МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И СВОЙСТВА ДВУМЕРНО–ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ИМПЕДАНСНОЙ СТРУКТУРЫ

А.А.Быков профессор

МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики.
E-mail: abykovmsu@gmail.com

Сформулирована и обоснована математическая модель двумерно–периодической волноведущей структуры с импедансной границей. Для решения используем поверхностный вариант метода Галеркина, приближенное решение точно удовлетворяет уравнениям Маквелла и в среднем – граничным условиям Щукина–Леонтовича. Построено разложение решения в степенной ряд по малому параметру. Найдены уравнения для дисперсионной поверхности в пространстве вектора Флоке. В численном эксперименте найдены лакуны.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим гармоническое электромагнитное поле вида

$$E(x,y,z,t) = \vec{\mathrm{E}}(x,y,z)e^{-i\omega t},\ \ H(x,y,z,t) = \vec{\mathrm{H}}(x,y,z)e^{-i\omega t},$$

в прямоугольной области

$$\Pi = \{(x,y,z):(x,y)\in D\times z\in(0,d)\}.$$

Здесь D есть прямоугольная область на плоскости (x,y) с границей ∂D. На поверхности $S = \{(x,y,z):(x,y)\in\partial D\times z\in(0,d)\}$ и на поверхности $\{(x,y)\in\partial D\times z=0)\}$ поставим или условия равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля

$$\mathrm{E}_z\big|_{(x,y)\in\partial D} = 0,\ \ \mathrm{E}_x\big|_{y=0} = 0,\ \ \mathrm{E}_y\big|_{y=0} = 0\,,$$

или условия квазипериодичности (ФЛОКЕ):

$$\mathrm{E}_z(x+a,y+b)\big|_{(x,y)\in\partial D} = e^{i\mu a+i\nu b}\,\mathrm{E}_z(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial D}\,,\ \ \ldots,$$

На поверхности $\{(x,y)\in\partial D\times z=d)\}$ – условия Щукина–Леонтовича (Щ–Л)

$$\vec{\mathrm{E}}_t = Z[\vec{\mathrm{H}}\vec{n}],$$

где Z есть поверхностный импеданс (например, $Z=(1+i)\sqrt{\mu\omega/8\pi\sigma}$), $\vec{n}$ вектор внешней нормали к поверхности $z=d$. Излагаемый далее поверхностный метод Галеркина позволяет рассматривать также анизотропную проводимость среды, поэтому предполагаем, что Z есть тензор и запишем условия Щ–Л в виде

$$\mathrm{E}_x(x,y,d) = \tilde{Z}_1(x,y)\mathrm{H}_y(x,y,d),$$

$$\mathrm{E}_y(x,y,d) = -\tilde{Z}_2(x,y)\mathrm{H}_x(x,y,d),$$

Найдем все (или некоторые) значения ω, при которых существует нетривиальное решение уравнений Максвелла $rot\,H = \varepsilon\dfrac{\partial E}{\partial t},\ \ rot\,E = -\mu\dfrac{\partial H}{\partial t}$ с указанными граничными условиями, зависящие от времени по гармоническому закону. Из условий Щ–Л следует, что решение существует при счетном числе значений ω, причем эти значения имеют положительную мнимую часть, что соответствует наличию затухания, вызванного потерями энергии в среде с конечной проводимостью.

2. Координатные функции.

Построим систему координатных функций для поверхностного варианта метода Галеркина. Рассмотрим поля вида

$$\vec{\mathrm{E}}(x,y,z)=\vec{E}(x,y)e^{i\gamma z},\ \ \vec{\mathrm{H}}(x,y,z)=\vec{H}(x,y)e^{i\gamma z}.$$

Для полей получим уравнения

$$\gamma^2+\chi^2=\kappa^2,$$

$$H_x=\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}+\frac{i\gamma}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial x},\ \ H_y=-\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{i\gamma}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$E_x=\frac{i\gamma}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{i\omega\mu}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial y},\ \ E_y=\frac{i\gamma}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}+\frac{i\omega\mu}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$\vec{E}_\perp=(E_x,E_y),$$

$$\vec{E}_\perp=\frac{i\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp E_z-\frac{i\omega\mu}{\chi^2}rot_\perp\vec{H}_z,\ \vec{H}_\perp=\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}rot_\perp\vec{E}_z+\frac{i\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp H_z,$$

где $\kappa=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=2\pi/\lambda.$ Так как $\vec{E}_\perp\Big|_{z=0}=0,\ \ \vec{H}_z\Big|_{z=0}=0,$ то $\vec{E}_z\sim\cos\gamma z,\ \ \vec{H}_z\sim\sin\gamma z$. Из граничных условий следует

$$\nabla_\perp^2\vec{E}+\chi^2\vec{E}=0,\ \ \nabla_\perp^2\vec{H}+\chi^2\vec{H}=0.$$

Граничные условия на идеально проводящих частях волновода и условия симметрии приводят к следующим выражениям координатных функций: электрические

$$\nabla_\perp^2\varphi+\mu^2\varphi=0,\ \ \varphi\big|_\Gamma=0,$$

и магнитные

$$\nabla_\perp^2\psi+\nu^2\psi=0\,,\ \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\bigg|_\Gamma=0\,.$$

Далее для определенности рассматриваем область D в виде прямоугольника:

$$D=\{(x,y):x\in(0,a)\times y\in(0,b)\},$$

и тогда

$$\varphi_k(x,y)=\sqrt{2/a}\sin(\alpha_{m'.x}x)\sqrt{2/b}\sin(\alpha_{n'.y}y),$$

$k=(m',n')$, $\alpha_{m'.x}=\pi m'/a,\ \ \alpha_{n'.y}=\pi n'/b,$ Поперечное волновое число выражается так:

$$\alpha_k(x,y)=\sqrt{\alpha_{m'.x}^2+\alpha_{n'.y}^2},$$

$$\psi_j(x,y)=\sqrt{2/a}\cos(\beta_{m''.x}x)\sqrt{2/b}\cos(\beta_{n''.y}y),\ \ j=(m'',n''),$$

$$\beta_{m''.x}=\pi m''/a,\ \ \beta_{n''.y}=\pi n''/b,\ \ \beta_j(x,y)=\sqrt{\beta_{m''.x}^2+\beta_{n''.y}^2}\ .$$

3. Координатная система, порожденная E_z полем.

$$\vec{\mathrm{E}}_e(x,y,z)=\left(-\gamma\sin\gamma z\frac{1}{\chi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x},-\gamma\sin\gamma z\frac{1}{\chi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\varphi(x,y)\cos\gamma z\right),$$

$$\vec{\mathrm{H}}_e(x,y,z)=\left(\frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\gamma z,\frac{-i\omega\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\gamma z,0\right).$$

4. Координатная система, порожденная H_z полем.

$$\vec{\mathrm{H}}_h(x,y,z)=\left(\frac{\gamma}{\chi^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\gamma z,\frac{\gamma}{\chi^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\gamma z,\psi(x,y)\sin\gamma z\right),$$

$$\vec{\mathrm{E}}_h(x,y,z)=\left(\frac{-i\omega\mu}{\chi^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\sin\gamma z,\frac{i\omega\mu}{\chi^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\sin\gamma z,0\right).$$

Выделим распространяющиеся и затухающие моды вдоль оси z в Π:

$$\mathrm{E}_z=\sum_{k\in\tilde{M}}\varphi_k(x,y)\cos\tilde{p}_k zA_k+\sum_{k\in M}\varphi_k(x,y)\cosh\tilde{\tilde{p}}_k zA_k,$$

$$\mathrm{H}_z = \sum_{j\in\vec{N}} \psi_j(x,y)\sin\tilde{q}_j z B_j + \sum_{j\in\vec{N}} \psi_j(x,y)\sinh\tilde{\tilde{q}}_j z B_j,$$

Зависимость от z определяется числами

$$\tilde{p}_{m',n'} = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2_{m',n'}}\ ,\ \tilde{q}_{m'',n''} = \sqrt{\kappa^2 - \beta^2_{m'',n''}}\ .$$

Продольные функции $\eta_k(p_k z) = \cos\tilde{p}_k z$ или $\cosh\tilde{\tilde{p}}_k z$, $\zeta_j(q_j z) = \sin\tilde{q}_j z$ или $\sinh\tilde{\tilde{q}}_j z$.

5. Метод Галеркина.

Искомое поле найдем в виде линейной комбинации функций КС:

$$\mathrm{E}_z = \sum_k \varphi_k(x,y)\eta_k(p_k z)A_k,\quad \mathrm{H}_z = \sum_j \psi_j(x,y)\zeta_j(q_j z)B_j,$$

$$\mathrm{E}_x = \sum_k \frac{-1}{\alpha^2_{e.k}}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x} p_k\eta'_k(p_k z)A_k + \sum_j \frac{-i\omega\mu}{\alpha^2_{h.j}}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\zeta_j(q_j z)B_j,$$

$$\mathrm{E}_y = \sum_k \frac{-1}{\alpha^2_{e.k}}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y} p_k\eta'_k(p_k z)A_k + \sum_j \frac{i\omega\mu}{\alpha^2_{h.j}}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\zeta_j(q_j z)B_j,$$

$$\mathrm{H}_x = \sum_k \frac{i\omega\varepsilon}{\alpha^2_{e.k}}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\eta_k(p_k z)A_k + \sum_j \frac{q_j}{\alpha^2_{h.j}}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\zeta'_j(q_j z)B_j,$$

$$\mathrm{H}_y = \sum_k \frac{-i\omega\varepsilon}{\alpha^2_{e.k}}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\eta_k(p_k z)A_k + \sum_j \frac{q_j}{\alpha^2_{h.j}}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\zeta'_j(q_j z)B_j,$$

В векторно-матричной форме

$$E_z = \Phi^T_e(x,y)\otimes\Upsilon^T_E(Pz)\vec{A},\ \ H_z = \Phi^T_h(x,y)\otimes\Upsilon^T_H(Qz)\vec{B},$$

где $\otimes$ означает поэлементное перемножение без суммировани. Для компонент векторов электрического и магнитного полей найдем

$$\mathrm{E}_x = -\frac{\partial\Phi^T_e}{\partial x}\otimes\tilde{\Upsilon}^T_e(Pz)P\Xi^{-2}_e\vec{A} - i\omega\mu\frac{\partial\Psi^T}{\partial y}\otimes\Upsilon^T_h(Qz)\Xi^{-2}_h\vec{B},$$

$$\mathrm{E}_y = -\frac{\partial\Phi^T_e}{\partial y}\otimes\tilde{\Upsilon}^T_e(Pz)P\Xi^{-2}_e\vec{A} + +i\omega\mu\frac{\partial\Phi^T_h}{\partial x}\otimes\Upsilon^T_h(Qz)\Xi^{-2}_h\vec{B},$$

$$\mathrm{H}_x = i\omega\varepsilon\frac{\partial\Phi^T_e}{\partial y}\otimes\Upsilon^T_e(Pz)\Xi^{-2}_e\vec{A} + \frac{\partial\Phi^T_h}{\partial x}\otimes\tilde{\Upsilon}^T_h(Qz)Q\Xi^{-2}_e\vec{B},$$

$$\mathrm{H}_y = -i\omega\varepsilon\frac{\partial\Phi^T_e}{\partial x}\otimes\Upsilon^T_e(Pz)\Xi^{-2}_e\vec{A} + \frac{\partial\Phi^T_h}{\partial y}\otimes\tilde{\Upsilon}^T_h(Qz)Q\Xi^{-2}_e\vec{B}.$$

6. Проекционные уравнения.

Запишем формулы Галеркина для граничных условий на импедансной поверхности:

$$-\left\langle\Psi_e\,|\,\frac{\partial\Phi^T_e}{\partial x}\otimes\tilde{\Upsilon}^T_e(Pd)\right\rangle P\Xi^{-2}_e\vec{A} - i\omega\mu\left\langle\Phi_e\,|\,\frac{\partial\Phi^T_h}{\partial y}\otimes\Upsilon^T_h(Qd)\right\rangle\Xi^{-2}_h\vec{B} =$$

$$= -i\omega\varepsilon\left\langle\Psi_e\,|\,\tilde{Z}_1\,|\,\frac{\partial\Phi^T_e}{\partial x}\otimes\Upsilon^T_e(Pd)\right\rangle\Xi^{-2}_e\vec{A} + \left\langle\Psi_e\,|\,\tilde{Z}_1\,|\,\frac{\partial\Phi^T_h}{\partial y}\otimes\tilde{\Upsilon}^T_h(Qd)\right\rangle Q\Xi^{-2}_h\vec{B},$$

$$-\left\langle\Psi_h\,|\,\frac{\partial\Phi^T_e}{\partial y}\otimes\tilde{\Upsilon}^T_e(Pz)\right\rangle P\Xi^{-2}_e\vec{A} - i\omega\mu\left\langle\Psi_h\,|\,\frac{\partial\Phi^T_h}{\partial x}\otimes\Upsilon^T_h(Qz)\right\rangle\Xi^{-2}_h\vec{B} =$$

$$= i\omega\varepsilon\left\langle\Psi_h\,|\,Z_2\,|\,\frac{\partial\Phi^T_e}{\partial y}\otimes\Upsilon^T_e(Pz)\right\rangle\Xi^{-2}_e\vec{A} + \left\langle\Psi_h\,|\,Z_2\,|\,\frac{\partial\Phi^T_h}{\partial x}\otimes\tilde{\Upsilon}^T_h(Qz)\right\rangle Q\Xi^{-2}_h\vec{B},$$

7. Маломодовое приближение.

В общем виде решать эту систему следует численно, но мы здесь рассмотрим только случай малого импеданса: $\tilde{Z}_{1;2} = \theta Z_{1;2}$. Тогда $\omega = \omega_0 + \theta\omega_1 + \ldots$, характеристическое уравнение дает алгебраическую систему

$$\left(G_{11.0} + \theta G_{11.1} + \theta\omega_1 S_{11.1}\right)\left(A_0 + \theta A_1 + \ldots\right) + \left(G_{12.0} + \theta G_{12.1} + \theta\omega_1 S_{12.1}\right)\left(B_0 + \theta B_1 + \ldots\right) = 0,$$

$$\left(G_{21.0} + \theta G_{21.1} + \theta\omega_1 S_{21.1}\right)\left(A_0 + \theta A_1 + \ldots\right) + \left(G_{22.0} + \theta G_{22.1} + \theta\omega_1 S_{22.1}\right)\left(B_0 + \theta B_1 + \ldots\right) = 0\,.$$

В нулевом приближении $G_{110}A_0 + G_{120}B_0 = 0, \ldots$ В первом приближении

$$G_{110}A_1 + G_{111}A_0 + S_{111}\omega_1 A_0 + \ldots = 0,\ \ (G_{111}A_0 + \ldots) + (S_{111}A_0 + \ldots)\omega_1 = 0,$$

Пусть координатная система

$$\Phi_e = \sqrt{2/a}\sin(\alpha_x x)\sqrt{2/b}\sin(\alpha_y y),\ \ \alpha_x = \pi m'/a,\ \ \alpha_y = \pi n'/b,\ \ \alpha = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2},\ \ p = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}\,,$$

$$\Phi_h = \sqrt{2/a}\cos(\beta_x x)\sqrt{2/b}\cos(\beta_y y),\ \ \beta_x = \pi m''/a,\ \ \beta_y = \pi n''/b,\ \ \beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y},\ \ q = \sqrt{\kappa^2 - \beta^2}\,.$$

Тогда проекционная система

$$\Psi_e = \sqrt{2/a}\cos(\alpha_x x)\sqrt{2/b}\sin(\alpha_y y)\,,\ \ \Psi_h = \sqrt{2/a}\sin(\beta_x x)\sqrt{2/b}\cos(\beta_y y)\,.$$

Запишем только первое уравнение:

$$-\alpha_x < \sqrt{2/a}\cos(\alpha_x x)\sqrt{2/b}\sin(\alpha_y y) \,|\, \sqrt{2/a}\cos(\alpha_x x)\sqrt{2/b}\sin(\alpha_y y) > p\sin(pd)\alpha^{-2}A -$$

$$(-i\omega\mu)(-\beta_y) < \sqrt{2/a}\cos(\alpha_x x)\sqrt{2/b}\sin(\alpha_y y) \,|\, \sqrt{2/a}\cos(\beta_x x)\sqrt{2/b}\sin(\beta_y y) > q\sin(qd)\beta^{-2}B =$$

$$= -i\omega\varepsilon < \sqrt{2/a}\cos(\alpha_x x)\sqrt{2/b}\sin(\alpha_y y) \,|\, \tilde{Z}_1 \,|\, \alpha_x\sqrt{2/a}\cos(\alpha_x x)\sqrt{2/b}\sin(\alpha_y y) > \cos pd\,\beta^{-2}A$$

$$+ < \sqrt{2/a}\cos(\alpha_x x)\sqrt{2/b}\sin(\alpha_y y) \,|\, \tilde{Z}_1 \,|\, \beta_y\sqrt{2/a}\cos(\beta_x x)\sqrt{2/b}\sin(\beta_y y) > q\cos qd\,\beta^{-2}B\,.$$

Если $\tilde{Z}_1 = 0$, то $\alpha_x p\sin(pd)\chi^{-2}A - i\omega\mu\beta_y\beta_y q\sin(qd)\nu^{-2}B = 0$, собственные осцилляции найдем из уравнений $\sin pd = 0$, $B = 0$, или $\sin qd = 0$, $A = 0$. Далее найдем частоту осцилляции и декремент потерь из характеристического уравнения.

8. Заключение.

Мы вывели дисперсионные уравнения для волновода с двумерно неоднородной импедансной поверхностью на основе поверхностного варианта метода Галеркина. Мы нашли декремент затухания заданной моды в приближении малого импеданса методом разложения в ряд по степеням малого параметра. Результаты могут найти применение в теории и практическом расчете волноведущих систем с поглощающими стенками.