y = \eta$, $z = 0$, $z = \zeta$, $t = \tau$, $t = \xi$; D^2, которая ограничена плоскостями $x = 0$, $x = \xi$, $y = 0$, $y = \eta$, $z = 0$, $z = \zeta$, $t = \xi$, $t = x$. В трехмерном случае (см. [1], рисунок 1) им соответствуют параллелепипед и призма.

Определим функцию Римана — Адамара задачи Дарбу $H(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$. Пусть

$$H(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \begin{cases} R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D^1, \\ V(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D^2, \end{cases}$$

где R — определенная выше функция Римана, а функция V является в области D^2 решением сопряженного к (1) уравнения, удовлетворяющим некоторым условиям, обеспечивающим ее существование и единственность.

Тождество (3) записывается в дивергентной форме (причем функция Римана в (3) заменяется на функцию Римана — Адамара $H = H(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$)

$$HL(u) = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} + \frac{\partial W_4}{\partial t}. \tag{4}$$

Интегрирование тождества (4) с учетом свойств функции Римана — Адамара приводит к формуле решения задачи Дарбу в терминах функции Римана — Адамара

$$u(P) = F(P) + \iiint_{D^1+D^2} Hf\, dx\, dy\, dz\, dt$$

где функция $F(P)$ полностью определена граничными данными задачи Дарбу.

Литература

[1] Миронов А. Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Матем. заметки. 2017. Т. 102, вып. 1. – С. 64–71.

[2] Жегалов В. И., Севастьянов В. А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 10. – С. 1429–1430.

[3] Севастьянов В. А. Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 12. – С. 1706–1707.

[4] Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.

[5] Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. Уравнения с доминирующей частной производной. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014. – 385 с.

[6] Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 12. – С. 1698–1701.

[7] Миронов А. Н. Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в R^n // Сибирский матем. журнал. 2006. Т. 47, вып. 3. – С. 584–594.

[8] Кощеева О. А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве // Известия вузов. Математика. 2008. № 9. – С. 40–46.

[9] Миронов А. Н. Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. – С. 1144–1149.

[10] Миронов А. Н. О некоторых классах уравнений Бианки четвертого порядка с постоянными отношениями инвариантов Лапласа // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 12. – С. 1572–1581.

УДК 517.956

К задаче Дарбу для систем гиперболических уравнений

Миронов А. Н., Миронова Л. Б.
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт,а
г. Елабуга,
Самарский государственный технический университет,
г. Самара
e-mail: miro73@mail.ru

Mironov A. N., Mironova L. B. On the Darboux problem for systems of hyperbolic equations. For a system with three independent variables, the existence and uniqueness of the solution of the Darboux problem are proved. The Riemann — Hadamard matrix is defined, and the solution of the Darboux problem is constructed in terms of the Riemann — Hadamard matrix. Similar results are obtained for a hyperbolic system in n-dimensional space.

Для системы с тремя независимыми переменными доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Определена матрица Римана — Адамара, построено решение задачи Дарбу в терминах матрицы Римана — Адамара. Аналогичные результаты получены для гиперболической системы в n-мерном пространстве.

Система уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n) u_k + f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

исследовалась многими авторами [1], [2], [3]. Система (1) представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа. Отметим, что наибольшее число публикаций относится к случаю, когда в (1) $n = 2$.

В работе [4] предложен вариант метода Римана для гиперболических систем дифференциальных уравнений, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. Решение задачи Дарбу для системы (1) с двумя независимыми переменными построено в терминах матрицы Римана — Адамара в статье [5].

Здесь для системы вида (1) с тремя независимыми переменными предложен метод решения задачи Дарбу, являющийся определенным развитием метода Римана, который естественно назвать методом Римана — Адамара.

Рассмотрим гиперболическую систему

$$\begin{cases} u_x = a_{11}(x,y,z)u + a_{12}(x,y,z)v + a_{13}(x,y,z)w + f_1(x,y,z), \\ v_y = a_{21}(x,y,z)u + a_{22}(x,y,z)v + a_{23}(x,y,z)w + f_2(x,y,z), \\ w_z = a_{31}(x,y,z)u + a_{32}(x,y,z)v + a_{33}(x,y,z)w + f_3(x,y,z). \end{cases} \tag{2}$$

Линейное преобразование искомых функций приводит (2) к случаю, когда

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \equiv 0.$$

Считаем эти условия выполненными.

Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $y = y_0 > 0$, $z = x$, $z = z_0 > 0$. Считаем, что коэффициенты системы (2) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ij} \in C(\overline{D})$, $f_i \in C(\overline{D})$, i, $j = \overline{1, 3}$. Обозначим через X, Y, T грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = x$ соответственно.

Определим класс функций $C^{(k,l,m)}$ следующим образом: функция $f \in C^{(k_1,k_2,k_3)}$, если существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3} f}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3}}$ $(r_i = 0, \ldots, k_i)$. Решение класса $u \in C^{(1,0,0)}(D)$, $v \in C^{(0,1,0)}(D)$, $w \in C^{(0,0,1)}(D)$ назовем регулярным в области D.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение системы* (2), *удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y, z), \quad v|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x, z), \quad w|_{\overline{T}} = \psi(x, y), \\ \varphi_1 \in C(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C(\overline{Y}), \quad \psi \in C(\overline{T}). \end{gathered} \tag{3}$$

Методом интегральных уравнений доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполняются условия $a_{ij} \in C(\overline{D})$, $f_i \in C(\overline{D})$, i, $j = \overline{1, 3}$, то решение задачи Дарбу* (2), (3) *существует и единственно.*

Для системы (2) построено решение задачи Дарбу в терминах матрицы, аналогичной матрице Римана — Адамара, которая использовалась в работе [5].

Аналогичные результаты получены для системы (1) при произвольном n.

Литература

[1] Бицадзе А. В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными // Матем. моделирование. 1994. Т. 6, № 6. – С. 22–31.

[2] Чекмарев Т. В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 9. – С. 1614–1622.

[3] Плещинская И. Е. Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. – С. 1634–1637.

[4] Миронова Л. Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. 2006. № 1. – С. 34–39.

[5] Mironova L. B. Boundary-value Problems with Data on Characteristics for Hyperbolic Systems of Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, № 3. – Pp. 400–406.

УДК 517.95

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ РИМАНА—АДАМАРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ЯВНОМ ВИДЕ

Миронов А. Н., Яковлева Ю. О.
Самарский государственный технический университет
Самара
e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Mironov A. N., Yakovleva J. O. The Riemann—Hadamard function for the Bianchi equation of the horth order. In the paper for the fourth-order equation with a dominant partial derivative (the Bianchi equation) the statement of the Darboux problem are given. The Riemann—Hadamard function in terms of hypergeometric functions for the Bianchi equation of the fourth-order is constructed.

В статье приведена постановка задачи Дарбу для уравнения четвертого порядка с доминирующей частной производной (уравнения Бианки). Функция Римана—Адамара для уравнения Бианки четвертого порядка построена в явном виде в терминах гипергеометрических функций.

Уравнением Бианки четвертого порядка называют уравнение

$$L(u) \equiv u_{xyzt}+a_{1110}(x,y,z,t)u_{xyz}+a_{1101}(x,y,z,t)u_{xyt}+a_{0111}(x,y,z,t)u_{yzt}+a_{1011}(x,y,z,t)u_{xzt}+ \\ +a_{1100}(x,y,z,t)u_{xy}+a_{0110}(x,y,z,t)u_{yz}+a_{1010}(x,y,z,t)u_{xz}+a_{0101}(x,y,z,t)u_{yt}+a_{0011}(x,y,z,t)u_{zt}+ \\ +a_{1000}(x,y,z,t)u_x+a_{0100}(x,y,z,t)u_y+a_{0010}(x,y,z,t)u_z+a_{0001}(x,y,z,t)u_t+a_{0000}(x,y,z,t)u= \\ =f(x,y,z,t). \quad (1)$$

Определим класс функций $C^{(k,l,m,n)}(D)$ следующим образом: функция $u \in C^{(k_1,k_2,k_3,k_4)}(D)$, если в области D существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3+r_4}u}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}\partial t^{r_4}}$ $(r_i=0,\ldots,k_i)$. Решение класса $C^{(1,1,1,1)}(D)$ назовем регулярным в D.

Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $y=y_1>0$, $z=0$, $z=z_1>0$, $t=x$, $t=t_1>0$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ijkl}\in C^{(i,j,k,l)}(\overline{D})$. Обозначим через X, Y, Z, S грани D при $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=x$ соответственно.

Задача Дарбу. В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}}=\varphi_1(y,z,t), \quad u|_{\overline{Y}}=\varphi_2(x,z,t), \\ u|_{\overline{Z}}=\varphi_3(x,y,t), \quad u|_{\overline{S}}=\varphi_4(x,y,z), \\ \varphi_1(y,0,t)=\varphi_3(0,y,t),\ \varphi_1(0,z,t)=\varphi_2(0,z,t),\ \varphi_2(x,0,t)=\varphi_3(x,0,t), \\ \varphi_1(y,z,0)=\varphi_4(0,y,z),\ \varphi_2(x,z,x)=\varphi_4(x,0,z),\ \varphi_3(x,y,x)=\varphi_4(x,y,0), \\ \varphi_1\in C^{(1,1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2\in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3\in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}), \quad \varphi_4\in C^{(1,1,1)}(\overline{S}). \end{gathered} \quad (2)$$

Метод Римана—Адамара для уравнений Бианки третьего и четвертого порядка разработан в работах [1], [2], где решение задачи Дарбу строится в терминах функции типа Римана—Адамара, аналогичной по свойствам функции Римана—Адамара для уравнения с двумя независимыми переменными. Здесь речь идет о построении функции Римана—Адамара в явном виде.

Пусть точка $P(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ определяет область D_P, ограниченную плоскостями $x = 0$, $x = \xi$, $y = 0$, $y = \eta$, $z = 0$, $z = \zeta$, $t = \tau$, $t = x$. Область D_P можно разбить на две области: D_1, ограниченную плоскостями $x = 0$, $x = \xi$, $y = 0$, $y = \eta$, $z = 0$, $z = \zeta$, $t = \tau$, $t = \xi$ и D_2, ограниченную плоскостями $x = 0$, $x = \xi$, $y = 0$, $y = \eta$, $z = 0$, $z = \zeta$, $t = \xi$, $t = x$.

В работе [3] построена функция Римана для некоторого класса уравнений вида (1). Опираясь на этот результат, доказано следующее утверждение.

Теорема. Если для уравнения (1) выполняются условия

$$h_{1,4} \equiv h_{2,4} \equiv h_{3,4} \equiv h_{1,3} \equiv h_{2,3} \equiv h_{1,2} \equiv h_{12,4} \equiv h_{13,4} \equiv h_{23,4} \equiv h_{12,3} \equiv 0,$$
$$h_{123,4} = \varphi(x)\psi(y)\theta(z)\varphi(t),$$

и существует непрерывно дифференцируемая по всем переменным в $\overline{D}$ функция G, такая, что

$$a_{1110} = G'_t, \quad a_{1101} = G'_z, \quad a_{1011} = G'_y, \quad a_{0111} = G'_x,$$

то функция Римана—Адамара H имеет вид

$$H(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \begin{cases} R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D_1, \\ V(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau), & (x, y, z, t) \in D_2, \end{cases}$$

$$R(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = E(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)\,{}_0F_3\,(1, 1, 1; \omega)\,,$$

$$V(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = E(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)({}_0F_3\,(1, 1, 1; \omega) - {}_0F_3\,(1, 1, 1; \rho)),$$

$$E(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \exp\Bigg(\int\limits_{\xi}^{x} a_{0111}(\alpha, y, z, t)\, d\alpha + \int\limits_{\eta}^{y} a_{1011}(\xi, \beta, z, t)\, d\beta +$$

$$+ \int\limits_{\zeta}^{z} a_{1101}(\xi, \eta, \gamma, t)\, d\gamma + \int\limits_{\tau}^{t} a_{1110}(\xi, \eta, \zeta, \sigma)\, d\sigma\Bigg),$$

$$\omega = \int\limits_{\xi}^{x} \varphi(\alpha)\, d\alpha \int\limits_{\eta}^{y} \psi(\beta)\, d\beta \int\limits_{\zeta}^{z} \theta(\gamma)\, d\gamma \int\limits_{\tau}^{t} \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

$$\rho = \int\limits_{\xi}^{t} \varphi(\alpha)\, d\alpha \int\limits_{\eta}^{y} \psi(\beta)\, d\beta \int\limits_{\zeta}^{z} \theta(\gamma)\, d\gamma \int\limits_{\tau}^{x} \varphi(\sigma)\, d\sigma,$$

конструкции h_α приведены в [4, с. 61] .

Литература

[1] Миронов А. Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Матем. заметки. 2017. Т. 102. № 1. – С. 64-71.

[2] Миронов А. Н. К задаче Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка // Материалы XI Всероссийской конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". Т. 2. – Самара, 2019. – С. 53–54.

[3] Кощеева О. А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве// Изв. вузов. Математика. 2008. № 9. – С. 40–46.

[4] Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2014. – 226 с.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 296 с.

УДК 517.927.25

О БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Ф. М. Намазов
Бакинский Государственный Университет
Баку, Азербайджан
e-mail: faig-namazov@mail.ru

F. M. Namazov. On the bifurcation of solutions from infinity of some nonlinear eigenvalue boundary value problems

Рассматривается следующая нелинейная задача на собственные значения

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x) + h(x, y, y', y'', y''', \lambda),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y''(0) = y''(1) = 0, \tag{2}$$

$$Ty(0) - a\lambda y(0) = Ty(1) - c\lambda y(1) = 0, \tag{3}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $Ty \equiv y''' - qy'$, $q(x)$ – положительная абсолютно непрерывная на $[0,1]$ функция, a, c – действительные постоянные такие, что $a > 0$, $c < 0$. Нелинейный член h имеет вид $h = f + g$, где функции $f, g \in C([0,1] \times \mathbb{R}^5; \mathbb{R})$ удовлетворяют следующим условиям: существуют числа $M > 0$ and $\tau > 0$ такие, что

$$\left|\frac{f(x,y,s,v,w,\lambda)}{y}\right| \leq M,\ x \in [0,1],\ (y,s,v,w) \in \mathbb{R}^4,$$

$$|y| + |s| + |v| + |w| \geq \tau,\ y \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R};$$

$$g(x,y,s,\upsilon,w,\lambda) = o\left(|y|+|s|+|\upsilon|+|w|\right) \text{ при } |y|+|s|+|v|+|w| \to +\infty,$$

равномерно по $(x,\lambda) \in [0,1] \times \Lambda$, для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

Известно [1], что собственные значения линейной задачи

$$\begin{array}{l} y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ x \in (0,1), \\ y''(0) = y''(1) = 0, \\ Ty(0) - a\lambda y(0) = Ty(1) - c\lambda y(1) = 0, \end{array} \tag{4}$$

являются положительными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Кроме того, собственная функция $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, соответствующая собственному значению λ_k, имеет в точности $k-1$ простых нулей в интервале $(0,1)$.

Пусть $E = C^3[0,1] \cap \{y : y''(0) = y''(1) = 0\}$ – банахово пространство с обычной нормой $||y||_3 = \sum\limits_{i=0}^{3} ||y^{(s)}||_\infty$, $||y||_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |y(x)|$. Как и в работах [2, 3], привлечением угловых функций, для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\nu \in \{+,-\}$ можно построить множество S_k^ν функций $y \in E$ обладающих осцилляционными свойствами собственных функций (и их производных) задачи (4) и для которых $\lim\limits_{x\to 0+} \nu y(x) = 1$.

Говорят, что (λ, ∞) является точкой бифуркации или асимптотической точкой бифуркации нелинейной задачи (1)-(3) по множеству $\mathbb{R} \times S_k^\nu$, если существует последовательность $\{(\mu_n, u_n)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \times E$ решений этой задачи такая, что $\mu_n \to \lambda$, $||u_n||_3 \to \infty$ при $n \to \infty$ и $u_n \in S_k^\nu$.

Теорема 1. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\nu \in \{+,-\}$ множество асимптотических точек бифуркации задачи (1)-(3) по множеству $\mathbb{R} \times S_k^\nu$ является не пустым; если (λ, ∞) является асимптотической точкой бифуркации задачи (1)-(3) по множеству $\mathbb{R} \times S_k^\nu$, то $\lambda \in I_k$, где $I_k = [\lambda_k - M, \lambda_k + M]$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\nu \in \{+,-\}$ через D_k^ν обозначим объединение всех связных компонент множества решений задачи (1)-(3), исходящих из асимптотических точек бифуркации этой задачи по множеству $\mathbb{R} \times S_k^\nu$, и $I_k \times \{\infty\}$.

Имеет место следующая

Теорема 2. Для множества D_k^ν справедливо одно из следующих утверждений:

а) D_k^ν пересекается с $I_k' \times \{\infty\}$ по множеству $\mathbb{R} \times S_{k'}^{\nu'}$ при некотором $(k', \nu') \neq (k, \nu)$;

б) существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $D_k^\nu \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (\lambda, 0)$;

в) проекция множества D_k^ν на $\mathbb{R} \times \{0\}$ неограничена.

Кроме того, если объединение $D_k = D_k^+ \cup D_k^-$ не удовлетворяет утверждениям (б) или (в), то должно удовлетворять утверждению (а) при $k' \neq k$.

Литература

[1] Aliyev Z. S., Namazov F. M. Spectral properties of a fourth-order eigenvalue problem with spectral parameter in the boundary conditions // Electron. J. Differ. Equ. 2017. № 307. – P. 1–11.

[2] Алиев З. С. О глобальной бифуркации решений некоторых нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка // Матем. сб. 2016, т. 207. № 12. – С. 3–29.

[3] Aliyev Z. S., Asadov A. X. Global bifurcation from zero in some fourth-order nonlinear eigenvalue problems // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2021. Vol. 44, № 2. – P. 981–992.

УДК 517.968

К УСЛОВИЯМ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ N-МЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Созонтова Е. А.
Елабужский институт КФУ
г. Елабуга
e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

Sozontova E. A. Conditions for the solvability of one n-dimensional system of equations with partial integrals. For one n-dimensional system of partial integral equations, conditions are obtained under which the system under consideration is uniquely solvable.

Keywords: system with partial integrals, conditions of solvability.

Для одной n-мерной системы уравнений с частными интегралами получены условия, при которых рассматриваемая система однозначно разрешима.

Ключевые слова: система с частными интегралами, условия разрешимости.

В области $\Omega = \{x_1^0 < x_1 < x_1^1,\ x_2^0 < x_2 < x_2^1, \ldots, x_n^0 < x_n < x_n^1\}$ рассматривается система

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^{n} (a_{jk} \int\limits_{x_k^0}^{x_k} (\sum_{i=1}^{n} b_{ki}\varphi_i) dt_k) + f_j, \quad (j = \overline{1, n}), \tag{1}$$

где $\varphi_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестные функции, $a_{jk},\ b_{ki},\ f_j$ – переменные коэффициенты и свободный член, зависящие от $(x_1, \ldots, x_n)$. Будем считать, что коэффициенты системы (1) непрерывны в замыкании области Ω и имеет место условие

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det \|a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \neq 0. \tag{2}$$

Целью исследования является выделение условий, при которых система (1) однозначно разрешима.

Пусть выполняется неравенство:

$$\det \|\Delta_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \neq 0, \tag{3}$$

где Δ_{ik} получаются из Δ путем вычеркивания строки с номером i и столбца с номером k.

Тогда систему (1) можно редуцировать к задаче:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} B_{ji} u_j + F_k, \ u_k|_{x_k = x_k^0} \equiv \Delta_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n), \ (k = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Здесь

$$B_{ji} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki} A_{ji}, \text{ если } j \neq k, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki} A_{ji} + (\ln \Delta)_{x_k}, \text{ если } j = k, \quad F_k = (\Delta_k \Delta^{-1})_{x_k} \Delta. \end{cases}$$

Задача (4) является однозначно разрешимой [1]. Следовательно, справедлива

Теорема 1. Если в замыкании области Ω выполняются неравенства (2), (3), то система (1) однозначно разрешима.

Литература

[1] Чекмарев, Т. В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными / Т. В. Чекмарев // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 9. – С. 1614–1622.

УДК 517.968

К НОВЫМ СЛУЧАЯМ РАЗРЕШИМОСТИ В КВАДРАТУРАХ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Созонтова Е. А.
Елабужский институт КФУ
г. Елабуга
e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

Sozontova E.A. On new cases of solvability in quadratures of three-dimensional system of equations with partial integrals. For a system of Volterra equations with partial integrals with three independent variables, new conditions are obtained under which the system under consideration is solvable in quadratures.

Keywords: system with partial integrals, solvability in quadratures.

Для системы уравнений Вольтерра с частными интегралами с тремя независимыми переменными получены новые условия, при которых рассматриваемая система разрешима в квадратурах.

Ключевые слова: система с частными интегралами, разрешимость в квадратурах.

В области $G = \{x_0 < x < x_1, \ y_0 < y < y_1, \ z_0 < z < z_1\}$ рассматривается система

$$
\begin{gathered}
\varphi_i(x,y,z)=a_{i1}(x,y,z)\int\limits_{x_0}^{x}[b_{11}(t,y,z)\varphi_1(t,y,z)+\\
+b_{12}(t,y,z)\varphi_2(t,y,z)+b_{13}(t,y,z)\varphi_3(t,y,z)]dt+\\
+a_{i2}(x,y,z)\int\limits_{y_0}^{y}[b_{21}(x,\tau,z)\varphi_1(x,\tau,z)+b_{22}(x,\tau,z)\varphi_2(x,\tau,z)+\\
+b_{23}(x,\tau,z)\varphi_3(x,\tau,z)]d\tau+a_{i3}(x,y,z)\int\limits_{z_0}^{z}[b_{31}(x,y,\theta)\varphi_1(x,y,\theta)+\\
+b_{32}(x,y,\theta)\varphi_2(x,y,\theta)+b_{33}(x,y,\theta)\varphi_3(x,y,\theta)]d\theta+f_i(x,y,z),\quad i=\overline{1,3}.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Будем считать, что коэффициенты системы (1) непрерывны в замыкании области G и имеет место условие

$$
\Delta(x,y,z)=\det\|a_{ik}(x,y,z)\|\neq 0. \tag{2}
$$

Целью исследования является выделение случаев разрешимости системы (1) в квадратурах (некоторые случаи разрешимости этой системы в явном виде были изложены в работе [1]). На основании результатов работы [2] получены новые случаи разрешимости рассматриваемой системы в квадратурах.

Введем обозначения:

$$
\Delta_1\neq 0. \tag{3}
$$

$$
\begin{gathered}
\alpha_1=-((\ln\Delta)_x+(b_{11}A_1+b_{12}A_2+b_{13}A_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}),\\
\beta_1=-(b_{11}B_1+b_{12}B_2+b_{13}B_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\gamma_1=-(b_{11}C_1+b_{12}C_2+b_{13}C_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\quad \alpha_2=-(b_{21}A_1+b_{22}A_2+b_{23}A_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\beta_2=-((\ln\Delta)_y+(b_{21}B_1+b_{22}B_2+b_{23}B_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}),\\
\gamma_2=-(b_{21}C_1+b_{22}C_2+b_{23}C_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\alpha_3=-(b_{31}A_1+b_{32}A_2+b_{33}A_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\quad \beta_3=-(b_{31}B_1+b_{32}B_2+b_{33}B_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1},\\
\gamma_3=-((\ln\Delta)_z+(b_{31}C_1+b_{32}C_2+b_{33}C_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}),
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где $A_i,\ B_i,\ C_i,\ \Delta_1$ выражаются через коэффициенты системы (1) (см.[1]).

$$
\begin{gathered}
h=a_x+ab-c,\ k=b_y+ab-c,\\
\omega_r=\frac{2s_r'(x,z)t_r'(y,z)}{(2-m_r)[s_r(x,z)+t_r(y,z)]^2},\ [s_r(x,z)+t_r(y,z)]s_r'(x,z)t_r'(y,z)\neq 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

$$
\begin{gathered}
1)\ 2h-(\ln h)_{xy}-k\equiv 0;\\
2)\ 2k-(\ln k)_{xy}-h\equiv 0;\\
3)\ h\equiv 2\mu_0(x,z)\tau_0(y,z)\neq 0,\ k\equiv 3\mu_0(x,z)\tau_0(y,z)\neq 0;\\
4)\ h\equiv 3\mu_1(x,z)\tau_1(y,z)\neq 0,\ k\equiv 2\mu_1(x,z)\tau_1(y,z)\neq 0;\\
5)\ (\ln h)_{xy}\equiv h-k,\ h\equiv 2b_y\equiv\omega_1;\\
6)\ (\ln k)_{xy}\equiv k-h,\ k\equiv 2a_x\equiv\omega_2;
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Здесь $\mu_k,\ \tau_k\in C^1$ $(k=\overline{0,1})$, $s,\ t,\ m\in C^2$, а функции $\omega_1,\ \omega_2$ удовлетворяют условию $(\omega_k+1)(\omega_k-2)\neq 0$.

$$
\gamma_1\equiv\gamma_2\equiv 0, \tag{7}
$$

$$
a=\beta_2-(\ln\beta_1)_y,\ b=\alpha_1,\ c=\alpha_{1y}-\alpha_1(\ln\beta_1)_y-\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1,\ \beta_1\neq 0. \tag{8}
$$

$$a=\beta_2,\ b=\alpha_1-(\ln\alpha_2)_x,\ c=\beta_{2x}-\beta_2(\ln\alpha_2)_x-\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2,\ \alpha_2\neq 0. \tag{9}$$

$$\alpha_2\equiv\alpha_3\equiv 0, \tag{10}$$

$$a=\gamma_3-(\ln\gamma_2)_z,\ b=\beta_2,\ c=\beta_{2z}-\beta_2(\ln\gamma_2)_z-\gamma_2\beta_3+\gamma_3\beta_2,\ \gamma_2\neq 0. \tag{11}$$

$$a=\gamma_3,\ b=\beta_2-(\ln\beta_3)_y,\ c=\gamma_{3y}-\gamma_3(\ln\beta_3)_y-\beta_3\gamma_2+\gamma_3\beta_2,\ \beta_3\neq 0. \tag{12}$$

$$\beta_1\equiv\beta_3\equiv 0, \tag{13}$$

$$a=\gamma_3-(\ln\gamma_1)_z,\ b=\alpha_1,\ c=\alpha_{1z}-\alpha_1(\ln\gamma_1)_z-\gamma_1\alpha_3+\gamma_3\alpha_1,\ \gamma_1\neq 0. \tag{14}$$

$$a=\gamma_3,\ b=\alpha_1-(\ln\alpha_3)_x,\ c=\gamma_{3x}-\gamma_3(\ln\alpha_3)_x-\alpha_3\gamma_1+\alpha_1\gamma_3,\ \alpha_3\neq 0. \tag{15}$$

Справедливы теоремы

Теорема 1. Пусть $h,\ k,\ \omega_r$ определяются формулами (5). Тогда для разрешимости системы (1) в квадратурах достаточно, чтобы выполнялись неравенства (2), (3), тождества (7) и один из двух наборов $a,\ b,\ c$, определяемых формулами (8), (9), либо удовлетворял любому из тождеств 1) – 2) из (6), либо существовали функции $\mu_r,\ \tau_r,\ m_r,\ s_r,\ t_r$, для которых имеет место любая из групп соотношений 3) – 6) из (6).

Теорема 2. Пусть $h,\ k,\ \omega_r$ определяются формулами (5). Тогда для разрешимости системы (1) в квадратурах достаточно, чтобы выполнялись неравенства (2), (3), тождества (10) и один из двух наборов $a,\ b,\ c$, определяемых формулами (11), (12), либо удовлетворял любому из тождеств 1) – 2) из (6), либо существовали функции $\mu_r,\ \tau_r,\ m_r,\ s_r,\ t_r$, для которых имеет место любая из групп соотношений 3) – 6) из (6) (функции $\mu_j(x,z),\ \tau_j(y,z), s_k(x,z),\ t_k(y,z)$ необходимо заменить соответственно на $\mu_j(x,y),\ \tau_j(x,z), s_k(x,y),\ t_k(x,z)$, а переменные $x,\ y$ – соответственно на $y,\ z$).

Теорема 3. Пусть $h,\ k,\ \omega_r$ определяются формулами (5). Тогда для разрешимости системы (1) в квадратурах достаточно, чтобы выполнялись неравенства (2), (3), тождества (13) и один из двух наборов $a,\ b,\ c$, определяемых формулами (14), (15), либо удовлетворял любому из тождеств 1) – 2) из (6), либо существовали функции $\mu_r,\ \tau_r,\ m_r,\ s_r,\ t_r$, для которых имеет место любая из групп соотношений 3) – 6) из (6) (функции $\mu_j(x,z),\ \tau_j(y,z), s_k(x,z),\ t_k(y,z)$ необходимо заменить соответственно на $\mu_j(x,y),\ \tau_j(y,z), s_k(x,y),\ t_k(y,z)$, а переменные $x,\ y$ – соответственно на $x,\ z$).

Литература

[1] Созонтова, Е. А. Об условиях разрешимости трехмерной системы интегральных уравнений в квадратурах / Е. А. Созонтова // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. – 2015. – №10 (132). – С. 40–46.

[2] Жегалов В. И., Созонтова Е. А. Дополнение к случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 2. – С. 270–273.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДРОБНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЧАСТЬ 2: УРАВНЕНИЕ ЛЬЕНАРА

Хакимова З. Н.
Военно-космическая академия
им. А. Ф. Можайского
Санкт-Петербург
e-mail: vka@mil.ru

Khakimova Z. N. About integration of fractional polynomial differential equations. Part 2: Lienard equation. For the class of ordinary differential second order fractional polynomial equations discrete 12th order group is found. As example the Lienard equation is considered. It is showed that knowledge of transformations discrete group for Lienard equation allowes to find solvable fractional polynomial equations, equation of nonlinear oscillations.

Keywords. Ordinary differential equations, discrete group of transformations, solvable equations, the class of generalized Emden-Fauler equations, fractional polynomial differential equations, Lienard equation.

Для класса обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка дробно-полиномиального вида найдена дискретная группа преобразований 12-го порядка. В качестве примера рассмотрено уравнение Льенара. Показано, что знание дискретной группы преобразований для уравнения Льенара даёт возможность находить разрешимые уравнения дробно-полиномиального вида.

Ключевые слова. Обыкновенные дифференциальные уравнения, дискретная группа преобразований, разрешимые уравнения, класс обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера, дифференциальные уравнения дробно-полиномиального вида, уравнение Льенара, уравнение нелинейных колебаний.

1. Введение.

В работах [1,2] был рассмотрен класс ОДУ 2-го порядка с дробно-полиномиальной правой частью:

$$y''_{xx} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}}{\sum\limits_{i=p+1}^{2p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}}, \tag{1}$$

а также его подклассы (2) и (3):

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}, \tag{2}$$

$$y''_{xx} = [\sum_{i=p+1}^{2p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}]^{-1}. \tag{3}$$

Подкласс класса уравнений (2) – класс обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ)

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m \tag{4}$$

подробно исследовал В.Ф. Зайцев (см., например, [3,4]).

Пополнение класса уравнений (4) добавлением дополнительного степенного множителя в правой части – класс уравнений

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m (xy'_x - y)^n \tag{5}$$

изучался в [5-8].

Подкласс класса уравнений (2)

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} \tag{6}$$

был исследован в [9-11].

2. Уравнение Льенара.

Льенар изучал уравнение нелинейных колебаний:

$$z''_{tt} = f(z) z'_t + z, \tag{7}$$

где z – смещение, t – время, $f(z)$ – коэффициент трения.

Рассмотрим более общее уравнение нелинейных колебаний:

$$z''_{tt} = f(z) z'_t + g(z). \tag{8}$$

Авторам справочника [4] 2018 г. удалось привести лишь небольшое количество разрешимых уравнений вида (8).

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ имеют полиномиальный вид:

$$f(z) = az^n + bz^{n-1}, \quad g(z) = pz^{2n+1} + qz^{2n} + rz^{2n-1} \tag{9}$$

$(p = n + a + 1,\ \ r = n - b,\ \ q = -p - r = -2n - a + b - 1)$.

Введем обозначения:

$$k = b - 2n - 1, \quad l = 2n + a + 1, \quad m = 1 - n, \tag{10}$$

тогда

$$\begin{gathered} f(z) = [(l + 2m - 3)z + k - 2m + 3] z^{-m}, \\ g(z) = [(l + m - 1)z + k - m + 2](z - 1) z^{1-2m}. \end{gathered} \tag{11}$$

Класс уравнений (8), (11) является подклассом класса уравнений (2) с пятью слагаемыми: $p = 5$, $m_i \in \{0; 1\}$, $n_i = 0$.

В работе [12] было обнаружено, что класс уравнений (8) с коэффициентами (11) приводится к классу ОУЭФ (4) преобразованием:

$$z'_t = V(z) - z^{2-m} + z^{1-m}, \ \ V = Ax^{k-m+2} y^{m+l-1}, \ \ z = \frac{xy'_x}{y}. \tag{12}$$

Следовательно, любое разрешимое уравнение класса ОУЭФ (4) (а их к настоящему времени известно 117) порождает разрешимое уравнение нелинейных колебаний (8), (11).

3. Дискретная группа диэдра.

Для класса дробно-полиномиальных уравнений (1) была построена дискретная группа преобразований, замкнутых на этом классе уравнений [1,2]:

$$D_6: \quad r^2 = h^6 = (rh)^2 = E, \tag{13}$$

образующими которой являются точечные преобразования **r** и касательное преобразование **h**:

$$\mathbf{r}: \quad x \to y, \quad y \to x; \quad r^2 = E, \tag{14}$$

$$\mathbf{h}: \quad x \to \frac{1}{y'_x}, \quad y \to -\frac{xy'_x - y}{y'_x}; \quad h^6 = E. \tag{15}$$

В классе уравнений (2) преобразование **r** также замкнуто; но в (2) не замкнуто преобразование **h**:

$$(1) \xrightarrow{\mathbf{h}} (2) \xrightarrow{\mathbf{h}} (1).$$

Поэтому при применении к классу уравнений Льенара (8), (11) группы диэдра D_6 12-го порядка, половина уравнений оказываются принадлежащими классу уравнений (1), а вторая половина уравнений принадлежит (2).

Таким образом, каждое интегрируемое уравнение-«дед» класса ОУЭФ (4) с помощью преобразования (12) порождает разрешимое уравнение-«отец» класса уравнений Льенара (8), (11), которому, в свою очередь, соответствуют еще 11 разрешимых уравнений-«детей» из классов уравнений (2) и (3), связанных с (8), (11) преобразованиями дискретной группы D_6:

$$D_6 = \{E, h, ..., h^5, rh, ..., rh^5\}.$$

Литература

[1] Хакимова З. Н. Об интегрировании дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы науч. конф. «Герценовские чтения – 2020». – СПб.: РГПУ, 2020. – С. 9-12.

[2] Хакимова З. Н., Зайцев О. В. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент первого уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения и процессы управления, № 1. – СПб., 2021. – С. 61-92.

[3] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464 с.

[4] Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. – CRC Press, Boca Raton – London, 2018.

[5] Зайцев О. В., Хакимова З. Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Актуальные вопросы современной науки, № 3. – СПб.: науч.-изд. центр «Открытие», 2014. – С. 3-11.

[6] Хакимова З. Н. Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы науч. конф. «Герценовские чтения – 2017». – СПб.: РГПУ, 2017. – С. 112-117.

[7] Хакимова З. Н. Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Труды Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского, 2014. – Вып. 645. – С. 57-62.

[8] Хакимова З. Н. Дифференциальные уравнения степенного вида, интегрируемые в полиномах // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы науч. конф. «Герценовские чтения – 2019». – СПб.: РГПУ, 2019. – С. 97-101.

[9] Хакимова З. Н. Дискретно-групповой анализ нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с алгебраической правой частью. Диссертация. – СПб.: РГПУ, 1997. – 119 с.

[10] Зайцев В. Ф., Хакимова З. Н. О дискретно-групповом анализе уравнения // Деп. в ВИНИТИ № 9030 Вып. 86, 1986. – 31 с.

[11] Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В., Хакимова З. Н. Дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Точные решения уравнения. – Л.: Препринт ЛИИА АН СССР, № 105. – 1989. – 61 с.

[12] Khakimova Z. N. 2018 On discrete groups and solvable equation of nonlinear oscillations // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1333, 2.

УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМИЗАЦИИ К ОРБИТАМ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА

Шагай М. А., Флегонтов А.В.
Санкт-Петербургский государственный университет
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Санкт-Петербург
e-mail: shagay.masha@mail.ru, flegontoff@yandex.ru

Shagay M. A., Flegontov A. V., Applying algorithmization to the orbits of the Emden-Fowler equation. This article deals with classes of equations whose solutions have a special structure. All classes are divided into groups of «propagated» equations, and for some classes relations are obtained, on the basis of which solutions of some generalized homogeneous Emden-Fowler equations are constructed using a finite set of functions through a finite set of special functions in order to algorithmize the process of finding new equations.

Keywords: differential equations, generalized homogeneous Emden-Fowler equation, Weierstrass orbit, tangent orbit, elliptic function, differential puzzles.

В данной статье рассматриваются классы уравнений – орбита Вейерштрасса, орбита тангенсов, орбита эллиптических интегралов, орбита Эйлера – решения которых имеют особую структуру. Все классы разбиваются на группы «размноженных» уравнений, а для некоторых классов получены соотношения, на основе которых по конечному набору функций строятся решения некоторых обобщенных однородных уравнений Эмдена-Фаулера через конечный набор специальных функций с целью алгоритмизации процесса поиска новых уравнений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, обобщенное однородное уравнение Эмдена-Фаулера, орбита Вейерштрасса, орбита тангенсов, эллиптическая функция, дифференциальные пазлы.

Введение

В работе [1] был предложен новый метод поиска решений, а именно, метод «дифференциальных пазлов», который позволяет найти подклассы изучаемого класса обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых могут быть выражены через конечный набор элементов, представимых в терминах заданных классов функций (полиномов, функции Вейерштрасса, и т.д.). В работе [2] был предложен алгоритм для поиска новых уравнений и их решений, которые строятся из некоторого конечного набора полиномов, а также были получены новые решения некоторых обобщённых уравнений Эмдена–Фаулера. В связи с этим возникает вопрос: применимы ли рассуждения, позволившие создать алгоритм для «орбиты полиномов» для других орбит? Рассмотрим класс обобщённых уравнений Эмдена-Фаулера:

$$y'' = Ax^n y^m \left(y'\right)^l , \tag{1}$$

где $x(\tau) = \varphi(\tau, C_1, C_2)$, $y(\tau) = \psi(\tau, C_1, C_2)$, а функции φ и ψ являются элементами подмножества некоторого дифференциального кольца. Введём следующую функцию $\chi = \dot{\psi} \,/\, \dot{\varphi}$. Тогда (1) преобразуется в

$$\dot{\chi} \sim \varphi^n \psi^m (\dot{\varphi})^{1-l} (\dot{\psi})^l . \tag{2}$$

Тройка функций φ, ψ, χ определяет функции x, y, y'. Рассмотрим элементы «пазла» для различных орбит:

«орбита Вейерштрасса»	«орбита эллиптических интегралов»
$E_1 = \tau$	$F_0 = \tau^{-1}$
$E_2 = \wp(\tau)$	$F_1 = 2I\tau + C_2\tau \mp R$
$E_3 = \wp'(\tau)$	$F_2 = 2IR + C_2R - 4\tau$
$E_4 = \tau^2\wp(\tau) \mp 1$	$F_3 = 4\tau F_1^2 \mp F_2^2$
$E_5 = \wp'(\tau) \pm 2\tau\wp^2(\tau)$	$F_4 = F_2F_3 - 8F_1^2$
$E_6 = \tau\wp'(\tau) - \wp(\tau)$	
$E_7 = \tau\wp'(\tau) + 2\wp(\tau)$	$R = \sqrt{\pm(4\tau^2 - 1)}$
$E_8 = \tau^3\wp'(\tau) + 3\tau^2\wp(\tau) \mp 1$	$I(\tau) = \displaystyle\int \frac{\tau d\tau}{R}$
$E_9 = \tau^3\wp'(\tau) - 4\tau^2\wp(\tau) \pm 6$	

(3)

В таблице (3) представлены взаимосвязанные орбиты, решения которых строятся на функции Вейерштрасса($\wp(\tau)$ и неполном эллиптическом интеграле второго рода в форме Вейерштрасса ($I(\tau)$).

« орбита тангенсов»	«орбита Эйлера»
$T_1 = \mathrm{ch}(\tau + C_2)\cos\tau$	$E = \exp(\sqrt{3}\tau)$
$T_2 = \mathrm{th}(\tau + C_2) + \mathrm{tg}\,\tau$	$S_1 = E + C_2\sin\tau$
$T_3 = \mathrm{th}(\tau + C_2) + \mathrm{tg}\,\tau$	$S_2 = 2E - C_2\sin\tau + \sqrt{3}C_2\cos\tau$
$T_4 = 3T_2T_3 - 4$	$S_3 = 2\sqrt{3}S_1S_2' - \sqrt{3}S_1'S_2 - S_1S_2$
$\Theta_1 = \mathrm{ch}\,\tau - \sin(\tau + C_2)$	$S_4 = 2\sqrt{3}S_1S_3' - 5\sqrt{3}S_1'S_3 + S_1S_3$
$\Theta_2 = \mathrm{sh}\,\tau + \cos(\tau + C_2)$	
$\Theta_3 = \mathrm{sh}\,\tau - \cos(\tau + C_2)$	
$\Theta_4 = \mathrm{ch}\,\tau + \sin(\tau + C_2)$	
$\Theta = 3\Theta_2\Theta_3 - 2\Theta_1^2$	

(4)

В таблице (4) решения строятся на тригонометрических и гиперболических функциях.

Выявление закономерностей рассматриваемых орбит

Для уравнений типа Эмдена–Фаулера, решениями которых являются полиномы, было установлено, что между полиномами, входящими во все известные решения существует хотя бы три соотношения, связывающие полиномы и их первые производные. В работе [2] был предложен алгоритм, для поиска новых уравнений и их решений. Этим алгоритмом, помимо всех известных, были найдены новые решения, но строящиеся не на исходном наборе полиномов, а другом:

$$P_w = \frac{Im(\tau + C_1 + i\sqrt{3}C_1)^{w+1}}{\sqrt{3}C_1(w+1)}, P_2 = \tau^2 + 2C_1\tau^2 + 4C_1^2, \qquad (5)$$

где w – натуральное число, такое что $w > 2$, а из каждой тройки полиномов (P_2, P_{w-1}, P_w) может быть построено 6 решений, одно из которых соответствует уравнению класса $y'' = Ax^n y^m (y')^l$, заданному тройкой параметров

$$(-\frac{2w+1}{w}, -\frac{w-1}{w}, \frac{2w+3}{w+2}). \qquad (6)$$

Функции имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi = P_{w-1}^{-1} P_2^w, \\ \psi = P_w^{\frac{w}{w+1}} P_{w-1}^{-1}, \\ \xi = P_w^{\frac{w+2}{w+1}}. \end{cases} \qquad (7)$$

А остальные 5 групп уравнений и их решений могут быть получены из соображения симметрии. Проведя аналогичные рассуждения было получено, что данное утверждение верно для всех рассматриваемых орбит. При изучении данных орбит было установлено, что из некоторых троек элементов «пазла», может быть построено 4 или 6 решений, одно из которых соответствует уравнению класса $y'' = Ax^n y^m (y')^l$, а остальные 3 или 5 могут быть получены из соображения симметрии. Для этих троек элементов должно выполняться три соотношения, которые выражают зависимость элементов друг от друга.

Проанализировав уравнения из справочника [3], удалось получить три соотношения для каждой группы уравнений некоторых орбит. Пример:

(E_1, E_2, E_3)	$E_1' = 1$, $E_2' = E_3$, $E_3' = \pm 6E_2^2$,	(E_2, E_3, E_5)	$E_2' = E_3$, $E_3' = \pm 6E_2^2$, $E_2E_5' - 2E_2'E_5 = \pm 2$,
(T_1, T_2, T_3)	$T_1' = T_1T_3$, $T_2' = 2 - T_2T_3$, $T_1T_2' + T_1'T_2 = 2T_1$,	$(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$	$\Theta_1' = \Theta_3$, $\Theta_2' = \Theta_1$, $\Theta_2\Theta_3' + \Theta_2^3 = 2\Theta_2\Theta_3'$,

Приведём пример работы модифицированного алгоритма «размножения» уравнений для некоторой тройки элементов, для которой известно три соотношения на элементы и известно одно уравнение. Решение уравнения $(n, m, l) = (0, 2, 0)$ представимо в виде (1), где $\varphi = E_1$, $\psi = E_2$, $\chi = \dot\psi \,/\, \dot\varphi = E_3$, и для элементов выполнены следующие соотношения: $E_1' = 1$, $E_2' = E_3$, $E_3' = \pm 6E_2^2$. Тройке (φ, ψ, χ) в некотором порядке сопоставим тройку элементов (E_1, E_2, E_3). $\varphi = E_1^a, \psi = E_3^b, \chi = \pm 6E_2^c \Rightarrow \dot\varphi = aE_1^{a-1}, \dot\psi = \pm 6bE_2^2E_3^{b-1}, \dot\chi = \pm 6cE_2^{c-1}E_3$. Подставим значения (φ, ψ, χ) в $\chi = \dot\psi \,/\, \dot\varphi$ тогда

$$\pm 6E_2^c = \frac{\pm 6bE_2^2E_3^{b-1}}{aE_1^{a-1}}$$

и, приравнивая степени элементов, получаем $(a,b,c) = (1,1,2)$. Тогда $(\varphi,\psi,\chi) = (E_1, E_2, \pm 6E_3^2)$. А из $\dot{\chi}\sim \varphi^n\psi^m(\dot{\varphi})^{1-l}(\dot{\psi})^l$ имеем, что

$$E_2E_3 \sim E_1^nE_2^mE_2^{2l} \;\Rightarrow\; (n,m,l) = (0,1,1/2)$$

Рассмотрев все возможные варианты сопоставления, приходим к выводу, что в четырёх из шести случаев смогли получить уравнения, а в оставшихся двух уравнения построить не удаётся. В работах [4,5] говорится о том, что класс обобщённых уравнений Эмдена—Фаулера допускает общую группу преобразований $\mathfrak{D}_3\{\mathfrak{g},\mathfrak{r}\}$, которую можно задать двумя образующими: $\mathfrak{r}: x = u, y = t, (n,m,l) \to (m,n,3-l)$ и $\mathfrak{g}: x = u^{\frac{1}{n+1}}, y = \frac{1}{u'}^{\frac{1}{m}}, (n,m,l) \to (\frac{1}{1-l}, -\frac{n}{n+1}, \frac{2m+1}{m})$. Для любых значений n, m, l, кроме сингулярных точек $m = 0,-1$; $n = 0,-1$; $l = 1,2$. В силу рассмотренных в работе [4] симметрий, из уравнений (0, 2, 0) можно получить уравнения (2, 0, 3), (0, 1, $\frac{1}{2}$), (1, 0, $\frac{5}{2}$), а также две точки являются сингулярными. Это результат показывает, что алгоритм является самодостаточным в плане размножения решений и не требует использования дискретно групповых преобразований для этого. Этим методом решения получаются за счёт перестановки функций φ,ψ и χ. Также, при использовании алгоритма учитываются сингулярные точки при поиске уравнений.

Вывод

Результаты проведенного нами анализа позволяют сделать следующие выводы, представляющие интерес для нашего исследования: все рассмотренные орбиты имеют схожую структуру, а использование модифицированного алгоритма поиска уравнений на них даёт положительный результат. Для дальнейшего изучения основными направлениями являются: разработка алгоритма, который позволил бы расширить изучаемые орбиты, найти новые соотношения, элементы, уравнения; применение данного алгоритма к другим классам обобщённо-однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Литература

[1] Зайцев В. Ф. Дифференциальные «пазлы» на решениях нелинейных уравнений// Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXX международной конференции «Герценовские чтения – 2017» (Санкт-Петербург 10-14 апреля 2017г.). – СПб.: Изд. РГПУ им А. И. Герцена, 2017. – С. 58-62.

[2] Зайцев В. Ф., Иофе М. Д. Новые решения нелинейных уравнений, представимые в классе полиномов// Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXX международной конференции «Герценовские чтения – 2017» (Санкт-Петербург 10-14 апреля 2017 г.). – СПб.: Изд. РГПУ им А. И. Герцена, 2017. – С.63-68

[3] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993.

[4] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть IV. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 120 с.

[5] Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.: ЛИИАН, 1991. – 240 с.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Э. Г. Юсифова
Институт Математики и Механики
Национальной Академии Наук Азербайджана
Баку, Азербайджан
e-mail: haciyeva79@mail.ru

On the solvability of one inverse boundary value problem for a third-order partial differential equation.

Рассмотрим для уравнения

$$u_{ttt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ обратную задачу с граничными условиями

$$\begin{gathered} u(x,0) = \varphi_0(x) + \int_0^T p_0(t)u(x,t)dt,\ \ u_t(x,T) = \varphi_1(x) + \int_0^T p_1(t)u(x,t)dt, \\ u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x) + \int_0^T p_0(t)\,u(x,t)dt,\ 0 \le x \le 1, \end{gathered} \tag{2}$$

периодическим условием

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u\,(x,t)dx = 0,\ \ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

и с дополнительным условием

$$u\,(x_0,t) = h(t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где $x_0 \in (0,1)$ – фиксированное число, $f(x,t)$, $\varphi_i(x)$, $p_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, $h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Обозначим через $B^3_{2,T}$ банахово пространство функций вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x,\ (x,t) \in D_T,$$

с нормой

$$||u||_{B^3_{2,T}} = ||u_{10}||_\infty + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \, \|u_{1k}\|_\infty)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 ||u_{2k}||_\infty)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $||\upsilon||_\infty = \max\limits_{t \in [0,T]} |\upsilon(t)||$, $\lambda_k = 2k\pi$, $u_{1k}(t) \in C[0,T]$, $k = 0, 1, 2, \ \ldots$, $u_{2k}(t) \in C[0,T]$, $k = 1, 2, \ \ldots$ (см. [1]).

Пусть $E^3_T = B^3_{2,T} \times C[0,T]$ – банахово пространство вектор-функций $z(x,t) = \{u(x,t), a(t)\}$ с нормой $||z||_{E^3_T} = \|u\|_{B^3_{2,T}} + \|a\|_\infty$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(а) $\varphi_i(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi_i'''(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(1)$, $\varphi_i'(0) = \varphi_i'(1)$, $\varphi_i''(0) = \varphi_i''(1)$, $i = 0, 1$;

(б) $\varphi_2(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi_2''(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi_2(0) = \varphi_2(1)$, $\varphi_2'(0) = \varphi_2'(1)$;

(с) $f(x,t)$, $f_x(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$, $f(0,t) = f(1,t)$, $f_x(0,t) = f_x(1,t)$, $0 \le t \le T$;

(г) $p_i(t) \in C[0,T]$, $i = 0, 1, 2$, $h(t) \in C^3[0,T]$, $h(t) \ne 0$, $0 \le t \le T$.

Введем следующие обозначения:

$$A_1(T) = (8\sqrt{15}+1)||\varphi_0||_2 + \ (T + 6\sqrt{5})||\varphi_1||_2 + \left(\frac{3}{2}T^2 + 8\sqrt{15} \right) ||\varphi_2||_2 + 3T^2\sqrt{T}||f||_{L_2(D_T)} +$$

$$+10\sqrt{5T}||f_{xx}||_{L_2(D_T)}, B_1(T) = T(3T^2 + 10\sqrt{5}), C_1(T) = T(1 + 8\sqrt{15})||p_0||_\infty + \ T(T + 6\sqrt{15}) \times$$

$$||p_1||_\infty + T\left(\frac{3}{2}T^2 + 8\sqrt{15} \right) ||p_2||_\infty, A_2(T) = ||h^{-1}||_\infty \{||h'' - f(x_0, \ \cdot \ )||_\infty + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left[16\sqrt{3}||\varphi_0||_2 + 12||\varphi_1''||_2 + 16\sqrt{3}||\varphi_2''||_2 + 20\sqrt{T}||f''||_{L_2(D_T)} \right] \Big\}, \ B_2(T) = 20||h^{-1}||_\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} T,$$

$$C_2(T) = ||h^{-1}||_\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} T \left(16\sqrt{3}||p_0||_\infty + 12||p_1||_\infty + 16\sqrt{3}||p_2||_\infty \right), A(T) = A_1(T) + A_2(T),$$

$$B(T) = B_1(T) + B_2(T), C(T) = C_1(T) + C_2(T).$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (а)–(г), соотношения

$$(A(T)+2)((A(T)+2)B(T)+C(T)) < 1, \ \int\limits_0^1 f(x,t)dx = 0, \ 0 \le t \le T,$$

$$\left(||p_0||_\infty + ||p_1||_\infty T + \frac{1}{2}||p_2||_\infty T^2 + \ \frac{1}{3}(A(T)+2)T^2 \right) < 1,$$

и условия согласования

$$\int_0^1 \varphi_i(x)dx = 0,\ i = 0,\ 1,\ 2,\ \varphi_0(x_0) = h(0) - \int_0^T p_0(t)h(t)dt,$$

$$\varphi_1(x_0) = h'(T) - \int_0^T p_1(t)h(t)dt,\ \varphi_2(x_0) = h''(0) - \int_0^T p_1(t)h(t)dt.$$

Тогда задача (1)–(5) имеет единственное классическое решение в шаре $K_R \subset E_T^3$, где $R = A(T) + 2$.

Литература

[1] Aliyev Z. S., Mehraliyev Y. T., Yusifova E. H. Inverse boundary value problem for a third-order partial differential equation with integral conditions // Bull. Iran. Math. Soc. 2020. doi.org/10.1007/s41980-020-00464-9.

УДК 517.5

ТОЖДЕСТВА И ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ И РАЗНОСТЕЙ СПЛАЙНОВ

Виноградов О. Л.
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург
e-mail: olvin@math.spbu.ru

Vinogradov O. L. Identities and sharp inequalities for derivatives and differences of splines. We establish analogs of the Riesz interpolation formula which allow to obtain sharp estimates for the first order derivative of a spline of minimal defect with equidistant knots in terms of its first order difference in the uniform and integral metrics.

Keywords: splines, Bernstein inequalities

Устанавливаются аналоги интерполяционного тождества Рисса, которые позволяют получить точные оценки первой производной сплайна минимального дефекта по равноотстоящим узлам через его первую разность в равномерной и интегральной метрике.

Ключевые слова: сплайны, неравенства Бернштейна

1. Обозначения. Далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, неотрицательных целых, целых, вещественных чисел соответственно. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. Пространства функций обозначаются: $L_p = L_p(\mathbb{R})$ — стандартные пространства Лебега на прямой, $\widetilde{L}_p[T]$ — пространства Лебега $2T$-периодических функций; при $p \in [1, +\infty)$ нормы в них равны $\|f\|_p = \left(\int_{-E} |f|^p\right)^{1/p}$, где $E = \mathbb{R}$ или $[-T, T]$ соответственно; $W_{1,\text{loc}}^{(r)}$ — пространство функций f, заданных на $\mathbb{R}$ и таких что $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна. Если f — функция ограниченной вариации, то через μ_f обозначается соответствующий ей заряд; таким образом, вариации f и μ_f равны. Аналогично, символ $\bigvee f$ означает вариацию f на оси или на периоде. Это не приведет к недоразумению.

При $\sigma > 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathbf{S}_{\sigma,r}$ обозначается пространство сплайнов порядка r минимального дефекта с узлами $\frac{j\pi}{\sigma}$ $(j \in \mathbb{Z})$; при $\sigma = 1$ пишем просто $\mathbf{S}_r$. Значения сплайнов нулевого порядка в точках разрыва несущественны. Пусть еще δ_h^m — оператор центральной разности порядка m с шагом h, то есть $\delta_h f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$, δ_h^m — m-я степень оператора δ_h.

Положим $x_\alpha = \frac{\alpha\pi}{\sigma}$; параметр σ фиксирован и в обозначениях не указывается. Свертка двух функций на оси определяется равенством

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt,$$

свертка функции с зарядом нормируется так же. Сеточные нормы (полунормы) функции f определяются равенствами $\|f|\alpha\|_\infty = \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} |f(x_{j+\alpha})|$,

$$\|f|\alpha\|_1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \int_{x_{j+\alpha-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\alpha+\frac{1}{2}}} f \right|, \qquad \|f|\alpha\|_1 = \sum_{j=0}^{2N-1} \left| \int_{x_{j+\alpha-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\alpha+\frac{1}{2}}} f \right|$$

для ограниченных функций и функций из L_1 и $\widetilde{L}_1[x_N]$ соответственно. Ясно, что $\|f|\alpha\|_\infty$ не превосходит sup-нормы f и в обоих случаях $\|f|\alpha\|_1 \leqslant \|f\|_1$.

2. Обзор результатов. Самым прямым способом доказательства неравенства Бернштейна

$$\|f^{(m)}\|_p \leqslant \sigma^m \|f\|_p$$

для целых функций конечной степени, не превосходящей σ, и, в частности, для тригонометрических многочленов служит тождество М. Рисса

$$f'(x) = \frac{4\sigma}{\pi^2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^l}{(2l+1)^2} f\left(x + \left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\sigma}\right).$$

Аналогичные тождества (см., например, [1, п.84] и [2]) позволяют вывести и другие неравенства для производных и разностей целых функций конечной степени, самое известное из которых — неравенство

$$\|f^{(m)}\|_p \leqslant \left(\frac{\sigma}{2\sin\frac{\sigma h}{2}}\right)^m \|\delta_h^m f\|_p, \quad 0 < h < \frac{2\pi}{\sigma}.$$

Для тригонометрических многочленов оно было установлено М. Риссом. При $h \leqslant \frac{\pi}{\sigma}$ оно усиливает неравенство Бернштейна.

Аналоги неравенств Рисса и Бернштейна справедливы и для сплайнов $s \in \mathbf{S}_{\sigma,r}$. Для равномерной и интегральной нормы эти неравенства таковы:

$$\|s^{(m)}\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r-m}}{2^m \mathcal{K}_r} \sigma^m \|\delta_{\frac{\pi}{\sigma}}^m s\|_\infty, \quad 1 \leqslant m \leqslant r, \tag{1}$$

$$\|s^{(m)}\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r-m}}{\mathcal{K}_r} \sigma^m \|s\|_\infty, \quad 1 \leqslant m \leqslant r, \tag{2}$$

$$\|s^{(m)}\|_1 \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r+1-m}}{2^m \mathcal{K}_{r+1}} \sigma^m \|\delta_{\frac{\pi}{\sigma}}^m s\|_1, \quad 1 \leqslant m \leqslant r, \tag{3}$$

$$\|s^{(m)}\|_1 \leqslant \frac{\mathcal{K}_{r+1-m}}{\mathcal{K}_{r+1}} \sigma^m \|s\|_1, \quad 1 \leqslant m \leqslant r, \tag{4}$$

$$\bigvee s^{(r)} \leqslant \frac{1}{2^{r+1} \mathcal{K}_{r+1}} \sigma^{r+1} \|\delta_{\frac{\pi}{\sigma}}^{r+1} s\|_1, \tag{5}$$

$$\bigvee s^{(r)} \leqslant \frac{1}{\mathcal{K}_{r+1}} \sigma^{r+1} \|s\|_1. \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{K}_\rho$ — константы Фавара:

$$\mathcal{K}_\rho = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(\rho+1)}}{(2\nu+1)^{\rho+1}}.$$

Неравенства (1)–(6) в различных случаях получили В. М. Тихомиров, Ю. Н. Субботин, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, Г. Г. Магарил-Ильяев. Субботин [3] установил интерполяционные формулы, выражающие значения кусочно-постоянной функции $s^{(r)}$ через значения $\delta^r_{\frac{\pi}{\sigma}} s$ на равномерной сетке, и вывел из этих формул неравенства (1) и (2) при $m = r$. При $m < r$ неравенства (1) и (2) доказывались другими способами, основанными на неравенстве Колмогорова для производных или на приеме Стечкина, родственном теореме сравнения Колмогорова. Неравенства в интегральной норме выводились из неравенств в равномерной норме с помощью приема Стейна. Доказательства в периодическом случае и библиографические комментарии см. в [4, глава 6]. В непериодическом случае неравенства в равномерной норме получены в [5], в интегральной норме они могут быть доказаны аналогично периодическому случаю.

Настоящая работа представляет собой обзор результатов автора [6, 7]. В ней устанавливаются тождества типа формулы Рисса, позволяющие доказать неравенства

$$\|s'\|_p \leqslant K\|\delta_h s\|_p, \quad 0 < h < \frac{2\pi}{\sigma} \tag{7}$$

при $p = 1, +\infty$ с точными константами K. Для периодических сплайнов точное неравенство (7) в равномерной метрике доказали П. Д. Литвинец и В. А. Фильштинский [8]; см. также [4, Теорема 6.2.5].

Искомое тождество получается сопоставлением двух формул, представляющих независимый интерес. Первая из них выражает первую производную функции через свертку ее старшей производной с некоторым ядром и равноотстоящие сдвиги ее первой разности. Это равенство приводит к точной оценке первой производной через старшую производную и разность. Аналогичные представления использовались для доказательства неравенств типа Колмогорова; общий вид такого представления получен И. Домаром [9]. Вторая формула относится уже не к произвольным функциям, а к сплайнам. В ней старшая производная сплайна раскладывается по равноотстоящим значениям его разностей. Для значений шага $h = \frac{\pi}{\sigma}$ это интерполяционная формула Субботина.

Для точности неравенств, которые выводятся из построенных тождеств, необходимо, чтобы ядра свертки меняли знак в равноотстоящих точках, а коэффициенты знакочередовались. Доказательство требуемой знакорегулярности представляет основную трудность. Это удалось сделать при всех $h \in \left(0, \frac{2\pi}{\sigma}\right)$ для первой разности и первой производной, а для старших — лишь при $h = \frac{\pi}{\sigma}$.

Более того, построенное тождество позволяет усилить (7), заменив правую часть на линейную комбинацию разностей s, включающую разности высших порядков, а нормы в части слагаемых — на сеточные. При $h = \frac{\pi}{\sigma}$ итерации этого тождества приводят к аналогам формулы Рисса для старших производных и разностей. Поскольку знакорегулярность (именно с этим шагом) не нарушается, отсюда выводятся неравенства (1)–(6) также в усиленном виде.

В периодическом случае экстремалями будут эйлеровы идеальные сплайны

$$\varphi_{\sigma,r}(t) = \frac{4}{\pi\sigma^r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2\nu+1)\sigma t - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2\nu+1)^{r+1}}, \quad \sigma > 0,\ r \in \mathbb{Z}_+,$$

а константы выражаются через их нормы. Напомним, что $\varphi'_{\sigma,r} = \varphi_{\sigma,r-1}$, $\varphi_{\sigma,0}(t) =$

$\operatorname{sign}\sin\sigma t$, $\|\varphi_{\sigma,r}\| = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}$. При $\sigma = 1$ пишем просто φ_r. На периоде $[-\pi,\pi]$ имеем $\|\varphi_r\|_1 = 4\|\varphi_{r+1}\|_\infty = 4\mathcal{K}_{r+1}$, $\bigvee\varphi_0 = 4$, $\|\delta_h\varphi_r\|_1 = 4\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty$.

Например, константа в неравенстве (7) для пространств $\widetilde{L}_1[x_N]$ оказывается равной $\frac{\|\varphi'_{\sigma,r}\|_1}{\|\delta_h\varphi_{\sigma,r}\|_1}$. Это отношение не зависит от N. Неравенство с той же константой верно и в пространстве L_1. Поскольку функция φ_r не принадлежит L_1, такая запись константы теряет смысл. Чтобы единым образом сформулировать неравенство и для периодического, и для непериодического случая, мы будем записывать константу в виде $\frac{\|\varphi'_{\sigma,r+1}\|_\infty}{\|\delta_h\varphi_{\sigma,r+1}\|_\infty}$. Аналогично поступим и для других неравенств.

3. Основные результаты. Далее мы будем для краткости формулировать результаты при $\sigma = 1$; общий случай получается масштабированием. Таким образом, $x_\alpha = \alpha\pi$.

В следующей теореме M — одно из пространств L_p или $\widetilde{L}_p[T]$ ($p \in [1,+\infty]$).

Теорема 1. Пусть $r-1 \in \mathbb{N}$, $h \in (0,2\pi)$, $f \in W^{(r)}_{1,\mathrm{loc}}$, $f^{(r)} \in M$, $\delta_h f \in M$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. При всех $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = f^{(r)} * Q_r(x) + \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_{r,l}\delta_h f(x - x_l), \tag{8}$$

где

$$Q_r(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{(iy)^{r-1}} - R_r(y)\frac{2i\sin\frac{hy}{2}}{(iy)^r} \right) e^{ity}\,dy;$$

$$R_r(y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_{r,j} e^{-ij\pi y} = \frac{\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(i(y+2\nu))^{r-1}}}{\sum\limits_{\mu\in\mathbb{Z}} \frac{2i\sin\frac{h(y+2\mu)}{2}}{(i(y+2\mu))^r}}, \quad \text{если } r \text{ четно;}$$

$$R_r(y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_{r,j} e^{-ij\pi y} = \frac{\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^\nu}{(i(y+2\nu))^{r-1}}}{\sum\limits_{\mu\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^\mu 2i\sin\frac{h(y+2\mu)}{2}}{(i(y+2\mu))^r}}, \quad \text{если } r \text{ нечетно.}$$

С заменой $f^{(r)}$ на $\mu_{f^{(r-1)}}$ равенство верно (при $r = 2$ — для почти всех x) для функций f, таких что $\delta_h f \in L_1$ или $\widetilde{L}_1[T]$, $f^{(r-2)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r-1)}$ имеет конечную вариацию (на оси или на периоде).

2. Функции $Q_r \cdot \sin$ (r четно) и $Q_r \cdot \cos$ (r нечетно) не меняют знака на $\mathbb{R}$, а последовательность $\{\gamma_{r,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ знакочередующаяся.

3. Неравенство

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|Q_r\|_1\|f^{(r)}\|_\infty + |R_r(1)|\|\delta_h f\|_\infty$$

обращается в равенство для функции $f = \varphi_r$ при $x = 0$, если r четно, и при $x = \frac{\pi}{2}$, если r нечетно.

Следствие 1. В условиях теоремы 1

$$\|f'\|_p \leqslant \frac{1}{2\pi}\|Q_r\|_1\|f^{(r)}\|_p + |R_r(1)|\|\delta_h f\|_p,$$
$$\|f'\|_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\|Q_r\|_1 \bigvee f^{(r-1)} + |R_r(1)|\|\delta_h f\|_1.$$

Замечание 1. Из третьего утверждения теоремы следует, что

$$\frac{\|Q_r\|_1}{2\pi} = \|\varphi_r'\|_\infty - |R_r(1)|\|\delta_h\varphi_r\|_\infty.$$

Замечание 2. Неравенство (7) уже можно вывести из теоремы 1 и неравенств типа Бернштейна (2) и (6) для старшей производной, примененных к сплайну s'. Так, для равномерной нормы имеем

$$\|s'\| \leqslant \big(\|\varphi_r'\|_\infty - |R_r(1)|\|\delta_h\varphi_r\|_\infty\big)\|s^{(r)}\|_\infty + |R_r(1)|\|\delta_h s\|_\infty \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|\varphi_r'\|_\infty - |R_r(1)|\|\delta_h\varphi_r\|_\infty}{\|\varphi_r'\|_\infty}\|s'\|_\infty + |R_r(1)|\|\delta_h s\|_\infty.$$

Перенося член с $\|s'\|_\infty$ в левую часть и сокращая, получаем неравенство (7) с точной константой:

$$\|s'\|_\infty \leqslant \frac{\|\varphi_r'\|_\infty}{\|\delta_h\varphi_r\|_\infty}\|\delta_h s\|_\infty.$$

Аналогично выводится неравенство для интегральной нормы.

Тем не менее мы хотим установить не только неравенство (7), но и предшествующее ему тождество, и оценить правую часть (8) через $\|\delta_h s\|$ непосредственно, даже в усиленном виде. Для этого построим интерполяционные формулы типа Субботина для старшей производной сплайна.

Теорема 2. 1. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbf{S}_r$, $\delta_\pi^{r-1}\delta_h s \in L_\infty$. Тогда

$$s^{(r)}(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_\pi^{r-1}\delta_h s(x_{j+1/2})\ell_{h,r}(t - x_j), \tag{9}$$

где $\ell_{h,r} \in \mathbf{S}_0$, $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} |\ell_{h,r}(x_{\nu+1/2})| < +\infty$, а последовательность $\big\{\ell_{h,r}(x_{\nu+1/2})\big\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ знакочередуется.

2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbf{S}_r$, $\delta_\pi^r\delta_h s \in L_1$ или $\delta_\pi^r\delta_h s \in \widetilde{L}_1[x_N]$ $(N \in \mathbb{N})$. Тогда

$$\mu_{s^{(r)}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \delta_\pi^r\delta_h s\right) \lambda_{h,r}(\cdot - x_j),$$

где $\lambda_{h,r}$ — заряд, сосредоточенный в узлах x_q, $(q \in \mathbb{Z})$, а последовательность $\{\lambda_{h,r}\{x_\nu\}\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ знакочередуется.

3. Заряды $\lambda_{h,r}$ и сплайны $\ell_{h,r}$ выражаются формулами $\lambda_{h,r}\{x_\nu\} = \ell_{h,r+1}(x_{\nu+1/2})$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{h,r}\{x_k\}e^{-ik\pi y} = \pi\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \frac{\left(2\sin\frac{\pi(y+2\mu)}{2}\right)^{r+1} 2\sin\frac{h(y+2\mu)}{2}}{(y+2\mu)^{r+2}}\right)^{-1}.$$

При $h = \pi$ формулу (9) и знакочередование коэффициентов установил Субботин [3].

Подставляя разложения $s^{(r)}$ и $\mu_{s^{(r)}}$ в теорему 1, приходим к искомым тождествам, из которых, в свою очередь, следуют точные неравенства.

***Теорема* 3**. Пусть $r-1 \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbf{S}_r$, $\delta_h s \in L_\infty$. Тогда

$$s'(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_\pi^{r-1}\delta_h s(x_{j+1/2})(\ell_{h,r} * Q_r)(x - x_j) + \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_{r,l}\delta_h s(x - x_l), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\|s'\|_\infty \leqslant \frac{\|\varphi_r'\|_\infty - |R_r(1)|\|\delta_h\varphi_r\|_\infty}{2^{r-1}\|\delta_h\varphi_r\|_\infty}\left\|\delta_\pi^{r-1}\delta_h s|\tfrac{1}{2}\right\|_\infty + |R_r(1)|\|\delta_h s\|_\infty.$$

***Следствие* 2**. В условиях теоремы 3

$$\|s'\|_\infty \leqslant \frac{\|\varphi_r'\|_\infty}{\|\delta_h\varphi_r\|_\infty}\|\delta_h s\|_\infty.$$

***Теорема* 4**. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi)$, $s \in \mathbf{S}_r$, $\delta_h s \in L_1$ или $\delta_h s \in \widetilde{L}_1[x_N]$ ($N \in \mathbb{N}$). Тогда

$$s'(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \delta_\pi^r\delta_h s\right)(\lambda_{h,r} * Q_{r+1})(x - x_j) + \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_{r+1,l}\delta_h s(x - x_l)$$

(если $r \geqslant 2$, то равенство верно при всех $x \in \mathbb{R}$, а если $r = 1$, то при всех $x \neq x_\nu$),

$$\|s'\|_1 \leqslant \frac{\|\varphi_{r+1}'\|_\infty - |R_{r+1}(1)|\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}{2^r\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}\left\|\delta_\pi^r\delta_h s|0\right\|_1 + |R_{r+1}(1)|\|\delta_h s\|_1.$$

***Следствие* 3**. В условиях теоремы 4

$$\|s'\|_1 \leqslant \frac{\|\varphi_{r+1}'\|_\infty}{\|\delta_h\varphi_{r+1}\|_\infty}\|\delta_h s\|_1.$$

Неравенства в теоремах 3, 4 и следствиях 2, 3 точные.

Замечание 3. Итерации специального вида позволяют еще усилить неравенства в теоремах 3 и 4, заменив в правых частях сеточные нормы $\delta_\pi^{r-1}\delta_h s$ и $\delta_\pi^r\delta_h s$ на линейные комбинации сеточных норм разностей этого и более высокого порядка, причем так, что точность сохранится.

Литература

[1] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: “Наука”, 1965. – 408 с.

[2] Виноградов О. Л. Точные оценки погрешностей формул типа численного дифференцирования на классах целых функций конечной степени // Сиб. мат. ж. 2007. Т. 48, № 3. – С. 538–555.

[3] Субботин Ю. Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН СССР. 1965. Т. 78. – С. 24-42.

[4] Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: “Наукова думка”, 1992. – 304 с.

[5] Магарил-Ильяев Г. Г. О наилучшем приближении сплайнами классов функций на прямой // Труды МИРАН. 1992. Т. 194. – С. 148–159.

[6] Виноградов О. Л. Аналоги тождества Рисса и точные неравенства для производных и разностей сплайнов в равномерной метрике // Пробл. мат. анализа. 2019. Т. 97. – С. 31–42.

[7] Виноградов О. Л. Аналоги тождества Рисса и точные неравенства для производных и разностей сплайнов в интегральной метрике // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2019. Т. 480. – С. 86–102.

[8] Литвинец П. Д., Фильштинский В. А. Об одной теореме сравнения и ее применениях // В сб.: “Теория приближения функций и ее приложения”. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С.97–107.

[9] Domar Y. An extremal problem related to Kolmogoroff’s inequality for bounded functions // Arkiv för matematik. 1968. Vol. 7. № 30. – P. 433–441.

УДК 517.44

ПРИЛОЖЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Якубсон М. Я., Конькина В. С.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: michaeljackubson@mail.ru, konkina.veronicka@yandex.ru

Yakubson M. Ya, Konkina V. S. Application of the multidimensional Mellin transform to the solving of algebraic equations. This article explores algebraic equations. The central statement is the formula for the roots of an equation which was obtained using the multidimensional Mellin transform.

Keywords: algebraic equation, multidimensional Mellin transform.

В статье выводится формула решения произвольного алгебраического уравнения с переменными коэффициентами посредством многомерного преобразования Меллина.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, многомерное преобразование Меллина.

Долгое время основная задача алгебры заключалась в поиске решений алгебраических уравнений. В 1824 г. Нильс Хенрик Абель доказал, что алгебраическое уравнение пятой степени неразрешимо в радикалах, однако позже были построены функции, посредством которых искомое решение могло быть выражено. В данной статье мы получим общую формулу решения некоторого класса алгебраических уравнений, записанных с помощью эйлеровых функций.

Рассмотрим алгебраическое уравнение (ограничения на коэффициенты которого определяются лишь условием сходимости получаемых в дальнейшем интегралов):

$$y^d + x_n y^{m_n} + \ldots + x_1 y^{m_1} - 1 = 0, \qquad 0 < m_1 < \ldots < m_n < d. \tag{1}$$

Под решением данного уравнения будем понимать функцию $y(\overline{x})$ n переменных, считая, что $\overline{x}$ есть вектор n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$: $\overline{x} = (x_1; \ldots ; x_n)$, где $x_i \in \mathbb{C}$.

Заметим, что уравнение вида (1) может быть рассмотрено как уравнение с координатами $(x_1; \ldots ; x_n; y)$ в пространстве $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}\backslash 0)$. Учитывая данное замечание, найдём преобразование Меллина искомой функции $y(\overline{x})$, после чего с помощью обратного преобразования Меллина определим интегральное представление функции $y(\overline{x})$.

В уравнении (1) сделаем замену координат, определяемую равенствами:

$$x_k = \xi_k W^{\frac{m_k - d}{d}}, \qquad k \in \mathbb{N}_{[1;n]}; \tag{2}$$

$$y = W^{-\frac{1}{d}}. \tag{3}$$

С учётом данных замен переменных (2) и (3):

$$\begin{cases} y^d = W^{-1}; \\ y^{m_k} = W^{-\frac{m_k}{d}}; \end{cases} \quad \Rightarrow x_k y^{m_k} = \xi_k W^{\frac{m_k - d}{d}} \cdot W^{-\frac{m_k}{d}} = \xi_k W^{-1}.$$

Таким образом, исходное уравнение (1) принимает следующий вид:

$$1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n = W. \tag{4}$$

Определив решение уравнения (1) в виде функции $y(\overline{x})$ n переменных, мы необходимо осуществляем поиск многозначной функции, удовлетворяющей некоторому условию. Далее сделаем соглашение и условимся искать ту ветвь неизвестной функции, которая удовлетворяет условию: $y(0) = 1$. Данную ветвь решения алгебраического уравнения (1) принято называть *главным решением уравнения (1)*.

Согласно рассуждениям выше, задача поиска решения алгебраического уравнения сводится к задаче вычисления преобразования Меллина главного решения рассматриваемого уравнения, то есть к задаче вычисления следующего интеграла:

$$F(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y(x) x^{z-I}\, dx, \qquad x^{z-I} := x_1^{z_1 - 1} \ldots x_n^{z_n - 1}. \tag{5}$$

При замене переменных в уравнении (1) в интеграле, определяющим преобразование Меллина главного решения данного уравнения, также осуществляется замена переменных. По этой причине определим значение якобиана данной замены.

Лемма Якобиан замены $\xi \to x$, определяемой формулой:

$$x_k = \xi_k (1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n)^{\frac{m_k - d}{d}}, \qquad k \in \mathbb{N}_{[1;n]};$$

в интеграле $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y(x) x^{z-I}\, dx$ равен:

$$J = W^{-(n+1) + \frac{1}{d}(m_1 + \ldots + m_n)} \Big(1 + \frac{1}{d} \langle (m_1; \ldots ; m_n); (\xi_1; \ldots ; \xi_n) \rangle \Big).$$

Искомый якобиан J согласно определению имеет следующий вид:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}.$$

Определим далее значения элементов полученного якобиана:

1. диагональные элементы матрицы:

$$\frac{\partial x_j}{\partial \xi_j} = (1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n)^{\frac{m_j - d}{d}} + \frac{m_j - d}{d} \xi_j (1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n)^{\frac{m_k - d - 1}{d}}; \tag{6}$$

2. недиагональные элементы матрицы ($j \neq k$):

$$\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} = \frac{m_j - d}{d} \xi_j (1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n)^{\frac{m_j - d - 1}{d}}. \tag{7}$$

Заметим, что недиагональные элементы матрицы, соответствующие одной строке, равны между собой (так как выражение, стоящее в правой части равенства (7) от индекса k не зависит). По этой причине введём следующие обозначения:

$$\frac{\partial x_j}{\partial \xi_j} := a_j; \qquad \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} := a^{(j)},$$

и с их помощью запишем и преобразуем искомый якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a^{(1)} & a^{(1)} & \ldots & a^{(1)} & a^{(1)} \\ a^{(2)} & a_2 & a^{(2)} & \ldots & a^{(2)} & a^{(2)} \\ a^{(3)} & a^{(3)} & a_3 & \ldots & a^{(3)} & a^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{(n-1)} & a^{(n-1)} & a^{(n-1)} & \ldots & a_{n-1} & a^{(n-1)} \\ a^{(n)} & a^{(n)} & a^{(n)} & \ldots & a^{(n)} & a_n \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов первого столбца элементы второго столбца. Заметим при этом, что, начиная с третьей строки, рассматриваемые элементы равны между собой. Далее проделаем ту же операцию и для других столбцов, вплоть до столбцов с номерами $(n-1)$ и n:

$$J = \begin{vmatrix} a_1 - a^{(1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a^{(1)} \\ a^{(2)} - a_2 & a_2 - a^{(2)} & 0 & \ldots & 0 & 0 & a^{(2)} \\ 0 & a^{(3)} - a_3 & a_3 - a^{(3)} & \ldots & 0 & 0 & a^{(3)} \\ 0 & 0 & a^{(4)} - a_4 & \ldots & 0 & 0 & a^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a^{(5)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} - a^{(n-2)} & 0 & a^{(n-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a^{(n-1)} - a_{n-1} & a_{n-1} - a^{(n-1)} & a^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a^{(n)} - a_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Дальнейшее вычисление определителя осуществим посредством его разложения по элементам последнего столбца. Заметим, что задача таким образом сводится к задаче вычисления определителя диагональной матрицы (который, как известно, равен произведению всех своих элементов, расположенных на главной диагонали). В результате получаем:

$$J=(-1)^{2n}a_n(a_1-a^{(1)})(a_2-a^{(2)})\dots(a_{n-2}-a^{(n-2)})(a_{n-1}-a^{(n-1)})+$$
$$+(-1)^{2n-1}a^{(n-1)}(a_1-a^{(1)})(a_2-a^{(2)})\dots(a_{n-2}-a^{(n-2)})(a^{(n)}-a_n)+$$
$$+(-1)^{2n-2}a^{(n-2)}(a_1-a^{(1)})(a_2-a^{(2)})\dots(a_{n-3}-a^{(n-3)})(a^{(n-1)}-$$
$$-a_{n-1})(a^{(n)}-a_n)+\dots+(-1)^{n+2}a^{(2)}(a_1-a^{(1)})(a^{(3)}-a_3)(a^{(4)}-a_4)\dots(a^{(n-2)}-$$
$$-a_{n-2})(a^{(n-1)}-a_{n-1})(a^{(n)}-a_n)+$$
$$+(-1)^{n+1}a^{(1)}(a^{(2)}-a_2)(a^{(3)}-a_3)\dots(a^{(n-2)}-a_{n-2})(a^{(n-1)}-a_{n-1})(a^{(n)}-a_n).$$

Множители полученных слагаемых преобразуем к виду: $a_k-a^{(k)}$. Отметим, что число множителей каждого слагаемого, знак которых необходимо изменить на противоположный (то есть перейти от множителя вида $(a^{(k)}-a_k)$ к множителю вида $(a_k-a^{(k)})$), имеет ту же чётность, что и показатель степени, в которую возводится число (-1), соответствующей данному слагаемому. С учётом сказанного имеем:

$$J=a_n(a_1-a^{(1)})(a_2-a^{(2)})\dots(a_{n-2}-a^{(n-2)})(a_{n-1}-a^{(n-1)})+a^{(n-1)}(a_1-a^{(1)})\dots(a_{n-2}-$$
$$-a^{(n-2)})(a_n-a^{(n)})+a^{(n-2)}(a_1-a^{(1)})\dots(a_{n-3}-a^{(n-3)})(a_{n-1}-a^{(n-1)})(a_n-a^{(n)})+$$
$$+a^{(n-3)}(a_1-a^{(1)})\dots(a_{n-4}-a^{(n-4)})(a_{n-2}-a^{(n-2)})(a_{n-1}-a^{(n-1)})(a_n-a^{(n)})+\dots+$$
$$+a^{(3)}(a_1-a^{(1)})(a_2-a^{(2)})(a_4-a^{(4)})\dots(a_{n-2}-a^{(n-2)})(a_{n-1}-a^{(n-1)})(a_n-a^{(n)})+$$
$$+a^{(2)}(a_1-a^{(1)})(a_3-a^{(3)})(a_4-a^{(4)})\dots(a_{n-2}-a^{(n-2)})(a_{n-1}-a^{(n-1)})(a_n-a^{(n)})+$$
$$+a^{(1)}(a_2-a^{(2)})(a_3-a^{(3)})\dots(a_{n-2}-a^{(n-2)})(a_{n-1}-a^{(n-1)})(a_n-a^{(n)})=$$
$$=a_n\cdot\frac{(a_1-a^{(1)})\dots(a_n-a^{(n)})}{a_n-a^{(n)}}+\sum_{k=1}^{n-1}a^{(k)}\frac{(a_1-a^{(1)})\dots(a_n-a^{(n)})}{a_k-a^{(k)}}.$$

В полученном значении якобиана сделаем обратную замену переменных:

$$J=a_n\cdot\frac{(a_1-a^{(1)})\dots(a_n-a^{(n)})}{a_n-a^{(n)}}+\sum_{k=1}^{n-1}a^{(k)}\frac{(a_1-a^{(1)})\dots(a_n-a^{(n)})}{a_k-a^{(k)}}=$$
$$=(1+\xi_1+\dots+\xi_n)^{\frac{m_1-d}{d}+\dots+\frac{m_n-d}{d}}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k-d}{d}\xi_k(1+\xi_1+\dots+\xi_n)^{\frac{m_k-d-1}{d}}\cdot\frac{(1+\xi_1+\dots+\xi_n)^{\frac{m_1-d}{d}+\dots+\frac{m_n-d}{d}}}{(1+\xi_1+\dots+\xi_n)^{\frac{m_k-d}{d}}}=$$
$$=(1+\xi_1+\dots+\xi_n)^{\frac{m_1-d}{d}+\dots+\frac{m_n-d}{d}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k-d}{d}\xi_k\cdot\frac{(1+\xi_1+\dots+\xi_n)^{\frac{m_1-d}{d}+\dots+\frac{m_n-d}{d}}}{1+\xi_1+\dots+\xi_n}=$$

$$= (1+\xi_1+\ldots+\xi_n)^{\frac{m_1-d}{d}+\ldots+\frac{m_n-d}{d}}\Big(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k-d}{d}\cdot\frac{\xi_k}{1+\xi_1+\ldots+\xi_n}\Big) =$$

$$= (1+\xi_1+\ldots+\xi_n)^{\frac{m_1-d}{d}+\ldots+\frac{m_n-d}{d}-1}\Big(1+\xi_1+\ldots+\xi_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k-d}{d}\xi_k\Big) =$$

$$= (1+\xi_1+\ldots+\xi_n)^{-(n+1)+\frac{1}{d}(m+1+\ldots+m_n)}\Big(1+\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}m_k\xi_k\Big) =$$

$$= W^{-(n+1)+\frac{1}{d}(m_1+\ldots+m_n)}\Big(1+\frac{1}{d}\langle(m_1;\ldots;m_n);(\xi_1;\ldots;\xi_n)\rangle\Big).$$

Таким образом, сформулированная лемма доказана.

Далее заметим, что рассматриваемая замена координат есть биективное отображение октанта $\mathbb{R}^n_+$ в октант $\mathbb{R}^n_+$. Действительно, рассмотрим в требуемом пространстве следующие гиперплоскости $(i>0)$:

$$\sigma_i = \{\xi\in\mathbb{R}^n_+|\sum_{k=1}^{n}\xi_k = i\}.$$

Покажем теперь, что при замене координат, определяемой равеством (2), осуществляется биективное отображение. Рассмотрим произвольную гиперплоскость σ_i. Тогда с учётом равенства (2) соответствующая новая координата на множестве σ_i задаётся условием: $x_i = \xi_i(1+i)^{\frac{m_i-d}{d}}$, которое характеризует заданную замену координат как растяжение (поскольку второй множитель в полученном равенстве есть константа). Таким образом, на гиперплоскостях σ_i замена координат (2) инъективна. Отметим, что плоскости σ_i и σ_j пересекаются по пустому множеству, если $i\neq j$, а значит, образы данных плоскостей также имеют пустое пересечение. С учётом сказанного выше рассматриваемая замена координат инъективна. Сюръективность же данной замены следует из того, что образы плоскостей σ_i (при $i>0$) покрывают исследуемый октант $\mathbb{R}^n_+$. Таким образом, замена координат, заданная равенством (2), биективна.

Далее мы будем использовать следующие обозначения:

$$|M| = m_1+\ldots+m_n, \qquad M=(m_1;\ldots;m_n), \qquad \beta=(d-m_1;\ldots;d-m_n).$$

Преобразуем подинтегральное выражение в многомерном преобразовании Меллина, учитывая замену координат и введённые обозначения:

$$x^{z-I} = x_1^{z_1-1}\ldots x_n^{z_n-1} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} (\xi_1)^{z_1-1}(W^{\frac{m_1-d}{d}})^{z_1-1}\ldots(\xi_n)^{z_n-1}(W^{\frac{m_n-d}{d}})^{z_n-1} = \xi^{z-I}W^{\frac{1}{d}(-\langle\beta;z\rangle-|M|-dn)}.$$

Определим теперь преобразование Меллина, соответствующее рассматриваемому алгебраическому уравнению. В исследуемом интеграле сделаем замену координат, учитывая значение якобиана замены и её биективное отображение октанта $\mathbb{R}^n_+$ в октант $\mathbb{R}^n_+$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} y(x)x^{z-I}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} W^{-\frac{1}{d}}\xi^{z-I}W^{\frac{1}{d}(-\langle\beta;z\rangle-|M|-dn)}W^{-(n+1)+\frac{|M|}{d}}\Big((1+\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}m_k\xi_k\Big)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \xi^{z-I} W^{-\frac{1}{d}-\frac{\langle\beta;z\rangle}{d}-1}\Big(1+\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n} m_k\xi_k\Big)\,d\xi \overset{[w:=\frac{1}{d}+\frac{\langle\beta;z\rangle}{d}+1]}{=} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\xi^{z-I}}{W^w}\,d\xi +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{m_k\xi_k\xi^{z-I}}{dW^w}\,d\xi.$$

Значения полученных интегралов могут быть найдены с учётом формулы 4.638(2) из [1], частным случаем которой они являются:

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\ldots\int\limits_0^\infty \frac{x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(r_0+r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_nx_n)^s}\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)\Gamma(s-p_1-p_2-\ldots-p_n)}{r_1^{p_1}r_2^{p_2}\ldots r_n^{p_n}r_0^{s-p_1-p_2-\ldots-p_n}\Gamma(s)},$$

где $p_i>0$, $r_i>0$, $s>0$. Та же формула указывает и на область сходимость рассматриваемых интегралов, согласно которой исследуемое преобразование Меллина сходится в области $D=\{z|\, z=P+i\mathbb{R}^n\}$, где $P=\{p\in\mathbb{R}_+^n|\,\langle M;p\rangle<1\}$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} y(x)x^{z-I}\,dx = \frac{\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_n)\Gamma(w-z_1-\ldots-z_n)}{\Gamma(w)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_k+1)\ldots\Gamma(z_n)\Gamma(w-z_1-\ldots-z_n-1)}{d\Gamma(w)} =$$

$$= \frac{\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_n)\Gamma(\frac{1}{d}+\frac{1}{d}((d-m_1)z_1+\ldots+(d-m_n)z_n)+1-z_1-\ldots-z_n)}{\Gamma(w)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_k+1)\ldots\Gamma(z_n)\Gamma(w-z_1-\ldots-z_n-1)}{d\Gamma(w)} =$$

$$= \frac{\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_n)\Gamma(\frac{1}{d}-\frac{\langle M;z\rangle}{d}+1)}{\Gamma(w)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_k+1)\ldots\Gamma(z_n)\Gamma(\frac{1}{d}-\frac{\langle M;z\rangle}{d})}{d\Gamma(w)}.$$

Для каждого элемента рассматриваемой суммы учтём основное функциональное соотношение, характеризующее гамма-функцию: $\Gamma(z_k+1)=z_k\Gamma(z_k)$. В результате:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} y(x)x^{z-I}\,dx = \frac{\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_n)\Gamma(\frac{1}{d}-\frac{\langle M;z\rangle}{d})}{\Gamma(\frac{1}{d}+\frac{\langle\beta;z\rangle}{d}+1)}\Big(\frac{1}{d}-\frac{\langle M;z\rangle}{d}+\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{d}z_k\Big) =$$

$$= \frac{\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_n)\Gamma(\frac{1}{d}-\frac{\langle M;z\rangle}{d})}{d\Gamma(\frac{1}{d}+\frac{\langle\beta;z\rangle}{d}+1)}.$$

Таким образом, нами найдено преобразование Меллина функции $y(x)$, являющейся решением алгебраического уравнения (1). Окончательно выражение искомого решения осуществляется с помощью обратного преобразования Меллина, согласно которому имеем:

$$y(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma(z_1)\ldots\Gamma(z_n)\Gamma(\frac{1}{d} - \frac{\langle M;z\rangle}{d})}{d\Gamma(\frac{1}{d} + \frac{\langle \beta;z\rangle}{d} + 1)} x^{-z}\, dz, \tag{8}$$

где вектор a рассматривается из множества P, определённого выше.

Покажем далее на примере реализацию полученного интегрального представления искомого решения алгебраического уравнения (1). Рассмотрим уравнение (считая, что имеет место условие $\operatorname{Re} x > 0$, необходимое для сходимости интеграла, определяющего соответствующее преобразование Меллина):

$$y^2 + xy - 1 = 0, \qquad \text{где} \quad d = 2, m_n = 1, n = 1, x_1 = x. \tag{9}$$

Ясно, что решение заданного уравнения может быть выписано в явном виде:

$$y(x) = \frac{-x + \sqrt{x^2+4}}{2} = -\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right) + 1}, \tag{10}$$

где под квадратным корнем понимается многозначная функция.

Получим то же решение посредством интегрального представления (8), которое для уравнения (9) примет вид:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a+i\mathbb{R}} \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{z}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{z}{2} + 1)} x^{-z}\, dz = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1-z}{2})}{\Gamma(\frac{z+1}{2} + 1)} x^{-z}\, dz. \tag{11}$$

Пределы интегрирования определяются условием: $0 < \operatorname{Re} a < 1$. Вычислим последний интеграл с помощью теории вычетов. Определим вычеты функций, указанных в числителе подинтегрального выражения: $\Gamma(z)$ и $\Gamma(\frac{1-z}{2})$. Из общей теории известно, что гамма-функция $\Gamma(z)$ имеет полюсы в множестве, являющимся объединением нуля и целых отрицательных чисел, то есть в точках: $z = -k$, где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, при этом: $\operatorname*{res}\limits_{z=-k} \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$. Функция же $\Gamma(\frac{1-z}{2})$ имеет полюсы в точках $z = 1+2k$, где $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, при этом: $\operatorname*{res}\limits_{z=1+2k} \Gamma(\frac{1-z}{2}) = \frac{(-1)^k}{k!}$. Заметим далее, что прямая $\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}$ разделяет полюсы рассматриваемых функций $\Gamma(z)$ и $\Gamma(\frac{1-z}{2})$. С учётом выше сказанного вычислим интеграл (11), учитывая сперва, что слева от контура интегрирования расположены полюсы функции $\Gamma(z)$:

$$y(x) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1-z}{2})}{\Gamma(\frac{z+1}{2} + 1)} x^{-z}\, dz = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\frac{1+k}{2})}{k!\Gamma(\frac{1-k}{2} + 1)} x^k.$$

Заметим, что коэффициенты при x^{2m+1}, где $m \in \mathbb{N}$, содержат в знаменателях гамма-функции от целых отрицательных аргументов, а потому соответствующие слагаемые обнуляются. Таким образом, имеем:

$$y(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\frac{1+k}{2})}{k!\Gamma(\frac{1-k}{2} + 1)} x^k = \frac{1}{2}\Big(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1)} x + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{2!\Gamma(\frac{1}{2})} x^2 + \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{4!\Gamma(-\frac{1}{2})} x^4 + \ldots +$$

$$+\frac{\Gamma(\frac{2n+1}{2})}{(2n)!\Gamma(\frac{1-2n}{2}+1)}x^{2n}+\dots\Big).$$

Для дальнейших преобразований нам будут полезны следующие формулы:

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big)=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!},$$

$$\Gamma\Big(-n+\frac{1}{2}\Big)=\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}2^{2n}n!}{(2n)!}.$$

Преобразуем коэффициент полученной выше суммы при x^{2n}:

$$\frac{\Gamma(\frac{2n+1}{2})}{2\cdot(2n)!\Gamma(\frac{1-2n}{2}+1)}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{2\cdot(2n)!\Gamma(-(n-1)+\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n}n!2(2n)!\sqrt{\pi}2^{2n-2}(n-1)!}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{4n-1}n!(n-1)!}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot 2^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{2^{4n-1}n!(n-1)!}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{3n}n!}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2}{2}\cdot\frac{1-4}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1-2(n-1)}{2}}{n!\cdot 2^{2n}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!\cdot 2^{2n}}.$$

Учитывая полученное разложение, определим значение искомой суммы:

$$y(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{4^2}+\ldots+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!\cdot 2^{2n}}x^{2n}+\ldots=$$

$$=-\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{x}{2}\Big)^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!}\cdot\Big(\frac{x}{2}\Big)^4+\ldots+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\cdot\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n}+\ldots=-\frac{x}{2}+\sqrt{\Big(\frac{x}{2}\Big)^2+1}.$$

Таким образом, интегральное представление решения алгебраического уравнения (9) позволяет получить его решение, формула которого выражается посредством дискриминанта уравнения. Заметим, что ветвь решения алгебраического уравнения есть функция комплексного аргумента, а потому она раскладывается как по положительным степеням аргумента x, так и по отрицательным. При этом первому из них соответствует разложение функции в круге $|x|<2$, второму – во внешности данного круга: $|x|>2$. Таким образом, рассматривая ветвь решения алгебраического уравнения, представленного с помощью преобразования Меллина, и интегрируя с учётом, что слева от контура интегрирования расположены полюсы функции $\Gamma(z)$, мы осуществляем разложение искомой функции в круге $|x|<2$. Аналогичные рассуждения позволяют на основе интегрального представления решения написать разложение искомой функции в области $|x|>2$. Действительно, в этом случае имеем (интегрирование осуществляется по контуру с учётом, что справа от контура интегрирования расположены полюсы функции $\Gamma(\frac{1-z}{2})$):

$$y(x)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\,a=\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1-z}{2})}{\Gamma(\frac{z+1}{2}+1)}x^{-z}\,dz=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(1+2k)}{k!\Gamma(k+2)}x^{-1-2k}=$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{k!(k+1)!}\Big(\frac{1}{x}\Big)^{1+2k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot 2^k k!}{2k!(k+1)!}\Big(\frac{1}{x}\Big)^{1+2k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)2^{k-2}}{k!}\Big(\frac{1}{x}\Big)^{2k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-k+1)\cdot 2^{2k-1}}{k!}\Big(\frac{1}{x}\Big)^{2k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}\Big(\frac{2}{x}\Big)^{2k-1} = -\frac{x}{2}+\sqrt{\Big(\frac{x}{2}\Big)^2+1}.$$

Таким образом, полученное нами интегральное представление ветви решения алгебраического уравнения (1) согласуется с формулой вычисления корней алгебраического уравнения второй степени.

Литература

[1] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений – М. : Физматгиз, 1963. – 1108 с.

[2] Т. М. Садыков, А. К. Цих Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных – М. : Наука, 2014. – 408 с.

[3] А. Ю. Семушева, А. К. Цих Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений // Комплексный анализ и дифференциальные операторы. Красноярск: Красноярск. гос. ун-т, 2000. С. 134-146.

УДК 510.23+517.131

О ПРОБЛЕМЕ ПРОСТОЙ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ АНАЛИЗА

Ловягин Ю. Н.

Санкт-Петербургский государственный университет;

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

Санкт-Петербург

e-mail: jurilovyagin@gmail.com

Lovyagin Yu. N. On the problem of simple axiomatic systems for analysis. A finite system of axioms that describes the number theory is proposed. It is shown that, along with hyperarithmetic, it can be used to modelling the real analysis.

Предлагается конечная система аксиом, описывающая теорию чисел. Показывается, что она наряду с гиперарифметикой может служить для моделирования вещественного анализа.

В настоящей заметке предпринята попытка конечной аксиоматизации теории натуральных чисел. Точнее, мы предлагаем теорию, которая призвана заменить формализованную элементарную теорию чисел (вульгарно именуемую арифметикой Пеано) при изложении основ анализа. Мы называем эту теорию формализованной арифметикой. Точнее, в цикле работ автора (см., например, [1]) предлагается моделировать вещественные числа и функции соответсвующими гиперрациональными аналогами. С другой стороны, сами вещественные числа можно ввести в этой теории как монады конечных чисел. Вещественные функции получаются как следы определяемых гиперрациональных. Гиперарифметика же возникает как консервативное расширение формализованной арифметики посредством добавления к её аксиомам бесконечного списка аксиом, неформально описывающий добавляемую константу как бесконечно большое число. Далее стандартным путём описывается теория гиперрациональных чисел как теория троек $\langle k, l, m\rangle$ гипернатуральных чисел. Каждая такая тройка представляет число $\dfrac{k-l}{m}$. При этом равенство определяется как основное свойство пропорции. Точные определения, формулировки утверждений и основные факты можно найти у Е. В. Праздниковой в [3]. При этом внешним по отношению к теории гиперрациональных чисел определяется понятие конечного гиперрационального числа, отношения бесконечной близости и соответсвующие свойства этих понятий. Далее строится теория непрерывности, дифференцируемости и интегральное исчисление для класса определимых функций. В работе автора [2] описаны обсуждаемые с А. А. Флоринским результаты о классах гиперрациональных функций, имеющих “правильные следы” как модели вещественных функций.

Мы покажем, что гипернатуральные числа при таком моделировании вещественных можно заменить на числа, описываемые некоторой конечной системой аксиом.

1 Основные понятия

Введём язык исчисления предикатов $\mathfrak{L}$ с сигнатурой $\langle 0;\, =;\, +, \cdot, ' \rangle$, где обозначения объектов говорят сами за себя. В языке $\mathfrak{L}$ опишем теорию, которую будем называть **конечной арифметикой** и обозначать **finAr**.

К аксиомам **finAr** относятся (замкнутые) формулы:

1. $\forall x\,(x = x)$;
2. $\forall x \forall y\,(x = y \supset y = x)$;
3. $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \& y = z \supset x = z)$;
4. $\forall x \forall y \forall u \forall v\,(x = u \& y = v \supset (x = y \equiv u = v))$;
5. $\forall x \forall y\,(x' = y' \equiv x = y)$;
6. $\forall x \forall y \forall u \forall v\,(x = u \& y = v \supset x + y = u + v)$;
7. $\forall x \forall y \forall u \forall v\,(x = u \& y = v \supset x \cdot y = u \cdot v)$;
8. $\forall x \forall y\,(x + y = y + x)$;
9. $\forall x \forall y\,(x \cdot y = y \cdot x)$;

10. $\forall x \forall y \forall z\, ((x+y)+z = x+(y+z))$;
11. $\forall x \forall y \forall z\, ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$;
12. $\forall x \forall y \forall z\, (x \cdot (y+z) = (x \cdot y)+(x \cdot z))$;
13. $\forall x\, (x+0 = x)$;
14. $\forall x\, (x \cdot 0 = 0)$;
15. $\forall x \forall y\, \big(x+y' = (x+y)'\big)$;
16. $\forall x \forall y\, (x \cdot y' = (x \cdot y)+x)$;
17. $\forall x \neg\, (x = x')$;
18. $\forall x \neg\, (x' = 0)$;
19. $\forall x\, (\neg\, (x = 0) \supset \exists y\, (x = y'))$;
20. $\forall x \forall y \exists z\, (x+z = y \vee y+z = x)$.

Определение 1.1. Доказуемость формулы α — это либо существование её доказательство в гильбертовском исчислении предикатов, либо доказуемость секвенции $\mathfrak{fin}\mathfrak{Ar} \longrightarrow \alpha$ в секвенциальном исчислении предикатов. Мы пишем $\vdash \alpha$ вместо $\mathfrak{fin}\mathfrak{Ar} \vdash \alpha$, если формула α является теоремой конечной арифметики.

Мы используем в дальнейшем так называемую *систему естественного вывода*, которой следуют все математические рассуждения. Правила естественного вывода легко доказываются как в гильбертовском, так и в генценовском исчислении.

Приведём в качестве теоремы, доказательство которой можно найти в любом руководстве по элементарной логике, основыне правила естественного вывода.

***Теорема* 1.1**.

Для любых формул α и β языка $\mathfrak{L}$, переменных x и y, терма τ справедливо:

1. если $\vdash \alpha$, то $\vdash \alpha \vee \beta$;
2. если $\vdash \alpha$ и $\vdash \beta$, то $\vdash \alpha \& \beta$;
3. если из $\vdash \alpha$ следует $\vdash \beta$, то $\vdash \alpha \supset \beta$;е свойство для умножения доказывается аналогично
4. Если τ свободен для подстановки в формулу α вместо x, то из $\vdash [\alpha]^x_\tau$ следует $\vdash \exists x \alpha$;
5. если y не имеет свободных вхождений в формулу $\forall x \alpha$ и как терм свободна для подстановки в α, то из $\vdash [\alpha]^x_y$ следует $\vdash \forall x \alpha$;
6. $\vdash [\alpha]^x_\tau \supset \exists x \alpha$ при условии, что терм свободен для подстановки вместо x;
7. если y — переменная, свободная для подстановки вместо x в формулу α, то $\vdash \forall x \alpha \supset [\alpha]^x_y$;

8. если $\vdash \exists x\alpha$, то для свободного для подстановки в α вместо x терма $\vdash [\alpha]_{\tau}^{x}$;

9. если $\vdash \forall x\alpha$, то в случае свободы y для подстановки вместо $x \vdash [\alpha]_{y}^{x}$. ■

Определение 1.2. Введём метаформулу $x \leqslant y$ как сокращение для формулы $\exists x\,(x + z = y)$. Строгое неравенство определяем как $x < y := x \leqslant y \& \neg\,(x = y)$.

Отметим очевидный результат.

***Теорема* 1.2**.

$\vdash \forall x \forall y\,(x < y \equiv (\exists z\,(\neg\,(z = 0)\,\& x + z = y)))$.

***Теорема* 1.3**.

Для введённого предиката справедливо:

1. $\vdash \forall x\,(x \leqslant x)$;

2. $\vdash \forall x \forall y \forall z\,(x \leqslant y \& y \leqslant z \supset x \leqslant z)$;

3. $\vdash \forall x \forall y\,(x \leqslant y \& y \leqslant x \supset x = y)$;

4. $\vdash \forall x \forall y\,(x < y \vee x = y \vee y < x)$;

5. $\vdash \forall x \forall y \forall u \forall v\,(x = u \& y = v \supset (x \leqslant y \equiv u \leqslant v))$;

6. $\vdash \forall x \forall y \forall z\,(x < y \supset x + z < y + z)$;

7. $\vdash \forall x \forall y \forall z\,(x < y \& 0 < z \supset x \cdot z < y \cdot z)$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго предположим, что $\vdash x \leqslant y \& y \leqslant z$ Тогда $\vdash x + u_1 = y \& y + u_2 = z$ для некоторых переменных u_1 и u_2. Тогда имеем доказуемые формулы:

$$z = y + u_2 = (x + u_1) + u_2 = x + (u_1 + u_2)\,,$$

что даёт $x \leqslant z$. Таким образом,

$$\vdash x \leqslant y \& y \leqslant z \supset x \leqslant z$$

для любых переменных. Вводя теперь кванторы по каждой переменной (последовательно), получаем требуемое.

Для доказательства третьего свойства рассмотрим равенства, справедливые при предположении, что $x \leqslant y \& y \leqslant x$:

$$x + u = y;\; y + v = x$$

для некоторых u и v. Тогда $x + u + v = x$, то есть $x + z = x$ для некоторого z.

Покажем, что $z = 0$. Если $\neg\,(z = 0)$, то $z = a'$ для некоторого a, то есть $x + a' = x$ или $x' + a = x$, что означает $x' \leqslant x$ и, следовательно, $x' < x$. С другой стороны, $x' = (x + 0)' = x + 0'$, то есть $x \leqslant x'$. Что, согласно свойству 4, невозможно.

Четвёртое утверждение сразу следует из последней аксиомы конечной арифметики.

Согласование предиката порядка с равенством (свойство 5) доказывается с помощью свойств равенства.

Имеем $x = u$; $y = v$; $x + z = y$; $x + z = u + z$. Тогда $u + z = y$; $u + z = v$. То есть $x = u \& y = v \supset (x \leqslant y \supset u \leqslant v)$. Аналогично доказывается и формула $x = u \& y = v \supset (u \leqslant v \supset x \leqslant y)$, то есть после квантификации по переменным x и y утверждение 5.

Пусть теперь $x + u = y$. Тогда $(x + z) + u = x + (z + u) = x + (u + z) = (x + u) + z = y + z$, то есть из $\vdash x \leqslant y$ следует $\vdash x + z \leqslant y + z$ для любого z. Таким образом, $\vdash \forall z\,(x \leqslant y \supset x + z \leqslant y + z)$.

Ясно, что для строгого неравенства нужно предположить, что $z \neq 0$.

Соответсвующее свойство для умножения доказывается аналогично. ■

Доказанная теорема позволяет обращаться с термами языка конечной арифметики как с натуральными числами. То есть использовать их для нумерации, счёта. И для построения более сложных систем.

2 Определимые множества и функции

Пусть $\mathfrak{T}$ — теория в некотором формализованном языке исчисления предикатов. Мы, как и в предидущем параграфе, пишем $\vdash \alpha$ вместо $\mathfrak{T} \vdash \alpha$.

Определение 2.1. Пусть Φ — некоторая формула в языке теории $\mathfrak{T}$. Рассмотрим класс A термов языка теории $\mathfrak{T}$ таких, что $\vdash [\Phi]^x_\tau$. Будем говорить, что формула Φ определяет множество A.

Иными словами, считаем, что метаформула $a \in A$ означает $\vdash [\Phi]^x_a$.

Таким образом, в каждой теории имеются множества, определённые посредством некоторой формулы исчсиления предикатов. Формула,определяющая множество, может иметь несколько свободных переменных. Тогда они становятся параметрами. О множествах, которые определяются в теории $\mathfrak{T}$ с помощью некоторой формулы, говорим как об определимых множествах. В дальнейшем под словом **множество** понимается **определимое множество**.

Определение 2.2. Пусть A и B — множества, определимые посредством формул Φ и Ψ соответсвенно. Мы говорим, что A — подмножество B и пишем $A \subset B$, если $\vdash \forall x\,(\Phi \supset \Psi)$.

Определение 2.3. Множества A и B считаются равными — пишем $A = B$ —, если выполнены оба включения: $A \subset B$ и $B \subset A$.

Теорема 2.1. $A = B$ тогда и только тогда, когда $\vdash \forall x\,(\Phi \equiv \Psi)$.

Доказательство. очевидно. ■

Теорема 2.2. Для любых множеств A, B, C справедливо:

1. $A = A$
2. если $A = B$, то $B = A$;
3. если $A = B$, $B = C$, то $A = C$;
4. обозначим $\mathbb{T}$ множество, определимое посредством формулы $x = x$; тогда для любого множества A $A \subset \mathbb{T}$;

5. $A \subset A$;

6. $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$.

Доказательство. Мы докажем транзитивность включения и то, что любое множество является подмножеством универсального.

Пусть $a \in C$ означает, что $\vdash \Theta$. Тогда, так как из $\Phi \supset \Psi$ и $\Psi \supset \Theta$ следует, что $\vdash (\Phi \supset \Theta)$. Применяя сюда квантификацию по переменной x, получаем, что $\vdash \forall x\,(\Phi \supset \Theta)$, что и даёт транзитивность.

Поскольку $\vdash \forall x\,(x = x)$ и $\vdash \forall x\,(x = x) \supset x = x$, $\vdash (\Phi \supset x = x)$. Таким образом, вводя квантор всеобщности, получаем $\forall x\,(Phi \supset x = x)$.

Доказательство остальных утверждений проводится аналогично. ■

Доказанная теорема показывает, что понятие определимого множества соответсвует "наивному" понятию множества.

Определение 2.4. Пустое множество определим посредством формулы $\neg\,(x = x)$. Обозначать пустое множество будем буквой Λ.

Легко понять, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.

1. Для любого множества A $\Lambda \subset A$.

2. Множество Λ определено однозначно.

Доказательство. Первое свойство очевидно, ибо ясно, что "доказуемость лжи" влечёт доказуемость любого утверждения. Теперь, если предположить существование двух пустых множеств, то оба они по доказанному являются подмножествами друг друга и, следовательно, равны. ■

Определение 2.5. Теоретико-множественные операции вводятся соотношениями:

1. $a \in A \sup B$ тогда и только тогда, когда $a \in A$ или $a \in B$;

2. $a \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда $a \in A$ и $a \in B$;

3. $a \in A \setminus B$ тогда и только тогда, когда $a \in A$, но неверно, что $a \in B$.

Иными словами,
$C = A \cup B$ тогда и только тогда, когда $\vdash \forall x\,(\Theta \equiv \Phi \vee \Psi)$;
$C = A \cap B$ тогда и только тогда, когда $\vdash \forall x\,(\Theta \equiv \Phi \& \Psi)$;
$C = A \setminus B$ тогда и только тогда, когда $\vdash \forall x\,(\Theta \equiv \Phi \& \neg \Psi)$.

Теорема 2.4.

Справедливы следующие теоретико-множественные соотношения (A, B, C — определимые множества):

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;

2. $A \cup B = B \cup A, \ ; A \cap B = B \cap A$;

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Доказательство. Первое соотношение тривиально. Что касается коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности теоретико-множественных операций, то в данном контексте они равносильны соответствующим свойствам выводимости.

Покажем, например, что

$$\vdash \alpha \vee (\beta \& \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma).$$

Для этого рассмотрим секвенцию

$$\longrightarrow \alpha \vee (\beta \& \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma).$$

Её выводимость равносильна выводимости двух секвенций:

$$\alpha \vee (\beta \& \gamma) \longrightarrow (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma) \text{ и } (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma) \longrightarrow \alpha \vee (\beta \& \gamma).$$

Разберём первую секвенцию. (Вторая рассматривается аналогично.) Её выводимость равносильна выводимости двух секвенций:

$$\alpha \vee (\beta \& \gamma) \longrightarrow \alpha \vee \beta, \;\; \alpha \vee (\beta \& \gamma) \longrightarrow \alpha \vee \gamma.$$

Исключаем теперь дизъюнкцию из атецедента этих секвенций, получаем, что выводимость исходной секвенции (точнее "половины" её) равносильна выводимости секвенций:

$$\alpha \longrightarrow \alpha \vee \beta;\ \beta \& \gamma \longrightarrow \alpha \vee \beta,$$

$$\alpha \longrightarrow \alpha \vee \gamma;\ \beta \& \gamma \longrightarrow \alpha \vee \gamma.$$

Выводимость последних секвенций следует из выводимости аксиом:

$$\alpha \longrightarrow \alpha\, \beta;\;\; \beta\, \gamma \longrightarrow \alpha\, \beta,$$

$$\alpha \longrightarrow \alpha\, \gamma;\;\; \beta\, \gamma \longrightarrow \alpha\, \gamma.$$

таким образом, доказуемость секвенции

$$\longrightarrow \alpha \vee (\beta \& \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma)$$

доказана.

Отсюда теперь легко получить закон дистрибутивности. ■

Определение 2.6. Пусть $F(x, y)$ — формула языка теории $\mathfrak{T}$, имеющая по крайней мере две свободные переменные. Будем говорить, что формула F определяет некоторую функцию f, если

$$\vdash \forall x\, (\exists y F\,(, y) \supset \forall u \forall v\, (T\,(x, u)\, \& F\,(x, v) \supset u = v)).$$

Понятие определимой функции показывает, что, во-первых, функция определена в терминах языка теории $\mathfrak{T}$ посредством некоторой формулы, а во-вторых, что если для некоторого x существует такой y, что $\vdash F(x, y)$, то такой y определён однозначно. В силу этого для определимой функции мы будем писать $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда $\vdash F(x, y)$.

Мы говорим и пишем "функция" вместо "определимая функция".

Определение 2.7. Областью определения функции f назовём (определимое) множество $\mathrm{dom} f$ такое, что $x \in \mathrm{dom} f$ тогда и только тогда, когда $\vdash \exists y F(x, y)$.

3 Внешние понятия

В этом параграфе мы расширим язык теории $\mathfrak{fin}\mathfrak{Ar}$ посредством добавления предикатного символа $\mathfrak{N}$, содержательно означающего, “быть натуральным числом” с соответсвующим аксиомами:

1. $\mathfrak{N}(0)$;
2. $\forall x\,(\mathfrak{N}(x) \supset \mathfrak{N}(x'))$;
3. $\forall x \forall y\,(\mathfrak{N}(x)\,\&\mathfrak{N}(y)\,01 \supset \mathfrak{N}(x+y))$;
4. $\forall x \forall y\,(\mathfrak{N}(x)\,\&\mathfrak{N}(y) \supset \mathfrak{N}(x \cdot y))$;
5. $\forall x \forall y\,(x = y \supset (\mathfrak{N}(x) \equiv \mathfrak{N}(y)))$.

Соответсвующую расширенную теорию назовём конечной гиперарифметикой и будем обозначать $\mathfrak{fin}\mathfrak{H}\mathfrak{Ar}$

Определение 3.1. Множество $\mathbb{N}$ такое, что $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{fin}\mathfrak{H}\mathfrak{Ar} \vdash \mathfrak{N}(n)$ будем называть множеством натуральных чисел, а его элементы, то есть термы, для которых $\mathfrak{fin}\mathfrak{H}\mathfrak{Ar} \vdash \mathfrak{N}(n)$ — натуральными числами.

***Теорема* 3.1**.
Формула $\exists W \forall x\,(\mathfrak{N}(x) \supset x < W)$ не противоречит конечной гиперарифметике.

Доказательство. Предположим, что конечная гиперарифметика непротиворечива. Тогда непротиворечива и конечная арифметика. У неё, следовательно, есть модель. Рассматривая ультрастепень этой модели по какому-либо нетривиальному ультрафильтру, получим модель конечной гиперарифметики. ■

Таким образом, конечная гиперарифметика позволяет работать с её термами как с гипернатуральными числами. Следуя теперь работам Е. В. Праздниковой и Ю. Н. Ловягина, вводим в рассмотрение язык для гиперрациональных чисел как троек $\langle k, l, m\rangle$, имитирующих число $\dfrac{k-l}{m+1}$, и строим теорию гиперрациональных чисел и (определимых) функций.

4 Заключительные замечания

Конечная арифметика, призванная играть роль формализованной элементарной теории чисел, на основании которой возникает гиперарифметика как “фундамент” для постороения гиперрациональных чисел, включает некоторые аксиомы, которые представляются необязательными. Например, последняя аксиома, гарантирующая закон трихотомии, аксиома дистрибутивности и её “частный случай” для функционального символа следования, аксиома несовпадения элемента и его последователя.

Нетривиальность ситуации при отсутствии трихотомии объясняется тем, что аксиомы конечной арифметики (без закона трихотомии) не исключают наличия несравнимых элементов, что, однако, не мешает на основе такой числовой системы построить нечто вроде “рационального пространства Канторовича”, которое может служить средством моделирования многомерного эвклидова пространства.

Возникающие в теории конечной гиперарифметики натуральные числа являются “достижимыми” в том смысле, что каждое такое натуральное число имеет вид $0^{'''\cdots'}$, то есть получается “за конечное количество” применений к константе 0 функционального символа следования. Числа же Ω, являющиеся бесконечно большими, то есть удовлетворяющие условию $\forall x\,(\mathfrak{N}\,(x) \supset x < \Omega)$, достижимыми не являются: вычитание единицы не приведёт даже к конечному (натуральному) числу, ибо $n + \Omega > k$ при любых натуральных n и k.

Литература

[1] Ловягин Ю. Н., Праздникова Е. В. Моделирование основных аспектов вещественного и комплексного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел //Научно-технический вестник Санкт-петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики, 2008, № 55. — с. 10 – 18.

[2] Ловягин Ю. Н. О классе функций, допускающих гиперрациональные аналоги //Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы 73-й научной конференции: С.-Пб:2020. — с. 66 – 69.

[3] Праздникова Е. В. Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел //Вестник Сыктывкарского университета, Серия 1, Вып. 7, 2007. — с.41 – 65.

НЕКОТОРЫЕ ПРОЕКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ l_∞^4

Мартынов О. М.

Военная академия воздушно-космической обороны
имени маршала Советского Союза Г.К. Жукова
Тверь
e-mail: olegmartynov@yandex.ru

Martynov O. M. Some projections and their properties in space l_∞^4.
In this paper, we find strong uniqueness constants for a certain class of projections with a unit norm in the space l_∞^4.

Keywords: projection, relative projection constant, space, subspace.

В данной статье находятся константы сильной единственности для некоторого класса операторов проектирования с единичной нормой в пространстве l_∞^4.

Ключевые слова: оператор проектирования (проекция), пространство, подпространство, относительная проекционная константа.

Пусть Y – замкнутое подпространство банахова пространства X.

Линейный ограниченный оператор $\pi : X \to Y$ называется оператором проектирования (проекцией) пространства X на Y, если $\pi y = y$ для любого $y \in Y$.

Множество всех операторов проектирования пространства X на подпространство Y будем обозначать через $\pi(X, Y)$.

Относительной проекционной константой подпространства Y в пространстве X называется число $\lambda(Y, X) = \inf\{\|\pi\|, \pi \in \pi(X, Y)\}$.

Среди операторов проектирования особый интерес представляют те, для которых выполняется равенство $\|\pi\| = \lambda(Y, X)$. Такие проекции, если они существуют, называются *минимальными*.

Пусть Y_{n-2} – подпространство пространства l_∞^n размерности $n-2$.

Оператор проектирования $\pi_0 : l_\infty^n \to Y_{n-2}$ называется сильно единственным, если существует число $k \in (0; 1]$ такое, что неравенство

$$\|\pi_0\| + k \cdot \|\pi - \pi_0\| \leqslant \|\pi\| \tag{1}$$

выполняется для любого оператора проектирования $\pi : l_\infty^n \to Y_{n-2}$.

Через k_0 обозначим максимальное значение k, при котором выполняется неравенство (1).

Очевидно, что оператор π_0 имеет минимальную норму и обладает свойством единственности.

Известно [1], что любой оператор проектирования $\pi : l_\infty^n \to Y_{n-2}$ имеет вид

$$\pi_{\alpha,\beta} x = x - \alpha f(x) - \beta g(x),$$

где $\alpha \in l_\infty^n$, $\beta \in l_\infty^n$, f и g – линейные функционалы, определённые на l_∞^n, причём

$$f(\alpha) = g(\beta) = 1;\ f(\beta) = g(\alpha) = 0. \tag{2}$$

Гиперплоскости пространства l_∞^n имеют вид

$$f^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^n \;\middle|\; f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = 0 \right\},$$
$$g^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^n \;\middle|\; g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i x_i = 0 \right\},$$

а в силу линейной независимости функционалов f и g, которая следует из условий (2), пространство $Y_{n-2} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ является подпространством пространства l_∞^n коразмерности 2.

Нормы операторов π и $\pi - \pi_0$ вычисляются по формулам

$$\|\pi\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} T_i, \quad \|\pi - \pi_0\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i, \quad \text{где} \quad T_i = \sum_{j=1}^{n} |\delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j|,$$

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} \left| (\alpha_i - \alpha_i^{(0)}) f_j + (\beta_i - \beta_i^{(0)}) g_j \right|, \quad \text{а оператор} \quad \pi_0 \quad \text{имеет вид}$$

$$\pi_{\alpha,\beta}^{(0)} x = x - \alpha^{(0)} f(x) - \beta^{(0)} g(x).$$

Найдём константы сильной единственности операторов проектирования пространства l_∞^4 на некоторый класс подпространств коразмерности 2.

Функционалы f и g зададим следующим образом:

$$f = (1, 0, r, 0), \quad g = (0, 1, 0, s), \tag{3}$$

где параметры $r > 0$, $s > 0$. Соотношения (2) примут вид:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha_1 + r\alpha_3 = 1, \quad g(\alpha) = \alpha_2 + s\alpha_4 = 0, \\ f(\beta) &= \beta_1 + r\beta_3 = 0, \quad g(\beta) = \beta_2 + s\beta_4 = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

<u>Лемма 1.</u> Пусть $\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}$ – минимальный оператор проектирования пространства l_∞^4 на подпространство Y_2, определяемое функционалами (3). Тогда $\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| = 1$.

Доказательство. Найдем значения $T_i^{(0)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$, где $T_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} \left| \delta_{ij} - \alpha_i^{(0)} f_j - \beta_i^{(0)} g_j \right|$. Имеем

$$\begin{aligned} T_1^{(0)} &= |1 - \alpha_1^{(0)}| + r|\alpha_1^{(0)}| + (1+s)|\beta_1^{(0)}|, \quad T_2^{(0)} = (1+r)|\alpha_2^{(0)}| + |1 - \beta_2^{(0)}| + s|\beta_2^{(0)}|, \\ T_3^{(0)} &= |\alpha_3^{(0)}| + |1 - r\alpha_3^{(0)}| + (1+s)|\beta_3^{(0)}|, \quad T_4^{(0)} = (1+r)|\alpha_4^{(0)}| + |\beta_4^{(0)}| + |1 - s\beta_4^{(0)}|. \end{aligned}$$

Рассмотрим три случая. 1) $0 < r \leqslant s \leqslant 1$. Положим $\alpha_1^{(0)} = \beta_2^{(0)} = 1$. Все остальные $\alpha_i^{(0)}$ и $\beta_i^{(0)}$ пусть будут равны нулю. При этом условия (4) выполняются. Тогда $T_1^{(0)} = r \leqslant 1$, $T_2^{(0)} = s \leqslant 1$, $T_3^{(0)} = T_4^{(0)} = 1$.

Следовательно,

$$\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} T_i^{(0)} = 1.$$

2) $s \geqslant r \geqslant 1$. В этом случае положим $\alpha_3^{(0)} = 1/r$, $\beta_4^{(0)} = 1/s$. Все остальные $\alpha_i^{(0)}$ и $\beta_i^{(0)}$ положим равными нулю. Условия (4) выполняются. Тогда $T_1^{(0)} = T_2^{(0)} = 1$, $T_3^{(0)} = 1/r \leqslant 1$, $T_4^{(0)} = 1/s \leqslant 1$.

Следовательно,
$$\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} T_i^{(0)} = 1.$$

3) $0 < r \leqslant 1 \leqslant s$. Положим $\alpha_1^{(0)} = 1$, $\beta_4^{(0)} = 1/s$. Все остальные $\alpha_i^{(0)}$ и $\beta_i^{(0)}$ пусть будут равны нулю. При этом условия (4) выполняются. Тогда $T_1^{(0)} = r \leqslant 1$, $T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = 1$, $T_4^{(0)} = 1/s \leqslant 1$.

Следовательно,
$$\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} T_i^{(0)} = 1.$$

Лемма 1 доказана.

<u>Замечание 1.</u> В случае $r = s = 1$ проекция $\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}$ не является единственной, так как можно найти, по крайней мере, четыре набора $\alpha_i^{(0)}, \beta_i^{(0)}$ при которых $\|\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}\| = 1$. Например, 1) $\alpha_1^{(0)} = \beta_2^{(0)} = 1$, все остальные $\alpha_i^{(0)}$ и $\beta_i^{(0)}$ равны нулю; 2) $\alpha_3^{(0)} = \beta_4^{(0)} = 1$, все остальные $\alpha_i^{(0)}$ и $\beta_i^{(0)}$ равны нулю; 3) $\alpha_1^{(0)} = \beta_4^{(0)} = 1$, все остальные $\alpha_i^{(0)}$ и $\beta_i^{(0)}$ равны нулю; 4) $\alpha_3^{(0)} = \beta_2^{(0)} = 1$, все остальные $\alpha_i^{(0)}$ и $\beta_i^{(0)}$ равны нулю. Проекция $\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}$ не является единственной также и в случае, если только один из параметров r или s равен единице.

<u>Замечание 2.</u> Результат леммы 1 можно было получить из более общей теоремы [2, с. 88]. Кроме того, из теоремы 1 [2, с. 101] следует, что рассмотренный оператор проектирования обладает свойством единственности, если $r \neq 1$, $s \neq 1$ $\quad (r > 0,\, s > 0)$.

<u>Лемма 2.</u> Значение константы сильной единственности k из неравенства (1) для оператора проектирования $\pi_{\alpha,\beta}^{(0)}$, который определяется функционалами (3), удовлетворяет условиям: **1.** $k \leqslant \dfrac{1-s}{1+s}$, если $0 < r \leqslant s < 1$; **2.** $k \leqslant \dfrac{r-1}{1+r}$, если $s \geqslant r > 1$; **3.** $k \leqslant \min\left\{\dfrac{1-r}{1+r}, \dfrac{s-1}{1+s}\right\}$, если $0 < r < 1 < s$.

Доказательство. Для получения оценки k сверху рассмотрим оператор $\overline{\pi}x = x - \overline{\alpha}f(x) - \overline{\beta}g(x)$. Значения $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ определим следующим образом: $0 < \overline{\alpha}_1, \overline{\beta}_2 \leqslant 1$, $\overline{\alpha}_3 > 0$, $\overline{\beta}_4 > 0$, все остальные $\overline{\alpha}_i$ и $\overline{\beta}_i$ пусть будут равны нулю.

Тогда
$$\overline{T}_1 = 1 + (r-1)\overline{\alpha}_1, \quad \overline{T}_2 = 1 + (s-1)\overline{\beta}_2,$$
$$\overline{T}_3 = 1 + (1-r)\overline{\alpha}_3, \quad \overline{T}_4 = 1 + (1-s)\overline{\beta}_4.$$

Вычислим нормы операторов $\overline{\pi}$ и $\overline{\pi} - \pi^{(0)}$. Рассмотрим три случая.

1. $0 < r \leqslant s < 1$. Имеем $\overline{T}_1 < 1$, $\overline{T}_2 < 1$, $\overline{T}_3 > 1$, $\overline{T}_4 > 1$. Поэтому
$$\|\overline{\pi}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \overline{T}_i = \max\{\overline{T}_3, \overline{T}_4\}.$$

Вычислим теперь
$$\|\overline{\pi} - \pi^{(0)}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 4} \overline{B}_i = \max_i \sum_{j=1}^{4} \left|(\overline{\alpha}_i - \alpha_i^{(0)})f_j - (\overline{\beta}_i - \beta_i^{(0)})g_j\right| =$$

$$= \max\left\{\sum_{j=1}^{4}\left|(\overline{\alpha}_1-1)f_j\right|;\ \sum_{j=1}^{4}\left|(\overline{\beta}_2-1)g_j\right|;\ \sum_{j=1}^{4}\left|\overline{\alpha}_3 f_j\right|;\ \sum_{j=1}^{4}\left|\overline{\beta}_4 g_j\right|\right\} =$$

$$= \max\{(1+r)|\overline{\alpha}_1-1|;\ (1+s)|\overline{\beta}_2-1|;\ (1+r)|\overline{\alpha}_3|;\ (1+s)|\overline{\beta}_4|\} =$$

$$= \max\{(1+r)r\,\overline{\alpha}_3;\ (1+s)s\,\overline{\beta}_4;\ (1+r)\,\overline{\alpha}_3;\ (1+s)\,\overline{\beta}_4\} =$$

$$= \max\{(1+r)\,\overline{\alpha}_3;\ (1+s)\,\overline{\beta}_4\} = \max\{\overline{B}_3;\ \overline{B}_4\}.$$

Найдем для k оценку сверху. Пусть $\max\{\overline{B}_3;\ \overline{B}_4\} = \overline{B}_3$. Тогда, для доказательства неравенства (1) достаточно доказать неравенство

$$1 + k\cdot(1+r)\,\overline{\alpha}_3 \leqslant 1 + (1-r)\,\overline{\alpha}_3. \tag{5}$$

Из неравенства (5) получим $k \leqslant \frac{1-r}{1+r}$. Если же $\max\{\overline{B}_3;\ \overline{B}_4\} = \overline{B}_4$, то для доказательства неравенства (1) достаточно доказать неравенство

$$1 + k\cdot(1+s)\,\overline{\beta}_4 \leqslant 1 + (1-s)\,\overline{\beta}_4. \tag{6}$$

Из неравенства (6) получим $k \leqslant \frac{1-s}{1+s}$. Так как $\frac{1-s}{1+s} \leqslant \frac{1-r}{1+r}$ (это неравенство равносильно условию $r \leqslant s$), то окончательно получим $k \leqslant \frac{1-s}{1+s}$. При этом неравенство (6) очевидно выполняется, но и неравенство (5) также верно:

$$1 + \frac{1-s}{1+s}\cdot(1+r)\,\overline{\alpha}_3 \leqslant 1 + \frac{1-r}{1+r}\cdot(1+r)\,\overline{\alpha}_3 = 1 + (1-r)\,\overline{\alpha}_3.$$

Очевидно, что $k \in (0,1]$.

2. $s \geqslant r > 1$. В этом случае $\overline{T}_1 > 1$, $\overline{T}_2 > 1$, $\overline{T}_3 < 1$, $\overline{T}_4 < 1$. Поэтому

$$\|\overline{\pi}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\overline{T}_i = \max\{\overline{T}_1,\ \overline{T}_2\}.$$

Вычислим теперь

$$\|\overline{\pi} - \pi^{(0)}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\overline{B}_i =$$

$$= \max\left\{\sum_{j=1}^{4}\left|\overline{\alpha}_1 f_j\right|;\ \sum_{j=1}^{4}\left|\overline{\beta}_2 g_j\right|;\ \sum_{j=1}^{4}\left|\left(\overline{\alpha}_3 - \frac{1}{r}\right)f_j\right|;\ \sum_{j=1}^{4}\left|\left(\overline{\beta}_4 - \frac{1}{s}\right)g_j\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{(1+r)\,\overline{\alpha}_1;\ (1+s)\,\overline{\beta}_2;\ (1+r)\,\frac{1-r\overline{\alpha}_3}{r};\ (1+s)\,\frac{1-s\overline{\beta}_4}{s}\right\} =$$

$$= \max\left\{(1+r)\,\overline{\alpha}_1;\ (1+s)\,\overline{\beta}_2;\ \frac{1+r}{r}\,\overline{\alpha}_1;\ \frac{1+s}{s}\,\overline{\beta}_2\right\} =$$

$$= \max\{(1+r)\,\overline{\alpha}_1;\ (1+s)\,\overline{\beta}_2\} = \max\{\overline{B}_1;\ \overline{B}_2\}.$$

Далее, рассуждая также, как в первом случае и учитывая, что $\frac{r-1}{1+r} \leqslant \frac{s-1}{1+s}$ получим, что $k \leqslant \frac{r-1}{1+r}$. Очевидно, что $k \in (0,1]$.

3. $0 < r < 1 < s$. В этом случае $\overline{T}_1 < 1$, $\overline{T}_2 > 1$, $\overline{T}_3 > 1$, $\overline{T}_4 < 1$. Поэтому

$$\|\overline{\pi}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\overline{T}_i = \max\{\overline{T}_2,\ \overline{T}_3\}.$$

Найдем теперь
$$\|\overline{\pi}-\pi^{(0)}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\overline{B}_i =$$
$$= \max\left\{\sum_{j=1}^{4}\left|(\overline{\alpha}_1-1)f_j\right|;\ \sum_{j=1}^{4}\left|\overline{\beta}_2 g_j\right|;\ \sum_{j=1}^{4}\left|\overline{\alpha}_3 f_j\right|;\ \sum_{j=1}^{4}\left|\left(\overline{\beta}_4-\frac{1}{s}\right)g_j\right|\right\} =$$
$$= \max\left\{(1+r)\left|\overline{\alpha}_1-1\right|;\ (1+s)\left|\overline{\beta}_2\right|;\ (1+r)\left|\overline{\alpha}_3\right|;\ (1+s)\left|\overline{\beta}_4-\frac{1}{s}\right|\right\} =$$
$$= \max\left\{(1+r)r\,\overline{\alpha}_3;\ (1+s)\,\overline{\beta}_2;\ (1+r)\,\overline{\alpha}_3;\ \frac{1+s}{s}\,\overline{\beta}_2\right\} =$$
$$= \max\{(1+s)\,\overline{\beta}_2;\ (1+r)\,\overline{\alpha}_3\} = \max\{\overline{B}_2;\ \overline{B}_3\}.$$

Из неравенств $1+k\cdot(1+s)\,\overline{\beta}_2 \leqslant 1+(s-1)\,\overline{\beta}_2$ и $1+k\cdot(1+r)\,\overline{\alpha}_3 \leqslant 1+(1-r)\,\overline{\alpha}_3$ для константы k получим оценки сверху $k\leqslant \dfrac{s-1}{1+s}$ и $k\leqslant\dfrac{1-r}{1+r}$.

Если $0<r<1/s$, то $\min\left\{\dfrac{1-r}{1+r};\ \dfrac{s-1}{1+s}\right\} = \dfrac{s-1}{1+s}$. Поэтому в этом случае $k\leqslant\dfrac{s-1}{1+s}$. Если же $1/s\leqslant r<1$, то $\min\left\{\dfrac{1-r}{1+r};\ \dfrac{s-1}{1+s}\right\} = \dfrac{1-r}{1+r}$, и, в этом случае, $k\leqslant\dfrac{1-r}{1+r}$.

Лемма 2 доказана.

Теорема. Оператор проектирования $\pi^{(0)}_{\alpha,\beta}$ пространства l^4_∞ на подпространство Y_2, определяемое функционалами (3), является сильно единственным, и максималь-ное значение константы сильной единственности k_0 равно:

$$\mathbf{1}.\ k_0=\frac{1-s}{1+s},\quad \text{если}\quad 0<r\leqslant s<1;\ \mathbf{2}.\ k_0=\frac{r-1}{1+r},\quad \text{если}\quad s\geqslant r>1;$$

$$\mathbf{3}.\ k_0=\min\left\{\frac{1-r}{1+r},\ \frac{s-1}{1+s}\right\},\quad \text{если}\quad 0<r<1<s.$$

Доказательство. Найдем значения $T_i\,(i=1,\ldots,4)$. Для T_3, T_4 воспользуемся равенствами (4).

$$T_1=|1-\alpha_1|+r|\alpha_1|+(1+s)|\beta_1|,\quad T_2=(1+r)|\alpha_2|+|1-\beta_2|+s|\beta_2|,$$
$$T_3=|\alpha_3|+|1-r\alpha_3|+(1+s)|\beta_3|=\frac{1}{r}|1-\alpha_1|+|\alpha_1|+\frac{1+s}{r}|\beta_1|=\frac{1}{r}\,T_1,$$
$$T_4=(1+r)|\alpha_4|+|\beta_4|+|1-s\beta_4|=\frac{1+r}{s}|\alpha_2|+\frac{1}{s}|1-\beta_2|+|\beta_2|=\frac{1}{s}\,T_2.$$

1. Пусть $0<r\leqslant s<1$. Тогда $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4}T_i=\max\{T_3,T_4\}$. Найдем значения $B_i\,(i=1,\ldots,4)$. Для B_3, B_4 воспользуемся равенствами (4).

$$B_1=(1+r)|\alpha_1-1|+(1+s)|\beta_1|,\quad B_2=(1+r)|\alpha_2|+(1+s)|\beta_2-1|,$$
$$B_3=(1+r)|\alpha_3|+(1+s)|\beta_3|=\frac{1+r}{r}|\alpha_1-1|+\frac{1+s}{r}|\beta_1|=\frac{1}{r}\,B_1,$$
$$B_4=(1+r)|\alpha_4|+(1+s)|\beta_4-1|=\frac{1+r}{s}|\alpha_2|+\frac{1+s}{s}|\beta_2-1|=\frac{1}{s}\,B_2.$$

Тогда $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} B_i = \max\{B_3, B_4\}$.

Покажем, что $k_0 = \frac{1-s}{1+s}$ – максимально возможное значение константы сильной единственности. Для этого надо доказать, что неравенство

$$1 + k_0 \cdot \max\{B_3,\ B_4\} \leqslant \max\{T_3,\ T_4\} \tag{7}$$

выполняется при любых значениях α_i, β_i.

Рассмотрим два случая:

а) $\max\{B_3, B_4\} = B_3$. Для доказательства неравенства (7) достаточно доказать неравенство

$$1 + \frac{1-s}{1+s}((1+r)|\alpha_3| + (1+s)|\beta_3|) \leqslant |\alpha_3| + |1 - r\alpha_3| + (1+s)|\beta_3|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1 + \frac{1-s}{1+s}\,(1+r)|\alpha_3| \leqslant |\alpha_3| + |1 - r\alpha_3| \quad \text{и} \quad (1-s)|\beta_3| \leqslant (1+s)|\beta_3|.$$

Второе неравенство очевидно выполняется, так как $1 - s < 1 + s$. Первое неравенство также верно, так как

$$|\alpha_3| + |1 - r\alpha_3| \geqslant |\alpha_3| + 1 - r|\alpha_3| = 1 + (1-r)|\alpha_3| \quad \text{и}$$

$$1 + \frac{1-s}{1+s}\,(1+r)|\alpha_3| \leqslant 1 + \frac{1-r}{1+r}\,(1+r)|\alpha_3| = 1 + (1-r)|\alpha_3|.$$

б) $\max\{B_3, B_4\} = B_4$. Для доказательства неравенства (7) достаточно доказать неравенство

$$1 + \frac{1-s}{1+s}((1+r)|\alpha_4| + (1+s)|\beta_4|) \leqslant (1+r)|\alpha_4| + |\beta_4| + |1 - s\beta_4|.$$

Его справедливость следует из выполнения двух неравенств:

$$1 + (1-s)|\beta_4| \leqslant |\beta_4| + |1 - s\beta_4| \quad \text{и} \quad \frac{1-s}{1+s}\,(1+r)|\alpha_4| \leqslant (1+r)|\alpha_4|,$$

Второе неравенство очевидно выполняется, так как $\dfrac{1-s}{1+s} < 1$. Первое неравенство также верно, так как

$$|\beta_4| + |1 - s\beta_4| \geqslant |\beta_4| + 1 - s|\beta_4| = 1 + (1-s)|\beta_4|.$$

2. Пусть $s \geqslant r > 1$. Тогда $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} T_i = \max\{T_1, T_2\}$. Найдем значения B_i $(i = 1, \ldots, 4)$. Для B_3, B_4 воспользуемся равенствами (4).

$$B_1 = (1+r)|\alpha_1| + (1+s)|\beta_1|, \quad B_2 = (1+r)|\alpha_2| + (1+s)|\beta_2|,$$

$$B_3 = (1+r)|\alpha_3 - \frac{1}{r}| + (1+s)|\beta_3| = \frac{1+r}{r}|\alpha_1| + \frac{1+s}{r}|\beta_1| = \frac{1}{r}\,B_1,$$

$$B_4 = (1+r)|\alpha_4| + (1+s)|\beta_4 - \frac{1}{s}| = \frac{1+r}{s}|\alpha_2| + \frac{1+s}{s}|\beta_2| = \frac{1}{s}\,B_2.$$

Тогда $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} B_i = \max\{B_1, B_2\}$. Далее, рассуждая также, как и в первом случае, получим, что $k_0 = \dfrac{r-1}{1+r}$.

3. Пусть $0 < r < 1 < s$. Тогда $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} T_i = \max\{T_2, T_3\}$. Найдем значения $B_i\,(i = 1, \ldots, 4)$. Для B_1, B_4 воспользуемся равенствами (4).

$$B_1 = (1+r)|\alpha_1 - 1| + (1+s)|\beta_1| = (1+r)r|\alpha_3| + (1+s)r|\beta_3| = rB_3,$$

$$B_2 = (1+r)|\alpha_2| + (1+s)|\beta_2| \quad B_3 = (1+r)|\alpha_3| + (1+s)|\beta_3|,$$

$$B_4 = (1+r)|\alpha_4| + (1+s)|\beta_4 - \frac{1}{s}| = \frac{1+r}{s}|\alpha_2| + \frac{1+s}{s}|\beta_2| = \frac{1}{s}\,B_2.$$

Тогда $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} B_i = \max\{B_2, B_3\}$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $0 < r < 1/s$. В этом случае $\min\left\{\dfrac{1-r}{1+r}, \dfrac{s-1}{1+s}\right\} = \dfrac{s-1}{1+s}$. Покажем, что тогда $k_0 = \dfrac{s-1}{1+s}$. Пусть $\max\{B_2, B_3\} = B_2$. Тогда достаточно доказать неравенство

$$1 + \frac{s-1}{1+s}((1+r)|\alpha_2| + (1+s)|\beta_2|) \leqslant (1+r)|\alpha_2| + |1 - \beta_2| + s|\beta_2|.$$

Оно доказывается также, как и в предыдущих случаях. Если $\max\{B_2, B_3\} = B_3$, то доказательство аналогично.

б) $1/s \leqslant r < 1$. В этом случае, проводя рассуждения аналогичные рассуждени-ям в случае а), получим $k_0 = \dfrac{1-r}{1+r}$.

Теорема доказана.

Замечание 3. Случай, когда функционалы f и g зависят только от одного параметра s рассмотрен в работе [3]. Более общий случай для пространства l_∞^{2n} рассмотрен в работе [4].

Литература

[1] Blätter J., Cheney E. W., Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces // Ann. math. pura et appl., 101 (1974). – p. 215–227.

[2] Локоть В., Мартынов О. Операторы проектирования в конечномерных пространствах. – Saarbrücken: LAMBERT Academic Publishing. – 245 с.

[3] Локоть В. В., Мартынов О. М., О некоторых константах сильной единственности // Дифференциальные уравнения и процессы управления, 1 (2018), 35–53; http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.1/article.1.2.html.

[4] Martynov O. M., Constants of strong uniqueness of minimal projections onto some n-dimensional subspaces of l_∞^{2n} $(n \geqslant 2)$ // J. Approx. Theory, 262 (2021), p. 105507.

УДК 517.5

КОНСТРУКТИВНОЕ ОПИСАНИЕ ГЁЛЬДЕРОВЫХ КЛАССОВ НА НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ КОМПАКТАХ

Павлов Д. А.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: dimapavlow@list.ru

Pavlov D. A. Constructive description of Hölder classes on some multidimensional compact sets. We give a constructive description of Hölder classes of functions on certain compacts in $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ in terms of a rate of approximation by harmonic functions in shrinking neighborhoods of these compacts. The considered compacts are a generalization to the higher dimensions of compacts that are subsets of a chord-arc curve in $\mathbb{R}^3$.
Keywords: constructive description, Hölder classes, approximation, harmonic functions, chord-arc curves.

В статье даётся конструктивное описание классов гёльдеровых функций на специальных компактах в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ в терминах скорости приближения гармоническими функциями в сужающихся окрестностях этих компактов. Рассматриваемые компакты представляют собой обобщение на бо́льшие размерности компактов, являющихся подмножествами кривой в $\mathbb{R}^3$, дуга которой соизмерима с хордой. Ключевые слова: конструктивное описание, классы Гёльдера, аппроксимация, гармонические функции, свойство соизмеримости дуги и хорды.

1. Введение. Во второй половине двадцатого века многие авторы занимались проблемой конструктивного описания классов гёльдеровых функций на различных множествах комплексной плоскости в терминах скорости приближения алгебраическими многочленами [1-4]. Зачастую дело сводилось к приближению на кривых, обладающих теми или иными свойствами. В силу специфики комплексной плоскости данные результаты не получается непосредственно распространить на вещественные пространства большей размерности (используемые методы опираются на конформное отображение).

Для трёхмерного случая удалось найти иной подход. В работе Т. А. Алексеевой и Н. А. Широкова [5] дано конструктивное описание класса гёльдеровых функций на кривой в $\mathbb{R}^3$, дуга которой соизмерима с хордой, в терминах скорости приближения функциями, гармоническими в окрестности кривой. Размер окрестности напрямую связан со скоростью приближения: чем точнее приближение, тем у́же окрестность. Также в этой окрестности имеются равномерные оценки на градиент приближающей функции, что помогает установить гёльдеровость функции исходя из возможности приближения.

В работе автора [6] конструктивное описание распространено с кривой, дуга которой соизмерима с хордой, на произвольное её компактное подмножество. Ввиду отстутствия (в большинстве случаев) связности окрестностей рассматриваемых компактов, равномерные оценки на градиент заменены другим свойством, также зависящим от размера окрестности. В данной работе мы обобщаем конструктивное описание на аналогичные множества, лежащие в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$.

Автор выражает признательность Н. А. Широкову за предложенную тему исследования, ценные советы и рекомендации.

2. Определения и формулировка результата.

Определение 1. Множество $L \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$ назовём *хорошим компактом*, если существует такое отображение $\varphi\colon [0,\,1]^{m-2} \to \mathbb{R}^m$, что

$$C_1\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant C_2\|x_1 - x_2\|$$

и $\varphi([0,\,1]^{m-2}) = L$.

Нетрудно проверить, что при $m = 3$ определение хорошего компакта совпадает с определением кривой, дуга которой соизмерима с хордой.

Определение 2. Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}\,dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt \leqslant C_0\omega(x). \qquad (1)$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$. Через $H^\omega(A)$ будем обозначать множество всех функций $f\colon A \to \mathbb{R}$ таких, что $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant C_f\omega(\|x_1-x_2\|)$. Функции из $H^\omega(A)$ будем называть *гёльдеровыми.*

Отметим, что $\omega(t) = t^\alpha$ при $\alpha \in (0,\,1)$ удовлетворяет условию (1) (достаточно положить $C_0 = 1/\alpha + 1/(1-\alpha)$), поэтому классы гёльдеровых с показателем $\alpha \in (0,\,1)$ функций удовлетворяют определению 2, что мотивирует выбранное название для классов $H^\omega(A)$.

Для множества $A \subset \mathbb{R}^m$ положим

$$\Lambda_\delta(A) = \bigcup_{x\in A} B(x,\,\delta),$$

где $B(x,\,\delta)$ — открытый шар с центром в x радиуса δ.

Основная теорема. Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1), K — компактное подмножество хорошего компакта в $\mathbb{R}^m$, $f\colon K \to \mathbb{R}$. Тогда для того, чтобы f принадлежала классу $H^\omega(K)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta \in (0,\,1/2)$ существовала такая гармоническая в $\Lambda_\delta(K)$ функция u_δ, что

$$|f(x) - u_\delta(x)| \leqslant C_1(f,\,K)\omega(\delta), \quad x \in K,$$

$$|u_\delta(x_1) - u_\delta(x_2)| \leqslant C_2(f,\,K)\omega(\delta) \text{ при } \|x_1 - x_2\| \asymp \delta, \quad x_1,\,x_2 \in K.$$

Последнее свойство приближающей функции назовём «гёльдеровостью». Соизмеримость $\|x_1 - x_2\| \asymp \delta$ предполагается с константами, зависящими от K.

Возьмём $x_1,\,x_2 \in K$, построим для $\delta = \|x_1 - x_2\|/3\mathrm{diam}\,K$ функцию u_δ и напишем

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - u_\delta(x_1)| + |u_\delta(x_1) - u_\delta(x_2)| + |u_\delta(x_2) - f(x_2)| \leqslant C\omega(\delta).$$

Тем самым мы доказали достаточность указанных условий. Содержательную часть работы составляет доказательство необходимости, то есть построение функции u_δ. Здесь мы приведём лишь план данного построения.

Зафиксируем натуральное число $m \geqslant 3$, компактное подмножество хорошего компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ и функцию $f \in H^\omega(K)$. Через $d(x)$ обозначим расстояние от точки x до множества K. Через λ_m обозначим меру Лебега в $\mathbb{R}^m$, а через μ_{m-1} — меру Хаусдорфа на поверхностях, составленных из частей сфер в $\mathbb{R}^m$. Замыкание множества A будем обозначать $\overline{A}$. Мы часто будем писать неравенства вида $f \leqslant Cg$. Здесь C означает не всегда одну и ту же константу, но всегда независящую от аргументов, понятных из контекста.

3. Псевдогармоническое расширение. Ключевые леммы.

Построим *псевдогармоническое расширение* f (аналогично псевдоаналитическому расширению, введённому Е. М. Дынькиным [7]), то есть такую функцию $f_0 \in C(\mathbb{R}^m) \cap C^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$, что $f_0|_K = f$,

$$\|\text{grad } f_0(x)\| \leqslant C\frac{\omega(d(x))}{d(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K, \tag{2}$$

$$f_0(x) = 0 \text{ при } \|x\| \geqslant R_0,\ K \subset B(\mathbb{O},\, R_0), \tag{3}$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C\frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus K. \tag{4}$$

Для этого мы сначала построим кусочно постоянную функцию, значения которой приближаются к значениям f по мере приближения к множеству K, а затем три раза её надлежащим образом усредним. Первое усреднение даст нам непрерывность, второе — гладкость, а третье — дважды гладкость. Оценки (2)-(4), как и в трёхмерном случае, получаются из гёльдеровости f и формул дифференцирования функций вида $g(x) = \int\limits_{B(x,\, r(x))} h(y)\, d\lambda_m(y)$ и $g(x) = \int\limits_{\partial B(x,\, r(x))} h(y)\, d\lambda_m(y)$.

Далее, применяя многомерный аналог формулы Грина и получим интегральное представление f_0, верное на $\mathbb{R}^m \setminus K$:

$$f_0(x_0) = -\frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x), \tag{5}$$

где $r_{x_0}(x) = \|x - x_0\|$, q_m — площадь поверхности единичной $(m-1)$-мерной сферы, умноженная на $(m-2)$.

Затем мы хотим доказать, что (5) верно на всём $\mathbb{R}^m$. В этом и в дальнейших оценках нам помогут следующие ключевые леммы.

Лемма 1. Обозначим $A' = A \cap B(\mathbb{O},\, R_0)$ для $A \subset \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\int\limits_{B'(x,\, R)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant CR^{m-2}\omega(R), \quad x \in K.$$

Лемма 2.

$$\int\limits_{B'(x,\, R)} \frac{\omega(d(x))}{d^2(x) r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) \leqslant C\omega(R), \quad x \in K.$$

Применяя эти леммы можно установить, что из существования псевдогармонического расширения следует гёльдеровость функции и что представление (5) верно на всём $\mathbb{R}^m$. В частности,

$$f(x_0) = -\frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x), \quad x_0 \in K. \tag{5}$$

4. Построение приближающей функции.

Для данного натурального n мы строим окрестность Ω_n^* множества K, размер которой соизмерим с 2^{-n}. Затем мы строим характеристическую функцию Φ_n множества, получающегося удалением Ω_n^* из большей окрестности K, размер которой также соизмерим с 2^{-n}. Определяем гармоническую в $\Lambda_{2^{-n}}$ функцию $u_{2^{-n}}$ следующим образом:

$$u_{2^{-n}}(x_0) = -\frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) + \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\omega(2^{-n})\Phi_n(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x).$$

Гармоничность данной функции следует из оценок на размер Ω_n^*, правила дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, и гармоничности функции $1/r^{m-2}$.

Затем, используя (5), мы пишем

$$u_{2^{-n}}(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{q_m} \int\limits_{\Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x) + \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\omega(2^{-n})\Phi_n(x)}{r_{x_0}^{m-2}(x)}\, d\lambda_m(x).$$

Оценка полученных интегралов производится с помощью леммы 2 и геометрических соображений. Таким образом,

$$|f(x_0) - u_{2^{-n}}(x_0)| \leqslant C\omega(2^{-n}).$$

Для произвольного $\delta \in (0, 1/2)$ подберём такое n, что $2^{-n-1} < \delta \leqslant 2^{-n}$ и положим $u_\delta = u_{2^{-n}}$. Тогда требуемая оценка скорости приближения эквивалентна полученной выше. «Гёльдеровость» построенной функции прямо следует из гёльдеровости f и доказанной скорости приближения:

$$|u_\delta(x_1) - u_\delta(x_2)| \leqslant |u_\delta(x_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - u_\delta(x_2)| \leqslant C\omega(\delta).$$

Литература

[1] Дзядык В. К. О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip α ($0 < \alpha < 1$) на конечном отрезке вещественной оси // Известия АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20, № 5. – С. 623–642.

[2] Андриевский В. В. Геометрическое строение областей и прямые теоремы конструктивной теории функций // Матем. сб. 1985. Т. 126(168), № 1. – С. 41–58.

[3] Широков Н. А. Аппроксимативная энтропия континуумов // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 3. – С. 546–549.

[4] Shirokov N. A. Constructive Descriptions of Functional Classes by Polynomial Approximations // Journal of Mathematical Sciences. 2001. Vol. 105. – P. 2269–2291.

[5] Alexeeva T. A., Shirokov N. A. Constructive description of Hölder-like classes on an arc in $\mathbb{R}^3$ by means of harmonic functions // Journal of Approximation Theory. 2020. Vol. 249.

[6] Павлов Д. А. Конструктивное описание гёльдеровых классов на компактах в $\mathbb{R}^3$ // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Т. 491. – С. 119–144.

[7] Dyn'kin E. M. The Pseudoanalytic Extension // Journal d Analyse Mathematique. 1993. Vol. 60. – P. 45–70.

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Улицкая А. Ю.
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург
e-mail: baguadadao@gmail.com

Ulitskaya A. Yu. Optimal subspaces in finite-dimensional problems of mean square approximation. We give a complete description of spaces of shifts providing a sharp constant in the inequality for the best mean square approximation of classes of periodic convolutions with a summable kernel. The necessary and sufficient conditions are formulated in terms of the Fourier coefficients of the convolution kernel and the function generating the shift space. We give easily verifiable conditions that are sufficient for the fulfillment of the inequality under consideration and provide examples of kernels and extremal subspaces satisfying these conditions. Well-known inequalities for approximation of differentiable functions by trigonometric polynomials and splines are particular cases of this result.
Keywords: best approximation, spaces of shifts, sharp constants, classes of convolutions

Получено описание всех пространств сдвигов, реализующих точную константу в неравенстве для оценки наилучшего среднеквадратичного приближения классов периодических свёрток с суммируемым ядром. Необходимые и достаточные условия формулируются в терминах коэффициентов Фурье ядра свёртки и функции, порождающей пространство сдвигов. Даны легко проверяемые условия, достаточные для справедливости рассматриваемого неравенства, и приведены примеры ядер и экстремальных подпространств, удовлетворяющих этим условиям. Частными случаями данного результата являются известные неравенства для приближения дифференцируемых функций тригонометрическими многочленами и сплайнами.
Ключевые слова: наилучшее приближение, пространства сдвигов, точные константы, классы свёрток

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90025.

1. Обозначения. Если $p \in [1, +\infty)$, то L_p — пространство измеримых 2π-периодических функций f, для которых $\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p} < +\infty$, $W_p^{(r)}$ — пространство функций f из L_p, у которых $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_p$. Далее,

$$E(f, \mathfrak{N})_p = \inf_{T \in \mathfrak{N}} \|f - T\|_p$$

— наилучшее приближение функции f в пространстве L_p множеством $\mathfrak{N} \subset L_p$.

Коэффициенты Фурье функции f и свёртка функций f и g из L_1 определяется равенствами

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \qquad (f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t)\, dt.$$

При $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathbf{S}_{n,\mu}$ обозначается $2n$-мерное пространство 2π-периодических сплайнов порядка μ дефекта 1 по равномерному разбиению $\dfrac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, через $\mathcal{T}_{2n-1}$ — $(2n-1)$-мерное пространство тригонометрических многочленов степени не выше $n-1$.

2. История вопроса. Для приближения тригонометрическими многочленами общеизвестно (см., например, [1, теорема 4.2.2]) неулучшаемое на классе $W_2^{(r)}$ неравенство

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 \leqslant \frac{1}{n^r} \|f^{(r)}\|_2. \tag{1}$$

Неравенство (1) точно даже в смысле теории поперечников, то есть константа $1/n^r$ не может быть уменьшена за счёт перехода к приближающему подпространству размерности не выше $2n$ (см., например, [1, теорема 8.1.3]).

Пространство тригонометрических многочленов — не единственное экстремальное подпространство: аналогичное неравенство для приближения сплайнами было получено в [2] с помощью соотношений двойственности.

В работе [3] Виноградов и Улицкая дали описание всех подпространств размерности $2n$ и $2n-1$, которые порождаются сдвигами одной функции на π/n и для приближения которыми справедлива оценка вида (1) с константой $1/n^r$. Упомянутые неравенства для тригонометрических многочленов и сплайнов являются частными случаями данного результата.

Дальнейшим обобщением неравенства (1) является рассмотрение вместо соболевских классов (классов свёрток с ядрами Бернулли) других классов периодических свёрток.

В настоящем обзоре представлены аналоги неравенства (1) для приближения пространствами сдвигов классов функций f, представимых в виде

$$f = G * \varphi + g, \quad \varphi \in L_2,\ g \in T,$$

где $G \in L_1$, T — некоторое конечномерное подпространство L_2 (см. далее), $G \perp T$.

Напомним, что *n-поперечником по Колмогорову* множества A в нормированном пространстве X называется величина

$$d_n(A; X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X,$$

где первый инфимум берётся по всем подпространствам X_n пространства X размерности не выше n.

Из [4, теоремы IV.2.5 и IV.3.1] следует, что для рассматриваемого класса функций при $q = \dim T \leqslant n$

$$d_n\bigl(\{G * \varphi + g\colon \|\varphi\|_2 \leqslant 1,\, g \in T\}; L_2\bigr) = |c^*_{n+1-q}(G)|,$$

где $|c^*_k(G)|$, $k \in \mathbb{N}$, — k-й в порядке невозрастания элемент последовательности $\{|c_l(G)|\}_{l\in\mathbb{Z}}$. Экстремальным подпространством в данном случае является сумма T и линейной оболочки набора $\{x \mapsto e^{ik_jx}\}_{j=1}^{n-q}$, где номера $k_1, \ldots, k_{n-q}$ таковы, что $|c_{k_j}(G)| = |c^*_j(G)|,\ j = 1, \ldots, n-q$.

В данной работе указывается широкий класс других экстремальных подпространств, а также описываются все пространства сдвигов, для приближения которыми указанного класса функций справедлива оценка вида (1) с точной константой. Настоящий текст является обзором работ [3], [5] и [6].

3. Пространства сдвигов. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $B \in L_1$. Обозначим через $\mathbb{S}_{B,n}$ пространство функций s, заданных на $\mathbb{R}$ и представимых в виде

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right), \tag{2}$$

а через $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ — пространство функций из $\mathbb{S}_{B,n}$, представимых в виде (2) с дополнительным условием

$$\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \beta_j = 0.$$

Нетрудно показать, что пространства $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ совпадают с линейными оболочками наборов $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$ и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$, где

$$\Phi_{B,l}(x) = \Phi_{B,n,l}(x) = \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} e^{\frac{ilj\pi}{n}} B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right) \sim \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_{l+2n\nu}(B) e^{i(l+2n\nu)x}.$$

Линейная независимость наборов $\{B(\,\cdot - \frac{j\pi}{n})\}_{j=0}^{2n-1}$ и $\{B(\,\cdot - \frac{j\pi}{n})\}_{j=1-n}^{n-1}$ равносильна тому, что функции $\Phi_{B,l}$ ненулевые при $l \in [1-n : n]$ и $l \in [1-n : n-1]$ соответственно. В этом случае системы $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$ и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ образуют ортогональные базисы в пространствах $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. При $m \in [1 : n]$ обозначим через $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ линейную оболочку набора $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m-1}$, а через $\mathbb{S}_{B,n,m}$ — линейную оболочку набора $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m}$.

Если B есть ядро Дирихле

$$D_{n-1}(t) = \sum_{k=1-n}^{n-1} e^{ikt},$$

то $\mathbb{S}_{B,n} = \mathbb{S}^{\times}_{B,n} = \mathcal{T}_{2n-1}$, $\mathbb{S}_{B,n,m} = \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m} = \mathcal{T}_{2m-1}$, $\Phi_{B,n} = 0$, а $\Phi_{B,l}$ при $|l| < n$ суть обычные экспоненты. Если же $B = D_n$, то $\mathbb{S}_{B,n}$ есть сумма $\mathcal{T}_{2n-1}$ и линейной оболочки функции $x \mapsto \cos nx$.

В случае, когда B есть B-сплайн

$$B_{n,\mu}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k}-1}{i\frac{\pi}{n}k}\right)^{\mu+1} e^{ikt}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+$$

(здесь и далее при $k=0$ дробь считается равной 1), получаем, что $\mathbb{S}_{B,n}$ — это пространство сплайнов $\mathbf{S}_{n,\mu}$. Функции

$$\Phi_{B_{n,\mu},l}(x) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}l}-1}{i\frac{\pi}{n}}\right)^{\mu+1} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(l+2n\nu)x}}{(l+2n\nu)^{\mu+1}},$$

образующие в нём ортогональный базис, называются *экспоненциальными сплайнами* (по принятому соглашению $\Phi_{B_{n,\mu},0}(x)=1$).

4. Основные результаты. Для $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $Q\subset[1-m:m]$ и набора целых чисел $K=\{\varkappa_l\}_{l\in Q}$ обозначим через $T_{n,m,Q,K}$ линейную оболочку набора $\{x\mapsto e^{i(l+2n\varkappa_l)x}\}_{l\in Q}$.

Следующая общая теорема даёт критерии экстремальности подпространства $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ в терминах коэффициентов Фурье функций B и G.

Теорема 1. Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, $Q\subset[1-m:m-1]$, $q=\operatorname{card}Q$, $K=\{\varkappa_l\}_{l\in Q}\subset\mathbb{Z}$, $B\in L_2$, $G\in L_1$, $G\perp T_{n,m,Q,K}$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Для любой функции f, представимой в виде

$$f = G*\varphi + g, \quad \varphi\in L_2,\ g\in T_{n,m,Q,K},$$

выполняется неравенство

$$E\big(f,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c^*_{2m-q}(G)|\|\varphi\|_2. \tag{3}$$

2. Коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.

   (a) Для любого $l\in Q$ $c_{l+2n\varkappa_l}(B)\neq 0$ и $c_{l+2nk}(B)=0$ при всех $k\in\mathbb{Z}\setminus\{\varkappa_l\}$.

   (b) Для любой пары $(l,k)\in\big([1-n:-m]\cup Q\cup[m:n]\big)\times\mathbb{Z}$ $|c_{l+2nk}(G)|\leqslant|c^*_{2m-q}(G)|$.

   (c) Для каждого $l\in[1-m:m-1]\setminus Q$ существует не более одного номера $k_l\in\mathbb{Z}$, для которого $|c_{l+2nk_l}(G)|>|c^*_{2m-q}(G)|$. Причём если такой номер k_l существует, то выполнены следующие условия.

      i. $c_{l+2nk_l}(B)\neq 0$.

      ii. Для любого $k\in\mathbb{Z}$ из того, что $|c_{l+2nk}(G)|=|c^*_{2m-q}(G)|$, следует, что $c_{l+2nk}(B)=0$.

      iii.
$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2-|c^*_{2m-q}(G)|^2} \geqslant 0. \tag{4}$$

Аналогичное утверждение верно для приближения пространством $\mathbb{S}_{B,n,m}$.

Замечание 1. Неравенство (3) обращается в равенство на функциях вида $G * e^{il\,\cdot}$, где $l \in \{k \in \mathbb{Z}\colon |c_k(G)| = |c^*_{2m-q}(G)|\}$, и их линейных комбинациях. Как отмечалось ранее, оно точно даже в смысле теории поперечников.

Замечание 2. Из всех условий теоремы 1 трудность составляет лишь проверка неравенства (4). Отметим, что для его справедливости достаточно выполнения следующих условий: $B, G \in L_2$,

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_{l+2nk_l}(B)|}{|c_{l+2nk_l}(G)|}|c_{l+2nk}(G)|,$$

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ |c_{l+2nk}(G)|\neq|c^*_{2m-q}(G)|}} \frac{1}{1-\frac{|c^*_{2m-q}(G)|^2}{|c_{l+2nk}(G)|^2}} \geqslant 0.$$

Сформулируем частные случаи достаточного условия экстремальности пространств $\mathbb{S}^\times_{B,n,m}$ и $\mathbb{S}_{B,n,m}$, когда последовательность модулей коэффициентов Фурье ядра G симметрично убывает, а $T_{n,m,Q,K}$ есть $\{0\}$ и пространство констант.

***<u>Следствие</u>* 1**. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B, G \in L_2$, причём коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.

1. $|c_k(G)| = |c_{-k}(G)|$ при всех $k \in \mathbb{N}$,

$$|c_0(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

2. Для всех $l \in [1-m : m-1]$ $c_l(B) \neq 0$,

$$|c_{l+2nk}(B)| \leqslant \frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|}|c_{l+2nk}(G)| \quad \text{при всех } k \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1-\left|\frac{c_m(G)}{c_{l+2nk}(G)}\right|^2} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции f, представимой в виде

$$f = G * \varphi, \quad \varphi \in L_2,$$

выполняются неравенства

$$E\big(f, \mathbb{S}^\times_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)|\|\varphi\|_2, \quad E\big(f, \mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant |c_m(G)|\|\varphi\|_2.$$

***<u>Следствие</u>* 2**. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B, G \in L_2$, причём коэффициенты Фурье функций B и G удовлетворяют следующим условиям.

1. $|c_0(G)| = 0$, $|c_k(G)| = |c_{-k}(G)|$ при всех $k \in \mathbb{N}$,

$$|c_1(G)| \geqslant \ldots \geqslant |c_{m-1}(G)| > |c_m(G)| > |c_{m+1}(G)| \geqslant |c_{m+2}(G)| \geqslant \ldots.$$

2. Для всех $l \in [1-m : m-1]$ $c_l(B) \neq 0$.

3. $c_{2nk}(B)=0$ при всех $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

4. Для всех $l\in[1-m:m-1]\setminus\{0\}$

$$|c_{l+2nk}(B)|\leqslant\frac{|c_l(B)|}{|c_l(G)|}|c_{l+2nk}(G)|\quad\text{при всех } k\in\mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-\left|\frac{c_m(G)}{c_{l+2nk}(G)}\right|^2}\geqslant 0.$$

Тогда для любой функции f, представимой в виде

$$f=G*\varphi+c,\quad \varphi\in L_2,\ c\in\mathbb{C}\text{ или }\mathbb{R},$$

выполняются неравенства

$$E\big(f,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2\leqslant|c_m(G)|\|\varphi\|_2,\quad E\big(f,\mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2\leqslant|c_m(G)|\|\varphi\|_2.$$

Примерами ядер, удовлетворяющих условиям следствий 1 и 2 для всех $m\leqslant n$, могут служить функции G с коэффициентами Фурье вида

$$|c_k(G)|=\begin{cases}\frac{1}{|k|^\alpha}, & k\neq 0,\\ 0, & k=0,\end{cases}\qquad \alpha\geqslant 1;$$

$$|c_k(G)|=\frac{1}{(1+a^2k^2)^\alpha},\ \text{где } \alpha\in\mathbb{N}\text{ или } \alpha+\frac{1}{2}\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\};$$

$$|c_k(G)|=e^{-\beta|k|^\gamma},\ \text{где } \gamma\geqslant 2,\ \beta>0.$$

В частности, отсюда следует условие экстремальности пространств сдвигов для соболевских классов периодических функций, полученное ранее в [3]. Сформулируем его.

***<u>Следствие</u>* 3**. Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $m\leqslant n$, а функция $B\in L_2$ такова, что

$$\begin{aligned}c_l(B)&\neq 0\quad\text{при всех }\ l\in[1-m:m-1],\\ c_{2nk}(B)&=0\quad\text{при всех }\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\\ |c_{l+2nk}(B)|\leqslant\left|\frac{l}{l+2nk}\right|^r|c_l(B)|&\quad\text{при всех }\ l\in[1-m:m-1]\setminus\{0\},\ k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Тогда для любой функции $f\in W_2^{(r)}$ выполняются неравенства

$$E\big(f,\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2\leqslant\frac{1}{m^r}\|f^{(r)}\|_2,\quad E\big(f,\mathbb{S}_{B,n,m}\big)_2\leqslant\frac{1}{m^r}\|f^{(r)}\|_2.$$

Примерами функций B, удовлетворяющих условиям следствия 1 для всех $m\leqslant n$, могут служить функции с коэффициентами вида $c_k(B)=c_k(G)\gamma_k$, где $\gamma_l\neq 0$ при $l\in[1-m:m-1]$ и $|\gamma_{l+2nk}|\leqslant|\gamma_l|$ для всех $(l,k)\in[1-m:m-1]\times\mathbb{Z}$ таких, что $c_{l+2nk}(G)\neq 0$. Если γ_k суть коэффициенты Фурье функции $K\in L_1$, то такая функция B есть $G*K$. В частности, в качестве K можно взять любую функцию из L_1, удовлетворяющую условию 1 следствия 1.

Примерами функций B, удовлетворяющих условиям следствия 2 для всех $m \leqslant n$, могут служить функции с коэффициентами вида

$$c_k(B) = \begin{cases} c_k(G)\gamma_k, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \gamma, & k = 0, \end{cases}$$

где $\gamma \neq 0$, $\gamma_l \neq 0$ при $l \in [1-m : m-1] \setminus \{0\}$, $\gamma_{2nk} = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ таких, что $c_{2nk}(G) \neq 0$, и $|\gamma_{l+2nk}| \leqslant |\gamma_l|$ для всех $(l,k) \in ([1-m : m-1] \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$ таких, что $c_{l+2nk}(G) \neq 0$. Если γ_k суть коэффициенты Фурье функции $K \in L_1$, то такая функция B есть $G * K + \gamma$. В частности, в качестве K можно взять среднее Стеклова любой функции $K_1 \in L_1$, удовлетворяющей условию 1 следствия 1 или следствия 2, то есть функцию $K_1 * B_{n,\mu}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$.

Описанные результаты позволяют также получить ряд подпространств, экстремальных для соболевских классов функций на отрезке, определённых следующими граничными условиями:

$$H_0^r = \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ четно}\},$$
$$H_1^r = \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ нечетно}\},$$
$$H_2^r = \left\{u \in W_2^{(r)}\left[0, \frac{\pi}{2}\right] : u^{(k)}(0) = u^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l < r, \quad k \text{ четно}, l \text{ нечетно}\right\}.$$

Вопрос среднеквадратичной аппроксимации этих классов изучался Флоатером и Санде [7], которые указали серию оптимальных сплайновых подпространств в данной задаче. Наши же результаты позволяют, сведя задачу к периодической, получить широкую совокупность экстремальных приближающих пространств, порождённых равноотстоящими сдвигами одной функции (в том числе пространств сплайнов).

Литература

[1] Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. – М.: “Наука”, 1987. – 300 с.

[2] Сунь Юншен, Ли Чунь. Наилучшее приближение некоторых классов гладких функций на действительной оси сплайнами высшего порядка // Математические заметки. 1990. Т. 48, № 4. – С. 100-109.

[3] Виноградов О. Л., Улицкая А. Ю. Точные оценки среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых периодических функций пространствами сдвигов // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63), № 1. – С. 22-31.

[4] Pinkus A. n-Widths in approximation theory. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo, Springer-Verlag. 1985. – 294 p.

[5] Улицкая А. Ю. Точные оценки среднеквадратичных приближений классов периодических свёрток пространствами сдвигов // Алгебра и анализ. 2020. Т. 32, № 2. – С. 201-228.

[6] Виноградов О. Л., Улицкая А. Ю. Оптимальные подпространства для среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых функций на отрезке // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65), № 3. – С. 404-417.

[7] Floater M. S., Sande E. Optimal spline spaces for L^2 n-width problems with boundary conditions // Constructive Approximation. 2018. – P. 1-18.

УДК 514.114

СЕЧЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО КООРДИНАТНОГО КОНУСА

Ю. В. Маслова, Н. А. Рулли
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: yuliapetrova@mail.ru, nadyarulli@gmail.com

Maslova Yu. V., Rulli N. A., Cross sections of a multidimensional coordinate cone. In the book "Toric actions in Topology and Combinatorics" by V. M. Buchstaber and T. E. Panov, the statement is formulated that every n-dimensional polytope with m hypergranes is affine equivalent to the intersection of a positive m-dimensional coordinate cone with some n - dimensional plane. Our task is to find all such n-dimensional planes whose intersection with an m-dimensional coordinate cone is affine equivalent to a given n-dimensional polyhedron with m hypergranes. The paper presents a solution to the problem for $n = 2$, that is, for polygons.

Key words: polyhedron, polygon, cross-section, multi-dimensional cone, affine equivalence.

В книге В.М.Бухштабера и Т.Е.Панова «Торические действия в топологии и комбинаторике» сформулировано утверждение о том, что всякий n-мерный многогранник с m гипергранями аффинно эквивалентен пересечению положительного m-мерного координатного конуса с некоторой n - мерной плоскостью. Наша задача – найти все такие n-мерные плоскости, пересечение которых с m-мерным координатным конусом аффинно эквивалентно данному n-мерному многограннику с m гипергранями. В статье представлено решение задачи для $n = 2$, то есть для многоугольников.

Ключевые слова: многогранник, многоугольник, сечения, многомерный конус, аффинная эквивалентность.

В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов в 1 главе своей книги «Торические действия в топологии и комбинаторике» [1] сформулировали утверждение о том, что *всякий n-мерный многогранник с m гипергранями аффинно эквивалентен пересечению положительного m-мерного координатного конуса с некоторой n-мерной плоскостью.* В той же главе они описывают конструкцию, позволяющую построить такое пересечение, доказывая существование такой n-мерной плоскости. Нахождение всех таких сечений положительного m-мерного координатного конуса позволило бы расширить возможности для использования данной конструкции в геометрии и топологии.

Наша задача – найти все такие n-мерные плоскости, пересечение которых с m-мерным координатным конусом аффинно эквивалентно данному n-мерному многограннику с m гипергранями. В статье представлено решение задачи для $n = 2$, то есть для многоугольников.

Пусть $\mathbb{R}^m$ – евклидово пространство размерности m. Множество

$$\mathbb{R}^m_+ = \{(y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m | y_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m\}$$

мы будем называть *положительным m-мерным координатным конусом* (или просто *конусом* $\mathbb{R}^m_+$).

Нетрудно заметить, что если m-угольник $A_1A_2\dots A_m$ является сечением конуса $\mathbb{R}^m_+$, то его стороны лежат по одной в каждом $(m-1)$-мерном координатном подконусе, а его вершины – по одной в каждом $(m-2)$-мерном координатном подконусе, но не лежат в $(m-3)$-мерных координатных подконусах. Поэтому вершины $A_1, A_2, \dots, A_m$ сечения конуса $\mathbb{R}^m_+$ можно расположить так:

$$A_1 = (a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_{m-2}, 0, 0),$$

$$A_2 = (0, a^2_2, a^2_3, \dots, a^2_{m-1}, 0),$$

$$A_3 = (0, 0, a^3_3, a^3_4, \dots, a^3_m),$$

$$A_4 = (a^4_1, 0, 0, a^4_4, a^4_5, \dots, a^4_m),$$

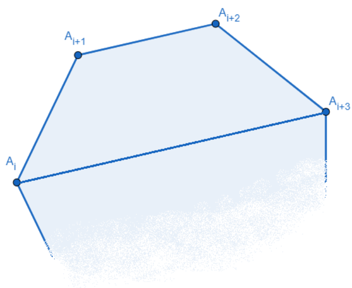
$$\dots,$$

$$A_m = (a^m_1, a^m_2, \dots, a^m_{m-3}, 0, 0, a^m_m),$$

где $a^i_j > 0$.

Тогда стороны $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k, \dots, A_{m-1}A_m$ и A_mA_1 m-угольника будут лежать соответственно в подконусах $x_1x_2\dots x_{m-1}$, $x_2x_3\dots x_m$, $\dots$, $x_1x_2\dots x_{k-3}x_{k-1}\dots x_m$, $\dots$, $x_1x_2\dots x_{m-3}x_{m-1}x_m$ и $x_1x_2\dots x_{m-2}x_m$.

Пусть $\{f_k(x)\}$ – последовательность многочленов, в которой $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2 - x$ и $f_n(x) = x\cdot(f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)) + f_{n-3}(x), \forall n \geqslant 3$. Число $\lambda_m = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{m}$ – отношение длины диагонали, соединяющей две вершины A_i и A_{i+3} правильного многоугольника, к длине его стороны, будем обозначать его просто λ, когда количество сторон ясно из контекста.



1.PNG

Удобно записывать координаты вершин m-угольника в виде квадратной матрицы (a_{ij}) порядка m, в которой элемент a_{ij} – это j-ая координата его i-ой вершины.

Тогда матрица координат вершин сечения конуса $\mathbb{R}_+^m$, аффинно эквивалентного правильному m-угольнику, имеет следующий вид:

1. если m – чётное:

$$\begin{pmatrix} a_1 & f_1(\lambda)a_2 & ... & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-2}{2}} & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m}{2}} & ... & f_1(\lambda)a_{m-3} & a_{m-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & f_1(\lambda)a_3 & ... & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m}{2}} & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+2}{2}} & ... & f_1(\lambda)a_{m-2} & a_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & f_1(\lambda)a_4 & ... & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+2}{2}} & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+4}{2}} & ... & f_1(\lambda)a_{m-1} & a_m \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ f_2(\lambda)a_1 & ... & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-6}{2}} & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-4}{2}} & ... & a_{m-4} & 0 & 0 & a_{m-1} & a_m \\ f_1(\lambda)a_1 & f_2(\lambda)a_2 & ... & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-4}{2}} & f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-2}{2}} & ... & a_{m-3} & 0 & 0 & a_m \end{pmatrix},$$

2. если m – нечётное:

$$\begin{pmatrix} a_1 & f_1(\lambda)a_2 & ... & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-3}{2}} & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-1}{2}} & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+1}{2}} & ... & f_1(\lambda)a_{m-3} & a_{m-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & f_1(\lambda)a_3 & ... & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-1}{2}} & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+1}{2}} & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+3}{2}} & ... & f_1(\lambda)a_{m-2} & a_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & f_1(\lambda)a_4 & ... & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+1}{2}} & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+3}{2}} & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+5}{2}} & ... & f_1(\lambda)a_{m-1} & a_m \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ f_2(\lambda)a_1 & ... & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-7}{2}} & f_{\frac{m-3}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-5}{2}} & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-3}{2}} & ... & a_{m-4} & 0 & 0 & a_{m-1} & f_1(\lambda)a_m \\ f_1(\lambda)a_1 & f_2(\lambda)a_2 & ... & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-5}{2}} & f_{\frac{m-3}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-3}{2}} & f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-1}{2}} & ... & a_{m-3} & 0 & 0 & a_m \end{pmatrix},$$

где a_j – положительные вещественные числа.

Плоскости, пересечение которых с конусом $\mathbb{R}_+^m$ аффинно эквивалентно правильному m-угольнику, задаются следующими параметрическими уравнениями с параметрами $u, v \in \mathbb{R}$:

1. если m – чётное:

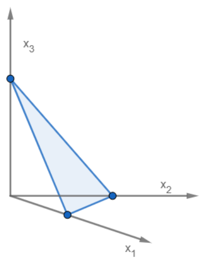
$$\begin{cases} x_1 = -a_1u + (f_1(\lambda) - 1)a_1v + a_1, \\ x_2 = (1 - f_1(\lambda))a_2u + (f_2(\lambda) - f_1(\lambda))a_2v + f_1(\lambda)a_2, \\ x_3 = (f_1(\lambda) - f_2(\lambda))a_3u + (f_3(\lambda) - f_2(\lambda))a_3v + f_2(\lambda)a_3, \\ ..., \\ x_{\frac{m-4}{2}} = (f_{\frac{m-8}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-6}{2}}(\lambda))a_{\frac{m-4}{2}}u + (f_{\frac{m-6}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda))a_{\frac{m-4}{2}}v + f_{\frac{m-6}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-4}{2}}, \\ x_{\frac{m-2}{2}} = (f_{\frac{m-6}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda))a_{\frac{m-2}{2}}u + f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-2}{2}}, \\ x_{\frac{m}{2}} = (f_{\frac{m-6}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda))a_{\frac{m}{2}}v + f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda)a_{\frac{m}{2}}, \\ x_{\frac{m+2}{2}} = (f_{\frac{m-4}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-6}{2}}(\lambda))a_{\frac{m+2}{2}}u + (f_{\frac{m-8}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-6}{2}}(\lambda))a_{\frac{m+2}{2}}v + f_{\frac{m-6}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+2}{2}}, \\ ..., \\ x_{m-3} = (f_2(\lambda) - f_1(\lambda))a_{m-3}u + (1 - f_1(\lambda))a_{m-3}v + f_1(\lambda)a_{m-3}, \\ x_{m-2} = (f_1(\lambda) - 1)a_{m-2}u - a_{m-2}v + a_{m-2}, \\ x_{m-1} = a_{m-1}u, \\ x_m = a_mv, \end{cases}$$

2. если m – нечётное:

$$\begin{cases}
x_1 = -a_1 u + (f_1(\lambda) - 1)a_1 v + a_1,\\
x_2 = (1 - f_1(\lambda))a_2 u + (f_2(\lambda) - f_1(\lambda))a_2 v + f_1(\lambda)a_2,\\
x_3 = (f_1(\lambda) - f_2(\lambda))a_3 u + (f_3(\lambda) - f_2(\lambda))a_3 v + f_2(\lambda)a_3,\\
\ldots,\\
x_{\frac{m-3}{2}} = (f_{\frac{m-7}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda))a_{\frac{m-3}{2}} u + (f_{\frac{m-3}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda))a_{\frac{m-3}{2}} v + f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-3}{2}},\\
x_{\frac{m-1}{2}} = (f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-3}{2}}(\lambda))a_{\frac{m-1}{2}} u + (f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-3}{2}}(\lambda))a_{\frac{m-1}{2}} v + f_{\frac{m-3}{2}}(\lambda)a_{\frac{m-1}{2}},\\
x_{\frac{m+1}{2}} = (f_{\frac{m-3}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda))a_{\frac{m+1}{2}} u + (f_{\frac{m-7}{2}}(\lambda) - f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda))a_{\frac{m+1}{2}} v + f_{\frac{m-5}{2}}(\lambda)a_{\frac{m+1}{2}},\\
\ldots,\\
x_{m-3} = (f_2(\lambda) - f_1(\lambda))a_{m-3} u + (1 - f_1(\lambda))a_{m-3} v + f_1(\lambda)a_{m-3},\\
x_{m-2} = (f_1(\lambda) - 1)a_{m-2} u - a_{m-2} v + a_{m-2},\\
x_{m-1} = a_{m-1} u,\\
x_m = a_m v.
\end{cases}$$

Ниже приведём примеры матриц координат вершин искомых сечений для $m = 3, 4, 5, 7$ и 8.

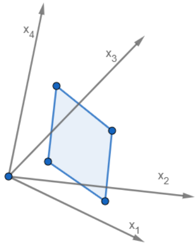
Пусть $m = 3$. Матрица координат вершин правильного треугольника (a, b, c – положительные вещественные числа): $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.



2.PNG

Рисунок 2.

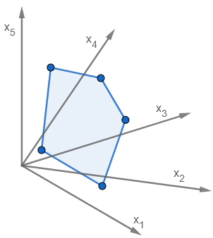
Пусть $m = 4$. Матрица координат вершин правильного четырёхугольника, т. е. квадрата (a, b, c, d – положительные вещественные числа): $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ a & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$. Заметим, что $\lambda_4 = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{4} = 1$.



3.PNG

Рисунок 3.

Пусть $m = 5$. Матрица координат вершин правильного пятиугольника (a, b, c, d, e – положительные вещественные числа): $\begin{pmatrix} a & \lambda b & c & 0 & 0 \\ 0 & b & \lambda c & d & 0 \\ 0 & 0 & c & \lambda d & e \\ a & 0 & 0 & d & \lambda e \\ \lambda a & b & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$. При этом $\lambda = \lambda_5 = 1 + +2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



4.PNG

Рисунок 4.

Пусть m=6. Матрица координат вершин правильного шестиугольника (a, b, c, d, e, f – положительные вещественные числа): $\begin{pmatrix} a & \lambda b & \lambda c & d & 0 & 0 \\ 0 & b & \lambda c & \lambda d & e & 0 \\ 0 & 0 & c & \lambda d & \lambda e & f \\ a & 0 & 0 & d & \lambda e & \lambda f \\ \lambda a & b & 0 & 0 & e & \lambda f \\ \lambda a & \lambda b & c & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.
При этом $\lambda = \lambda_6 = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{6} = 2$.

Пусть $m = 7$. Матрица координат вершин правильного семиугольника

(a, b, c, d, e, f, d – положительные вещественные числа):

$$\begin{pmatrix} a & \lambda b & (\lambda^2-\lambda)c & \lambda d & e & 0 & 0 \\ 0 & b & \lambda c & (\lambda^2-\lambda)d & \lambda e & f & 0 \\ 0 & 0 & c & \lambda d & (\lambda^2-\lambda)e & \lambda f & g \\ a & 0 & 0 & d & \lambda e & (\lambda^2-\lambda)f & \lambda g \\ \lambda a & b & 0 & 0 & e & \lambda f & (\lambda^2-\lambda)g \\ (\lambda^2-\lambda)a & \lambda b & c & 0 & 0 & f & \lambda g \\ \lambda a & (\lambda^2-\lambda)b & \lambda c & d & 0 & 0 & g \end{pmatrix}.$$

Пусть $m = 8$. Матрица координат вершин правильного восьмиугольника (a, b, c, d, e, f, g, h – положительные вещественные числа):

$$\begin{pmatrix} a & \lambda b & (\lambda^2-\lambda)c & (\lambda^2-\lambda)d & \lambda e & f & 0 & 0 \\ 0 & b & \lambda c & (\lambda^2-\lambda)d & (\lambda^2-\lambda)e & \lambda f & g & 0 \\ 0 & 0 & c & \lambda d & (\lambda^2-\lambda)e & (\lambda^2-\lambda)f & \lambda g & h \\ a & 0 & 0 & d & \lambda e & (\lambda^2-\lambda)f & (\lambda^2-\lambda)g & \lambda h \\ \lambda a & b & 0 & 0 & e & \lambda f & (\lambda^2-\lambda)g & (\lambda^2-\lambda)h \\ (\lambda^2-\lambda)a & \lambda b & c & 0 & 0 & f & \lambda g & (\lambda^2-\lambda)h \\ (\lambda^2-\lambda)a & (\lambda^2-\lambda)b & \lambda c & d & 0 & 0 & g & \lambda h \\ \lambda a & (\lambda^2-\lambda)b & (\lambda^2-\lambda)c & \lambda d & e & 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

При этом $\lambda = \lambda_8 = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$.

Для произвольных многоугольников был найден алгоритм, позволяющий находить параметрические задания секущих плоскостей.

Алгоритм решения задачи для произвольного многоугольника.
1. Располагаем вершины многоугольника $A_1A_2\ldots A_m$ в $(m-2)$-мерных подконусах.
2. Проводим диагональ A_1A_3, а также диагонали A_2A_4, A_2A_5, A_2A_6, …, A_2A_m. Обозначаем точки пересечения диагонали A_1A_3 с диагоналями A_2A_4, A_2A_5, A_2A_6, …, A_2A_m соответственно через A'_4, A'_5, …, A'_m.
3. Координаты вершин выражаем из следующих соотношений:
$$\begin{cases} \overrightarrow{A_3A'_i} = \alpha_i\overrightarrow{A_3A_1}, \\ \overrightarrow{A_2A'_i} = \beta_i\overrightarrow{A_2A_i}, \end{cases}$$
где α_i, β_i – отношения соответствующих отрезков в заданном m-угольнике (см. рисунок).

5.PNG

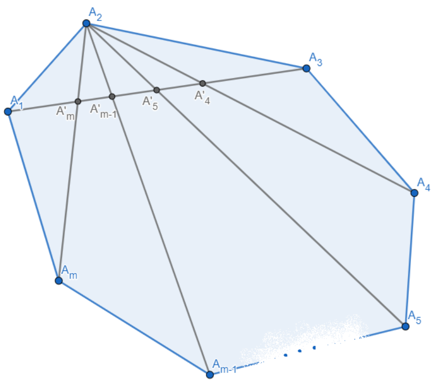


Рисунок 5.

4. Записываем параметрическое задание секущей плоскости, проходящей через точку A_1, с направляющими векторами $(\overrightarrow{A_1A_2})$ и $(\overrightarrow{A_1A_4})$.

С помощью данного алгоритма были получены параметрические задания секущих плоскостей для произвольного четырёхугольника и трапеции с заданным отношением оснований λ ($\lambda > 0$ и $\lambda \neq 1$). Решение задачи для произвольного четырёхугольника имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = -a_1u + \frac{\alpha-\beta}{\beta}a_1v + a_1, \\ x_2 = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha}a_2u - \frac{1-\beta}{\alpha}a_2v + \frac{1-\beta}{\alpha}a_2, \\ x_3 = \frac{1-\alpha}{1-\beta}a_3u, \\ x_4 = a_4v, \end{cases}$$

где a_j – положительные вещественные числа, α, β – отношения соответствующих отрезков диагоналей в заданном четырёхугольнике. В частности, параметрические уравнения плоскостей, пересечение которых с конусом $\mathbb{R}^4_+$ аффинно эквивалентно трапеции с заданным отношением оснований, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = -a_1u + a_1, \\ x_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}a_2u - \frac{1}{\lambda}a_2v + \frac{1}{\lambda}a_2, \\ x_3 = a_3u, \\ x_4 = a_4v, \end{cases}$$

где a_j – положительные вещественные числа; λ ($\lambda > 0$ и $\lambda \neq 1$) – заданное отношение оснований трапеции.

Заметим, что параметрические уравнения секущей плоскости, получаемые по общему алгоритму, в случае параллелограмма не отличаются от уравнений секущей плоскости для правильного четырёхугольника (квадрата), так как они аффинно эквивалентны. Также можно заметить, что все треугольники аффинно эквивалентны, следовательно, решение задачи для произвольного треугольника идентично решению для правильного треугольника.

Таким образом, найдены все решения поставленной задачи (с точностью до преобразования конуса $\mathbb{R}^m_+$), и других решений нет.

Литература

[1] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике, 2004.

[2] Рулли Н. А. Сечения многомерного конуса. – Выпускная квалификационная работа, РГПУ им. А.И. Герцена, 2020. (Научный руководитель - Ю. В. Маслова.)

УДК 378.147

ОТБОР СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН ДЛЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Далевская О. П.
ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»
Смирнова Е. М., к.п.н.
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет ветеринарной медицины»

Аннотация. В статье рассмотрено содержание курса «Математика и математические методы в биологии». Предложены принципы отбора содержания данной дисциплины в соответствии с профилем подготовки обучающихся. Проведена сравнительная характеристика наполняемости данного курса в различных вузах, выделены общие темы и различия. На основе опыта преподавания данной дисциплины в ФГБОУ ВО РГПУ им. А. И. Герцена и ФГБОУ ВО СПбГУВМ представлено содержание основных тем и особенности преподавания разделов дисциплины в связи с их профессиональной направленностью.

Ключевые слова: биологические направления подготовки, отбор содержания, математика и математические методы в биологии, компетентностный подход, профессионально ориентированное обучение.

Abstract. The article considers the content of the course "Mathematics and mathematical methods in Biology". The principles of selection of the content of this discipline in accordance with the profile of training of students are proposed. A comparative characteristic of the content of this course in different universities is carried out, common topics and differences are highlighted. Based on the experience of teaching this discipline in the Herzen State Pedagogical University and Saint-Petersburg State university of Veterinary Medicine , the content of the main topics and features of teaching sections of the discipline in connection with their professional orientation are presented.

Key words: biological training areas, content selection, mathematics and mathematical methods in biology, competency-based approach, work-related teaching.

Переход к компетентностной модели образования привел к необходимости обновления содержания и методов реализации программ высшего образования. Основные требования к результатам освоения программ бакалавриата и магистратуры сегодня представлены в федеральных государственных образовательных стандартах направления в виде универсальных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций.

В действующем ФГОС направлений подготовки 06.03.01 «Биология» и 05.03.06 «Экология и природопользование» компетенции, формируемые естественнонаучными и математическими дисциплинами, относятся к числу общепрофессиональных и формулируются так:

ОПК-6: Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы физики, химии, наук о Земле и биологии, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии [1].

ОПК-1: Способен применять базовые знания фундаментальных разделов наук о Земле, естественнонаучного и математического циклов при решении задач в области экологии и природопользования [2].

Основным требованием компетенций является применение законов и методов физики и математики к решению задач профессиональной области. В связи с этим, отбор содержания соответствующих учебных дисциплин должен проводиться на основе анализа современных научных и практических исследований в области биологии и экологии. Анализ научной периодики ([3], [4], [5]) показал, что в математическом моделировании биологических объектов и процессов наиболее востребованными являются следующие разделы математики:

- дифференциальные уравнения (задачи популяционной экологии, физиологии и морфогенеза),
- линейная алгебра (генетика, биоинформатика, дискретные модели популяционной динамики),
- математическая статистика (морфометрия, биометрия).

Анализ учебных программ дисциплин математического цикла для биологических специальностей различных вузов показал значительные различия в содержании курса, что в большей степени объясняется специализацией вузов и в меньшей — различием в трудоемкости дисциплины (также сравнивались программы близкой трудоемкости, например, [6], [7]).

Однако, на основе анализа учебных программ можно выделить общий набор элементов содержания математических курсов и их разделов:

- линейная алгебра — определители, матрицы, системы линейных алгебраических уравнений;
- аналитическая геометрия — системы координат, прямая и плоскость, кривые и поверхности второго порядка;
- математический анализ — теория пределов, производная и интеграл функции, теория рядов;
- дифференциальные уравнения — обыкновенные уравнения первого порядка, обыкновенные линейные уравнения высших порядков;
- теория вероятностей и математическая статистика — случайные события, случайные величины, выборка и ее количественные характеристики.

Изложение этих разделов, как правило, традиционно. В разделах «Линейная алгебра», «Математический анализ» много внимания уделяется вычислению определителей, пределов, производных и интегралов точными методами, а также точному решению систем линейных алгебраических и дифференциальных уравнений. Из таких разделов рабочей программы как «Образовательные технологии» и «Фонд оценочных средств» видно, что для решения задач, как правило, не используются математические пакеты программ и онлайн-калькуляторы [8]).

Отработка навыков точного вычисления во многих случаях методически оправдана, однако в работе исследователя-биолога этот навык не является базовым. В то же время, массовое использование средств компьютерного моделирования и приближенных вычислений в современных научных исследованиях [9] делает целесообразным применение в учебной работе компьютерных технологий при решении математических задач.

В разделе «Аналитическая геометрия» обычно подробно рассматриваются несколько видов уравнения прямой и плоскости, однако почти не изучаются уравнения алгебраических и трансцендентных кривых (лемнискаты, спирали, гипоциклоиды и др.), а также геометрические преобразования, как инструменты количественного описания органических форм [10].

Изучение раздела «Теория вероятностей» зачастую начинается с элементов комбинаторики, далее дается классическое определение вероятностей, теоремы сложения и умножения вероятностей, и заканчивается раздел темой повторных испытаний. Раздел «Математическая статистика» включает изучение таких тем, как дискретные и непрерывные случайные величины и их числовые характеристики. При этом даже в курсах большой трудоемкости [11] недостаточно внимания уделяется методам оценки статистических гипотез.

Также отмечено, что в учебные курсы редко входят задачи прикладного содержания или задачи, поставленные в контексте научной области, соответствующей направлению подготовки. Это лишает обучающегося начального опыта применения математических знаний к решению задач профессиональной области и ослабляет его мотивацию к изучению математических дисциплин.

На основании проведенного анализа научных публикаций было скорректировано содержание курсов «Математика и математические методы в биологии» для направления 06.03.01 «Биология» в СПбГУВМ и РГПУ им. А. И. Герцена [12].

В раздел «Линейная алгебра» включена тема «Матричные уравнения», как важный инструмент решения задач популяционной генетики, разработаны задания прикладного содержания.

В раздел «Аналитическая геометрия» включена тема «Аффинные преобразования», отдельное внимание уделено аналитическому заданию и построению специальных кривых (параметрические уравнения, уравнения в полярных координатах). Разработаны задания прикладного содержания (задачи морфометрии). Для выполнения геометрических построений и исследований использовалась интерактивная геометрическая среда Geogebra. При изучении элементов аналитической геометрии полезно и действенно показать с помощью интерактивной презентации или визуализации практическое применение изучаемых математических понятий и терминов через изображение проекционных плоскостей в анатомии животных. Обучающихся несомненно заинтересует такой переход из сугубо математической интерпретации изучаемых понятий на язык их будущей профессиональной деятельности. В разделы «Математический анализ» и «Дифференциальные уравнения» были включены задания на исследование функций и их интегрирование с помощью математических пакетов программ или онлайн-калькуляторов (Desmos, Wolfram Mathematica). Задания прикладного содержания состояли в исследовании и адаптации известных математических моделей (модели роста деревьев, биохимических процессов, модели изменения численности популяции).

Раздел «Теория вероятностей и математическая статистика» является наиболее востребованным разделом в биологических науках, который предоставляет обучающимся инструментарий и приёмы для изучения случайных процессов и явлений; вероятности появления (не появления) определённых признаков, свойств и характеристик; статистических способов сбора, обработки и анализа информации по изучаемым объектам профессиональной деятельности (организмы, популяции, биоценозы). При введении основных понятий математической статистики (мода, медиана, среднее, дисперсия, среднеквадратическое отклонение и т. д.) наряду с их математическими определениями полезно давать неофициальные, но доступные трактовки этих понятий для обучающихся. Эффективность изучения данного раздела будет выше, если продемонстрировать лёгкость и практичность нахождения числовых характеристик случайных величин с помощью специализированных программных продуктов, например, программ, позволяющих обрабатывать большие массивы данных и технических инструментов для анализа данных, визуализации, прогнозирования, вычислений (Microsoft Excel, Statistica, SAS, MedCalc и др.).

Ориентация на профиль подготовки будущих биологов, то есть учет требований ФГОС, выраженных в компетенциях, приводит к необходимости включения в курс «Математика и математические методы в биологии» таких элементов содержания как постановка математических задач в контексте биологических наук, задач математического моделирования и статистической обработки данных с использованием специализированных программных средств. Это позволяет обучающимся не только отработать математические умения, но и приобрести навыки решения профессионально ориентированных задач.

Литература

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 06.03.01 «Биология» (уровень бакалавриата) [Электронный ресурс]: Утв. приказом Минобрнауки России от 7.08.2020 № 920. URL: http://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/060301_B_3_23082020.pdf (дата обращения: 22.02.2021).

[2] Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 05.03.06 «Экология и природопользование» (уровень бакалавриата) [Электронный ресурс]: Утв. приказом Минобрнауки России от 7.08.2020 № 894. URL:

http://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/050306_B_3_23082020.pdf (дата обращения: 22.02.2021).

[3] Гавриков, Владимир Леонидович. Моделирование роста деревьев и древостоев в контексте углеродного цикла: автореферат дис. доктора биологических наук: 03.02.08 / Гавриков Владимир Леонидович; [Место защиты: Сев.—Вост. федер. ун-т им. М. К. Аммосова]. – Якутск, 2016. – 38 с.

[4] Розенберг Г. С. ЛОГОФЕТ Д. О., УЛАНОВА Н. Г. МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ В ПОПУЛЯЦИОННОЙ БИОЛОГИИ: УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ М.: МАКС ПРЕСС, 2018. 128 с. [Рецензия]. Журнал общей биологии, 2018, 79(5), 404–406. doi: 10.1134/S0044459618050081

[5] Бурский О. В. Логистическая модель затрат организма в ходе послебрачной линьки у птиц. Зоологический журнал, 2015, 94(5), 544-559. doi: 10.7868/S0044513415030034

[6] Математика: рабочая программа дисциплины [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет», 2019. URL: https://drive.google.com/file/d/115qhTwyFt0foax_SsMi_fF413SD7NeG8/view (дата обращения: 22.02.2021).

[7] Математика и математические методы в биологии: рабочая программа дисциплины [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный аграрный университет», 2018. URL: https://spbgau.ru/files/nid/7621/10_rp_matematika_i_matmet18-19.pdf (дата обращения: 22.02.2021).

[8] Математика и математические методы в биологии: рабочая программа дисциплины [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВО «Северо-восточный государственный университет», 2017. URL: https://sdo.svgu.ru/pluginfile.php/23890/mod_resource/content (дата обращения: 22.02.2021).

[9] Васильев А. Г., Васильева И. А., Шкурихин А. О. Геометрическая морфометрия: от теории к практике. М.: Товарищество научных изданий КМК, 2018. 471 с.

[10] Булыгина Е. Ю., Березина Н. Я., Рассказова А. В. Сравнение морфологии черепа современных и древних популяций человека при помощи методов геометрической морфометрии. Вестник Московского университета. Сер. 23, Антропология, 2016. №1, 63-75.

[11] Математика и математические методы в биологии: рабочая программа дисциплины [Электронный ресурс] / ФГБОУ ВО «Южно-уральский государственный аграрный университет», 2019. URL: http://xn–80af2bld5d.xn–p1ai/sveden/files/ (дата обращения: 22.02.2021).

[12] Далевская О. П. Математика и математические методы в биологии: курс дистанц. обучения / РГПУ им. А. И. Герцена, СПб., 2020. Доступ из эл.

системы обучения Moodle. URL: https://moodle.herzen.spb.ru/course/ (дата обращения: 22.02.2021).

УДК 51.37

ПРИМЕРЫ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА МАТЕМАТИКИ

Коноплева И. В., Миронова Л. В., Знаенко Н. С.
Ульяновский институт гражданской авиации
им. главного маршала авиации Б. В. Бугаева
Ульяновск
e-mail: irinakonopleva2014@yandex.ru

Konopleva I. V., Mironova L. V., Znaenko N. S. Examples of professionally oriented problems at the mathematics course study.

The development of a set of professionally oriented tasks related to the training of aviation specialists contributes to the activation of the educational process. Establishing the relationship between the basic laws of natural science disciplines and various methods of constructing and researching mathematical models of applied problems will allow university graduates to acquire the skills necessary in production.

Разработка набора профессионально ориентированных задач, связанных с подготовкой авиационных специалистов, способствует активизации учебного процесса. Установление взаимосвязи между основными законами естественнонаучных дисциплин и различными методами построения и исследования математических моделей прикладных задач позволит выпускникам вузов приобрести навыки, необходимые в производственной деятельности.

Одним из способов повышения качества подготовки выпускников технических специальностей вузов является применение практико-ориентированного подхода к подготовке специалистов. В процессе изучения математики практико-ориентированный подход предполагает знакомство студентов с методами современных научных исследований в их дальнейшей производственной деятельности. Серьезный прогресс в этом направлении возможен при изучении спецкурсов по математическому моделированию, в программу которых включены математические методы исследования проблем, связанных с профессиональными интересами выпускников.

Необходимо как можно раньше знакомить студентов с современными проблемами, возникающими на стыке математических, естественнонаучных и технических дисциплин, в которых определяются механизмы сложных экономических, технических и производственных систем, количественно оцениваются процессы, протекающие в них. Междисциплинарный подход позволяет повысить качество образовательного процесса, усилить интерес студентов к изучению математических дисциплин [1,2]. Стоит обратить особое внимание на создание математических моделей прикладных задач, разработку алгоритмов, выбор аналитических и численных методов решения, проведение анализа и интерпретации полученного решения, использование различных программных средств [3]–[7].

Рассмотрение профессионально-ориентированных задач и различных методов их решения нужно вводить и в базовые математические курсы. Некоторые задачи векторной алгебры и аналитической геометрии, которые используются в физике, химии, теоретической механике, аэродинамике и навигации приведены [8]. Многочисленные примеры прикладных задач авиационной направленности, рассматриваемые при изучении темы "Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы отмечены в [4]–[6].

Полезной оказывается деятельность по составлению прикладных профессиональных задач. Их рассмотрение позволяет студентам легче понять имеющиеся межпредметные связи, способствует активизации учебного процесса. Примерами таких задач авиационной направленности являются: задачи планирования авиатранспортных перевозок, распределения транспортных потоков, наземных операций обслуживания, управления процессами в день выполнения рейсов, нахождения максимального дохода (прибыли) авиатранспортных предприятий, назначения и обучения работников, оценка эффективности использования авиационного топлива.

Основными приемами решения таких профессиональных задач являются вероятностно-статистические методы, регрессионно-корреляционный анализ, аппарат теории массового обслуживания, линейное и динамическое программирование, теория графов, теория игр, математические модели и методы управления рисками.

В современных программах подготовки большая часть этих разделов математики изучается обзорно, поэтому для решения таких проблем часто используется проектный метод. Он предполагает высокую степень заинтересованности студентов и их самостоятельность в проведении исследований. Над выполнением таких проектов студенты УИГА работают в процессе подготовки к ежегодной международной молодежной научной конференции "Гражданская авиация: XXI век". Подготовка к ней проходит в несколько этапов:

1. Постановка проблемы для исследовательской группы (2-3 курсанта).
2. Формулировка конкретной задачи.
3. Сбор необходимой информации и данных.
4. Определение методов ее решения.
5. Интерпретация результатов и формулировка выводов.
6. Выступление на конференции с возможной публикацией полученных результатов.

Достаточно сложным и трудоемким является не только процесс выбора и постановки задачи, создание математической модели и ее исследования, но и сбора расчетных данных и возможных значений параметров. Информации, связанной с функционированием авиационных предприятий, в открытом доступе практически нет, поэтому она собирается студентами из научных публикаций по соответствующей тематике или в процессе прохождения производственной практики на предприятиях авиационной отрасли.

В ходе подготовки докладов к конференциям рассматривались задачи снижения расходов авиационного топлива за счет оптимизации очереди на вылет вылетающих воздушных судов или оптимальной расстановки самолетов на перроне аэропорта по критерию минимизации затрат авиационного топлива; построение и исследование математической модели системы централизованной заправки воздушных судов топливом на основе теории марковских случайных процессов и определение оценки ее эффективности методом Монте-Карло; нахождение оптимальной траектории полета воздушного судна, позволяющее выполнить заданный маневр с минимальным расходом топлива, применение алгоритма Дейкстры для построения оптимального маршрута полёта ВС на малых высотах, построение многомерных регрессионных моделей и корреляционный анализ эффективности работы службы авиатопливного обеспечения, работы службы спасания при авиационном происшествии. При решении многих задач использовались методы [9].

Эффективная работа каждого конкретного аэропорта предполагает разработку вероятностных моделей, учитывающих его особенности. Имитационные модели времени наземного обслуживания пассажиров, обработки багажа, технического обслуживания ВС, определения наиболее загруженных дней и временных промежутков в течение суток позволяют оптимизировать работу служб авиатранспортного производства. Отклонения времени прилёта и вылета ВС от расписания под влиянием случайных причин также носит вероятностный характер. Анализ этих отклонений имеет большое значение, так как влияет на график работы аэропортовых служб. Для построения вероятностной модели отклонений времени прилёта ВС от расписания аэропорта использовался критерий χ^2 и "План-сводка движения самолетов аэропорта Баратаевка за 2018-2019 гг.". Проведено исследование времени прилёта (вылета) для рейсов Москва-Ульяновск и Ульяновск-Москва в 2019 г., определено среднее время задержки рейсов в каждом месяце и за год, и среднее квадратическое отклонение времени вылета от расписания. Для разработки имитационных моделей работы аэропортов применялись материалы и подходы, изложенные в [10].

Такие методические приемы изучения математики способствуют профессиональному становлению студентов, они могут объединить различные виды творчества. Развитие самостоятельности, освоение различных методов исследований, в том числе математических, позволит получить обучающимся необходимые в производственной деятельности навыки, в том числе в области управления и принятия решений.

Литература

[1] Коноплева И. В., Знаенко Н. С., Миронова Л. В. Формирование познавательной активности студентов при обучении математике в вузе // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом ВУЗе. 2018. Т. 6. – С. 152–158.

[2] Знаенко Н. С., Коноплева И. В., Миронова Л. В. Междисциплинарные связи как способ повышения мотивации изучения математики // Труды Международной конференции “Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании” - Ульяновск, УлГТУ, 2016. – С. 235–240.

[3] Коноплева И. В., Знаенко Н. С., Миронова Л. В. О методическом обеспечении спецкурса "Математическое моделирование в области поиска и спасания и авиационной безопасности"// Труды IV международной научной конференции “Математическое моделирование и дифференциальные уравнения”. - Гродно, ГрГУ, 2019. – С. 128–131.

[4] Коноплева И. В., Знаенко Н. С., Миронова Л. В. Формирование навыков прикладного математического моделирования при изучении дифференциальных уравнений // Труды Международной конференции “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения 2019”. - Санкт-Петербург, РГПУ им. А.Герцена, 2019. – С. 161–165.

[5] Коноплева И. В. Задачи математического моделирования в исследовательской работе студентов // Труды XIX Международной конференции по дифференциальным уравнениям “ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ 2019”. Ч.2. - Могилев, Институт математики НАН Беларуси, 2019. – С. 123–125.

[6] Коноплева И. В., Знаенко Н. С., Миронова Л. В. Дифференциальные уравнения и математическое моделирование // Труды V Международной конференции “ Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования ”. - Москва, РУДН, 2018. – С. 355–356.

[7] Знаенко Н. С., Коноплева И. В. Информационные технологии как фактор формирования исследовательской деятельности студентов // Труды VIII Международной конференции “ Математическое образование в школе и вузе: инновации в информационном пространстве (MATHEDU 2018) ”. - Казань, КФУ, 2018. – С. 80–84.

[8] Коноплева И. В., Знаенко Н. С., Миронова Л. В. Некоторые прикладные задачи аналитической геометрии в техническом вузе // Труды IV Международной конференции “ геометрия и геометрическое образование”. - Тольятти, ТГУ, 2020. – С. 209–214.

[9] Ганьшин В. Н., Русол В. А., Липин А. В. Применение методов математической статистики в авиационной практике. М. Транспорт, 2011. – 192 с.

[10] Романенко В. А. Математические модели функционирования узловых аэропортов в условиях современного авиатранспортного рынка. Самара: Ас Гард, 2010. – 244 с.

УДК 378.147

ЗАДАНИЯ STACK ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ

Лазарева Е. Г.*, Устинова И. Г.**, Лазарев В. Р.*
*Томский государственный университет
**Томский политехнический университет
Томск
e-mail: *lazareva@math.tsu.ru, **igu@tpu.ru

Lazareva E. G., Ustinova I. G., Lazarev V. R. STACK tasks in teaching mathematics: additional questions when solving the problem. The main purpose of this article is to demonstrate the possibility of using STACK tasks to check of carry out of solving a problem using additional response input windows. The article presents examples of such tasks, as well as the situations in which these tasks are useful in the learning process. It is emphasized that such tasks can be created for various branches of mathematics. Some technical difficulties of creating such tasks are considered.

Keywords: digital technologies, teaching mathematics, a STACK task.

Основной целью данной статьи является продемонстрировать возможность использования заданий типа STACK для проверки хода решения задачи с помощью дополнительных окон ввода ответов. В статье представлены примеры таких заданий, а также рассмотрены ситуации, в которых эти задания полезны в обучающем процессе. Подчеркивается, что такие задания возможно создавать для различных разделов математики. Рассмотрены некоторые технические сложности создания таких заданий.

Ключевые слова: цифровые технологии, обучение математике, задание типа STACK.

Введение

Компьютерное обучение является одним из наиболее часто используемых новых способов обучения. Сегодняшние студенты чрезвычайно просто овладевают цифровыми технологиями. Однако польза цифровых технологий для обучения остается под вопросом. Преподаватели считают, что студенты не осмысливают учебный материал, не пропускают его через собственное сознание, а лишь поверхностно просматривают информацию [1]. Мы также считаем, что цифровые технологии должны побуждать к деятельности, и используем для этого заданиях STACK при преподавании математических дисциплин [2].

STACK был разработан в Эдинбургском университете Кристофером Сангвином (Christopher Sangwin) [3] и устанавливается, как дополнительный плагин к MOODLE или ILIAS. Этот плагин связан с системой компьютерной алгебры (CAS) Maxima, благодаря чему можно вводить в качестве ответов для оценивания символьные выражения. Задания типа STACK способствуют развитию индивидуального обучения. Эти задания отличаются от обычных тестовых заданий тем, что:

- возможно создать для каждого студента свой набор задач,
- возможно создать систему подсказок,
- предполагается ввод ответа в виде аналитического выражения,
- возможен развернутый отзыв на ответ студента с демонстрацией реше-

ния.

Однако, не смотря на все эти преимущества, преподаватель все равно не может отследить то, каким образом студент получил тот или иной результат, чем руководствовался при ответе на поставленный вопрос. Для того чтобы мыслительный процесс студента стал более открыт для преподавателя, мы предлагаем при создании тестового задания ориентироваться не только на конечный ответ, но так же вводить промежуточные вопросы, которые помогли бы студенту действовать в нужном направлении, а системе STACK оценить правильность хода решения студента автоматически. Основной целью данной статьи является продемонстрировать возможность использования заданий типа STACK для проверки хода решения задачи с помощью дополнительных окон ввода ответов. Для этого мы приведем конкретные примеры заданий и покажем, для чего в этих заданиях используются дополнительные окна.

Примеры вопросов с дополнительными окнами

По нашему опыту, задания с дополнительными окнами для ввода промежуточных ответов имеют смысл в следующих ситуациях:
1) в задаче есть несколько независимых вопросов, относящихся к одному условию задачи,
2) преподаватель хочет показать студенту ход решения задачи, или желает, чтобы студент использовал конкретный метод для решения данной задачи,
3) преподаватель хочет проверить, правильно ли студент выполняет промежуточные действия при решении задачи.

Конечно, эти ситуации не исключают, а, скорее, дополняют друг друга. Приведем примеры заданий, которые мы использовали в преподавании математических дисциплин. В основном это типичные задачи из учебников, представленные в тестовой форме.

Пример 1. Рассмотрите выражение $\left(5\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$. Разложите его по формуле бинома Ньютона.
Сколько слагаемых в этом разложении? $\boxed{\text{Ответ 1}}$
Укажите коэффициент при x^3: $\boxed{\text{Ответ 2}}$
Найдите самый большой коэффициент в этом разложении: $\boxed{\text{Ответ 3}}$

В этом примере собраны, фактически, три независимых задания. Ответы не связаны друг с другом, но три верных ответа увереннее говорят о том, что студент разобрался с формулой бинома.

Пример 2. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{19n}$.
Для этого определите монотонность последовательности $\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{n}$:
Последовательность $\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{n}$ $\boxed{\text{возрастает / убывает / не монотонна}}$
Последовательность $\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{n}$ ограничена:
$\forall n\in\mathbb{N}$ $\boxed{\text{Ответ 2}}\le\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{n}\le\boxed{\text{Ответ 3}}$
Предел последовательности $\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{n}$ равен $\boxed{\text{Ответ 4}}$
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{19n}$ равен $\boxed{\text{Ответ 5}}$

Второе задание, в отличие от первого, имеет целью получить один окончательный ответ. Промежуточные действия, предложенные преподавателем, направляют студента, указывают ему, какую теорию здесь нужно применить.

Тем самым студент понимает, как он может обосновать полученный ответ. Такое обоснование часто вызывает у студентов затруднения.
Пример 3. Напишите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = 2$. Выберите сами какую-нибудь элементарную функцию: $f(x) = \boxed{\text{ Ответ 1 }}$
1. Найдите производную от $f(x)$ по x : $\boxed{\text{Ответ 2}}$
2. Вычислите значение Вашей производной в точке $x = 2$: $\boxed{\text{Ответ 3}}$
3. Напишите уравнение касательной к кривой: $y = \boxed{\text{ Ответ 4}}$

Этим примером мы хотим проиллюстрировать не только нашу идею использования дополнительных полей в задании, но и возможности системы STACK. Ясно, что студент может вписать любую элементарную функцию в поле $\boxed{\text{Ответ 1}}$. При этом система воспримет ее как функцию, подключит компьютерную алгебру и проверит все дальнейшие ответы студента, исходя из этой функции. Преподаватель здесь задает стандартный порядок действий студенту, и проверяет, правильно ли эти действия выполнены.

Заключение

Задания, подобные приведенным примерам, мы применяем при преподавании различных дисциплин: линейной алгебры и аналитической геометрии, математического анализа и даже уравнений в частных производных. В основном они предназначены для самостоятельной работы студентов (домашние работы). Иногда мы сталкиваемся с методическими трудностями, которые связаны, прежде всего, с неоднозначностью выбора хода решения задачи. Не всегда студент понимает, почему он должен делать именно такие промежуточные шаги. Также бывает непросто аккуратно сформулировать, какого результата на промежуточном этапе преподаватель ждет от студента. Технические особенности системы STACK также всегда необходимо учитывать.

Тем не менее, мы считаем, что эффективность этой методики превосходит сложности в ее применении. Благодаря возможности варьировать числовые и функциональные параметры в заданиях STACK каждый студент получает свой индивидуальный набор задач, при решении которых он имеет возможность обдумать содержание задачи благодаря дополнительным вопросам, заданным преподавателем в тексте задания.

Литература

[1] Бурцева Э. В., Чепак О. А., Куликова О. А. Некоторые результаты исследования влияния цифровых технологий на учебную деятельность студентов // Педагогика и просвещение. 2020. (№ 1). – С. 1–14. DOI: 10.7256/2454-0676.2020.1.31995

[2] Tomilenko V., Lazareva E., Ustinova I. Collaboration to use STACK at the universities of Tomsk. // The 3rd International STACK Conference, Tallinn, Estonia, 27th of April, 2020. Zenodo. URL: http://doi.org/10.5281/zenodo.3946673 (accessed 5 December 2020).

[3] Sangwin C. Assessing mathematics automatically using computer algebra and the internet// Teaching Mathematics and Its Applications : An International Journal of the IMA. 2004. Vol. 23. (№ 1). P. 1–14.

УДК 372.851

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КУРСА МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ

Лиховодова Т. Б.
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: cozerog45@inbox.ru

Lihovodova T. B. Independent work of students during the study of the university course of mathematics. This article discusses the role of students' independent work in the educational process, the goals and objectives of students' independent work. Several types of tasks of students' independent work within the mathematical education are given.

Keywords: mathematical education, students independent work, the types of students independent work, tasks of the students' independent work.

В статье рассматриваются вопросы роли самостоятельной работы студента в образовательном процессе, цели и задачи самостоятельной работы. Приводятся некоторые виды самостоятельных заданий в рамках математического образования.

Ключевые слова: математическое образование, самостоятельная работа студентов, виды самостоятельной работы студента, задачи самостоятельной работы студента.

При подготовке в высших учебных заведениях будущих специалистов математика служит фундаментом для профессионального образования.

Будущему специалисту (бакалавру) в своей профессиональной деятельности необходимо уметь проводить самостоятельный анализ, синтез, сравнение и обобщение, делать практические выводы.

После введения ГОС трудоемкость учебных дисциплин начали исчислять в часах общей трудоемкости, дидактических единицах, и учебное время студента стало делиться на две равные части: 50% – аудиторные занятия и 50% – самостоятельная работа.

Самостоятельная работа студента (СРС) – это планируемая учебная и научная работа, выполняемая по заданию преподавателя под его методическим и научным руководством. Самостоятельная работа всегда является неотъемлемой частью образовательного процесса по любой дисциплине (например, домашние задания, контрольные работы, аттестации, типовые расчеты и т.д.).

Вузы не всегда готовы к освоению больших объемов СРС и тому есть свои причины. Первой причиной этого является традиционная модель школы, где доля самостоятельной работы на уроках занимает около 10% учебного времени (по данным исследований), т.е. выпускники школ в основном не готовы работать с „книгой“, самостоятельно изучать учебную литературу. Вторая причина – организация учебного процесса в вузе, где доминирующая роль преподавателя обрекает студентов быть пассивными слушателями. Третья причина состоит в том, что часы, выделяемые на СРС, не связаны с учебной нагрузкой преподавателя.

Основная цель СРС состоит в содействии качественному усвоению студентами учебного материала, развитие их познавательной активности, готовности и потребности к самообразованию.

Для организации СРС первого курса сначала нужно определить степень подготовленности по математике, проведением входного тестирования уровня знаний.

Опыт работы со студентами первых – вторых курсов показывает, что для них характерны следующие затруднения при учебе: 1) непонимание сущности изучаемого материала; 2) слабая школьная математическая подготовка; 3) несерьезное отношение к учебе, нерегулярная подготовка к занятиям; 4) психологические трудности перехода от школьной программы к вузовской; 5) сложность и абстрактность учебного материала; 6) несформированность общеучебных умений (например, конспектирование лекций, изучение учебной литературы и т.п.); 7) возрастание объемов и роли самостоятельной работы.

Для эффективности образовательного процесса основными задачами самостоятельной работы при изучении курса математики являются:

1. Формирование представлений о связи математики с другими науками и выбранной специальностью;

2. Практическое применение знаний и умений;

3. Развитие навыков организации самостоятельного учебного труда и контроля над его эффективностью;

4. Формирование самостоятельного подхода к изучению современных математических методов, необходимых для решения профессиональных задач;

5. Выработка умений и навыков обновлять свое профессиональное и математическое мастерство в течение всей жизни.

Для решения поставленных задач, помимо классических домашних заданий и контрольных работ по математике, студентам в рамках СРС можно предложить: написание реферата; написание конспекта теоретических разделов, оставленных на самостоятельное изучение; написание эссе; составление опорного конспекта модуля; составление глоссария; составление тестов и эталонных ответов к ним.

Критерии оценивания СРС разрабатывает сам преподаватель и заранее сообщает их студентам.

Таким образом, важной перспективной целью СРС в вузе является превращение студента в активного субъекта собственного учения и, в зависимости от своих способностей, интересов и жизненных планов, готового выстраивать индивидуальную образовательную траекторию, развивать себя как профессионала и как человека.

Литература

[1] Сенашенко, В. Самостоятельная работа студентов: актуальные проблемы / В. Сенашенко, Н. Жалнина // Высшее образование в России. – 2006. – № 7. – С. 113-117.

[2] Якунин, В. А. Педагогическая психология: учеб. пособие / В. А. Якунина. – СПб., 1998. – 328 с.

УДК 372.851

О РЕАЛИЗАЦИИ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

Панкратова А. А, Поспелов М. В.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: mpospeloff@mail.ru

Pankratova A. A., Pospelov M. V. On teaching linear programming to students of economic fields. The article is devoted to teaching linear programming to undergraduate students in economics. The text contains suggestions for supplementing the training exercises set with several types of math problems. This is justified by changes in the goals of teaching linear programming.

Статья посвящена обучению студентов бакалавриата экономических направлений линейному программированию. Сформулированы предложения по дополнению системы учебных заданий несколькими типами задач. Это обосновывается изменениями целей обучения линейному программированию.

Настоящая заметка посвящена вопросу возможного смещения акцентов при реализации учебного материала линейного программирования для студентов бакалавриата экономических направлений. Конкретно, речь идёт о дополнении состава учебных заданий, которые традиционно предлагаются в курсах «Исследование операций», «Математические методы в экономике», «Методы оптимальных решений» и тому подобных, заданиями, на взгляд авторов, в большей степени отвечающими современному положению дел в высшем образовании. Мы не ставили перед собой задачу описания сколь-нибудь полной системы учебных заданий по какому-либо учебному курсу, сосредоточившись на идее «переноса фокуса» процесса обучения с формирования навыка решения задачи линейного программирования на осмысление математической основы и раскрытие сущности алгоритмов линейного программирования.

Математическая подготовка студентов бакалавриата экономических направлений сегодня часто обсуждается, предпринимаются попытки полной её систематизации, дисциплины формируют укрупнённые блоки. Практически все описания таких попыток выделяют линейное программирование как центральный связующий элемент, позволяющий переходить от разделов, условно относимых к теоретической математике, к прикладным разделам исследования операций (см., например, [3]). Свою популярность эта тема научных обсуждений получила не просто из-за желания авторов улучшить существующую практику высшего образования, в большинстве работ описываются трудности реализации математического материала в учебных группах экономических направлений, проявляющиеся в последнее время. Эти трудности связаны, в первую очередь, с недостаточной мотивированностью обучающихся. Основными причинами этого, на наш взгляд, являются:

1. Осознание студентами большей части заданий по линейному программированию, предлагаемых к решению «вручную», более подходящими для решения средствами автоматизированных вычислений.

2. Различие места и роли задач линейного программирования в практике управления экономической активностью в условиях рыночного и планового хозяйства (в контексте которого сформулировано много традиционных задач с экономическим содержанием, всё ещё предлагаемых задачниками).

3. Особенности сегодняшней базовой подготовки студентов экономических направлений.

Очевидным способом устранения первой сформулированной причины является постепенный переход к учебным заданиям, предполагающим использование электронных таблиц, систем компьютерной алгебры и прочих средств автоматизированных вычислений. Однако, построение системы учебных заданий, направленной на формирования умений использования вычислительной техники, неминуемо приведёт к смысловым потерям. Самая главная из них – сокрытие самих алгоритмов решения задач линейного программирования, которые переходят в поле ответственности компьютерной программы. Вместе с этим затеняется и вопрос выбора эффективного метода решения задачи. Таким образом, образуется потребность в учебных заданиях, закрепляющих теоретические представления об алгоритмах решения задач линейного программирования (возможно и формирующих умения решения таких задач без компьютера) и не провоцирующих использование средств автоматизированных вычислений.

Ответом второй сформулированной выше причине недостатка мотивации является смена экономического содержания задач. Многие научные работы до сих пор посвящаются исключительно поиску типов задач с экономическим содержанием, отвечающим реалиям рыночной экономики (см., напр. [1]). К сожалению, даже сейчас, спустя три десятка лет с начала экономической трансформации, вопрос обновления содержания задач остаётся актуальным. Сами авторы большинства таких разработок, впрочем, чаще пишут об обогащении системы учебных заданий задачами с экономическим содержанием, а не о замещении устаревшего экономического содержания актуальным. Больше того, часто эта простая актуализация экономического содержания называется основным способом решения вопроса мотивации к обучению (см, напр. [2]). Мы можем с этим поспорить, указывая две другие причины угнетения мотивации. Кроме того, задача линейного программирования объективно более значима для управления плановым хозяйством, чем рыночным. Существует несколько ярких задач, способных оказать существенное влияние на мотивацию к обучению. Мы считаем, что этим и нужно ограничиться, не повышать количество задач линейного программирования с экономическим содержанием, а, наоборот, снижать, сужая их круг до тех самых двух-трёх ярких типов задач. Оговоримся, что сказанное касается именно темы линейного программирования, многие математические методы действительно нуждаются в расширении задачной базы заданиями с экономическим содержанием.

Раскрывая третью сформулированную причину угнетения мотивации студентов, вспомним о профилизации школьного образования в 10-11 классах. С учётом инертности школьного образования, его несклонности к переменам, разница в подготовке (в том числе и математической) выпускников разных профилей стала заметно и массово проявляться последние 4-5 лет. Студентами-экономистами в большинстве случаев становятся выпускники естественно-научного, социально-экономического, общеобразовательного профиля (исключения составляют экономические направления наиболее престижных вузов, где заметна доля студентов с более высокой математической подготовкой). То есть умения студентов-экономистов даже в элементарной математике весьма ограниченны, а способность осваивать материал высшей математики нуждается в специальном целенаправленном развитии. Это означает, во-первых, необходимость большей концентрации усилий преподавателя на идейной сущности материала, в частности, линейного программирования. Таким образом, формирование умений решения стандартных задач должно потесниться в (и так узких) рамках учебного времени. Во-вторых, всякая возможность использования внутрипредметных связей учебного материала высшей математики должна быть обязательно использована для взаимной поддержки разных разделов математики. В нашем случае, мы видим очевидную возможность взаимодействия с материалом аналитической геометрии (а во многих программах обучения экономистов это вообще единственная возможность изложить основы аналитической геометрии многомерного пространства). В этой связи усиливается роль симплекс-метода решения задачи линейного программирования: связь алгоритма со свойствами выпуклой многогранной области, на которой решается задача оптимизации, настолько понятна и естественна, что упускать возникающие методические возможности обидно.

Каковы же могут быть рекомендации по преобразованию системы задач в свете сделанных замечаний?

1. Учебные задания с двумя переменными и сегодня играют особую роль в освоении материала линейного программирования: они позволяют студентам наглядно представить «механику» математической модели оптимизационной задачи. Основные термины задачи оптимизации (такие как «линия уровня», «область допустимых решений» и тому подобные) приобретают визуальные образы, изменение значений целевой функции при изменении значений параметров оптимизации — кинестетический образ. Для учебных заданий линейного программирования в этом случае характерно требование решения «графическим методом». Работая со студентами экономических направлений, мы часто замечаем, что трудности возникают даже на этапе построения прямых, задающих границы области допустимых решений. Разумеется, это объясняется отсутствием или недостатком умений из аналитической геометрии. Намечается схема: необходимы умения аналитической геометрии на плоскости – целесообразна реализация материала линейного программирования через свойства выпуклых множеств – в задачах есть возможность усложнения с переходом к аналитической геометрии в пространстве. То есть, раз всё равно приходится работать с теорией и задачами аналитической геометрии, то можно сделать

удобные обобщения отталкиваясь от «устройства» области допустимых решений в случае плоскости, пространства, многомерного пространства. Появляется необходимость в заданиях трёхмерного случая задачи линейного программирования. Конечно, традиционный «геометрический метод» решения задачи линейного программирования в трёхмерный случай перенести трудно (движение линии уровня теряет наглядность двумерного случая). Однако можно сформулировать задачи на отыскание вершин области допустимых решений, выяснение их принадлежности одному ребру, грани, одной линии уровня. Представления, формируемые в процессе решения задач этого типа, являются фундаментом понимания основной части материала. В то же время, здесь требуются значительные вычислительные усилия, кропотливая работа (зачастую провоцирующая мелкие вычислительные ошибки). С другой стороны, нет причин отказываться от вспомогательного использования универсальных вычислительных средств при выполнении именно таких заданий. В итоге, можно рекомендовать включение этих задач преимущественно в задания для самостоятельной работы студентов. Количество их в системе учебных заданий должно быть достаточным для формирования представлений об области ограничений, характерной для линейного программирования и может варьироваться в зависимости от первоначальной математической подготовки учебной группы.

ПРИМЕР ЗАДАНИЯ. Найти все вершины многогранной области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le z \le 5, \\ 0 \le x + y \le 3, \\ 0 \le x - y + z \le 6. \end{cases}$$

2. Продолжая рассуждения прошлого пункта, отметим, что развитие представлений о геометрических свойствах области допустимых решений и их вершин создаёт специфические возможности осознания сущности симплекс-метода уже в многомерном случае. А для этого нужны задания, предполагающие поиск вершин и рёбер многогранной области и исследование найденных элементов в связи с целевой функцией. В соответствие со сделанными выше предложениями, этот тип задач должен выдвигаться на передний план, постепенно вытесняя задания на механическое применение алгоритма в стиле «симплекс-таблиц», а умение решать эти задания – входить в формулировку основной цели обучения разделу.

ПРИМЕР ЗАДАНИЯ. Обозначив различными буквами вершины области оптимизации, перечислите все рёбра этой области. Найдите самое длинное ребро. Перебором значений целевой функции в вершинах найдите решение задачи линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \longrightarrow max$$

$$D : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 8, \\ x_1 \le 3, \\ x_i \ge 0 \; (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

3. Намеченная предыдущими пунктами концепция реализации материала заставляет дополнять состав учебных заданий задачами обратными к основным в том или ином смысле. Это естественно, так как речь идёт фактически об отказе от понимания заглавного материала как «рецепта» получения оптимального решения задачи линейного программирования и переходе к формированию осмысленного понимания сущности модели и её математической обоснованности. Поэтому стоит добавить в систему учебные задания, имеющие смысл обратных задач. В частности, можно предложить описать системой неравенств многогранную область, заданную геометрическим описанием, или описать все целевые функции, при которых задача линейного программирования на заданной области допустимых решений имеет решение в указанной вершине и т.д. По опыту авторов статьи такие задачи могут составить до четверти всех задач, решаемых при реализации раздела.

ПРИМЕР ЗАДАНИЯ. Четырёхугольная пирамида с основанием в плоскости xOy имеет вершины $A(0,2,0)$, $B(0,-2,0)$, $C(1,0,0)$, $D(1,-2,0)$, $E(0,0,1)$. Описать её с помощью пяти ограничений-неравенств. Найти, понимая её как область оптимизации, минимум целевой функции $x-2y+3z$.

4. О возможном уменьшении количества заданий, предполагающих решение задачи линейного программирования стандартными методами, мы уже писали выше. Кстати, собственно решение таких задач можно рекомендовать делать с использованием средств автоматизации вычислений, даже и специально предназначенных для решения задач конкретных типов (для симплекс-метода, различных методов решения транспортной задачи и многого другого простым поиском в интернете легко можно найти онлайн-ресурсы не только решающие задачу, но оформляющие, а иногда и визуализирующие процесс решения по этапам). Описываемый тип заданий утрачивает роль формирующего для навыков решения задачи линейного программирования, так как сами эти навыки сегодня бесполезны. Зато можно отобрать задачи действительно значимые для современных экономических реалий и отработать этап интерпретации условий задачи, приводящий их к одной из форм задачи линейного программирования, подходящей для реализации того или иного алгоритма.

В заключение ещё раз подчеркнём, что сделанные выше замечания и сформулированные предложения относятся именно к экономическим направлениям бакалавриата. Всё высказанное выше является результатом анализа опыта работы авторов только в двух высших учебных заведениях и не может претендовать на статус надёжно проверенного научного знания. Для получения достоверных результатов, очевидно, необходима организация специального экспериментального исследования.

Литература

[1] Дёмина Т. И., Селютин В. Д., Чуяко В. Б. Решение задач линейного программирования как средство обучения профессионально-ориентированной математической деятельности бакалавров экономического направления // Вестник майкопского государственного технологического университета. 2016 № 4 – С. 45–51.

[2] Исин М. Е. Технология гарантированного обучения курсу экономико-математического моделирования // «Современные наукоёмкие технологии». Региональное приложение. 2019 № 3 – С. 16–21.

[3] Клентак А. С., Гераськин М. И. К вопросу фундаментализации уровня подготовки бакалавров по курсу «Организация производства и инновационная деятельность» в техническом вузе // Известия Самарского научного центра Российской академии наук 2017 Т. 21 № 5 – С. 122–133.

УДК 372.851

О РОЛИ ЗАДАЧ НА ПОИСК ИГРОВЫХ СТРАТЕГИЙ

Рукшин С. Е., Суслина М. Е.
Росийский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена,
Президентский Физико-Математический Лицей № 239
Санкт-Петербург
e-mail: vliuser@gmail.com

Rukshin S. E., Suslina M. E. The article is devoted to the application of the ideas of game theory in the educational process. **Keywords:** game theory, winning strategy, math study.

Статья посвящена применению идей теории игр и игровых задач в процессе обучения на уроках математики в средней школе. **Ключевые слова:** изучение математики, теория игр, выигрышные стратегии.

Казалось бы, задачи по теории игр далеки от школьной программы и их решение напрямую не связаны ни с одним из разделов школьного курса. Однако, опыт интеграции основного общего и дополнительного образования говорит о неожиданных эффектах и возможностях, которые открываются при использовании на уроках тем, традиционно относимых к работе кружков и факультативов. Авторы хотят в этой заметке продолжить разговор, начатый в [1, 2] и обсудить использование на уроках математики комплекса идей, успешно применяющихся в системе дополнительного образования. На этот раз предметом рассмотрения станут игры и игровые стратегии.

Начнем с известной многим ситуации: ученик вернулся с олимпиады и принес учителю условие задачи, которую ему решить не удалось. Вместо помощи в решении ученик зачастую слышит в ответ слова преподавателя «Это олимпиадная задача!», что и завершает обсуждение. И дело не только в том, что учитель сам не может решить эту задачу, – для каждого человека есть задача, которую он не может решить! – а в том, что на этом анализ педагогической ситуации обычно и заканчивается...

Отметим, во-первых, что нередко ученик, приходя с вопросом к учителю, просто не понимает, чего от него хотят в конкретной задаче. Это может быть, в частности, и непонимание того, что значит доказать какое-то утверждение. Особенно трудно это для учащихся 5-6 классов, которые еще не столкнулись в курсе геометрии с задачами на доказательство. В начальной школе и 5-6 классе их практически нет. Точнее, они встречаются только в теме «Делимость и признаки делимости», да и то в течение не более 2-3 недель и далеко не у всех учителей. В итоге для школьника само понятие «доказать» не имеет строго определенного смысла, и ребенок искренне не понимает, чем ответ «Нельзя, потому что у меня не получилось» на вопрос задачи «Можно ли ...?» отличается от доказательства того, что «ни у кого не получится». Тут же возникает вопрос о том, как сформулировать гипотезу, которую мы хотим доказывать: можно или нельзя, верно ли то или иное утверждение, возможно или нет построение требуемого в задаче примера и т.д.

Во-вторых, нет отдельной математики школьного урока, элементарной и высшей математики, олимпиадной математики и математики ЕГЭ и вступительных экзаменов. Это вовсе не научные понятия, а понятия чисто учебные; при этом понимание того, что значит «решить задачу» и «доказать утверждение» от места, где задача нам встретилась, не меняется. Существенными же проблемами являются несформированность у школьника определенных навыков мышления, незнание некоторых приемов решения задач или используемых в решении фактов и теорем и, наконец, способность к длительной концентрации внимания на задаче, когда быстро ее решить не удается. Если ликвидация первых двух проблем зависит от обученности, то третья является чисто психологической и ее решение возможно лишь с помощью повышении мотивации и с использованием возможности дать учащимся хотя бы иллюзорное или частичное ощущение успеха, когда задача еще не решена, но необходимо продолжить процесс ее решения.

В качестве средства для формирования навыков анализа условия задачи, формулировки гипотез, становления навыков доказательства, повышения мотивации и развития способности длительной концентрации ребенка на процессе решения трудной задачи мы хотим предложить использовать в учебном процессе игры и игровые задачи.

Несмотря на то, что на эту тему написано множество статей и брошюр, они посвящены совсем другой проблеме: как подготовить школьника к успешному участию в олимпиадах достаточно высокого уровня. Как правило, они начинаются с перечисления различных игровых стратегий (симметричные и дополнительные стратегии, стратегии передачи хода, анализ выигрышных и проигрышных позиций, неконструктивные доказательства и т.д.). Для каждой из стратегий в рамках классификации приводятся многочисленные примеры ее использования в различных ситуациях, даются задачи и сообщаются их решения. Понятно, что в учебном процессе и на уроках времени на такое изучение нет. И никто не объясняет, когда и в какой момент учитель должен схватиться за голову и зачем-то начать давать такие задачи школьникам. И надо ли их вообще решать их и чего при этом хотеть от ребенка?

Опасения в использовании игровых задач обусловлены в первую очередь «невидимым» результатом. Их нельзя быстро проверить по ответам. Нет готовых тестов для проверки итогов обучения: усвоил не усвоил, научился или не научился.

Оказывается, что отсутствие быстрого и наглядного результата не должно останавливать. Заложенные возможности этого инструмента необходимо использовать, и начинать можно в любом возрасте и классе.

Это не только способ закрыть нехватку задач на доказательство, но и

1. умение анализировать условие задачи;
2. осуществлять перебор вариантов, упорядочивать его, контролировать полноту перебора;
3. успешные первые шаги в решении, так как они предписаны в самом условии задачи правилами игры;
4. доступность успешной деятельности и ощущение успеха от самого процесса игры (с соседом по парте, а дома – с братом, сестрой или родителями!);
5. азарт борьбы, как средство повышения способности к длительной концентрации внимания и повышению мотивации;
6. анализ успехов и неудач, построение примеров и контрпримеров, процесс формулировки гипотез, их перевод на формальный математический язык, проведение эксперимента по их подтверждению или опровержению, поиск выигрышной стратегии;
7. способ показать, что математика является не только дедуктивной наукой, когда надо доказать уже сформулированное утверждение, но само это утверждение появляется в результате мысленного эксперимента, и появление формулировки, гипотезы позволяет учащимся познакомиться и с этой живой, эмпирической частью математической науки.

И все это – в игре, когда концентрация внимания достигается естественным образом, не говоря уж о том, что сама формулировка задачи в виде игры и возможности выигрыша для маленьких детей – как яркий фантик, который привлекает их внимание.

Использование игровых задач способствует и подготовке ребят к первым шагам в программировании. Задействованы те же механизмы мышления, когда нужно выделить структуру и выстроить схему выигрышной стратегии, описать алгоритм, исследовать конечность или бесконечность игры. Причем в более сложных задачах бывают и условия выбора стратегии (ветвления), содержащие критерии, формулируемые в виде неравенств, делимости, остатков и т.д., что делает востребованными и позволяет актуализировать многие разделы школьного курса. Добавим в рассмотрение востребованность игр в экономике, и мы получим использование игр и задач на поиск игровых стратегий, как мощный инструмент, который способствует развитию мышления учащихся.

Перейдем к конкретным примерам, начиная с задач для самых маленьких.

Задача 1. Двое игроков по очереди разрезают ножницами стороны клеток бумажного прямоугольника 3×4. За ход делают разрез по одной стороне клетки. Первый игрок начинает с краю, а следующий разрез начинается в конце предыдущего. Выигрывает тот, после разреза которого прямоугольник развалится на части. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Задача 2. Решите ту же задачу для прямоугольника 5×7.

Перейдем к более вкусным задачам.

Задача 3. На тарелке лежат 9 конфет. Двое игроков по очереди едят конфеты, причем за ход можно съесть по своему выбору одну или две. Выигрывает тот, после хода которого тарелка опустеет, а проигравший моет посуду. У кого из игроков есть способ выиграть? А если конфет 10? А если 11?

Эта задача использует делимость на три и понятие остатка. Поэтому ее естественно использовать при изучении делимости и остатков. Если число конфет делится на 3, то второй игрок легко выигрывает, дополняя ход первого до трех. А вот для 10 и 11 конфет выигрывает первый. Разумеется, если за ход можно съедать от 1 до k конфет, ответ и выигрышная стратегия будут зависеть от делимости и остатков при делении на $k+1$.

Задача 4. Решите задачу, аналогичную предыдущей, если тот, после хода которого тарелка опустеет, проигрывает.

Задача 5. На столе в ряд лежат 11 пирожных. За ход игрок может съесть одно пирожное или два лежащих рядом. Двое игроков ходят по очереди. Выигрывает тот, после хода которого пирожных не останется. У кого из игроков есть выигрышная стратегия, у начинающего или у второго?

Задача 6. А если на столе первоначально было 12 пирожных?

Задача 7. Двое игроков по очереди кладут на круглый стол пятаки. При этом пятаки не могут налегать друг на друга и свисать со стола. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из них есть способ выиграть? А если стол квадратный? Прямоугольный?

Последние три задачи знакомят школьника с важным понятием симметрии на прямой и плоскости.

Задача 8. Имеется шоколадка 6×9 долек с пятью продольными и восемью поперечными углублениями, по которым её можно ломать. Играют двое, ходят по очереди. Играющий своим ходом отламывает от шоколадки полоску ширины 1 и съедает её. Другой играющий за свой ход делает то же самое с оставшейся частью, и т. д. Тот, кто разламывает полоску ширины 2 на две полоски ширины 1, съедает одну из них, а другую съедает его партнер. Докажите, что начинающий игру может действовать таким образом, что ему достанется по крайней мере на 6 долек больше, чем второму.

Заметим, что внутри каждой приведенной задачи сформулированы и прописаны правила игры, и ребенок оставшись с задачей один на один имеет перед собой руководство к действию. То есть он не может спрятаться за отговорку, что не знает с чего начать. Ребёнку сразу ясно, что делать. Не надо находиться в ожидании инструкции и подсказки. Получаем интересный эффект: даже самому ленивому и немотивированному ребенку будет, чем заняться. А дальше как в поговорке – лиха беда начало! Ему доступен эксперимент по правилам заданной игры. Как только ребенок начал эксперимент, то в любом случае он получит результат. Интерпретация этих результатов может стать самостоятельной задачей для формулировки стратегии и далее доказательства ее работы. Так незаметно для себя ученик способен изучить объект исследования. Возможно, ответ сразу не будет получен и обработка данных эксперимента даст лишь часть нужной информации, и исследование придется продолжить.

Перейдем к задачам для более старшего возраста на тему «Признаки делимости».

Задача 9. Петя и Вася выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Петя. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Вася всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 9.

Задача становится более трудной в формулировке: Вася выигрывает, если полученное число делится на 9, Петя – если не делится. У кого из них есть выигрышная стратегия?

Задача 10. Двое игроков по очереди пишут $2k$-значное число, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую слева цифру пишет первый, вторую – второй, третью снова первый и т.д. Может ли первый добиться того, чтобы полученное число делилось на 9, если второй хочет этому помешать? Рассмотреть случаи:

1. $k = 10$;

2. $k = 15$.

Задача 11. Два игрока по очереди выписывают на доске в ряд слева направо произвольные цифры. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, кратное 11. Кто из игроков победит при правильной игре?

Задача 12. Двое игроков пишут двадцатизначное число слева направо, по очереди дописывая по одной цифре. Первый игрок выигрывает, если полученное число не делится на 7, второй – если делится. Кто выиграет при правильной игре?

Решение основано на том, что последнюю (крайнюю справа) цифру пишет второй игрок. До этого момента он может выбирать любые цифры. В последний момент он должен выбрать среди десяти возможных вариантов тот, в котором полученное число разделится на 7. Хотя бы одно такое есть в каждом десятке.

Задача 13. Двое игроков по очереди ставят слонов на клетки шахматной доски так, чтобы поставленный слон не бил ни одного из поставленных ранее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Подсказка: слоны бывают белопольные и чернопольные, и одни не могут бить других.

Разумеется, в игровых задачах может использоваться и материал школьного курса алгебры и геометрии. В частности, есть игры, использующие системы уравнений, квадратный трехчлен, многочлены более высокой степени, теорему Виета и другие факты школьного курса. Приведем пример.

Задача 14. На доске написано уравнение $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$.

Двое играют в такую игру. Первый ставит на любое из пустых мест целое число, отличное от нуля (положительное или отрицательное). Затем второй ставит целое число на одно из оставшихся мест. Наконец, первый ставит целое число на последнее свободное место. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы независимо от хода второго уравнение имело целый корень.

Задача 15. Верно ли, что первый игрок может играть так, чтобы все три корня получившегося уравнения оказались целыми числами?

Подсказка: надо, чтобы полученных многочлен можно было разложить на линейный и квадратичный множители, каждый из которых имеет целые корни.

Надеемся, что приведенные примеры достаточно убедительно демонстрируют возможности применения игровых задач в учебном процессе.

Литература

[1] Рукшин С. Е., Суслина М. Е. Катание на лифте и уроки математики: есть ли место для нестандартных задач на уроке математики? // Архимед, 2018, вып. 14. – с. 37–44.

[2] Рукшин С. Е., Суслина М. Е. Четность и разбиение на пары: урок или кружок? // Архимед, 2020, вып. 16. – с. 24–33.

УДК 514.122.2

ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ В ДИСТАНЦИОННОМ ФОРМАТЕ

Светлаков А. Н.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: asas70@rambler.ru

Svetlakov A. N. The features of conducting practical classes in higher mathematics in a remote format. In the article the features of conducting practical classes in higher mathematics in a remote format is discussed.

Наибольшую сложность при организации занятий по высшей математике в дистанционном формате вызывают практические занятия.Решить непростые проблемы позволяют следующие приёмы:

1. Рекомендуется сформировать из обучающихся бригады примерно по пять человек, оснащённые системами Maple, Mathcad и одним или несколькими графическими планшетами. Графическими планшетами, правда, недорогими, стоимостью около 2000 рублей бесплатно обеспечиваются преподаватели университетов Великобритании. Некоторые школы Санкт-Петербурга получают от государства до 800 планшетов, но не графических. Установить Mathcad Prime 6.0 предлагает студентам и сотрудникам РГПУ им. А. И. Герцена, правда, в экспресс-версии без символьных вычислений и программирования, что серьёзно понижает его ценность для задач обучения. Таким образом, студенты, имеющие графические планшеты, могут в скайпе полноценно "работать у

доски". Прочие же могут решать задачи (с сопровождением преподавателя в реальном времени) в Mathcad или в онлайн-калькуляторах. Результаты практической работы желательно сохранять и публиковать. Интернет-портал, используемый для этих целей [3] при онлайн-обучении, без каких либо специальных акций имеет более 1300 подписчиков и входит в 1500 лучших по рейтингу.

2. Другой проблемой, актуализирующейся в связи с дистанционным обучением, является отбор задач. Как уже сказано в статьях [4], [5] частым недостатком демонстрационных задач является практическая сложность увидеть свойства получаемых решений. В [2] примеры подбирались с учётом этого соображения. Другим недостатком является отсутствие рейтинговости. Первый шаг в направлении устранения этого недостатка сделан В. И. Арнольдом в [1]. К сожалению, таких работ немного. Определённая исследовательская работа была проведена нами вместе со студентами института информационных технологий и технологического образования РГПУ им. А. И. Герцена . Мы прорешали в Mathcad задачи из рекомендованных для ВУЗов методических пособий. Лишь примерно 40 процентов примеров допускали решения в Mathcad без дополнительных преобразований. Таким образом, решаемость в Mathcad может служить одним из параметров рейтинговости.

3. Ещё одна проблема дистанционного обучения – то, что сильно повышается важность качества контроля, особенно текущего. Зачёты, экзамены, коллоквиумы, аттестации становятся одним из основных средств обучения. Обучаемые должны знать, что их еженедельные успехи (неудачи) будут неминуемо оценены количественно, и это будет сделано гласно.

Литература

[1] Арнольд В. И. “Математический тривиум”, УМН, 46:1(277) (1991), 225 – 232.

[2] Светлаков А. Н. “Обыкновенные дифференциальные уравнения. Когнитивный курс”. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. 44 с. с прилагаемым компакт-диском.

[3] http://mathdialogue.livejournal.com/

[4] Светлаков А. Н. Концепция когнитивного учебника по “Обыкновенным дифференциальным уравнениям” для студентов нематематических специальностей, в сборнике: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования материалы LXVII научной конференции, Санкт-Петербург. Академия информатизации образования, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, кафедра математического анализа, кафедра информационных систем и программного обеспечения. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. С. 200–202.

[5] Светлаков А. Н. Форма и форматы учебников по высшей математике, в сборнике: Проблемы теории и практики обучения математике. Сборник научных работ. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. С. 68–70.

[6] Картер, А. (2001). Интерактивное дистанционное образование: значение для учащихся взрослых. Международный журнал учебных средств массовой информации, 28 (3), 249–261.

УДК 517.9

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА “MATHCAD” ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ВОЕННО-ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Судакова А. Г., Новичкова О. Е.
Михайловская военная артиллерийская академия
Санкт-Петербург
e-mail: 5342903@mail.ru

Sudakova A. G., Novichkova O. E. On the use of the MathCad package in the study of mathematical statistics at a military-technical university. The authors discuss the possibilities and the advantages of using the MathCad package in the study of mathematical statistics at a military-technical university. Keywords: computer technologies in the study of mathematics, MathCad package, mathematical statistics, modeling of random variables, hypothesis testing

Обсуждается возможности использования программного пакета MathCad при изучении математической статистики в военно-техническом вузе. Ключевые слова: компьютерные технологии в изучении математики, пакет MathCad, математическая статистика, моделирование случайных величин, проверка гипотез

В военно-техническом вузе математика является базовой дисциплиной, которая входит в учебный план начальных курсов обучения. Полученные курсантами математические знания должны стать основой для дальнейшего изучения профильных предметов. Все основные разделы математики изучаются, в основном, классическим методом, то есть на лекциях происходит изложение нового материала, на практических занятиях – закрепление знаний и отработка навыков решения задач в тетрадях и у доски. Однако часть занятий по некоторым изучаемым разделам курса математики может быть с успехом проведена в компьютерном классе.

Современное техническое образование невозможно без свободного владения компьютерными технологиями. Будущий военный инженер должен обладать информационной культурой, уметь с помощью ЭВМ решать необходимые профессиональные задачи и проводить научные исследования. Для решения математических задач прикладного характера применяются интегрированные программные системы автоматизации математических расчетов. В частности, широкими возможностями обладает пакет MathCad, позволяющий реализовать основные стандартные функции вычислительной математики, производить символьные математические преобразования, строить графики различных видов. Использование MathCad позволяет обеспечить наглядность обучения, повысить его практическую значимость и эффективность применения полученных курсантами знаний.

Наиболее актуально использование компьютерных технологий в учебном процессе при изучении математической статистики. Занятия в компьютерном классе приобретают особую ценность, поскольку работа со статистическими данными зачастую связана с большим объемом рутинных расчетов. MathCad позволяет оперативно и качественно решать основные задачи математической статистики: обрабатывать статистические данные, производить расчет и оценку числовых характеристик, проверять статистические гипотезы, строить функциональные зависимости.

В военной сфере часто возникает необходимость проведения наблюдений и измерений, целью которых является определение параметров, заранее неизвестных. Результаты этих наблюдений или измерений подвергаются соответствующей статистической обработке, основной задачей которой является определение законов распределения и числовых характеристик различных случайных величин. Методы обработки опытных данных вырабатываются на основе математической статистики. Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных [4].

К моменту изучения теории вероятностей и математической статистики курсанты уже имеют знания по основным разделам курса математики, владеют математическим аппаратом и имеют навыки работы с MathCad. На занятиях курсанты учатся моделировать законы распределения и обрабатывать полученные статистические результаты. С помощью встроенных функций MathCad курсанты получают данные по пяти основным законам распределения случайных величин (нормальному, показательному, равномерной плотности, биномиальному, закону Пуассона), строят графики плотности (для непрерывных распределений) или вероятности (для дискретных распределений), а также графики статистической (накопленной) вероятности. Рассчитываются числовые характеристики случайных величин.

В силу большой практической значимости отдельно рассматривается точечное и интервальное оценивание математического ожидания и дисперсии для данных, собранных в разряды, в случае равноточных и неравноточных измерений. Эти величины можно найти по формулам, а границы доверительных интервалов – привлекая распределения Стъюдента, нормальное и "хи-квадрат" посчитать с помощью программного пакета MathCad [5].

Особо важной темой математической статистики является проверка гипотез. Для проверки гипотезы вводится специальный критерий, называемый статистикой. Рассчитываются критические значения статистик и строятся графики, иллюстрирующие возможность принятия нулевой гипотезы. Если опытное значение статистики попадает в критическую область, то нулевая гипотеза отвергается в силу малости доверия к ней в соответствии с заданным уровнем значимости.

По завершению изучения теории вероятностей и математической статистики курсантам может быть предложена курсовая работа по теме "Применение методов математической статистики при обработке результатов математического моделирования в MathCad". Моделирование случайных величин используется для решения разнообразных задач военно-технического характера, в частности, для создания статистической модели боя.

В стандартное задание курсовой работы входит:

1. моделирование случайных величин для пяти основных законовраспреде-

ления (нормального, показательного, равномерной плотности, биномиального, закона Пуассона);

2. построение гистограммы, полигона частот и графика накопленной вероятности для каждого закона;

3. определение числовых характеристик всех промоделированных законов;

4. проверка гипотез о виде закона распределения (для всех пяти законов);

5. проверка гипотез о дисперсиях и о средних (для нормального закона);

6. формулированиевыводов по результатам выполненной работы.

Моделирование случайных величин происходит по заданным условиям на базе встроенных функций MathCad. Указываются количество данных и исходные значения вероятностных характеристик, соответствующие каждому закону. Результат моделирования представлен таблицей (рис 1.). Для построения полигона частот, полигона вероятностей, статистической функции распределения необходимо собрать полученные данные в разряды. Для этого создаются четыре массива: массив разрядов, массив частот, массив вероятностей и массив накопленных вероятностей. По полученным массивам строятся графики: гистограмма, график накопленной вероятности и полигон частот.

$x_1 := rnorm(100,2,1.5)$

$x_1 =$

	0
0	2.09
1	1.253
2	2.084
3	0.77
4	1.929
5	1.623
6	2.029
7	4.679
8	1.892
9	1.296
10	3.554
11	4.087
12	-0.2

Рис. 1 Моделирование статистических данных с помощью встроенных функций MathCad

Гистограмма представляет собой графическое оформление статистического распределения выборки для непрерывной случайной величины. Все графики можно быстро построить с помощью MathCad, на них наглядно отражается распределение вероятностей (рис.2.).

Числовые характеристики случайных величин можно рассчитать тремя способами: теоретическим способом (по формулам соответствующего закона распределения), с помощью встроенных функций программы и исходя из исходного массива статистических данных. Оценки математического ожидания и

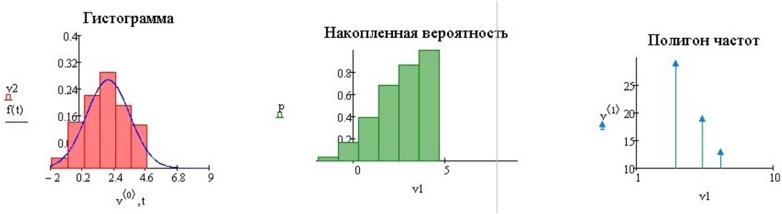


Рис. 2 Графики распределения вероятностей, построенные с помощью MathCad на основе смоделированных данных

дисперсии рассчитываются с помощью операции векторизации. Курсанты могут самостоятельно убедиться, что значения числовых характеристик, полученных различными способами, достаточно близки.

Проверка гипотез происходит по следующему алгоритму:

1. Формулировка нулевой гипотезы и ее альтернативы.

2. Выбор статистики, с помощью которой будет проводиться проверка гипотез.

3. Назначение уровня значимости α и построение критической области.

4. Вычисление по опытным данным статистики и изображение ее на рисунке.

5. Если опытное значение статистики попадет в критическую область, то нулевая гипотеза отвергается в силу малости доверия к ней в соответствии с уровнем значимости α.

6. Если опытное значение статистики попадает в некритическую область, то нет основания для того, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу с заданной вероятностью.[1]

Важная задача работы – проверить, каким образом распределены опытные данные. Для всех законов распределения проверяется гипотеза о согласии эмпирического распределения с проверяемым законом. С помощью MathCad курсанты определяют границы интервалов, рассчитывают теоретические вероятности попадания в интервалы, формируют массив теоретических частот. Основным результатом проверки гипотезы является расчет опытной статистики (суммарной невязки) и сравнение её значения с критическими при заданной доверительной вероятности. Статистикой проверки гипотезы о виде закона распределения является критерий Пирсона. Эта статистика определяет итог проверки: будет ли отвергнута нулевая гипотеза или нет.

С помощью встроенных функций MathCad вычисляются критические значения (квантили) для построения зоны принятия решений. Если полученное значение опытной статистики принадлежит зоне принятия решений, то нулевая гипотеза не отвергается с заданной вероятностью. Значит, эмпирическое распределение соответствует проверяемому закону.

Полученные результаты изображаются на графике. (Значение суммарной невязки изображено на рисунке 3 стрелочкой). На данном рисунке наглядно представлено попадание опытной статистики в “белую зону”, что позволяет сделать вывод о том, что гипотеза о согласии опытного распределения с теоретическим не отвергается с заданной вероятностью. Если же опытное значение статистики попало в критическую область, то по правилам математической статистики нулевая гипотеза должна быть отвергнута.

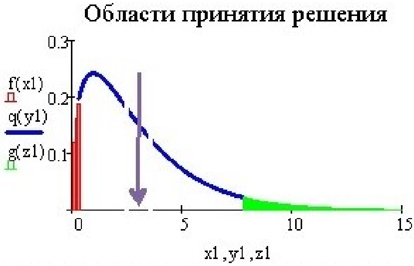


Рис. 3. График области принятия решения

Для нормального закона предусмотрена также проверка гипотез о дисперсиях и о средних. Проверка гипотез о дисперсиях включает сравнение дисперсии, рассчитанной по опытным данным, с генеральной дисперсией и сравнение дисперсий, вычисленных разными способами. Проверка гипотез о средних включает сравнение среднего по выборке с генеральным математическим ожиданием и сравнение двух оценок математического ожидания. Гипотезы о дисперсиях и о средних проверяются по похожей схеме. Для проверки гипотез о дисперсиях используются критерии Пирсона и Фишера, а для проверки гипотез о средних – статистики Стъюдента и Фишера. Задается уровень значимости α, вводятся квантили по значениям $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$. Далее по опытным данным вычисляется статистика и изображается на рисунке. Рисунок наглядно показывает, попадает ли опытное значение статистики в критическую область или находится в зоне принятия нулевой гипотезы. Если опытное значение лежит между квантилями, то нет основания отвергнуть нулевую гипотезу. Графические иллюстрации результатов работы помогают в полной мере овладеть методами математической статистики и научиться проводить обработку опытных данных.

В ходе выполнения курсовой работы с помощью ЭВМ курсанты получают возможность осознать основное преимущество метода статистических испытаний – моделирование той или иной ситуации без непосредственного проведения опыта. Это особенно важно для военных специалистов, поскольку специфика деятельности не позволяет проводить большое количество экспериментов на практике. Использование компьютерных технологий позволяет проводить сложные расчеты без особых временных затрат, избавляет учащихся от рутинных вычислений и в результате существенно повышает эффективность интеллектуального труда.

Литература

[1] Беляева С. Д. Вероятность, статистика и случайные процессы в MathCad. – Спб: МВАА, 2017. – 205 с.

[2] Беляева С. Д., Сухомлин И. И. Основные понятия математической статистики. – Спб: МВАА, 2010. – 134 с.

[3] Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М: Высшая школа, 2004. – 403 с.

[4] Новичкова О. Е, Новичков А. В., Судакова А. Г. Статистические методы обработки результатов стрельбы. Руководство по выполнению курсовой работы. – Спб: МВАА, 2021. – 65 с.

[5] Беляева С. Д. Применение пакетов Excel и Mathcad при изучении математики. // Актуальные проблемы преподавания математических и естественно-научных дисциплин в образовательных организациях высшего образования. – Кострома, ВАРХиБЗ, 2021.

УДК 681.3.06

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ В ИЗУЧЕНИИ СТРУКТУРНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ЯЗЫКЕ C++

Ускова О. Ф.
Воронежский государственный университет
Воронеж
e-mail: sunny.uskova@list.ru

Uskova O. F. Mathematical algorithms in the study of structural programming in C++. In this article we give examples of mathematical algorithms studied in "Computer science and programming" course and their respective implementations on programming language C++.
Keywords: computer science and programming, C++, structured programming, mathematical algorithms.

Рассмотрены примеры математических алгоритмов, программы которых на языке C++ изучаются в курсе "Информатика и программирование" .
Ключевые слова: Информатика и программирование, язык C++, структурное программирование, математические алгоритмы.

Начала структурного программирования на языке C++ являются составной частью дисциплины "Информатика и программирование" для студентов первого курса очной формы обучения факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета (ПММ ВГУ).

Язык программирования C++ разработал Бьерн Страуструп, который в 1975 году успешно окончил отделение информатики Орхусского университета (Дания), и работает в Нью-Джерси (США) в компании AT&T Bell Labs.

В 1998 году Международный комитет по стандартизации принял стандарт языка C++ (ISO/IEC 14882 "Standard for the C++ Programming Language"). Бьерн Страуструп опубликовал 5 книг по языку C++, которые переведены на 19 языков [1].

Учитывая специфику факультета ПММ ВГУ, изучение структурного программирования на языке C++ сопровождается разработкой программ, реализующих математические алгоритмы. Приведем несколько примеров практической направленности, которые рассматриваются на лекционных, практических и лабораторных занятиях первокурсников по дисциплине "Информатика и программирование" в первом семестре [3].

Раздел "Линейные алгоритмы".

1. Пусть даны четыре целых числа (hour, min, sec, time). Первые три из них (hour, min, sec) — время запуска ракеты в часах, минутах и секундах, четвертое (time) определяет время полета в секундах. Найти и напечатать время возвращения ракеты на землю.

Раздел "Алгоритмы с ветвлениями".

Пусть даны координаты трех точек плоскости. Если они могут быть вершинами треугольника, определить его вид (прямоугольный, тупоугольный, остроугольный). Вычислите длину его высот и выведите их в порядке возрастания.

Раздел "Циклические алгоритмы".

1. Для заданных чисел a и p вычислить $x = \sqrt[p]{a}$ по формуле Ньютона

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\Big[(p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\Big]; \quad x_0 = a.$$

Сколько итераций надо выполнить, чтобы для заданной погрешности E выполнялось соотношение $|x_{n+1} - x_n| \le E$?

2. Пусть отрезок $[a, b]$ разбит точками на n равных частей. В каждой точке вычисляется значение функции

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2x^3 - 1}}.$$

Найти точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

3. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int x^2\,dx$ на отрезке $[a, b]$, используя формулу прямоугольников, если известно, что отрезок $[a, b]$ разбит на n равных частей.

4. Введите отрезок $[0, n]$, где n — целое число, большее 2. Получите и напечатайте числа Фибоначчи этого отрезка.

Числа Фибоначчи образуют последовательность $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$.

Раздел "Использование адресной арифметики при работе с одномерными массивами".

Составить программу для вычисления полинома

$$y = 2x^8 - x^6 + 4x^5 - 5x^2 + 6x + 1,$$

используя формулу Горнера.

Указание. Формула Горнера для вычисления многочлена степени n:

$$y = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_{n+1}$$

имеет вид

$$y = (\ldots((((a_1 x + a_2)x + a_3)x + \cdots + a_n)x + a_{n+1}.$$

Раздел "Двумерные массивы и указатели".

Восстановить условие задачи.

```
...
const int M = 10, N = 20;
float a[M][N];
for (int i = 0; i < M; i++)
for (int j = 0; j < N; j++)
        cin >>*(*(a + j) + i);
float s, max= 0;
for (int i = 0;i < M;i++)
{ s = 0;
        for (int j = 0;j < N;j++)
            s+=abs(*(*(a + i) + j));
        if (s >max) max= s;
}
cout << s;
...
```

В заключение приведем высказывание Б. Страуструпа, с которым мы полностью согласны [2]:

"Написание хороших программ требует ума, вкуса и терпения".

Литература

[1] Страуструп Б. Язык программирования C++ / Б. Страуструп. — М.: Радио и связь, 1991. — 152 с.

[2] Павловская Т. А. C/C++ Программирование на языке высокого уровня / Т. А. Павловская. — СПб.: Питер, 2004. — 461 с.

[3] Ускова О. Ф. Информатика и программирование: задачник-практикум по структурному программированию на языке C++ / О. Ф. Ускова, Н. А. Каплиева, О. Д. Горбенко. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2020. — 279 с.

УДК 372.851

ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ MOODLE В ДИСТАНЦИОННОМ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ (на примере курса для студентов по дисциплине Алгебра (раздел "Многочлены") в СДО Moodle)

Яшина Е. Ю., Исайкова А. С.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: elyashina@mail.ru, a–s–i@mail.ru

Yashina E. U., Isaikova A. S. Problems of using the Moodle system in distance leaning for students. We consider possibilities, advantages and disadvantages of the Moodle for distance learning in mathematics at a pedagogical university.

Рассматриваются возможности, преимущества и недостатки СДО Moodle при дистанционном обучении математике в педагогическом университете.

Пандемия в нашей стране вызвала коренные изменения практически во всех сферах жизни людей, в том числе и в сфере образования. Университеты перешли на полное дистанционное обучение, что позволило нам оценить ситуацию изнутри и сделать следующие выводы: преимущества такой формы весьма субъективны, чего нельзя сказать о недостатках. Во взаимодействии "преподаватель-студент" очень важна обратная связь, чего компьютерные технологии дать не могут. Видеоконференции, текстовые чаты, различные аудиозаписи - вынужденная мера, которой придерживаются с целью не прерывать образовательный процесс. Однако дистанционное обучение наиболее эффективно в том случае, когда оно будет не заменять, а подкреплять аудиторные занятия. Необходим такой образовательный ресурс, который даст возможность студентам повторять ключевой теоретический материал с лекций; решать задачи на основе примеров, разобранных как на семинарских занятиях, так и в электронном курсе. Одним из главных преимуществ дополнения очного образования дистанционным курсом является наглядность. Различные таблицы, схемы, разобранные решения задач подкрепляют практическую базу изучаемой дисциплины.

В качестве виртуальной образовательный площадки для создания электронного курса для студентов нами была выбрана система дистанционного обучения "Moodle". Стоит обратить внимание на разницу между полным переходом на дистанционное обучение и частичным использованием компьютерных технологий.

Moodle (расшифровывается как Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) - бесплатная образовательная онлайн-площадка, одна из самых распространенных систем дистанционного обучения. Многие крупные университеты во всём мире выбирают Moodle в качестве электронной обучающей платформы и наш вуз не стал исключением, о чем мы уже сказали выше. Moodle выделяется легкостью в авторизации и освоении. Данная система является бесплатной и русскоязычной, что говорит о ее доступности. Существует большое количество методической литературы, помогающей разобраться в нескончаемых возможностях Moodle, однако стоит отметить, что данную платформу можно освоить и самостоятельно; данный процесс является не только полезным, но и интересным.

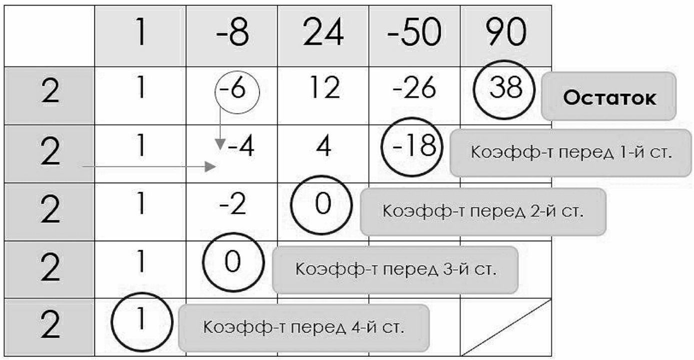
Создавая электронный курс, преподаватель самостоятельно проектирует интерфейс, зависящий от желаемой структуры курса, то есть разделение на главы, параграфы, темы и подтемы является индивидуальным и удобным самому преподавателю. Использование различных инструментов для создания лекций и тестирований, поддержание большого количества форматов файлов, которыми могут обмениваться как преподаватели и студенты, так и студенты между собой, возможности коммуникации - все это описывает сильные стороны Moodle. Однако данная платформа имеет и недостатки. На данный момент система не может выдерживать большое количество пользователей одновременно, что в принципе ограничивает доступ студентов к необходимым курсам. К недостаткам системы Moodle при полном дистанционном обучении следует также отнести отсутствие возможностей в рамках этой системы проводить лекции и семинары в режиме видеоконференций. С этой целью приходится использовать другие платформы (Zoom, Scype, и тд).

Дистанционная форма обучения рассчитана в большей степени на самостоятельную работу студентов, однако обучающимся достаточно сложно организовать себя на учёбу, а преподавателю трудно эту деятельность контролировать. Так, создавая курс, преподаватель выстраивает целую систему, состоящую из лекций, практических заданий и тестирований. Moodle дает возможность контролировать посещаемость курса, показывает (в процентах) объем пройденного студентами материала. Но никто не может дать гарантии, что данный материал студент прочитал, а тем более усвоил. Наш курс "Многочлены" был создан в качестве вспомогательного источника лекционных материалов. Поэтому вопроса о мотивации студентов к использованию данного курса не возникает. Что касается практической базы, то большинство разобранных примеров помогут обучающимся в решении схожих задач.

Математические курсы отличает большое количество формул. СДО Moodle предлагает две возможности работы с формулами - вставка изображений и использование языка, близкого к языку программирования TeX. В отличие от изображений, формулы, набранные в TeX, можно редактировать и исправлять, а данная функция является очень полезной при составлении курса и создании электронных лекций. Именно поэтому можно сказать, что Moodle - удобная система для работы над созданием текстов математического содержания.

Однако не все необходимые для составления лекций формулы и символы содержатся в данной системе. Их можно набрать вручную, ознакомившись с языком TeX. Мы считаем, что более широкая база встроенных в Moodle формул и символов была бы полезна.

К сожалению, Moodle не предоставляет необходимые инструменты для создания желаемых графических дополнений. В частности, различные схемы и таблицы, включенные в наш курс, были составлены в другой программе. Мы добавили их, используя функцию вставки рисунка. Так, при решении задач на разложение многочлена $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$ студенты могут воспользоваться подходящей схемой (см. Рис. 1), разработанной в текстовом редакторе Microsoft Word.



	1	-8	24	-50	90
2	1	-6	12	-26	38
2	1	-4	4	-18	
2	1	-2	0		
2	1	0			
2	1				

Рис. 1.

К преимуществам системы Moodle несомненно стоит отнести широкие возможности по созданию различных тестов. Такой тип контроля знаний является удобным, но в случае небольшого количества вариантов может оказаться бессмысленным в при дистанционной форме проведения. Мы хотели составить тест в разделе "Многочлены" , который можно пройти дистанционно с практически нулевой вероятностью обмена информацией студентами между собой; тест с большим количеством вариантов, содержащих вопросы различных типов; тест с ограничением времени и автоматическим подсчётом баллов. И в СДО Moodle это возможно.

Компьютерный характер тестирования дает нам возможность автоматизировать проверку результатов студентов. Компьютер сам анализирует ответы обучающихся, подсчитывает общее количество баллов и выставляет оценку. В случае дистанционного проведения тестирования сложно контролировать использование студентами Интернет-источников или своих записей лекций. Однако большое количество вариантов предотвращает списывание студентов друга у друга. В частности наш тест, имея сложную структуру, обладает такой характеристикой.

Moodle предлагает несколько вариантов по конструированию и созданию тестов. Для реализации задуманного нами тестирования, характеризующимся большим количеством вариантов и невозможностью предугадать задания или заучить последовательность правильных вариантов ответов, банк вопросов, предлагаемый системой, использовать неудобно. Мы создавали итоговый тест с помощью тегов.

Всего по разделу "Многочлены" было составлено 86 вопросов, которые разделены на 25 групп по принципу тегов. Помимо порядкового номера каждому вопросу присваивается тег. Этот тег впоследствии использовался при группировке заданий и конструировании вариантов. Под одним тегом могут быть несколько вопросов, и принадлежность вопроса конкретному тегу зависит от его типа и темы.

При создании тестов Moodle предлагает включение вопросов разных типов, в наше тестирование были включены некоторые из них:

- верно/неверно:
Неприводимыми многочленам над $\mathbb{R}$ являются многочлены второй степени: $ax^2 + bx + c$, $b^2 - 4ac < 0$, и других неприводимых многочленов над $\mathbb{R}$ нет.
Выберите один ответ:
-Верно
-Неверно

- на соответствие:
Установите соответствие:

$$1)\ \begin{cases} f_1 f_2 \vdots g \\ (f_1, g) = 1 \end{cases} \Rightarrow f_2 \vdots g$$

$$2)\ \forall f(x),\ g(x) \begin{cases} f(x) \vdots g(x) \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow deg(f) \geq deg(g)$$

Предлагаемые варианты соответствия: свойство делимости многочленов, критерий взаимной простоты, свойство взаимно простых многочленов, свойство степеней многочленов.

- множественный выбор (несколько ответов):
Выберите верные утверждения.
Выберите один или несколько ответов:
a. $R(f, g) = 0 \Leftrightarrow$ старшие коэффициенты f и g равны 1
b. Нормальной формой нулевого многочлена от n переменных называется число 0
c. Сумма, разность и частное многочленов от n переменных - многочлен от n переменных
d. $Dis(f) = 0 \Leftrightarrow f$ имеет кратные корни
e. $Dis(f) = 0 \Leftrightarrow R(f, f') = 1$
f. Расширение поля P трансцендентным числом z относительно данного поля является конечным
g. Множество всех алгебраических чисел относительно данного поля P является полем

Таким образом, мы получили тест, состоящий из 25 вопросов, случайно выбранных из специально образованных нами групп по принципу тегов. Все вопросы итогового теста перемешиваются, также меняется порядок вариантов ответов. Максимальное количество баллов - 30. Система сама выставляет оценку по 5-балльной шкале. Вероятность получения полностью одинаковых вариантов практически нулевая, что решает проблему списывания студентами друг у друга. СДО Moodle позволила автоматизировать процесс проведения контроля, а также его проверки.

При дистанционной форме проведения тестирования невозможно отследить использование студентами своих конспектов лекций, однако Moodle показывает отчёты по использованию электронных лекций курса. Просмотрев некоторые темы, мы заметили, что студенты пользовались теорией. Система Moodle не позволяет отслеживать выходы курсора мыши за пределы окна, а значит, студенты могли использовать другие Интернет-вкладки, в том числе и наш курс.

В 2020 году 37 обучающихся прошли итоговое тестирование по разделу "Многочлены" в СДО Moodle. На тестирование студентам предоставлялось 50 минут. Некоторые обучающиеся завершали попытку раньше. Мы провели количественный и качественный анализ результатов тестирования. Более того, студентам было предложено пройти анонимное анкетирование, в котором они отвечали на вопросы, связанные с итоговым тестом и электронным курсом в целом.

Нам было интересно получить отзывы самих студентов, чтобы узнать, получилось ли тестирование таким, каким мы его запланировали. Количество вариантов, распределение вопросов, сложность тестирования, временные рамки, дистанционная форма проведения - все эти аспекты мы затронули в анкетировании, которое составили на базе Google Forms, позволяющей сохранить анонимность ответов участников. Мы полагаем, что анонимность помогла студентам честно отвечать на вопросы анкеты. Своими ответами поделились 33 студента.

На первый вопрос об использовании электронного курса в процессе обучения и подготовки к тестированию студенты дали следующие ответы: 28 человек (84,8%) пользовались курсом, пятеро заходили в Moodle, чтобы отметиться или скачать необходимые файлы (см. диаграмма 1).

Диаграмма 1.

При использовании курса 27 человек обращались к электронным лекциям, 21-му студенту были полезны практические разработки (подобранные задачи, разобранные решения, схемы). Абсолютное большинство студентов считает, что тестирование проверяет знания по всему разделу.

Важным показателем для нас являлся ответ на вопрос: Будет ли электронный курс полезным в качестве подкрепляющей базы при очном чтении лекций? 31 студент ответил положительно, что позволяет нам сделать вывод, что СДО Moodle справилась со своей задачей и возложенными на неё функциями.

Хочется отметить, что мы ознакомились с другими наиболее популярными Интернет-платформами. Как было сказано выше, РГПУ им. А. И. Герцена использует Moodle в качестве основной образовательной онлайн-площадки, поэтому наш выбор был практически очевиден. Возможности, которые предоставляет эта площадка, всецело подошли нам для создания электронного курса. И преимущества Moodle полностью оправданы. Так, например, iSpring Learn - платформа для корпоративного онлайн-обучения, в которой каждый отдельно взятый пользователь должен произвести оплату для получения доступа. Программа предоставляет пробный период в две недели, что не подходит для полноценного использования данной площадки в качестве подкрепляющей базы. We Study также является платной, здесь на самом дешёвом тарифе предлагается минимальный функционал. Платформа Edmodo имеет простой и понятный интерфейс, однако программа не переведена на русский язык, что значительно затрудняет работу. Таким образом, доступность Интернет-площадки Moodle, а также ее широкий инструментарий для создания курса необходимой структуры и включения в него желаемых составляющих выделяют выбранную нами платформу среди других.

УДК 539.125.5, 539.12, 621.039.556, 543.522

ВОЗМОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ СПЕКТРА ФОТОНЕЙТРОННОГО ИСТОЧНИКА

Афонин А. А., Каспаров А. А.
Институт ядерных исследований РАН
Москва
e-mail: aphonal@gmail.com

Afonin A. A., Kasparov A. A. The possibility of solving the inverse problem when reconstructing the neutron spectrum of a photoneutron source. The possibility of solving the inverse problem when reconstructing the neutron spectrum of a photoneutron source is considered.

Рассматривается возможность решения обратной задачи при восстановлении спектра нейтронов фотонейтронного источника.

Созданный на базе линейного ускорителя электронов W-Be-фотонейтронный источник нейтронов [1] позволяет проводить облучение различных образцов во внутренней полости. При создании источника было проведено моделирование ожидаемого спектра нейтронов. Результат моделирования представлен на рис. 1.

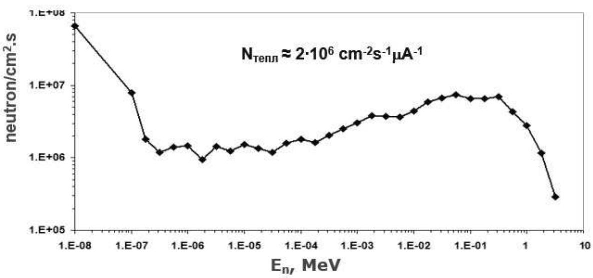


Рис. 12: Результаты моделирования плотности потока нейтронов внутри камеры для облучения при 30 μA токе 8 МэВ электронов.

Для определения плотности потока нейтронов использовался метод нейтронно-активационного анализа (НАА) [2]. Измерения плотности потока тепловых нейтронов внутри и вне источника проводились методом НАА с использованием активационных детекторов из материалов с известными сечениями активации (n, γ)-реакций. Все измерения основаны на определении активности, наведенной нейтронами в веществе детектора. В рамках НАА измеряемая площадь аналитического пика радионуклида в гамма спектре i-го активированного детектора представляется в виде:

$$S_i = \frac{m_i \, g_i \, N_A \, p_i \, \varepsilon}{A_i \, \lambda_i} \, K_i \, J_i \,, \tag{1}$$

где S_i — число отсчетов в аналитическом пике изотопа i-го элемента (без фона); m_i — масса i-го элемента в детекторе; g_i — содержание аналитического изотопа i-го элемента в естественной смеси изотопов; N_A — число Авогадро; p_i — выход гамма-квантов на один распад образовавшегося радиоактивного изотопа; ε — эффективность регистрации излучения наведенной активности; A_i — атомный вес i-го элемента; λ — постоянная радиоактивного распада;

$$K_i = (1 - e^{-\lambda_i \, t_a}) \, e^{-\lambda_i \, t_v} \, (1 - e^{-\lambda_i \, t_i})$$

и t_a — время активации; t_v — время выдержки после облучения; t_i — время измерения.

В формуле (1) J_i — скорость i-ой реакции или интеграл свертки, который представляют в виде суммы свертки по m энергетическим точкам спектра:

$$J_i \, = \int\limits_0^{\infty} \sigma_i(E) \, \varphi(E) \; dE \; \to \; \sum_{j=0}^{m} \, \sigma_i(E_j) \, \Phi(E_j) \,, \tag{2}$$

$\sigma_i(E)$ — сечение активирующей ядерной реакции в зависимости от энергии нейтронов ; $\varphi(E)$ — спектральная плотность потока нейтронов и $\Phi(E)$ — плотность потока нейтронов.

Суммарный интеграл свертки (2) по всем аналитическим реакциям детекторов был представлен в виде функционала для минимизации — взвешенной квадратной суммы разностей измеренных и рассчитанных решений. Восстановленный спектр по экспериментальным данным достаточно хорошо воспроизводит форму модельного спектра (рис. 2).

Полученные результаты показывают хорошее воспроизведение модельного спектра в области чувствительности до 3 кэВ и уменьшение коридора ошибок и осцилляций в решении при увеличении числа детекторов.

Литература

[1] Андреев А. В., Бурмистров Ю. М., Зуев С. В. Конобеевский Е. С., Мордовской М. В., Недорезов В. Г. Возможности определения микропримесей в материалах на измерительно-активационном комплексе на базе фотонейтронного источника // Известия РАН. Серия физическая. 2017. Т. 81. № 6. С. 824–827.

[2] Гутько В. И. Активационный анализ. – Минск: МГЭУ, 2008. – 74 с.

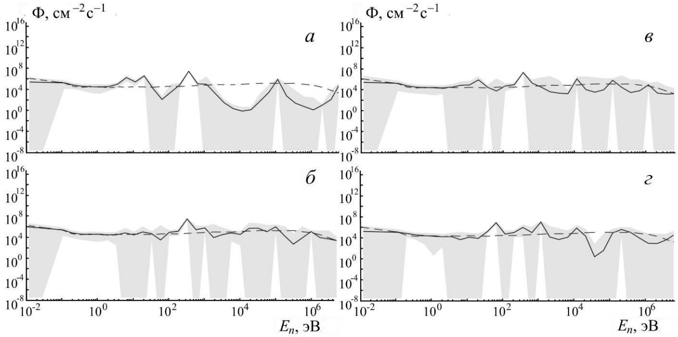


Рис. 13: Результат восстановления экспериментального спектра при минимизации функционала при использовании: *а* – 5 (Ag, Mn, Mg, Ti, Sb), *б* – 6 (Ag, Mn, Mg, Ti, Sb, As), *в* – 7 (Ag, Mn, Mg, Ti, Sb, As, ^{69}Ga), *г* – 8 (Ag, Mn, Mg, Ti, Sb, As, ^{69}Ga, ^{71}Ga) детекторов. Пунктирная линия — модельный спектр, сплошная — результат восстановления экспериментального спектра. Закрашенные области — коридор ошибок.

МЕТОДЫ EDUCATIONAL DATA MINING ДЛЯ АНАЛИЗА ЦИФРОВОГО СЛЕДА СТУДЕНТА

Баранова Е. В., Швецов Г. В.
Российский Государственный Педагогический
Университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: shvetzoff.german@yandex.ru

Baranova E. V., Shvetsov G. V. Education Data Mining methods for student digital footprint analysis.

Abstract. The article examines the problem of using modern methods of analysis of educational data (Educational Data Mining — EDM). The authors describe the methodology for applying EDM methods for analysis trail of students in blended learning and approaches to identifying the relationship between the intensity of student use of digital educational environment and successful mastering of disciplines and modules.

Keywords: student digital footprint, data mining, Educational Data Mining, Big Data, online - learning, digital educational environment.

Аннотация. В статье исследуется проблема использования современных методов анализа образовательных данных (Educational Data Mining — EDM). Описывается разработанная авторами методика применения методов EDM для анализа цифрового следа обучающихся в условиях смешанного обучения и подходы к выявлению взаимосвязей между интенсивностью использования студентами цифровой образовательной среды и успешностью освоения дисциплин и модулей.

Ключевые слова: цифровой след студента, Data Mining, Educational Data Mining, Big Data, онлайн-обучение, цифровая образовательная среда.

Цифровая среда на современном этапе является необходимым условием реализации учебного процесса в высшем профессиональном образовательном учреждении. Следовательно, актуальным для образовательной практики является исследование взаимосвязи между контентом личного профиля студента и успешностью освоения им образовательного маршрута. В контексте таких исследований сформировалось понятие «цифровой след», которое можно определить, следуя [1], как массив данных о результатах образовательной и проектной деятельности студента. Изучение цифрового следа студента позволяет осуществлять моделирование его когнитивных особенностей и использовать такую модель для прогнозирования успешности освоения образовательной программы.

Цифровой след студента начинает формироваться с момента его поступления в университет и содержит персональные данные, информацию о поступлении, направлении подготовки, образовательной программе, успеваемости в течение всего периода обучения, а также данные учебной аналитики, собираемые автоматически при работе студентов в системах дистанционного обучения и на платформах открытого образования при прохождении студентами онлайн-курсов.

К методам обработки информации об образовательном процессе, в частности цифрового следа его субъектов, можно отнести методы Educational Data Mining (EDM), предоставляющих обширные возможности для анализа и интерпретации полученных результатов. Однако, несмотря на очевидные перспективы применения методов EDM, исследований, связанных с их использованием для моделирования образовательного процесса в вузе, явно недостаточно. Отсутствуют разработанные методики, инструменты анализа и интерпретации данных, базирующиеся на этих методах и предназначенные для:

- выявления критических точек в процессе освоения образовательных программ, дисциплин и модулей, вызывающих наибольшие затруднения у студентов;
- определения взаимосвязи и взаимовлияния компонентов традиционного и дистанционного обучения на успешность освоения студентами образовательных программ;
- выявления на раннем этапе контингента студентов, находящихся в группе «риска», с большой вероятностью отчисления т .д.

Интеллектуальный анализ данных – английский синоним Data Mining (DM) – трактуется в отечественной и зарубежной литературе, как собирательное название целой совокупности методов, для обозначения которых в литературе также используются термины: «извлечение информации», «раскопка данных», «интеллектуальный анализ данных» [2]. В основе подходов DM лежат методы классификации, кластеризации, моделирования и прогнозирования, построения деревьев решений, эволюционного программирования и нечеткой логики. В настоящий момент развитие методов DM существенно связано с исследованиями в области искусственного интеллекта (распознавание образов, поиск моделей представления знаний, нейронные сети, генетические алгоритмы), работами по визуализации информации, машинному обучению и т.д. В основу технологии DM положена концепция шаблонов (patterns), которые описывают собой закономерности, выраженные в понятных человеку формах.

Современное направление исследований, связанных с применением методов интеллектуального анализа данных, машинного обучения и статистики к разного рода информации об образовательном процессе получило название Educational Data Mining (EDM), в русскоязычной литературе переводится как «анализ образовательных данных» [3]. В рамках этого направления разрабатываются модели и методы обработки образовательных данных, направленные на совершенствование образовательного процесса. Направление EDM конкретизирует область источника больших массивов данных (Big Data, далее BD) применительно к образовательному процессу.

Разработанная авторами методика анализа цифрового следа студента базируется на сформулированных в [4; 5] этапах использования методов EDM для анализа и обработки данных.

Первый этап включает постановку задачи и выявление сущностей рассматриваемой предметной области. Выделим основные информационные источники данных:

- образовательная программа – комплекс основных характеристик образования (объем, содержание, планируемые результаты), организационно-педагогических условий и форм аттестации, который представлен в виде учебного плана [6];
- деятельность профессорско-преподавательского состава (ППС), включающая: разработку учебно-методических материалов (лекции, практические занятия, тесты), в том числе в цифровом виде, оценивание студентов в рамках текущей, промежуточной успеваемости и т.д.;
- учебная деятельность студентов, которая оценивается в ходе текущей, промежуточной и итоговой успеваемости.

Детализация взаимосвязей между указанными информационными источниками образовательного процесса позволила разработать схему информационных потоков, представленную на рисунке 14.

Второй этап предполагает подготовку данных для EDM и базируется на методах проектирования и разработки информационных систем и БД [7]. На этом этапе происходит моделирование данных, т.е. осуществляется определение и анализ требований к данным, которые необходимы для осуществления EDM, разработка структур оперативных, справочных и архивных базы данных (БД), для представления источников данных, формируемых с использованием внутренних и внешних информационных систем.

Для реализации представленной на рисунке 1 схемы информационных потоков в РГПУ им. А. И. Герцена разработана и полномасштабно внедрена в практику образовательного процесса интегрированная информационная система управления учебным процессом – ИСУП (http://oio.herzen.edu.ru). ИСУП интегрирована с различными компонентами ЦОС, в том числе с СДО Moodle.

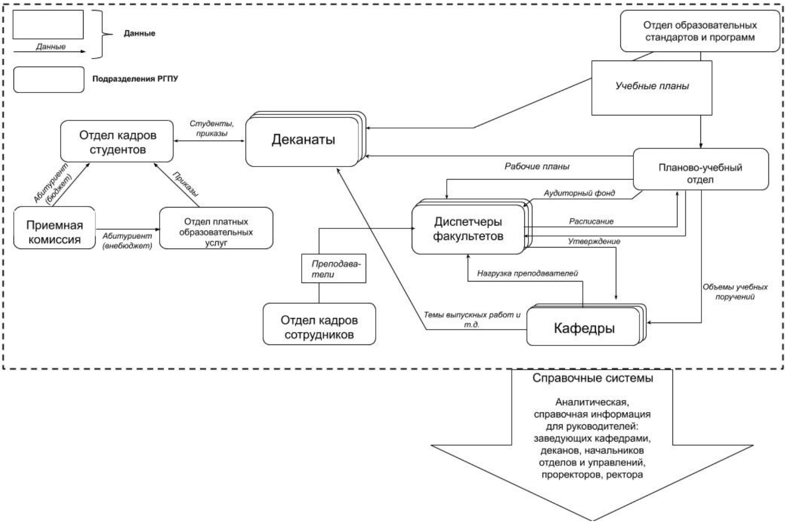


Рис. 14: Схема информационных потоков

Формирование данных в БД для последующего анализа реализуется с использованием разработанных с участием авторов инструментов (информационных систем) – компонентов ИСУП:

- инструментом, для формирования данных о реализуемых основных профессиональных образовательных программах является ИС «Учебные и рабочие планы», обеспечивающая автоматическое формирование рабочих планов и объемов учебных поручений кафедр;
- для сбора данных о промежуточной успеваемости студентов используется ИС «Деканат», обеспечивающая формирование: персональных данных студентов, информации о характеристиках образовательной программы студента, информации о структуре и составе образовательной программы, данных об успешности освоения индивидуальных образовательных маршрутов [5];
- распределение учебной нагрузки между преподавателями реализуется с использованием инструмента ИС «Нагрузка кафедры»;
- система, предназначенная для создания электронного расписания занятий и экзаменов студентов на основе рабочих планов и распределенной нагрузки преподавателей – ИС «Расписание.
- СДО Moodle обеспечивает хранение различных данных о взаимодействии студентов с цифровой средой в процессе обучения, в том числе текущую успеваемость;

- к инструментам, обеспечивающим связь между источниками данных, представленных в ИСУП и СДО Moodle, относятся: ИС «Электронный мониторинг» и веб-ресурс «Электронный атлас» – компоненты для мониторинга деятельности профессорско-преподавательского состава, связанной с онлайн-обучением. Системы обеспечивают возможность формирования преподавателем заявки на создание ЭУК в системе дистанционного обучения (СДО) Moodle, а также возможность обработки такой заявки.

Третий этап включает сбор и анализ итоговых данных, определение методов EDM для их обработки и визуализации полученных результатов. В качестве методов EDM для выявления связей между сущностями предметной области были использованы корреляционный анализ и метод «перегонки данных для принятия решение человеком» (Distillation of Data for Human Judgment) [5].

Для оценки интенсивности работы студентов в СДО Moodle были выделены показатели, например, количество действий, выполненных с элементами курса, в том числе: количество переходов по страницам курса, загрузка ресурсов, переход по ссылкам, отправка сообщений на форумах и чатах. Среди показателей также были выделены: активность студентов в чате(-ах) курса (количество отправленных сообщений в чате(-ах)); итоговая оценка за курс (формируется на основе полученных баллов при выполнении заданий, тестов); время, проведенное студентами на курсе.

Далее был выбран ряд дисциплин, играющих ключевую роль в подготовке по различным образовательным программам, освоение которых базируется на широком использовании ЭУК в СДО Moodle: геометрия, теория организации и управление организационной политикой в образовании, систематика растений, история Древнего мира, защита и сохранение культурного наследия и др.

Информация об успешности освоения студентами образовательной программы формируется в виде оценок за промежуточную аттестацию по модулям, дисциплинам и практикам в БД Herzen. Для связи данных из двух баз была разработана и реализована модель интеграции (Рис. 15).

Приведем данные об обучении пяти групп, среднее количество студентов в которых, составляет 20 человек. Для каждой дисциплины, группы студентов и выбранному показателю были рассчитаны коэффициенты корреляции, отражающие зависимость значений показателя и оценки студентов в рамках промежуточной аттестации по дисциплинам (Таблица 1).

Представленные в таблице 1 расчеты, являются частью результатов исследования, базируются на сравнительно небольшом объеме данных, однако, позволяют сформулировать предположение о том, что значения третьего показателя имеют наиболее стабильно высокую связь, среднее значение которой равно 0,7108. Таким образом, наличие в ЭУК средств, обеспечивающих возможность оценки текущей успеваемости (заданий, тестов) с достаточной степенью вероятности позволяют спрогнозировать успешность освоения дисциплины студентом.

В то же время, первый показатель имеет наименьшую связь, среднее значение равно 0,314. Можно сделать предварительный вывод о том, что данный показатель не является существенным фактором, характеризующим качество

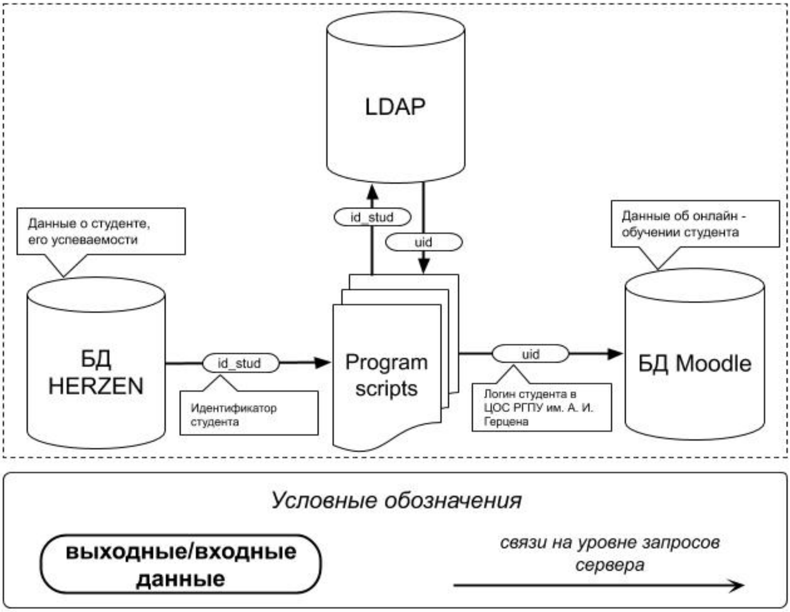


Рис. 15: Модель интеграции БД HERZEN и БД Moodle

изучения дисциплины студентами.

Анализ данных в разрезе дисциплин показал существенные различия в значениях показателей, связанные, по мнению авторов, со спецификой предметной области и структурой ЭУК по дисциплине. На основе анализа результатов взаимодействия пользователей с учебно-методическими материалами ЭУК можно формулировать предположения об эффективности курса и рекомендации по изменению образовательного ресурса с целью повышения его качества.

Полученные результаты позволяют авторам перейти к очередному этапу исследования, с опорой на расширенную базу данных для анализа успеваемости контингента студентов в целом по всем образовательным программам, реализуемым в университете.

Предложенная авторами методика анализа цифрового следа студентов в дальнейшем может использоваться для принятия обоснованных управленческих решений при проектировании, обновлении и реализации образовательных программ высшего образования с целью повышения качества подготовки.

Таблица 1: Коэффициенты корреляции (r) для выбранных показателей

Дисциплина	**Кол-во студентов в группе**	**Значения r для показателя**			
		Количество действий на курсе	**Активность студентов в чате(-ах)**	**Итоговая оценка за курс**	**Время на курсе**
Геометрия	20	0.2582	0.051	0.4014	0.5269
Теория организации и управление организационной политикой в образовании	27	0.6349	0.0308	0.917	0.5615
Систематика растений	16	0.1388	0.4070	0.9369	0.3882
История Древнего мира	29	0.1935	0.0494	0.6303	0.4290
Защита и сохранение культурного наследия	27	0.3447	0.5205	0.6959	0.4753

Литература

[1] Степаненко А. А., Фещенко А. В. «Цифровой след» студента: поиск, анализ, интерпретация // Открытое и дистанционное образование. 2017. №4 (68). С. 58–62. DOI:10.17223/16095944/68/9.

[2] Овсяницкая Лариса Юрьевна Интеллектуальный анализ данных как составляющая педагогического управления // Образование и наука. 2013. №10. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/intellektualnyy-analiz-dannyh-kak-sostavlyayuschaya-pedagogicheskogo-upravleniya (дата обращения: 14.10.2020).

[3] Белоножко П. П., Карпенко А. П., Храмов Д. А. Анализ образовательных данных: направления и перспективы применения // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». 2017. Том 9. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-obrazovatelnyh-dannyh-napravleniya-i-perspektivy-primeneniya/viewer (дата обращения: 05.07.2020).

[4] Луньков А. Д., Харламов А. В. Интеллектуальный анализ данных//Учебно-методическое пособие. Саратовский национальный исследовательский университет. — Режим доступа: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/1141.pdf (дата обращения: 03.10.20).

[5] Баранова Е. В., Верещагина Н. О., Швецов Г. В. Цифровые инструменты для анализа учебной деятельности студентов // Известия Российского государственного педагогического университета имени А. И. Герцена. - Санкт-Петербург, 2020. - N 198. - С. 56-65.

[6] Об образовании в Российской Федерации: федер. закон от 29.12.2012 №273-ФЗ (ред. от 31.07.2020).URL: http://www.consultant.ru/document /cons_doc_LAW_140174/b819c620a8c698de35861ad4c9d9696ee0c3ee7a/ (дата обращения: 03.10.2020).

[7] Рочев К. В. Информационные технологии. Анализ и проектирование информационных систем. Учебное пособие. Издательство "Лань 2019 г.

УДК 519.816

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Вилков В. Б.[1], Черных А. К.[2], Флегонтов А. В.[3]
[1] Военная академия материально–технического обеспечения
им. генерала армии А. В. Хрулёва
[2]Санкт–Петербургский военный институт войск
национальной гвардии Российской Федерации
[3]Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена,
[3]Санкт–Петербургский государственный университет
Санкт–Петербург
e-mail: [1]amirusha@rambler.ru, [2]nataliachernykh@mail.ru, [3]flegontoff@yandex.ru

Vilkov V. B., Chernych A. K., Flegontov A. V. Using a network model to solve a modified assignment Problem. The article considers a problem that is a modification of the assignment problem, and differs from it by the number of fractions of the graph under consideration and the efficiency criterion, which uses the truth values of the fuzzy statement «the corresponding system of relations is reliable». An approach to solving this problem is presented, based on the use of a network model, illustrated by an example.

В статье рассматривается задача, являющаяся модификацией задачи о назначениях, и отличающаяся от нее числом долей рассматриваемого графа и критерием эффективности, в качестве которого используется значения истинности нечеткого высказывания «соответствующая система связей надежна». Представлен подход к решению указанной задачи, основанный на использовании сетевой модели, проиллюстрированный примером.

Ключевые слова: ориентированный связный граф, алгоритм решения модифицированной задачи о назначении, максимальный поток, нечёткие множества.

Key words: oriented connected graph, algorithm for solving the modified assignment problem, maximum flow, fuzzy sets.

Напомним постановку задачи о назначениях [1,2].

Имеется два одинаковые по числу элементов конечные множества. Известны эффективности всевозможных пар элементов, взятых по одному из каждого из этих множеств. Требуется каждому элементу одного множества соотнести единственный элемент другого так, чтобы суммарная эффективность полученного набора пар элементов была бы максимальной. При этом рассматриваемое отображение должно быть взаимно однозначным. Отметим, что эта задача является частным случаем транспортной задачи. Для решения задачи о назначениях в такой постановке Г.Куном был предложен «венгерский метод» [3], учитывающий её особенности.

Задачу о назначениях в более общей постановке часто удобно формулировать в терминах теории графов, используя двудольные графы. Итак, пусть дан конечный двудольный граф. Предполагается, что каждая вершина первой доли соединена ребрами с каждой вершиной второй доли. Каждое ребро является взвешенным, и его вес не отрицательный. Найти паросочетание [4,5] максимального веса (вес паросочетания равен сумме весов ребер, его образующих) [6].

Рассмотрим ориентированный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ориентированных ребер (дуг) E. Предполагается что

$$V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i, \text{ где } V_i \cap V_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \text{ и } E = \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i,$$

где $V_i = \left\{v_1^i, v_2^i, ..., x_{n_i}^i\right\}, i = 1, 2, ..., k, V_i$ – i–я доля вершин графа G, а v_j^i – j–я вершина i–ой доли, при этом, если дуга $(u, v) \in E_i$, то $u \in V_i$ и $v \in V_{i+1}$. Такой граф будем называть k дольным.

Введем для рассматриваемого k дольного графа ряд понятий, схожих с соответствующими понятиями в теории двудольных графов.

Путь, состоящий из $k-1$ дуги и содержащий k различных вершин по одной из каждого из множеств $V_i, i = 1, 2, ..., k$, будем называть k вершинным ансамблем.

Множество таких k вершинных ансамблей, что любые два различных ансамбля из этого множества не являются смежными, т.е. не имеют общих вершин, назовем k вершинным сочетанием.

Будем предполагать, что граф G является взвешенным, каждой его дуге соотнесено значение истинности нечеткого высказывание «соответствующая связь надежна», тогда вес k вершинного сочетания будет равен минимальному из весов дуг, образующих это сочетание [7,8,9].

Требуется найти k вершинное сочетание, состоящее из максимального числа k вершинных ансамблей и имеющее максимальный вес среди всех таких сочетаний.

Если граф G изображен на рисунке 1, то граф $\tilde{G}$ – на рисунке 2.

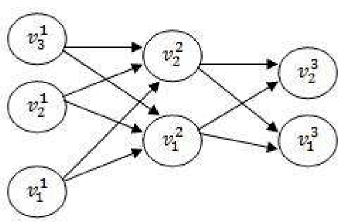


Рис. 16: Граф G.

Путь на графе $\tilde{G}$ от источника до стока будем называть полным путем.

Заметим, что, согласно построению графа $\tilde{G}$, любой полный путь на нем имеет вид:

$$(s, \nu_{l_1}^1), (\nu_{l_1}^1, \tilde{\nu}_{l_1}^1), (\tilde{\nu}_{l_1}^1, \nu_{l_2}^2) \ldots (\tilde{\nu}_{l_{k-1}}^{k-1}, \nu_{l_k}^k), (\nu_{l_k}^k, \tilde{\nu}_{l_k}^k), (\tilde{\nu}_{l_k}^k, t)$$

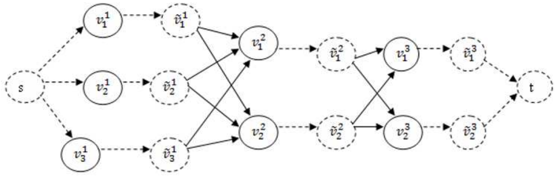


Рис. 17: Граф $\tilde{G}$. Пунктиром выделены дуги и вершины, которых нет в G

Между k вершинными ансамблями на графе G и полными путями на графе $\tilde{G}$ существует взаимно однозначное соответствие: k вершинному ансамблю на графе G, содержащему вершины $\nu^1_{l_1}, \nu^2_{l_2}, \ldots, \nu^k_{l_k}$, поставим в соответствие полный путь на графе $\tilde{G}$, проходящий через вершины

$$s, \nu^1_{l_1}, \tilde{\nu}^1_{l_1}, \nu^2_{l_2}, \tilde{\nu}^2_{l_2}, \ldots, \nu^k_{l_k}, \tilde{\nu}^k_{l_k}, t.$$

Для решения сформулированной выше задачи будем рассматривать граф $\tilde{G}$ как транспортную сеть, для которой пропускная способность любой коммуникации (дуги) равна единице. Вес дуг из E такой же как и для графа G, вес остальных дуг равен единице. Вершину s будем рассматривать в качестве источника, вершину t в качестве стока.

Используя алгоритм Форда-Фалкерсона [6,10], найдем на этой транспортной сети максимальный поток, обозначим его $\{\hat{x}_{u\nu}\}_{(u,\nu)\in\tilde{E}}$, где $\hat{x}_{u\nu}$ - поток по дуге (u, ν). При целочисленных пропускных способностях этот алгоритм дает целочисленное решение, следовательно, в нашем случае поток $\hat{x}_{u\nu}$ по дуге (u, ν) может быть равен только нулю или единице.

Дугу (u, ν), для которой $\hat{x}_{u\nu} = 1$, назовем загруженной. Путь, все дуги которого загруженные, будем называть загруженным. Заметим, что разные полные загруженные пути на графе $\tilde{G}$ пересекаются только в источнике и в стоке.

Действительно, из любой вершины множества V_i на графе $\tilde{G}$ при любом i выходит только одна дуга и в любую вершину множества $\tilde{V}_i$ при любом i входит тоже только одна дуга. Пропускные способности всех дуг равны единице, а суммарный поток, прибывающий в пункт, равен суммарному потоку его покидающему.
сочетание состоит из максимального числа ансамблей. Действительно, если бы существовало сочетание из большего числа ансамблей, то на графе $\widetilde{G}$ нашлось бы большее число полных путей и тогда полученный поток не был бы максимальным.

Для выбора k вершинного сочетания, состоящего из максимального числа k вершинных ансамблей и имеющего максимальный вес среди всех таких сочетаний, надо в рассматриваемом графе найти максимальное k вершинное сочетание (для этого требуется найти на рассматриваемой сети максимальный поток), найти в нем дугу минимального веса и убрать из него все дуги, вес которых не превосходит только что найденного веса. Полученный граф рассмотреть в качестве исходного и все повторить. И так далее, пока не получим поток меньшей величины. Сочетание, полученное на предыдущем шаге, и будет искомым.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий предложенный алгоритм.

Пример. Пусть веса дуг графа, представленного на рисунке 1, указаны в таблицах 2 и 3. Найти 3 вершинное сочетание, состоящее из максимального числа 3 вершинных ансамблей и имеющего максимальный вес среди всех таких сочетаний.

Таблица 2: Надежность связей между 1 и 2 долями

Первая доля	Вторая доля	
	ν_1^2	ν_2^2
ν_1^1	0,6	0,8
ν_2^1	0,7	0,6
ν_3^1	0,7	0,9

Таблица 3: Надежность связей между 2 и 3 долями

Вторая доля	Третья доля	
	ν_1^3	ν_2^3
ν_1^2	0,9	0,6
ν_2^2	0,8	0,7

1. Решаем на сети, изображенной графом с рисунка 2, задачу о максимальном потоке. Вариант загруженных дуг на рисунке 3 отмечен жирными линиями. Это пути, проходящие через вершины $s, \nu_1^1, \widetilde{\nu}_1^1, \nu_1^2, \widetilde{\nu}_1^2, \nu_1^3, \widetilde{\nu}_1^3, t$ и $s, \nu_3^1, \widetilde{\nu}_3^1, \nu_2^2, \widetilde{\nu}_2^2, \nu_2^3, \widetilde{\nu}_2^3, t$ они соответствуют 3 вершинному сочетанию, состоящему из двух трех вершинных ансамблей ν_1^1, ν_1^2, ν_1^3, и ν_3^1, ν_2^2, ν_2^3. Вес полученного 3 вершинного сочетания равен 0,6.

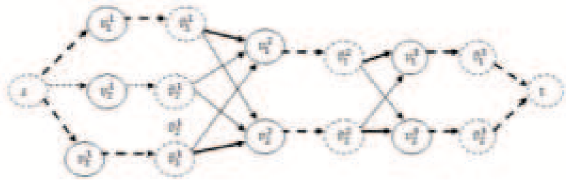


Рис. 18: Возможный вариант максимально потока

Запрещаем использование дуг, вес которых не превосходит 0,6. На графе с рисунка 3 это дуги $(\widetilde{\nu}_1^1, \nu_1^2)$, $(\widetilde{\nu}_2^1, \nu_2^2)$, $(\widetilde{\nu}_1^2, \nu_2^3)$, получаем граф, изображенный на рисунке 4.

2. В возможном варианте максимального потока загруженными являются пути ν_2^1, $\widetilde{\nu}_2^1$, ν_1^2, $\widetilde{\nu}_1^2$, ν_1^3, $\widetilde{\nu}_1^3$ и ν_3^1, $\widetilde{\nu}_3^1$, ν_2^2, $\widetilde{\nu}_2^2$, ν_2^3, $\widetilde{\nu}_2^3$, соответствующие дуги на рис. 4 выделены жирными линиями. Вес полученного 3 вершинного сочетания равен 0,7.

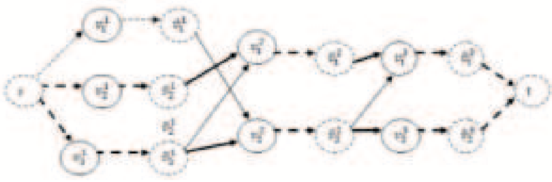


Рис. 19: Граф после первого шага и вариант максимального потока на нем

Запрещаем использование дуг, вес которых не превосходит 0,7. На графе с рисунка 4 это дуги $(\tilde{\nu}_2^1, \nu_1^2)$, $(\tilde{\nu}_3^1, \nu_1^2)$, $(\tilde{\nu}_2^2, \nu_2^3)$, получаем граф, изображенный на рисунке 5.

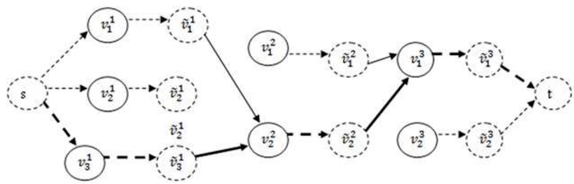


Рис. 20: Граф после второго шага

3. На сети, соответствующей последнему графу, максимальный поток равен единице, поэтому решение было получено на предыдущем шаге, и искомое 3 вершинное сочетание состоит из двух 3 вершинных ансамблей – $\nu_2^1, \nu_1^2, \nu_1^3$ и $\nu_3^1, \nu_2^2, \nu_2^3$ и имеет максимальный вес, равный 0,7.

Отметим, что сложность предлагаемого алгоритма не более $O(E^2 f)$, где E – число ребер, f – величина максимального потока.

Вывод.

Таким образом, получено новое решение предложенной модифицированной задачи о назначении, на основе которого несложно создать компьютерное приложение.

При этом наибольший интерес в предложенной работе представляет, на наш взгляд, прием, связанный с построением по заданному графу G графа $\tilde{G}$, использование которого позволяет избежать пересечения полных путей при использовании алгоритмов Форда-Фалкерсона. Нам представляется, что этот прием может быть с успехом применен для решения и ряда других задач, связанных с построением k вершинных сочетаний, например, для трёх вершинного сочетания можно ознакомиться с задачей, приведённой в [11].

Мы решали задачу, в которой отыскивалось максимальное k вершинное сочетание, имеющее максимальный вес среди всех таких сочетаний. Алгоритм легко модифицируется для решения задачи по отысканию k вершинного сочетания, состоящего из l (l не превосходит их максимально числа) k вершинных ансамблей и имеющего максимальный вес среди всех таких сочетаний.

Литература

[1] Хемди А., Таха. Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 903 с.

[2] Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972. Т. 1. – 335 с.

[3] Harold W. Kuhn. The Hungarian Method for the assignment problem// Naval Research Logistics Quarterly, 2. 1955. P. 83–97.

[4] Харари Ф. Теория графов. – М.: Ленанд, 2018. – 304 с.

[5] Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 434 с.

[6] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2–е издание. Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс»,2011. – 1296 с.

[7] Вилков В. Б., Флегонтов А. В., Черных А. К. Математическая модель задачи о распределении в условиях неопределенности// Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. N2. – С. 180–191.

[8] Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь,1982. – 429 с.

[9] Аверкин А. Н., Батыршин И. З, Блишун А. Ф., Силов В. Б, Тарасов В. Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.–мат. лит., 1986. – 312 с.

[10] Форд Л. З., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 277 с.

[11] Вилков В. Б., Черных А. К. О подходе к решению задачи комплектования подразделений личным составом на основе потокового алгоритма// Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму. 2019, N1–2 (127–128) – С. 29–37

УДК (531.36+624.07)

ЭТАП КОНСТРУИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АНЕВРИЗМЫ. ТЕЧЕНИЯ В КАВЕРНЕ И ПРОТИВОРЕЧИЯ В ЗАДАЧЕ В „ЗАКРЫТОЙ“ КЮВЕТЕ

Волосова Н. К., Басараб М. А., Волосова А. К., Волосов К. А.,
Зайцев В. Ф., Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф.
Herzen State Pedagogical University of Russia,
Bauman Moscow State Technical University,
Russian University of Transport (IMIIT),
RF., Polotsk State University, Belarus.
e-mail konstantinvolosov@yandex[.ru, navolosova@yanex.ru,
dmitrij.pastuhov@mail.ru

Volosova N. K., Zaitsev V. F., Basarab M. A., Volosova A. K., Volosov K. A., Pastuhov D. F., Pastuhov Y. F. [The stage of constructing a mathematical model of an aneurysm. Types of flow in a „closed“ cuvette and contradictions in the problem with a movable cover]

Professor of Russian Herzen State Pedagogical University (Saint Petersburg, Russia) V. F. Zaitsev pointed out the need to start work on the construction of a mathematical model of an aneurysm. It turned out that there is no such model at the moment. The closest models in fluid mechanics are Newtonian fluid flows in cuvettes with a movable lid. We divide two tasks here: flows in a „closed“ and „open“ ditch. In our work, contradictions in the solutions are indicated boundary value problem of the flow of a viscous liquid in a „closed“ a cuvette with a movable lid. The properties of solutions to various nonlinear problems are compared. An analogy is drawn with the problems of the flow of the Blasius plate. For the first time the main members of the equations in the geometry of the cell and constructed a simple asymptotic behavior gives an overview of the decisions and direction of research by analogy to the Blasius problem in boundary layer theory. The transition to the boundary value problem with an „open“ cell, which can be considered as a simple model of the aneurysm problem, is justified. Various approximations of the solution of the first boundary value problem for the Navier Stokes equations and the types of flows in a closed cell are investigated by numerical iterative methods. This is necessary for calculating the blood clotting process at the third stage of studying the problem. This work is a necessary step towards constructing a mathematical model of an aneurysm.

Keywords: a mathematical model of an aneurysm, flows in a „closed“ and „open“ ditch.

Посвящается памяти В. Ф. Зайцева. Профессор Российского Государственного Педагогического Университета им. А.И. Герцена (Санкт-Петербург, Россия) В.Ф. Зайцев указал на необходимость начать работы по построению математической модели аневризмы. Он знал о существовании такой личной угрозы, и как учёный хотел изучить это явление, но не хватило времени. В научной литературе имеется статистическое описание [1] и описание различных предположений о причинах появления и эволюции аневризмы. Но оказалось, что математической модели на данный момент времени нет. Наиболее близкие модели в механике жидкости это течения жидкости в кюветах с подвижной крышкой. Мы разделяем здесь две задачи: течения в „закрытой“ и „открытой“ кювете. В нашей работе указаны противоречия в решениях краевой задачи вихревого течения вязкой жидкости в „закрытой“ кювете с подвижной крышкой. Сравниваются свойства решений различных нелинейных задач. Проводится аналогия с задачами обтекания пластины Блазиуса. Впервые выделены главные члены уравнений в геометрии кюветы и построена простая асимптотика, дающая общее представление о решении и направление исследования по аналогии с задачей Блазиуса в теории пограничного слоя. Обоснован переход к краевой задаче с „открытой“ кюветой, которую можно рассматривать, как простую модель задачи об аневризме. Численными итерационными методами исследо-

ваны различные приближения решения первой краевой задачи для уравнений Навье-Стокса и типы течений в закрытой кювете. Это необходимо для вычислений процесса свёртывания крови на втором этапе изучения проблемы. Данная работа является необходимым шагом к построению математической модели аневризмы.

Ключевые слова: математическая модель аневризмы, вихревое течение вязкой жидкости в „закрытой“ и „открытой“ кювете с подвижной крышкой.

1. Введение. В данной работе разделяем отдельно две задачи: „течения в закрытой каверне с подвижной крышкой“ и „течения в открытой каверне с подвижной крышкой“ . Первая модель (см. литературу в [2-8]) наиболее хорошо изучена при больших числах Рейнольдса из-за своего применения в авиации, космонавтике.

Поясним, что в „закрытой“ каверне движется конечная масса жидкости под действием импульса, передаваемого от подвижной крышки. В задаче с „открытой“ каверне движется жидкость, составленная из молекул и частиц, количество которых меняется из-за того, что их некоторую часть забирает поток, проходящий над кюветой. Возможно, исследование моделей даст возможность вычислить, какой расход этого горизонтального потока (с модели потока) необходим для поддержания жизнедеятельности всего организма даже при наличии аневризмы. Отметим, что основной объём публикаций приходится на численные решения разными методами задачи с „закрытой“ кюветой.

2. Противоречия, возникающие в модели в закрытой каверне с подвижной крышкой. Первоначально во всех цитируемых работах и в данной работе делается предположение о том, что функции скоростей, давления и тока являются непрерывными и дифференцируемыми необходимое число раз.

Аневризма представляет из себя локализованный в пространстве объект с очень сложной, имеющей много вариантов, поверхностью, которая отделяет объем пространства, в котором происходят важные, сложные для жизнедеятельности всего организма процессы [1]. Поэтому для простоты модели в данной работе предлагаем считать внешней границей аневризмы поверхность кубической „открытой“ кюветы. Пример такого течения жидкости приведён в [9] с. 17. В кювете обрзазуется последователность вихрей, иненсивность которых уменьшается к дну кюветы.

Замечание 1. В данной работе используются две декартовые системы координат. В первой части работы, при построении асимптотических формул, начало декартовой системы координат выбрано в „центре“ области. Во второй части в работы, при численных расчетах, используется вторая системе декартовых координат, и её начало $(x = 0, y = 0)$ удобно связать с левым нижним внутренним углом кюветы [9]. Ось абсцсис направлена направо, а ось ординат – вверх.

Отдельно следует заметить, что краевые условия на границе подвижной части и неподвижной части стенки терпят разрыв первого рода в модели с „закрытой“ кюветой. Пример не дифференцируемой линии тока приведен в [8]. Она имеет петли, и пики, то есть точки в которых производная функции тока и скоростей терпит разрыв. Таким образом, имеет место противоречие с сделанными предположениями. В „открытой“ кювете при появлении зазора и внешнего потока, изменяются краевые условия и эти противоречия исчезают.

Аналогии с задачей Блазиуса. В данной работе используется идея переноса информации о граничных условиях от границы вглубь области. Эта идея использовалась при построении приближённых решений „методом R-функций“ [11] с. 31, и асимптотическими методами, например [13-15]. В [13] (с .8) подробно описаны приключения и эволюция теории пограничного слоя. Там же приведена большая и подробная библиография, в которой выстраивалась идеология „трёхпалубной структуры“ решения. В [14] приведен „двухпалубный“ вариант этой теории. Построенные в [13, 15] формальные ряды не являются решениями никаких краевых задач, однако лежат в русле исследований теории пограничного слоя.

Классическая теория Г. Блазиуса строит приближённое решение течения в пограничном слое с помощью нелинейного ОДУ.

Эта теория оказалась чрезвычайно полезным практическим шагом и инструментом в инженерных расчётах. В более сложных задачах уравнение Блазиуса, конечно, не дает решения, однако теория пограничного слоя задаёт общее направление приближенных исследований.

Авторы данной работы предположили и нашли аналогии с ролью решений уравнения Блазиуса в теории и пограничного слоя при течениях в кювете. Авторы предположили, что и в общей постановке существуют простые решения некоторого приближенного нелинейного уравнения, которые указывают на общие свойства течения.

***Замечание* 3.** При разностной аппроксимации краевой задачи предполагается, что функции, описывающие изменение основных законов сохранения (масса, импульс. энергия и т.д.), являются непрерывными (кусочно непрерывными) в приближении уравнений сплошной среды. Помимо физических требований к разностным схемам предъявляются требования однородности. Оно заключается в том, что формулы, по которым ведётся расчёт, должны записываться единообразно во всей области, во всех узлах сетки, без явного выделения „нерегулярностей“ решения, например точек разрыва. Свойства того или иного алгоритма, как правило, трудно оценить теоретически. Поэтому при анализе результатов, помимо априорных соображений, большую роль играют апостериорные исследования. Сюда в первую очередь относится опробование алгоритмов на специальных „точных“ решениях-„тестах“. При этом проводится расчёт некоторых упрощённых вариантов задачи, который не дает, быть может, полную физическую картину процесса, но допускает простое аналитическое решение. В данной задаче точных решений нет. Поэтому эту роль могут выполнять асимптотические решения, например, построенные в данной работе. Сопоставление результатов численного расчёта с „тестом“ позволяет судить о точности алгоритма, уточнить значения неизвестных констант, оценить скорость сходимости и т.д. [13, 55].

В начале 21 века интерес исследователей переносится в область механики течения биологических жидкостей (крови) в сложных областях. Поэтому число Рейнольдса в наших расчётах является малым.

Обсуждение краевых условий и экспериментальных данных. Упрощённое изображение кюветы в двухмерном случае представляет собой прямоугольник. На внутренних поверхностях кюветы выполнены условия прилипания: продольная u и вертикальная v, безразмерные скорости $u = 0$, $v = 0$ на внутренних стенках.

a) Верхняя крышка кюветы движется со скоростю $u = 1$, а $v = 0$ (моделируя внешний поток).

Так как в малую щель уходит масса жидкости, и происходит обмен импульсом с основным объёмом жидкости. Несмотря на то, что щель мала, пренебречь ей нельзя, просто здесь имеем дело с „жесткой задачей". Само моделирование имеет смысл пока происходит такой обмен частицами крови с другими системами организма.

3. Постановка задачи. Краевые условия. Краевые условия в первой системе координат на внутренних боковых стенках Γ в каверне (в двухмерном случае) имеют вид

$$u|_\Gamma = 0, \qquad v|_\Gamma = 0, \qquad \{x = \pm 1, -1 \le y \le 1 + m(\varepsilon)\}. \qquad Re = \sqrt{\varepsilon} \tag{1}$$

Это условия прилипания на боковых гранях куба. На верхней подвижной грани куба, которую обозначим через $\Gamma|_{\Gamma top}$, краевые условия имеют вид

$$u|_{\Gamma top} = 1, \quad y = 1, \quad -1 \le x \le 1, v|_{\Gamma top} = 0, \quad y = 1, \quad -1 \le x \le 1. \tag{2}$$

Краевые условия на дне кюветы имеют вид условий прилипания

$$u|_{\Gamma top} = 0, \quad y = -1, \quad -1 \le x \le 1, \tag{3}$$
$$v|_{\Gamma top} = 0, \quad y = -1, \quad -1 \le x \le 1. \tag{4}$$

На первом этапе построения аналитического асимптотического решения предполагаем, что существует малый пераметр „время", который позволяет в главном слагаемом асимптотических рядов [4-6] считать течение „установившимся". Этот этап формирования и преобразование подробно описано в [12] и во многих статьях, ссылки на которые приведены в литературе в [13]. Поэтому здесь мы его пропускаем. То есть предполагается, что вязкая релаксация поля скоростей происходит много быстрее, чем развитие биохимических процессов. Полная система уравнений модели имеет вид

$$\operatorname{div}\, \mathbf{Q}(x, y) = 0, \qquad (\mathbf{Q}, \bigtriangledown)\mathbf{Q}(x, y) = - \bigtriangledown \mathbf{P}(x, y) + \sqrt{\varepsilon}\Delta\mathbf{Q}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{D_1 \Delta \Theta(x, y, t)} - (\mathbf{Q}, \bigtriangledown \mathbf{\Theta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})) + \alpha \frac{\mathbf{\Theta^2}}{\mathbf{\Theta + \Theta_0}} - \mathbf{X_1 \Theta} - \gamma \mathbf{\Theta} \varphi, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{D_2 \Delta} \varphi - (\mathbf{Q}, \bigtriangledown \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})) + \beta \psi \Big(\mathbf{1} - \frac{\varphi}{\mathbf{c_0}}\Big)\Big(\mathbf{1} + \Big(\frac{\varphi}{\varphi_\mathbf{0}}\Big)^\mathbf{2}\Big) - \mathbf{X_2} \varphi \tag{7}$$

Здесь $Q = \{u(x, y), v(x.y)\}$ – вектор скоростей, $u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\psi(x, y)$ – функция тока. Стандартным в гидродинамике приемом (дифференцированием компонент уравнения (1) и их вычитанием) исключаем производные давления. Получим в главном члене асимптотики уравнение

$$\Delta \psi_o(x, y) = 0. \tag{8}$$

Сравнение весов слагаемых производят со помощью техники многоугольников Ньютона и Пюизё [15]. В [14, 15] подробно объясняется техника использования многоугольников Ньютона-Пюизё.

Существует решение уравнения, которое можно трактовать как проекцию некоторой траектории из тора КАМ (Колмогорова, Арнольда, Мозера) теории на плоскость $z = 0$.

$$\psi(x_1, y_1) = (x_1 b_x - C_x)^2 + (y_1 b_y - C_y)^2 - R^2 \tag{9}$$

Все константы b_x, b_y, C_x, C_y, m, R здесь произвольные, но их следует задавать такими, чтобы изображение находилось во внутренней области кюветы. Из (9) следует уравнение эллипса или окружности. Эта функция, как и в теории пограничного слоя, не является решение краевой задачи, однако задаёт общее направление исследования. Нами использованы формулы из [16].

6.Численное исследование задачи в закрытой кювете

Рассматривается задача установления в прямоугольной каверне. Опишем некоторые подробности алгоритма. В начальный момент задаем произвольные значения функции тока (5) во всей внутренней области закрытой кюветы. Численное решение последовательности уравнений Пуассона описано в работах [2,4-6-7].

***Замечание о уравнениях (5), (6)* 4.** Полную систему феноменологической модели свёртывания крови можно найти в работах Ф. И. Атауллаханова с сотрудниками [17]. Аналитические результаты затруднительно получить, и они имеют место только в одномерном случае [18]. Из двух уравнений (5), (6) следует одно уравнение четвёртого порядка, которое имеет свойства многих классических уравнений, начиная от уравнения Бюргерса, позволяющие в одномерном случае строить решения импульсов и локализованных волн. В целом для изучения двухмерной ситуации применяем численные методы. Ставим в кювете краевые условия второго рода.

Выражаем благодарность за интерес и полезные советы академика РАН В. П. Маслова, д.ф-м.н. проф. В. Г. Данилову и д.ф.-м.н. проф. С. Ю. Доброхотову.

Литература

[1] Г. Н. Лазаренко. Предикаты кардиального риска у пациентов с аневризмой брюшного отдела аорты. Автореферат, канд. мед. наук. 2011 г. Москва.

[2] Волосова Н. К., Басараб М. А., Волосов К. А., Волосова А. К., Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 9-1 (67). С. 1–10.

[3] Фомин А. А., Фомина Л. Н. Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т.7. №4.С. 363–377.

[4] Волосова Н. К., Басараб М. А., Волосов К. А., Волосова А. К., Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 5-1 (63). С. 11–17.

[5] A. Salih Streamfunction – Vorticity Formulation//Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. p. 10.

[6] Волосова Н. К. О конечных методах решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с краевым условием Дирихле // Вестник Полоцкого университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2020. – № 4. – С. 78–92.
[7] Волосова Н. К., Басараб М. А., Волосов К. А., Волосова А. К., Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. Модифицированное разностное уравнение К. Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности // Евразийское Научное Объединение. – 2020. № 3-1 (61). С. 4–11.
[8] Hendrik C. Kuhlmann, Franceasco Romano. The Lid-Driven cavety. http:/ www.resachgate.net > 324413434, 2018
[9] Атлас течений жидкости и газа. Перевод с англ. Мир., Москва. 1986.
[10] А. А. Самарский введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
[11] М. Ф. Кравченко, М. А. Басараб Булева Алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. М.: Физматлит. 2004.
[12] Волосов К. А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде // Дифференциальные уравнения, 2007, Т. 43, № 4, С.492–497.
[13] Гайдуков Р. К., Асимптотика решения задач обтекания несжимаемой жидкостью поверхностей с малыми неровностями при больших числах Рейнольдса. Автореферат диссертации. 2016.
[14] В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур). С добавлением Н. А. Колобова, - М.: Наука, 1987, 352 с.
[15] Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Kluver Academic publishers. Dordrecht. Boston. London, 1995. – 316 p.
[16] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник. Дифференциальные уравнения с частными производными. Международная программа образования 1996.
[17] Атаулаханов Ф. И.. Гурия Г. Т., Сафрошкина А. Ю. Пространственные аспекты динамики свёртывания крови. Феноменологическая модель.
[18] Волосов К. А., Вдовина Е. К., Пугина Л. В. Моделирование „пульсирующих“ режимов динамики свёртывания крови. Математическое моделирование. 2014, т. 26, № 12 , с. 14–32 .

УДК 517.9

ГЕНЕРАЦИЯ ИГРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Демидов И.А.
Санкт-Петербургский
Государственный Университет
Санкт-Петербург
e-mail: st086665@student.spbu.ru

Demidov I. A. Generation of game levels using a logistic lattice. This paper provides an overview of some algorithms for generating game levels in rogue-like games. We propose to obtain such levels as phase portraits of logistic lattice. This system generates a wide spectrum of complex structures including spiral waves. The digital description of a portrait gives a possibility to correct it to satisfy requirements for games level.

Keywords: computer simulation, dynamic system, procedural generation, cellular automaton, coupled map lattice, logistic lattice.

В данной работе приводится обзор некоторых алгоритмов генерации игровых уровней в играх жанра rogue-like, а также предлагается метод генерации, основанный на использовании фазовых портретов логистической решетки. Эта система порождает широкий спектр сложных текстур, в том числе спиральные волны. Числовое представление полученного изображения позволяет модифицировать игровое пространство так, чтобы удовлетворять требованиям игры.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, динамическая система, процедурная генерация, клеточный автомат, решетка связанных отображений, логистическая решетка.

Из всего существующего многообразия жанров компьютерных игр, в данной работе рассматривается поджанр ролевых видеоигр – roguelike, характерной особенностью которого является процедурная, то есть использующая алгоритмы для автоматического создания, случайная генерация игровой местности (уровня), с целью ее дальнейшего исследования игроком.

Обычно в играх подобного жанра игровой уровень представляет из себя связанную структуру подземелий или пещер (рисунок 1).

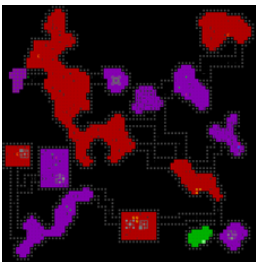


Рис. 21: Пример игрового уровня.

Двоичное разбиение пространства. Метод двоичного разбиения пространства (binary space partitioning) заключается в рекурсивном делении некоторой плоскости на две части произвольного соотношения, до тех пор, пока не будет удовлетворено заданное ранее условие [1]. Затем, после нескольких итерации разбиения, в каждом из блоков создается «комната» произвольного размера. Соединения между «комнатами» происходят путем прохода по двоичному дереву, в котором элементы-потомки – это разделенные на очередном шаге области. Результатом выполнения алгоритма является структура, подобная, изображенной на рисунке 2.

Рис. 22: Результат BSP-алгоритма.

Недостатком использованием данного метода можно считать то, что сгенерированная структура без дальнейших модификаций имеет «коридорно-комнатный» вид, что в некоторых ситуациях, например при генерации пещеры, не соответствует игровой ситуации.

Алгоритм случайного блуждания. Основная идея алгоритма случайного блуждания заключается в том, что структура игрового пространства (в данном случае подземелья) образуется в результате прокладки произвольного маршрута на заданном участке местности [2]. Изначально, каждая клетка некоторого пространства, на котором будет происходить генерация, отмечается как «стена». Начало прокладывания пути начинается из случайной точки данного пространства. 1. Выполняется шаг в произвольном направлении. 2. Если оказавшаяся клетка помечена как «стена», то она становится «полом». Данные шаги повторяются до тех пор, пока не будет получена требуемая структура игрового уровня. Получаемая конфигурация будет подобна той, что изображена на рисунке 3.

Из недостатков использования данного алгоритма можно отметить вероятность генерации большого количества коридоров, что в некоторых условиях может быть неуместно.

Клеточный автомат. Применяя клеточный автомат для генерации игрового пространства, мы изначально размечаем рабочую область произвольным образом на «живые» («пол») и «не живые» («стена») клетки [3]. Затем, задав правила перехода клеток в иное состояние, запускаем клеточный автомат, с

Рис. 23: Результат алгоритма случайного блуждания.

каждой итерацией которого система игрового уровня приводится к требуемому виду, который представлен на рисунке 4.

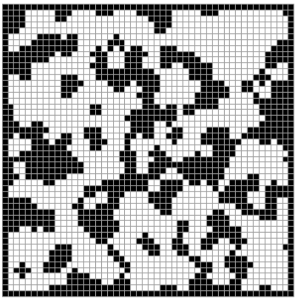


Рис. 24: Результат работы клеточного автомата.

Недостаток использования данного метода заключается в том, что существует возможность генерации изолированных от игрока участков местности.

Использование логистической решетки. В ходе поиска иных методов генерации произвольного игрового пространства были рассмотрены фазовые портреты сложных динамических систем, в частности различных решеток связанных отображений. Мы рассматриваем логистическую решетку, где в узлах размещены одномерные логистические отображения, взаимодействующие с помощью параметра связи. Известно, что такие системы обладают сложной динамикой, и могут порождать как хаотические, так и организованные структуры, в том числе спиральные волны. В частности, многие фазовые портреты могут быть выбраны в качестве кандидатов на пещерообразные структуры. На рисунке 5 представлен результат работы алгоритма, моделирующего поведение логистической решетки, для наглядности перерисованный в черно-белую палитру цветов. При более точном подборе и настройке параметров увеличится связность путей (белый цвет) в сгенерированной структуре.

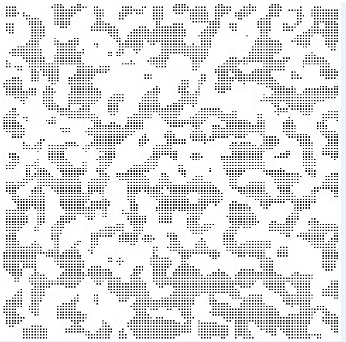


Рис. 25: Результат работы логистической решетки.

Основным преимуществом предложенного подхода является существование большого числа изображений, не повторяющих друг друга. Изменение параметров логистического отображения и параметра связи между узлами обеспечивает достаточное разнообразие таких структур. Кроме того, каждое сгенерированное изображение описывается значениями отображения в узлах решетки, т.е. числовой матрицей. Для целей визуализации эта матрица отображается на выбранную палитру цветов. Таким образом, для необходимой корректировки игрового уровня, например обеспечения прохода на определенном участке, нам нужно подправить данное числовое представление. Предложенный метод позволяет существенно расширить возможности генерации игровых пространств в задачах рассмотренного типа.

Литература

[1] Constructive Generation Methods for Dungeons / Shaker, N., Liapis, A., Togelius, J., Lopes, R., & Bidarra, R. – 2016. – С.31–55.

[2] Baron, J. R. (2017). Procedural Dungeon Generation Analysis and Adaptation. Proceedings of the SouthEast Conference on – ACM SE '17 / Baron, J. R. – 2017.

[3] Van der Linden, R., Lopes, R., & Bidarra, R. (2014). Procedural Generation of Dungeons / Van der Linden, R., Lopes, R., & Bidarra, R. – 2014. – С. 78–79.

УДК 004.942

МОДЕЛИ АГРЕГАЦИИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДИФФУЗИЕЙ НА ТРИАНГУЛИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Доронин Г. А.
Санкт-Петербургский
государственный университет
Санкт-Петербург
e-mail: goshakdoronin@gmail.com

Doronin G. A. Diffusion-limited aggregation modeling on triangulated surfaces.

1. Введение

Диффузия - это один из основных процессов, которые возникают при взаимодействии различных веществ. Как и многие другие процессы, процесс диффузии характеризуется возникновением фрактальных структур, причем общее поведение системы может определяться с помощью некоторых законов или принципов, но поведение части процессов можно определить только экспериментальным путем. Моделирование протекания диффузионных процессов - это важное направление в изучении взаимодействия веществ, которое может помочь предсказать поведение системы, определить ее законы и принципы.

Фрактальные структуры, которые возникают при диффузионных процессах, называются фрактальными кластерами. **Фрактальный кластер** или фрактальный агрегат – это объект с фрактальной структурой, который возникает при слипании неких частиц, двигающихся хаотично или по определенному закону. Важным свойством фрактальных кластером является то, что их плотность уменьшается при увеличении размера кластера. В качестве наглядного примера фрактального кластера может выступать, к примеру, структура, возникающая при росте кристаллов [1], либо же структура, образующаяся при слипании красных кровяных телец в крови [2].

2. Основные диффузионные модели.

Основными параметрами диффузионных процессов являются плотность среды, вещества. Это определяет характер движения частиц и образования агрегатов. Модели построения фрактальных кластеров можно разделить по следующим свойствам [3]:

- По характеру процесса (кластер-частица или кластер-кластер)
- По характеру движения частиц или кластеров (хаотичное или прямолинейное)
- По характеру слипания частиц или кластеров (в зависимости от вероятности)

Первая компьютерная модель, которая описывала рост фрактального кластера, была представлена Виттеном и Сандером [4] и была названа **DLA-моделью** (Diffusion-limited aggregation). Данная модель описывает броуновское движение частиц в пространстве, которые прилипают друг к другу при соприкосновении. С помощью данной модели можно имитировать процессы, протекающие в жидкостях или газах. Так как эта модель предполагала простой способ роста кластера, то она привлекла внимание к этой теме и подтолкнула к созданию новых диффузионных моделей и алгоритмов.

Физические условия, принципиально отличающиеся от модели DLA, отвечают модели **CCA** (Cluster-cluster aggregation, кластер-кластерная агрегация) [5]. Данная модель состоит из двух этапов: на первом этапе частицы, которые двигаются по определенным траекториям, слипаются во фрактальные кластеры малого размера и объединяются в большие кластеры на втором этапе моделирования.

В предыдущих двух моделях предполагалось, что при столкновении двух частиц или кластеров они слипаются со стопроцентной вероятностью. Если предположить, что вероятность слипания малая – то такая модель носит название **RLCA** (Reaction Limited Cluster Aggregation) [6]. Кластер, который получается в результате моделирования будет более компактным, так как кластеры могут глубже проникать друг в друга.

Моделирование различных диффузионных процессов имеет огромное прикладное значение. Помимо моделирования процессов, протекающих в жидкостях или газах, можно выделить возможность имитации взаимодействия друг с другом различных материалов или применимость в медицине. Уже существуют работы, моделирующие рост злокачественных опухолей или распространение некоторого воспалительного процесса на поверхности кости [7, 8]. Построение фрактальных структур может использоваться в гораздо более обширном числе областей, чем просто моделирование физических условий – к примеру для обработки или классификации изображений.

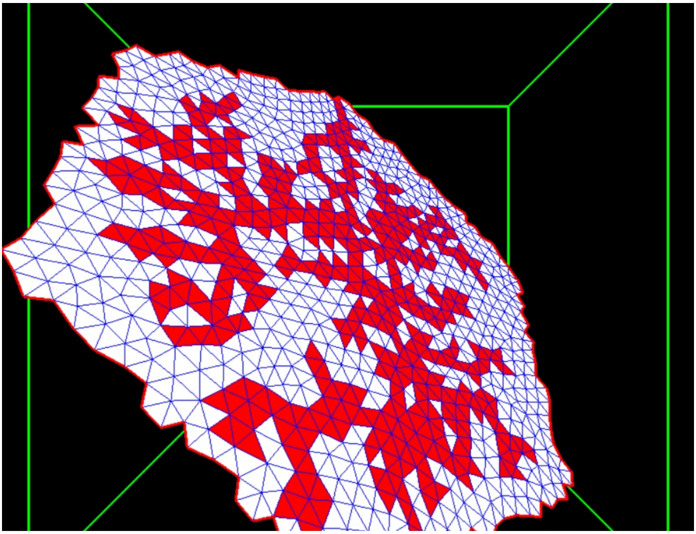
3. DLA-модель

В рамках данной работы рассматривается классическая модель DLA и ее оптимизация. Классическая DLA-модель в простейшем случае подразумевает под собой ограниченное двумерное пространство с квадратной сеткой. Частицы помещаются в данное пространство по одной. В каждый момент времени частица случайным образом перемещается в одну из четырех соседних клеток, пока не достигнет клетки, соседней с уже созданным кластером, после чего присоединяется к нему, и в пространство помещается следующая частица.

Классическую модель также можно использовать и на треугольной сетке. В этом случае шаги алгоритма остаются прежними, изменяется только вероятность перехода частицы в соседнюю ячейку. Если частица находится в треугольнике со сторонами a, b и c, то вероятность перехода частица в треугольник со стороной a будет равна

$$\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \qquad (1)$$

Так как в общем случае число шагов каждой отдельной частицы никаким образом не ограничено сверху и может быть устремлено в бесконечность, то математическое ожидание числа шагов, требуемое для построения фрактального кластера, ощутимо растет при увеличении числа частиц в модели. Поэтому, остро стоит вопрос об оптимизации классического алгоритма.



Пример работы классического алгоритма DLA на плоской треугольной сетке

4. Оптимизированная DLA-модель.

Основная суть оптимизации классической модели – это определение точки присоединения частицы к кластеру в момент, когда частица брошена на сетку, без необходимости проделывать большое количество шагов с блужданием частицы по сетке. Данный алгоритм оптимизации была предложен в работе [9]. Для квадратной сетки, прежде чем приступить к моделированию процесса, вычисляется квадратная матрица G размера $M \times M$, где M – количество ячеек в рассматриваемой области. Значения в матрице – это так называемые "коэффициенты выбора", величина, которая определяет верхнюю границу скорости, с которой частица попадет из одной ячейки области в другую.

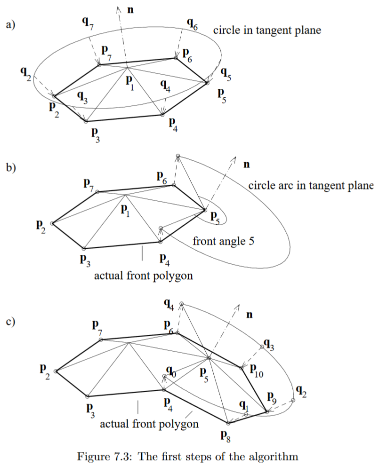
При бросании частицы на сетку определяется набор коэффициентов выбора, исходя из начального положения частицы и существующих точек агрегата. На их основании строится функция распределения случайной величины присоединения брошенной частицы к некоторой точке агрегата. Некоторое случайно выбранное значение из области определения данной функции и определяет точку, к которой присоединится данная частица.

В случае с треугольной сеткой необходимо ввести дополнительную сущность – взвешенный граф, вершины которого являются треугольниками представленной треугольной сетки. Две вершины соединены ребром, только если соответствующие им треугольники имеют общую сторону, а вес ребра определяется вероятностью перехода из одного треугольника в другой (1). После чего, как и в плоском случае, строится матрица G размера $M \times M$, где M – количество треугольников в рассматриваемой области.

Построение матрицы G - это долгий и трудоемкий процесс, поэтому построение одного агрегата с помощью оптимизированного метода может занимать больше времени, чем построение по классическому DLA-алгоритму. Тем не менее, основным преимуществом оптимизированного подхода состоит в том, что при построении большого количества агрегатов на одной и той же поверхности, нет необходимости заново строить матрицу G, поэтому вычисления на больших объемах данных занимает гораздо меньше времени, чем при работе с классическим алгоритмом.

5. Алгоритм триангуляции поверхности

В данной работе использовался алгоритм триангуляции поверхности методом марширования, описанный Эриком Хартманном [10]. Данный алгоритм начинает работу с одной точки, постепенно строя триангуляционную сетку, шаг за шагом добавляя новые треугольники.



Первые три шага алгоритма

Описание алгоритма:

1. Рядом с поверхностью выбирается точка s, определяется ближайшая к ней точка p_1 на поверхности. Вокруг точки p_1, перпендикулярно поверхности, строится равносторонний шестиугольник $q_1 ... q_6$, вершины которого определяют точки $p_2 ... p_7$ на поверхности. Точки $p_1 ... p_7$ образуют первые 6 треугольников сетки, а упорядоченный набор точек $p_2 ... p_7$ будем называть внешним многоугольником.

2. Для каждой точки во внешнем многоугольнике высчитывается внешний угол – угол еще не триангулированной области.

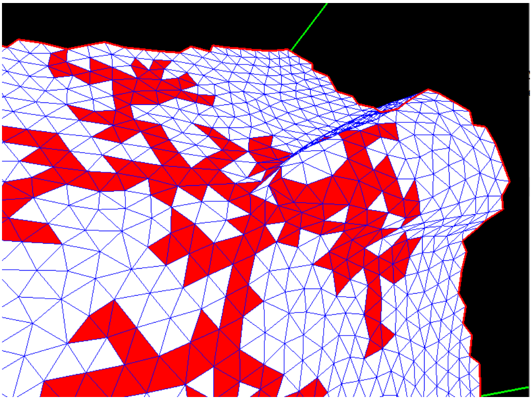
3. Для каждой точки во внешнем многоугольнике проверяется: Если точка p_i находится рядом с точкой из внешнего многоугольника, которая не является соседней с p_i, то внешний многоугольник разбивается на два

многоугольника. Если точка p_i находится рядом с точкой любого другого внешнего многоугольника, то два внешних многоугольника объединяются в один.

4. Во внешнем многоугольнике определяется точка с минимальным внешним углом. После чего данная точка окружается углами $\approx 60°$, удаляется и внешний многоугольник пополняется новыми точками.

5. Шаги 2,3,4 повторяются, пока внешний многоугольник не будет состоять из трех точек, образующих новый треугольник.

6. Реализация.



Пример работы оптимизированного алгоритма DLA на поверхности $x^3+y^2+z=0$

На языке Python реализован программный продукт, способный строить фрактальные агрегаты по классической модели DLA и ее оптимизированному варианту на триангуляционной сетке, построенной с помощью алгоритма марширования [10]. Так как остановка алгоритма обеспечивается ограничением пространства некоторыми кривыми (либо кубом), его использование позволяет строить фрактальные агрегаты на плоскости и любых поверхностях, замкнутых и незамкнутых.

Результат работы алгоритмов можно увидеть ниже:

Количество агрегатов	Классический алгоритм	Оптимизированный алгоритм
1 агрегат	3 мин. 49 сек.	5 мин. 13 сек.
5 агрегатов	16 мин. 21 сек.	6 мин. 38 сек.

Литература

[1] Kassner K. Pattern Formation in Diffusion-Limited Crystal Growth.– Singapure: World Scientific, 1996.

[2] Wiegel F., Perelson F. // J. Stat. Phys. –1982. – V.29. –P.813
[3] Смирнов Б. М. Физика фрактальных кластеров. – Наука, 1991.
[4] Witten T. A. Sander L. M. Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon // Physical Review Letters. – 1981.
[5] Kolb M., Botet R., Julien R. // Phys. Rev. Lett. – 1983. – V.51. – P.1123
[6] Julien R., Kolb M. // J.Phys. – 1984, Ser. A. –V.17. – P.L639
[7] Жукова И. В. Колпак Е. П. Математические модели злокачественной опухоли // Вестник Санкт-Петербургского Университета. – 2014, сер. 10, вып. 3, с. 5-17.
[8] Евсеев А. А. Нечаева О. И. Клеточно-автоматное моделирование диффузионных процессов на триангуляционных сетках // Прикладная дискретная математика.

УДК 004.91

ТЕХНОЛОГИЯ РАБОТЫ С ШАБЛОНАМИ В АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ОБОРОТА ОРГАНИЗАЦИОННО-РАСПОРЯДИТЕЛЬНОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ СРЕДНЕГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Каширина Е. В., Масолов В. И.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: masolov.1999@gmail.com

Kashirina E. V., Masolov V. I. Technology for working with templates of organizational and administrative documentation in the document management system of a medium-sized enterprise. Automation of document accounting in a medium-sized enterprise is considered. The analysis of business processes on the example of a supermarket chain is presented. User behavior scenarios are shown as a use case diagram. The architecture of interaction between software components and web technologies that provide a mechanism for the formation and use of document templates in the electronic document management system is shown. The activity diagram represents the behavioral model of the document management system in terms of the use of templates.

Keywords: automation, document circulation, document template, web application, database.

Рассматривается автоматизация ведения учета документов на среднем предприятии. Представлен анализ бизнес процессов на примере сети супермаркетов. Сценарии поведения пользователей показаны в виде диаграммы прецедентов. Показана архитектура взаимодействия программных компонентов и веб-технологий, обеспечивающих механизм формирования и использования шаблонов документов в системе электронного документооборота. Поведенческая модель системы документооборота в части использования шаблонов представлена в виде диаграммы деятельности.

Ключевые слова: автоматизация, документооборот, шаблон документа, база данных, веб-приложение.

Автоматизация документооборота стала неотъемлемой частью организации деятельности крупных компаний. Однако для средних предприятий такая автоматизация остается под вопросом отчасти из-за большой стоимости коммерческих продуктов, отчасти из-за сложности их настройки. К средним предприятиям относятся организации численностью от 100 до 250 человек и выручкой до 2 млрд. руб. [1]. Дополнительные трудности на пути к автоматизации документооборота среднего предприятия могут быть связаны с недостатком ресурсов на построение собственной ИТ-инфраструктуры.

Современные системы документооборота (СЭД) включают в себя огромное количество функций [2, 3], большинство из которых может вовсе и не понадобиться для автоматизации бизнес-процессов среднего предприятия. Ряд специализированных СЭД обладают подсистемами автоматического формирования документов сложной структуры на основе ситуационно-ориентированных баз данных [4, 5]. Такие системы сложны в настройках и управлении, хотя и не всегда требуют от пользователей знания языков программирования. Несмотря на большое количество преимуществ, получаемых при внедрении таких СЭД, расходы предприятия могут так и не оправдаться. Кроме того, коммерческим СЭД свойственен полуавтоматический характер реализации, следствием которого является отсутствие контроля содержания, оформления и качества документов.

Таким образом, появляется смысл в разработке общедоступной системы электронного оборота организационно-распорядительной документации, предоставляющей возможность работать с шаблонами, ограничивающими влияние пользователя на содержательную структуру документа. Система должна предоставлять инструменты заполнения шаблона содержимым, а также функцию согласования, в зависимости от типа документа.

Предметная область. Описание и моделирование

Потребности среднего предприятия рассмотрим на примере сети супермаркетов. Предприятие управляет сетью из пяти супермаркетов, насчитывающей в своем штате 230 человек. Сеть супермаркетов занимается продажей широкого ассортимента продуктов, включая продукты питания, а также товары для дома. Деятельность предприятия сопровождается ведением документооборота в целях фиксации административных и организационных вопросов.

В условиях большой конкуренция в сегменте розничной продажи необходимо обеспечить оперативную доставку документации всем супермаркетам сети для немедленного исполнения, прописанных в ней пунктов. Данный процесс сильно замедляется при использовании бумажной документации и приводит к неструктурированному хранению важных документов, тем самым замедляя их поиск, а также подвергая документацию риску быть испорченной или утерянной.

С другой стороны, сотрудники организации должны иметь способ эффективного взаимодействия с руководством. Это может быть, как срочное оповещение о нарушениях, возникших в производственном процессе или просьба на перевод в другой филиал предприятия.

На основе исследования предметной области, была составлена диаграмма вариантов использования (Use Case Diagram) на языке UML (Unified Modeling Language) (Рис. 1.). Диаграмма демонстрирует функциональные возможности системы.

Решения и реализация

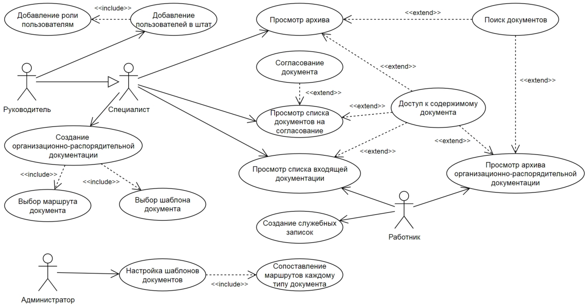


Рис.1. Диаграмма вариантов использования.

Предлагаемый вариант решения данной проблемы заключается в ограничении доступа пользователей к редактированию непосредственно файла документа, а предоставление вместо этого определенных полей, созданных при разработке шаблона документа. Таким образом, заполненные сотрудником поля будут подставлены в шаблон, не нарушая принятые на предприятии нормы оформления документа.

Для реализации данной идеи необходимо предусмотреть разграничение прав доступа к СЭД, выделив категорию „администратор“. Администратор обладает возможностью составлять и редактировать шаблоны документов, определять поля, доступные для заполнения остальными пользователями.

Было решено разрабатывать данную систему в виде веб-приложения на фреймворке Django языка программирования Python. Такой вид реализации позволит сотрудникам взаимодействовать с системой через любое устройство средствами веб-браузера. Поэтому в качестве редактора шаблонов был выбран WYSIWYG текстовый редактор под названием CKEditor, часто используемый при создании веб-сайтов. Данный текстовый редактор позволяет разработчику настроить панель инструментов под требования пользователя, а также установить необходимый размер окна, например, 297мм * 219мм (формат A4).

После того как администратор предприятия создаст шаблон и вставит в него поля вида „/Название поля для автозаполнения/“ и „!Название поля для редактирования!“, шаблон будет сохранен в базе данных веб-приложения в форме документа HTML. При необходимости создания документа, сотруднику достаточно выбрать шаблон из списка, созданного администратором, и системой будут предоставлены поля шаблона для дальнейшего их заполнения. Отправка данной формы ведет к подстановке, заполненных полей в HTML-код шаблона и, в случае необходимости, конвертированию получившегося HTML-документа в формат PDF.

Для преобразования разметки HTML в формат документа PDF, использована утилита командной строки WKHTMLTOPDF, которая позволяет перевести в формат PDF изображения, веб-сайты (по ссылке на страницу), а также документы HTML без потери качества. Для использования в пределах веб-приложения функций утилиты WKHTMLTOPDF подключена библиотека PDFKit. В результате, для получения готового модуля перевода HTML-документа в формат PDF оказалось достаточным описать необходимые опции такие, как кодировка, отступы и размер страницы.

Архитектура системы, отражающая взаимодействие перечисленных модулей, в совокупности позволяющих организовать систему работы с шаблонами, представлена на рис. 2. Сценарий поведения модулей системы в ответ на действия пользователя, создающего документ на основе шаблона, представлен на рис. 3.

Хранение информации полей шаблона организовано в реляционной базе данных. На рис. 4. представлен фрагмент модели данных системы документооборота, отражающий структуру данных, необходимых для заполнения полей шаблона. Таблица „Содержание“ привязывается к создаваемому документу и хранит содержание полей шаблона. Хранение содержания полей вместо файла документа позволяет пользователям редактировать документ и лишь при необходимости выгружать из системы в формате PDF. Для хранения отправленных документов используется таблица „Маршрут“ , которая содержит данные о получателе и состояние документа (просмотрен ли получателем).

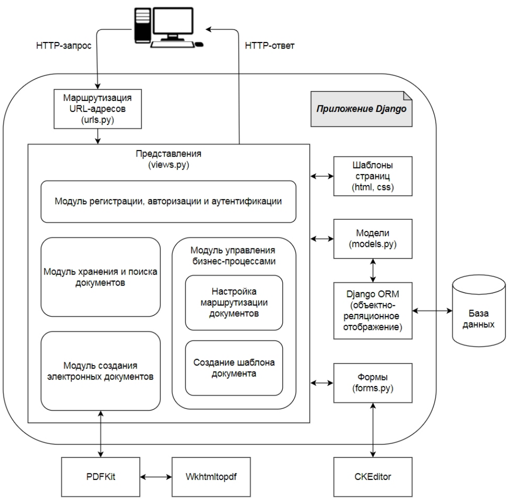


Рис. 2. Архитектура взаимодействия модулей.

Выводы.

Положенный в систему документооборота механизм позволяет создавать и использовать шаблоны типовых документов для сокращения затрат времени на „бумажную“ работу, при этом оставляя возможность формирования в случае необходимости документов в свободной форме.

Использование при реализации системы документооборота свободно распространяемых библиотек и инструментов в свою очередь предполагает ее свободное распространение.

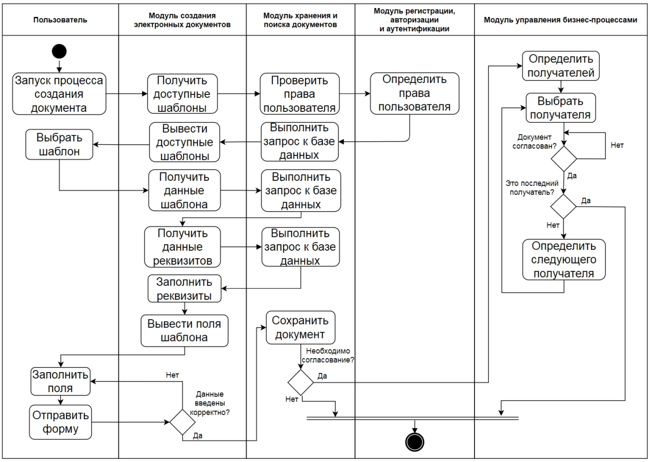


Рис. 3. Диаграмма деятельности процесса „Создание документа“.

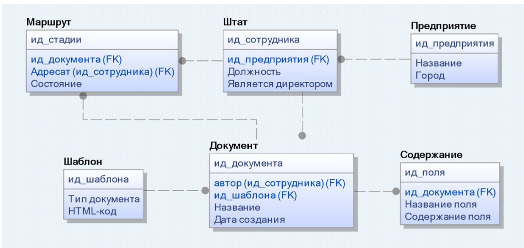


Рис. 4. Модель данных полей шаблона.

Реализация системы документооборота в виде веб-приложения позволяет организовать облачный сервис, предоставляющий доступ к СЭД многим предприятиям, при условии разграничения прав не только по категориям пользователей, но также и по отдельным предприятиям.

Литература

[1] Постановление Правительства РФ от 04.04.2016 № 265 „О предельных значениях дохода, полученного от осуществления предпринимательской деятельности, для каждой категории субъектов малого и среднего предпринимательства".

[2] Могзоев А. М., Ожигов М. А. Совершенствование документооборота в делопроизводстве органов муниципальной власти. //Муниципалитет: экономика и управление. 2018. № 1 (22). С. 97–105.

[3] Клишин А. П., Волкова Н. Р., Еремина Н. Л., Мытник А. А., Клыжко Е. Н. Подходы к автоматизации документо-оборота в вузе // Вестн. НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т.15, № 1. С. 36–46.

[4] Пенькова Т. Г. Модели и методы оперативного формирования документов. //Вычислительные технологии. 2009. Т. 14, № 2. С. 98–109.

[5] Миронов В. В. и др. Создание персонализированных документов на основе ситуационно-ориентированной базы данных. //Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18, № 4(65). С.191–197.

УДК 539.172.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ РЕАКЦИИ $n + {}^2H \to (np) + n$ ДЛЯ ПОИСКА ВЛИЯНИЯ $3N$ сил

Каспаров А. А., Афонин А. А., Цветкович Д. Г.
Институт ядерных исследований РАН
Москва
e-mail: kasparov200191@gmail.com

Kasparov A. A, Afonin A. A., Tsvetkovich D. G. Kinematics simulation of the $n + {}^2H \to (np) + n$ reaction to search for the influence of $3N$ forces. Kinematics simulation of the $n + {}^2H \to (np) + n$ reaction to determine the energy of the virtual np-state and the search for the influence of $3N$ forces was carried out.

Проведено кинематическое моделирование реакции $n+{}^2H \to (np)+n$ для определения энергии виртуального np-состояния и поиск влияния $3N$ сил.

Проведено кинематическое моделирование реакции $n + {}^2H \to (np) + n$, которую планируется исследовать на нейтронном канале РАДЭКС ИЯИ РАН в широком интервале энергии падающих нейтронов. Целью эксперимента является определение энергии виртуального np-состояния (длины np-рассеяния), извлеченной в реакции с тремя частицами в конечном состоянии, и поиск отличия этой величины от значения, полученного в прямом np-рассеянии (поиск влияния $3N$ сил). В эксперименте оба нейтрона будут регистрироваться по разные стороны от оси пучка (геометрия отдачи), а энергия, угол вылета протона и энергия первичного нейтрона будут восстанавливаться решением уравнений законов сохранения энергии и импульса. Нейтрон-протонное взаимодействие в конечном состоянии будет определяться в виде максимума в распределении выхода реакции от относительной энергии np-пары, форма которого чувствительна к энергии виртуального np-состояния E_{np} (рис.1).

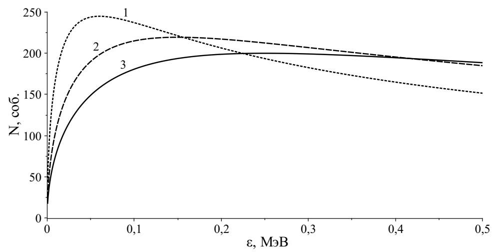


Рис. 26: Зависимость выхода реакции nd-развала от относительной энергии np-пары для различных значений энергии виртуального np-состояния E_{np}: 1 — 0,06 МэВ; 2 — 0,15 МэВ; 3 — 0,25 МэВ.

Проведенное кинематическое моделирование позволило оптимизировать параметры экспериментальной установки.

УДК 535.517

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ ANSYS.CFX

Маламанов С. Ю.
Балтийский государственный технический университет "ВОЕНМЕХ" им. Устинова
Санкт-Петербург
e-mail:мstevmal@mail.ru

Malamanov S.Yu. Jet modeling in the ANSYS.CFX computing environment. In operation, the simulation of the action of the magnetic field is absorbed on an electric current, which is directly connected to an electric magnetic force, leading to the occurrence of a jet flow.

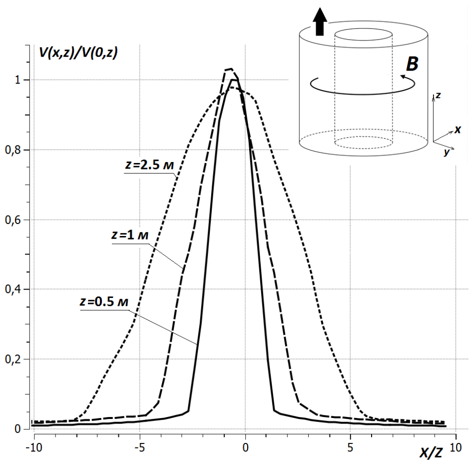
Моделируется воздействие магнитного поля на электрический ток, приводящее к возникновению силы Ампера, обуславливающей возникновение струйного течения.

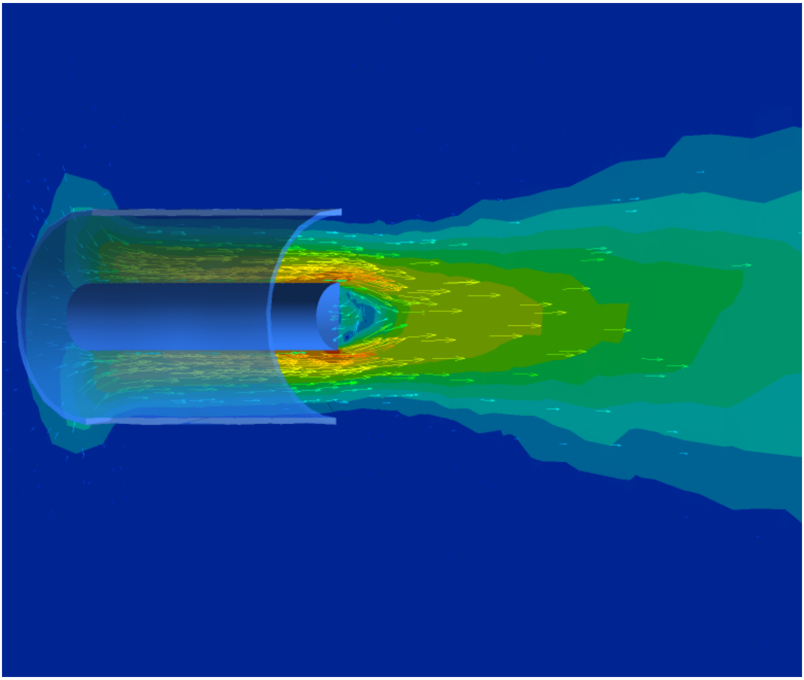
В работе рассматривается моделирование воздействия магнитного поля на электрический ток, приводящее к электромагнитной силе, силе Ампера $[\boldsymbol{JB}]$, наибольшее значение которой достигается, в частности, при прямолинейном движении проводящей жидкости в тороидальном магнитном поле. Эти условия реализуются в пространстве кольцевого зазора двух соосных цилиндров, между поверхностями которых поддерживается постоянная разность потенциалов, обуславливающая электрический ток, а в зазоре прикладывается магнитное поле $\boldsymbol{B}$. В результате, при погружении устройства в проводящую среду, сила Ампера выталкивает жидкость из кольцевого зазора (в направлении стрелки), получающееся в результате этого течение представляет собой коаксиальную струю.

На рисунке представлены профили относительной скорости на различных расстояниях от верхней поверхности цилиндров. Хорошо видно, что численное моделирование адекватно воспроизводит физическую картину течения. Расчёт течения осуществлялся с помощью гидродинамического модуля ANSYS.CFX. Соответствующая система уравнений и некоторые особенности постановки подобного рода задач рассмотрены в работе [2].

На рисунке показан вид коаксиальной струи, где стрелки – это вектора скорости.

Проведённые расчёты показывают достаточно хорошее воспроизведение простого гидродинамического течения в усложнённой физической обстановке.





Литература

[1] Кирко И. М., Кирко Г. Е. Магнитная гидродинамика. Современное видение проблем. М.–Ижевск. НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. 632 с.

[2] Маламанов С. Ю. *Численное моделирование задач о силовом взаимодействии гидродинамического и электромагнитного полей* .// Известия РАН. Математическое моделирование. 2015. Том 27. № 11. С. 56–62.

УДК 004.8

ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ В СИСТЕМЕ МОНИТОРИНГА АКТИВНОСТИ И ПОДДЕРЖКИ ЧЕЛОВЕКА В ЗАДАЧЕ УМНОГО ДОМА

Небогатиков И. Ю., Соловьев И. П.
Санкт-Петербургский
государственный университет
Санкт-Петербург
e-mail: st049100@student.spbu.ru

Nebogatikov I. Y., Soloviev I. P. The problems of recognition in a system for activity monitoring and human support in the smart home problem. In this work we describe a software system for monitoring the activity and support of a person in the smart home problem. We provide the method of collecting information about activity based on the heart rate monitor, accelerometer, and the received signal strength of Wi-Fi and Bluetooth signals. An algorithm for recognizing human activity using hierarchical classification with random forest and K nearest neighbors is described.

В данной работе описывается программная система мониторинга активности и поддержки человека в задаче умного дома. Приводится метод сбора информации об активности по данным пульсометра, акселерометра, показателям уровня принимаемого сигнала Wi-Fi и Bluetooth. Описывается алгоритм распознавания активности человека с использованием иерархической классификации и методов случайного леса и K ближайших соседей.

Введение. Среди задач, решаемых с использованием среды умного дома, можно выделить подкласс задач, для решения которых используется информация о текущих действиях обитателя. В данной работе для упрощения рассуждения в качестве обитателя рассматривается единственный человек внутри квартиры.

В качестве примеров задач, в которых применяется информация о текущей активности, можно привести [1]: автоматический вызов помощи при получении аномальных данных; программирование пользовательских сценариев, использующих информацию о действиях обитателей в качестве входных данных; сбор данных для ручного мониторинга специалистами; контроль поддержания здорового ритма жизни; защита от проникновений в жилище.

В зависимости от поставленной задачи используются различные технические методы распознавания активности: системы видео наблюдения для систем распознавания нежелательных проникновений [2], носимые датчики и информация из бытовых приборов для классификации действий обитателей [3].

Целью данной работы является создание системы распознавания активности человека в среде умного дома, а также подсистемы контроля продолжительности активности для поддержания ритма жизни. В работе решается задача классификации, поскольку для реализации системы контроля продолжительности действий предполагается использование заранее заданных пользователем видов деятельности. В качестве источников информации о текущих действиях человека используются смартфон и фитнес-браслет.

1. Существующие методы распознавания активностей. В работе [4] по данным, полученным из браслета, закрепленного на запястье, оснащенного пульсометром и акселерометром, распознаются 5 типов активности человека: сидит, стоит, занимается домашними делами, занимается на велотренажере (низкая активность), занимается на велотренажере (высокая активность). Применяются алгоритмы случайных деревьев и методов опорных векторов в работе, значения точности классификации составляют 89.2% и 85.6% соответственно. При этом, авторы подчеркивают, что данные сердцебиения увеличивают качество распознавания занятий на велотренажере на 8%.

В работе [5] также используются показания акселерометра и пульсометра. Распознаются четыре класса активности с помощью метода иерархических опорных векторов. Классификация осуществляется в два этапа: на первом определяется общее состояние (статическое, в движении), на втором полученное значение уточняется (сидит или стоит, идет или бежит). Точность предсказания вида активности человека на данных, полученных с частотой 50 герц, составляет более 99%.

В работе [6] для распознавания 13 видов активности применяются алгоритмы наивного байесовского классификатора и K ближайших соседей. Использовались два устройства, оснащенные акселерометром и гироскопом, один из датчиков был закреплен на запястье, второй находился в кармане брюк. Значение F-меры, среднего гармонического точности и полноты, для классов на данных, полученных авторами, находится близко к 1.

2. Формирование набора данных. Применение бытовых устройств для распознавания видов активности может быть использовано для решения задачи классификации, однако учет состояний всех приборов в совокупности как один класс может привести к уменьшению точности классификации [3]. В связи с этим в качестве источников данных были использованы только носимые устройства: смартфон и фитнес-браслет.

Протоколы работы фитнес-трекеров не предполагают передачу данных акселерометра по Bluetooth для сокращения потребляемой энергии, поэтому получение информации об текущей активности в среде умного дома возможно только с использованием информации о текущем количестве шагов. Смартфон применяется для получения информации индикаторов качества сигнала подключения (received signal strength indication, RSSI) Bluetooth с фитнес-трекером и качестве сигнала соединения смартфона с Wi-Fi роутером. По показаниям качества подключения определятся положение человека внутри среды обитания.

Для сбора информации о пульсе и количестве шагов было использовано приложение Gadgetbrige для устройств на платформе Android, предназначенное для замены приложений производителей фитнес-браслетов и унифицирующее интерфейс взаимодействия устройств.

Полученный набор данных состоит из следующих данных:

- данные пульса;
- данные о количестве шагов;
- показатель уровня принимаемого сигнала соединения Bluetooth;
- показатель уровня принимаемого сигнала соединения Wi-Fi;

- вид активности.

Была собрана информация о девяти типах активности: работа, еда, приготовление еды, шаг, видеоигры, отсутствие активности, спорт, душ, уборка. Всего набор содержит 26709 записей.

3. Анализ данных. Для сравнения были выбраны методы, применяемые для решения задачи классификации активности по данным акселерометра и сердцебиения [7]:

- многослойная нейронная сеть с 100 слоями, функцией активации ReLU и решателем Adam;
- К ближайших соседей, $K = 10$;
- случайный лес с 100 решающих деревьев;
- наивный байесовский классификатор;
- AdaBoost с использованием решающих деревьев в качестве базового классификатора;
- метод опорных векторов.

Полученный набор данных был разделен на две части: тренировочная выборка (85%) и проверочная выборка (15%). Сравнение точности классификации показано в таблице 1.

Таблица 1: Сравнение точности классификации

Алгоритм	Accuracy
Нейронная сеть	0.739206
К ближайших соседей	0.814574
Случайный лес	0.824307
Наивный байесовский классификатор	0.676566
AdaBoost	0.456451
Метод опорных векторов	0.679062

Методы К ближайших соседей и случайного леса показывают наибольшую точность классификации, что совпадает с результатами сравнения на данных, находящихся в открытом доступе [7].

Значения точности распознавания классов (precision) показаны в таблице 2.

Как видно из таблицы, точность распознавания класса активности "спорт" при использовании классификатора случайного леса значительно ниже, чем с применением метода К ближайших деревьев.

Чтобы компенсировать различие в распознавании активных типов деятельности, все виды активности были разделены на 2 вида: активные и пассивные. К полученным данным был применен метод иерархической классификации, уточняющий результат распознавания с помощью нескольких классификаторов, предназначенных для работы с некоторым подклассом всех возможных классов. Было использовано три классификатора:

Таблица 2: Сравнение точности (precision)

Действие	К ближайших соседей	Случайный лес
работа	0.922006	0.946667
еда	0.515385	0.487879
приготовление еды	1.000000	1.000000
шаг	0.691877	0.767760
видеоигры	0.723958	0.788018
отстутствие активности	0.845517	0.877292
спорт	0.578947	0.304094
душ	0.823113	0.871795
уборка	1.000000	1.000000

- первый классификатор определяет пассивный или активный сейчас вид действия обитателя;
- второй классификатор распознает виды деятельности с низким уровнем активности: работа, еда, видеоигры, отстутствие активности;
- третий классификатор распознает виды деятельности с высоким уровнем активности: приготовление еды, шаг, спорт, душ, уборка.

Принцип работы классификатора показан на рис. 1.

Точность классификации иерархических классификаторов, использующие различные комбинации алгоритмов случайного леса и К ближайших соседей в качестве базовых, показаны в таблице 3. Порядок названий алгоритмов в таблице указывает, какой тип активности распознается классификатором: первым указывается классификатор, который распознает базовый вид активности; вторым — пассивные виды деятельности; третьим — активные виды деятельности.

Таблица 3: Сравнение точности (accuracy) иерархических классификаторов

Классификаторы	Accuracy
Случайный лес, К ближайших соседей, Случайный лес	0.832135
К ближайших соседей, Случайный лес, Случайный лес	0.832585
Случайный лес, Случайный лес, К ближайших соседей	0.835729
Случайный лес, Случайный лес, Случайный лес	0.838874

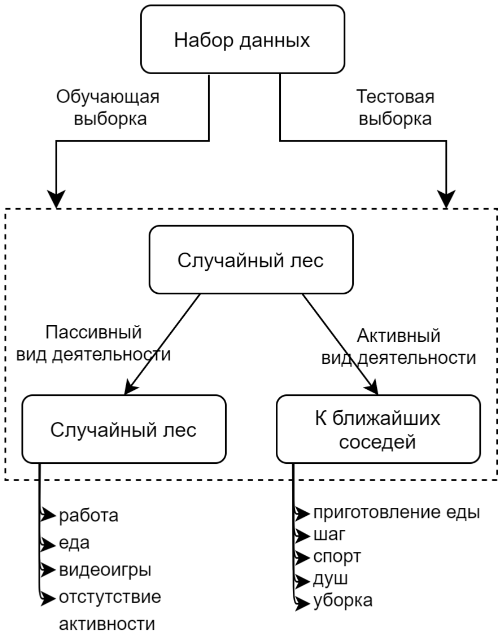


Рис. 1: Иерархическая классификация данных активности

В таблицах 4, 5 приводятся значения точности распознавания для каждого класса (precision) с использованием иерархических моделей. Применение случайного леса для первого классификатора и распознавания пассивных видов деятельности, метода K ближайших соседей для распознавания активных занятий решает проблему низкой точности распознавания активных видов действий обитателя.

Заключение В результате данной работы был собран набор данных об активности человека в среде умного дома с использованием смартфона и фитнес-браслета, предназначенный для распознавания видов действий обитателей. Разработана и реализована модель классификации с использованием метода иерархической классификации, применяющая алгоритмы случайного леса и K ближайших соседей.

Полученная модель предназначена для использования в системе управления умным домом для контроля продолжительности действий обитателя и поддержания темпа жизни. Однако, данный механизм классификации также может быть использован для других описанных сценариев применения в среде умного дома.

Таблица 4: Сравнение точности (precision) иерархических классификаторов

Действие	Случайный лес, К ближайших соседей, Случайный лес	Случайный лес, Случайный лес, Случайный лес
работа	0.930738	0.949971
еда	0.685039	0.597633
приготовление еды	1.000000	1.000000
шаг	0.714697	0.714697
видеоигры	0.752679	0.785592
отстутствие активности	0.865587	0.878812
спорт	0.474490	0.474490
душ	0.804097	0.804097
уборка	1.000000	1.000000

Таблица 5: Сравнение точности (precision) иерархических классификаторов

Действие	К ближайших соседей, Случайный лес, Случайный лес	Случайный лес, Случайный лес, К ближайших соседей
работа	0.943023	0.949971
еда	0.539604	0.597633
приготовление еды	1.000000	0.996183
шаг	0.694228	0.657623
видеоигры	0.770764	0.785592
отстутствие активности	0.874003	0.878812
спорт	0.480663	0.710843
душ	0.846797	0.773284
уборка	1.000000	1.000000

Литература

[1] Skocir P.,Krivic P., Tomeljak M., Kusek M., Jezic G. Activity Detection in Smart Home Environment. // Procedia Computer Science. 2020. Vol. 96. – P. 672-681.

[2] Al-Faris M., Chiverton J., Ndzi D., Ahmed A. A Review on Computer Vision-Based Methods for Human Action Recognition. // Journal of Imaging. 2020. Vol. 6.

[3] Кириенко А. С., Соловьев И. П. Анализ активности человека в задаче автоматизированного управления умным домом. // Компьютерные инструменты в образовании – СПб., 2017. – С. 15-29.

[4] Mehrang S., Pietila J., Tolonen J., Helander E., Jimison H., Pavel M., Korhonen I. Human Activity Recognition Using A Single Optical Heart Rate Monitoring Wristband Equipped with Triaxial Accelerometer. // IFMBE proceedings. 2017. Vol. 65.

[5] Tang T., Zheng L., Weng S., Peng P., Zheng H. Human Activity Recognition with Smart Watch based on H-SVM. // Frontier Computing. 2018. Vol. 422.

[6] Shoaib M., Bosch S., Incel D., Scholten H., Havinga P. Complex Human Activity Recognition Using Smartphone andWrist-Worn Motion Sensors. // Sensors. 2016. Vol. 16.

[7] Небогатиков И. Ю., Соловьев И. П. Распознавание активности человека по носимым датчикам в задаче управления умным домом // Материалы конференции "Информационные технологии в управлении" – СПб.: АО "Концерн ЦНИИ Электроприбор", 2020. – С. 221–224.

СОДЕРЖАНИЕ

История и современность

Одинец В. П. Памяти Андрея Витальевича Колдунова 1948-2021 .... **3**

Захаров В. К. Воспоминания о моём друге, Андрее Витальевиче Колдунове **7**

Одинец В. П. О трёх ленинградских математиках, погибших в 1941-45 гг. **8**

Одинец В. П. О некоторых математиках, поляках по происхождению, работавших в России в XIX веке **17**

Якубсон М. Я. Математики и Нобелевская премия **22**

Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

Абдуллаева К. Ф. Базисные свойства корневых функций одной спектральной задачи с граничным условием, зависящим от спектрального параметра **29**

Аксенов А. В., Полянин А. Д. Простые методы построения точных решений уравнений математической физики **31**

Алиев З.С., Мехрабов В. А. Некоторые спектральные свойства одной краевой задачи на собственные значения со спектральным параметром в трёх граничных условиях **33**

Андреев В. К. О решении обратной задачи для параболического уравнения при краевых условия второго рода **36**

Асадов Х. А. О глобальных континуумах решений некоторых нелинейных задач на собственные значения **40**

Азанов А. А., Андреев В. К. Решение задачи о ползущем движении жидкости со свободной границей со специальным полем скоростей в трёхмерной полосе **42**

Звягинцева Т. Е. Существование циклов в двумерной дискретной системе с нелинейностью, удовлетворяющей условию Рауса-Гурвица **54**

Лагодинский В. М. Граничная задача для уравнения Шрёдингера, соответствующая дифракции частиц на экране со щелями **59**

Линчук Л. В. Обратная задача для обыкновенных дифференциальных уравнений и альтернативные обобщённые операторы **66**

Магденко Е. П. Влияние изменения внутренней энергии поверхности раздела на трёхмерное стационарное ползущее течение во вращающемся цилиндре **71**

Миронов А. Н. О задаче Дарбу для уравнения Бианки четвёртого порядка **78**

Миронов А. Н., Миронова Л. Б. К задаче Дарбу для систем гиперболических уравнений **82**

Миронов А. Н., Яковлева Ю. О. Построение функции Римана–Адамара для уравнения Бианки четвёртого порядка в явном виде **84**

Намазов Ф. М. О бифуркации решений из бесконечности некоторых нелинейных краевых задач на собственные значения **86**

Созонтова Е. А. К условиям разрешимости одной N-мерной системы уравнений с частными интегралами . . . 88
Созонтова Е. А. К новым случаям разрешимости в квадратурах трёхмерной системы уравнений с частными интегралами . . . 89
Хакимова З. Н. Об интегрировании дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений. Часть 2: уравнение Льенара . . . 92
Шагай М. А., Флегонтов А. В. Применение алгоритмизации к орбитам уравнения Эмдена-Фаулера . . . 96
Юсифова Э. Г. О разрешимости одной обратной краевой задачи для уравнения с частными производными третьего порядка . . . 100

Современные проблемы теории функций,функционального анализа и геометрии

Виноградов О. Л. Тождества и точные неравенства для производных и разностей сплайнов . . . 103
Конькина В. С., Якубсон М. Я. Приложение многомерного преобразования Меллина к решению алгебраических уравнений . . . 109
Ловягин Ю. Н. О проблеме простой аксиоматической системы для анализа 117
Мартынов О. М. Некоторые проекции и их свойства в пространстве l^4_∞ . . 126
Павлов Д. А. Конструктивное описание гёльдеровых классов на некоторых многомерных компактах . . . 133
Улицкая А. Ю. Экстремальные подпространства в конечномерных задачах среднеквадратичных приближений . . . 137
Маслова Ю. В., Рулли Н. А. Сечение многомерного координатного конуса . . . 144

Актуальные проблемы математического образования

Далевская О. П., Смирнова Е. М. Отбор содержания математических дисциплин для биологических направлений подготовки . . . 152
Коноплева И. В., Миронова Л. В., Знаенко Н. С. Примеры профессионально-ориентированных задач при изучении курса математики . . . 157
Лазарева Е. Г., Устинова И. Г., Лазарев В. Р. Задания STACK для обучения математике: дополнительные вопросы при решении задачи . . . 161
Лиховодова Т. Б. Самостоятельная работа студентов при изучении курса математики в вузе . . . 164
Панкратова А. А., Поспелов М. В. О реализации учебного материала линейного программирования при обучении студентов экономических направлений . . . 166
Рукшин С. Е., Суслина М. Е. О роли задач на поиск игровых стратегий 171
Светлаков А. Н. Особенности проведения практических занятий по высшей математике в дистанционном формате . . . 176

Судакова А. Г., Новичкова О. Е. Об использовании программного пакета “MathCad” при изучении математической статистики в военно-техническом вузе **178**

Ускова О. Ф. Математические алгоритмы в изучении структурного программирования на языке C++ **183**

Яшина Е. Ю., Исайкова А. С. Проблемы использования системы Moodle в дистанционном обучении студентов (на примере курса для студентов по дисциплине Алгебра (раздел “Многочлены”) в СДО Moodle) **186**

Актуальные информационные системы и технологии моделирования

Афонин А. А., Каспаров А. А. Возможность решения обратной задачи при восстановлении спектра фотонейтронного источника **192**

Баранова Е. В., Швецов Г. В. Методы Education Data Mining для анализа цифрового следа студента **194**

Вилков В. Б., Черных А. К., Флегонтов А. В. Использование сетевой модели для решения модифицированной задачи о назначениях **202**

Волосова Н. К., Басараб М. А., Волосова А. К. и др. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в “закрытой” кювете **208**

Демидов И. А. Генерация игровых пространств с помощью логистической решётки **214**

Доронин Г. А. Модели агрегации, ограниченной диффузией на триангулируемых поверхностях **218**

Каширина Е. В., Масолов В. И. Технология работы с шаблонами в автоматизированной системе оборота организационно-распорядительной документации среднего предприятия **223**

Каспаров А. А., Афонин А. А., Цветкович Д. Г. Моделирование кинематики реакции $n + {}^2H \to (np) + n$ для поиска влияния $3N$ сил **228**

Маламанов С. Ю. Моделирование струйного течения в вычислительной среде ANSYS.CFX **229**

Небогатиков И. Ю., Соловьев И. П. Задачи распознавания в системе мониторинга активности и поддержки человека в задаче умного дома ... **232**

Содержание **239**

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы научной конференции

ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2021,

5–10 апреля 2021 г.

Печатается с готового оригинал-макета, предоставленного авторами

Подписано в печать 29.03.2021. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объём 15,125 уч. изд. л. 15,125 усл. печ. л.
Тираж 60 экз. Заказ № 1358.

Отпечатано в Издательстве ВВМ.
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41.