Литература

1. Голубев В.С. Динамика геохимических процессов. М.: Недра, 1981. 208 с.
2. Голубев В.С. - Докл. АН СССР, 1983, т.272, № 4, с.921-923.
3. Джоунс М., Фрэнк Ф. и др. Биохимическая термодинамика. М.: Мир, 1982, с.20-22.
4. Каранетьянц М.Х. Химическая термодинамика. М.: Высшая школа, 1968. 582 с.
5. Голубев В.С. - Геохимия, 1983, № 10, с.1391-1398.
6. Голубев В.С., Теняков В.А. - Докл. АН СССР, 1982, т.264, № 5, с.1221-1224; 1983, т.271, № 2, с.402-405.
7. Панченко Г.М., Лебедев В.П. Химическая кинетика и катализ. М.: Химия, 1974. 590 с.
8. Голубев В.С., Грабовников В.А., Кричевец Г.Н., Рослякова И.Ю. - В кн.: Математическое и физическое моделирование рудообразующих процессов. Труды ВИМС. М., 1978, с.122-142.
9. Бахуров В.Г., Вечеркин С.Г., Луценко И.К. Подземное выщелачивание урановых руд. М.: Атомиздат, 1969.
10. Грабовников В.А. Геотехнологические исследования при разведке металлов. М.: Недра, 1983. 120 с.

УДК 556.388

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА В ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЕ

В.М.Шестаков

Комбинированную модель переноса в гетерогенной среде можно рассматривать как композицию трех элементов: проводящих каналов с удельной емкостью n_1, блоков с сосредоточенной и неограниченной емкостью, характеризующихся соответственно удельной емкостью n_2 и n_3. Для трещинных пород n_1 - это трещиноватость $n_т$, $n_2 = n_* x_*$, $n_3 = n_* x_*^o$, где n_* - пористость блоков, причем $n_т + x_* + x_*^o = 1$; для пористых (песчано-глинистых) пород $n_1 = nx$, $n_2 = nx_*$, $n_3 = nx_*^c$, где n - пористость, x - удельное содержание каналов, причем $x + x_* + x_*^c = 1$; в обоих случаях x_* и x_*^c - удельное содержание блоков с сосредоточенной и неограниченной емкости.

Применительно к такой модели перенос мигранта в линейном потоке по направлению l описывается системой дифференциальных уравнений:

$$n_1\frac{\partial c}{\partial t} + n_2\frac{\partial c^*}{\partial t} + \beta c'_* + v\frac{\partial c}{\partial l} = 0 , \qquad (1)$$

$$n_2\frac{\partial c^*}{\partial t}=\alpha^*(c-c^*)\,,\ \beta^*=x_*^0 S_*\sqrt{\frac{n_* D_m}{\pi}}\,,\quad c_*'=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{c(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\,, \qquad (2)$$

где S_* – удельная поверхность блоков.

Для решения этой системы дифференциальных уравнений эффективно использование интегральных преобразований по Лапласу-Карсону. При начальном нулевом условии, вводя в (2) интегральные изображения C и C^x величин c и c^x, получим соотношения

$$C^x=\frac{\alpha^*}{\alpha^*+n_2 p}\,C\,,\qquad C_*'=C\sqrt{p}\,, \qquad (3)$$

где C_*' – изображение величины c_*'. Тогда уравнение (I) в изображениях будет

$$\left(n_1 p+\frac{n_2\alpha^*}{\alpha^*+n_2 p}+\beta^*\sqrt{p}\right)C+v\frac{dC}{dl}=0\,. \qquad (4)$$

Решение этого уравнения при условии $C(0)=C^0$ имеет вид:

$$C=C^0 e^{-al}\,,\quad a=v\left(n_1 p+\frac{n_2\alpha^*}{\alpha^*+n_2 p}+\beta^*\sqrt{p}\right)^{-1}. \qquad (5)$$

Для частных моделей переноса получены выражения оригиналов этого изображения в условиях фундаментальной задачи, т.е. при постоянных значениях $c=c_0$ при $t=0$ и $c=c^0$ при $l=0$. Для удобства записи этих выражений вводится безразмерная концентрация мигранта $\bar c(l,t)=(c-c_0)/(c^0-c_0)$, для которой краевые условия будут: $\bar c(l,0)=0$ и $\bar c(0,t)=1$.

Для гетерогенной среды с сосредоточенной емкостью (при $\beta^*=0$) решение фундаментальной задачи получено Л.Анцелиусом в виде [I,2,3]:

$$\bar c=F_1(\eta,\tau)=1-e^{-\tau}\int_0^\eta e^{-z}I_0(2\sqrt{\tau z})\,dz\,, \qquad (6)$$

$$\bar c^*=(c^*-c_0)/(c^0-c_0)=1-F_1(\tau,\eta)\,, \qquad (6a)$$

$$\eta=\frac{\alpha^*}{n_2}\cdot\frac{n_1 l}{v}\,,\quad \tau=\frac{\alpha^*}{n_2}\left(t-\frac{n_1 l}{v}\right), \qquad (6б)$$

причем $F_I(\eta,\tau)=0$, если $\tau<0$. Таблица функции $F_I(x,y)$ приведена в [I,3]. Ряд аналитических решений для такой модели в более сложных условиях приведен, например, в [4].

Для гетерогенной среды с неограниченной емкостью (при $n_2=0$) решение получено Г.Лаверье [2]:

$$\bar c=F_2(\lambda)=\mathrm{erfc}\,\lambda\,,\quad \lambda=\frac{\beta^* l}{2\sqrt{v(vt-n_1 l)}}\,, \qquad (7)$$

причем $\bar c(l,t)=0$ при $vt<n_1 l$.

Для гетерогенной среды с комбинированной емкостью (сосредоточенной и неограниченной) изображение представляет собой произведение изображений, полученных для схем сосредоточенной и неограниченной емкости в отдельности. Применяя операцию свертки оригиналов получим, что для комбинированной емкости выражение оригинала для условий фундаментальной задачи будет

$$\bar{c} = \int_0^t erfc\left(\frac{\beta^* \ell}{2\sqrt{v(v\theta - n_1 \ell)}}\right) \cdot F_1\left(\eta, \tau - \frac{\alpha^*}{n_2}\theta\right) d\theta \quad , \tag{8}$$

где τ и η выражаются согласно (6б).

При дополнительном наложении процессов микродисперсии, когда в правой части дифференциального уравнения (I) добавляется член $D\frac{\partial^2 c}{\partial \ell^2}$, решение фундаментальной задачи для полуограниченного потока можно, следуя предложению В.Г.Румынина, представить в виде:

$$\bar{c} = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_y}} \exp\left[-\frac{(\xi - \theta_y)^2}{4\theta_y}\right] F(y,t)\frac{dy}{y} \quad , \quad \theta_y = \frac{v y^2}{n_1 D} \quad . \tag{9}$$

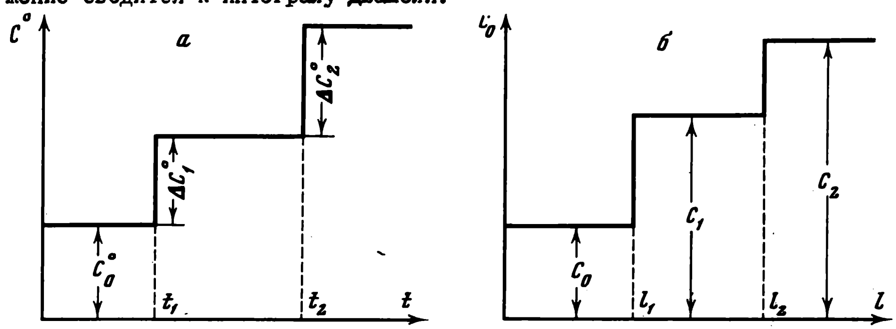
В этом выражении $F(y,t)$ – решения фундаментальной задачи для гетерогенной модели, выражаемые в общем виде из (8), а в частных формах – из (6) или (7) при $\ell = y$.

Изменения краевых условий

При любом изменении граничного условия и начальном нулевом условии решение получается по принципу суперпозиции при замене реального графика граничного условия ступенчатым (рис. I,а), причем для момента времени $t_n < t < t_{n+1}$ имеем

$$c = c_0 + (c_0^0 - c_0) F(\ell, t) + \sum_{i=1}^{n} \Delta c_i^0 F(\ell, t - t_i) \quad , \tag{I0}$$

где $F(\ell, t)$ – решение фундаментальной задачи. В пределе такое выражение сводится к интегралу Дюамеля.



Р и с. I. Ступенчатые графики изменения: а – граничного и б – начального условий

Для гетерогенно-блоковой среды с сосредоточенной и неограниченной емкостью исходные дифференциальные уравнения имеют первый порядок, что позволяет учесть неравномерное начальное условие по принципу суперпозиции. Для этого решение фундаментальной задачи предварительно запишем в виде:

$$c = c^0 F(\ell, t) + c_0 [1 - F(\ell, t)] \quad . \tag{II}$$

В общем случае, аппроксимируя начальное распределение концентрации мигранта ступенчатым графиком $c(\ell, 0) = C_i$ при $\ell_i < \ell < \ell_{i+1}$ (рис.I,б), при постоянной величине входной концентрации c^0 решение, полученное по принципу суперпозиции, при $\ell_n < \ell < \ell_{n+1}$ представляется выражением:

$$c = c^0 F(\ell,t) + \sum_{i=0}^{n} \Delta c_i \left[1 - F(\ell - \ell_i, t)\right] = \\ = c_n + c^0 F(\ell,t) - \sum_{i=0}^{n} \Delta c_i \, F(\ell - \ell_i, t) \quad , \tag{I2}$$

где $\Delta c = c_i - c_{i-1}$, причем $\Delta c_0 = c_0$.

Если к тому же учесть переменную во времени входную концентрацию, аппроксимируемую ступенчатой функцией, то в выражении (I2) c^0 заменяется на c^0_0 и добавляются члены, стоящие в выражении (IO) под знаком суммы.

Особый случай представляет собой гармоническое граничное условие

$$c(0,t) = c^0 \sin \frac{2\pi t}{t_0}, \tag{I3}$$

задаваемое в сочетании $\ell = 0$ при произвольном начальном условии. Решение системы уравнений (I,2) при этих условиях имеет вид

$$c = c^0 e^{-\lambda \ell} \sin \varphi \quad , \quad \varphi = \frac{2\pi t}{t_0} - \nu \ell \quad , \tag{I4}$$

где λ и ν - параметры затухания и сдвига по фазе, которые определяются выражениями

$$\lambda = \frac{A}{v}, \quad A = \alpha^* (1 + \theta_0^2)^{-1} + \beta^* \sqrt{\frac{\pi}{t_0}}, \quad \theta_0 = \frac{\alpha^* t_0}{2\pi n_2} \quad ; \tag{I5}$$

$$\nu = \frac{B}{v}, \quad B = \frac{2\pi n_1}{t_0} + \beta^* \sqrt{\frac{\pi}{t_0}} + \alpha^* \frac{\theta_0}{1 + \theta_0^2}. \tag{I5a}$$

При положении диффузионного переноса, когда в правой части уравнения (I) добавляется член $D \frac{\partial^2 c}{\partial \ell^2}$, для полуограниченного потока форма решения остается такой же, т.е. описывается уравнением (I4), в котором параметры λ и ν представляются выражением

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{4D^2} + \frac{A}{D}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{v^2}{4D^2} + \frac{A}{D}\right)^2 + \left(\frac{B}{2D}\right)^2}} - \frac{v}{2D} \quad , \tag{I6}$$

$$\nu = \frac{B}{2\lambda D + v}.$$

Перенос в ленте тока переменного сечения

В пределах ленты тока переменной ширины N скорость фильтрации $v = Q/N$ (где Q - расход потока в пределах ленты тока) будет переменной. Поскольку в исходном уравнении (I) величина v непосредственно входит только в конвективный член, то учет переменной скорости просто осуществляется, если сделать в конвективном члене уравнения (I) преобразование $v \frac{\partial c}{\partial \ell} = Q \frac{\partial c}{N \partial \ell} = Q \frac{\partial c}{\partial \omega}$, где ω - площадь ленты тока между начальным и расчетным сечениями. Вводя вместо ℓ переменную ω, приведем уравнение одномерного переноса в потоке переменного сечения к форме уравнения с постоянной скоростью, которая при этом должна быть положена равной расходу потока в пределах ленты тока.

Для аналитических расчетов переноса по линиям тока удобнее ввести переменную τ, физически представляющую собой время конвективного переноса:

$$\tau = \int\limits_{(l)} \frac{n_1 dl}{v} , \qquad (17)$$

которая сводит уравнение (I) к виду одномерного линейного потока, в котором l заменяется на τ при $v/n_1 = 1$.

Например, для стационарного радиального потока, формирующегося при закачке через скважину в пласт мощностью m расхода воды Q, получим $w = \pi (r^2 - r_c^2)$, где r - радиальная координата, r_c - радиус скважины (начального сечения). Следовательно, для такого радиального потока в расчетных зависимостях, записанных для одномерного потока с координатой l, принимать $l = \pi (r^2 - r_c^2)$, заменяя v на Q/m. Если использовать преобразование (I7), полагая в нем $dl = dr$ и $v = Q/2\pi r m$, то получим

$$\tau = \frac{\pi n_1 m}{Q} (r^2 - r_c^2) . \qquad (18)$$

Подставляя в решения линейного потока это выражение вместо l и полагая $v/n_1 = 1$, получим тот же результат, что и в предыдущем случае.

Как видно, на основе модели гетерогенной среды удается получить удобные для практического использования аналитические решения одномерных задач переноса в подземных водах, что дает явные преимущества этой модели по сравнению с моделью диффузионно-конвективного переноса.

Литература

1. Корольков Б.П. Специальные функции для исследований динамики нестационарного теплообмена. М.: Наука, 1976.
2. Основы гидрогеологических расчетов/Ф.М.Бочевер, И.В.Гармонов, А.В.Лебедев, В.М.Шестаков. Изд. 2-е. М.: Недра, 1969.
3. Томас Г. Кинетика ионного обмена в неподвижном слое ионита. - В кн.: Ионный обмен. М.: Изд-во иностр.лит., 1955.
4. De Smedt F., Wierenga P. Mass transver in porous media with immobile water. - J. of Hydrology, 1979, vol.41, N 1/2.

УДК 550.41:551.3:551.49

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИРОДНЫХ ВОД, КОНТРОЛИРУЮЩИХ СОВРЕМЕННЫЙ СЕДИМЕНТОГЕНЕЗ И НАЧАЛЬНЫЙ ДИАГЕНЕЗ ОСАДКОВ КОЛХИДЫ

В.П.Зверев, Д.В.Гричук

При изучении процессов взаимодействия природных вод с минеральным веществом горных пород на различных этапах седименто- и литогенеза большое значение имеет представление о строении природных водных растворов и формах нахождения в них химических элементов. Вопрос об изучении состояния макрокомпонентов в природных водах в отечествен-