ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Научно-теоретический журнал

Издается с 2001 года

Выходит 6 раз в год

Свидетельство о регистрации
СМИ: ПИ № ФС77-80049
ISSN 2226-8383

Том XXII

Выпуск 4 (80)

Тула
2021

Учредитель: ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»

Каталог «Пресса России»
Подписной индекс 10642

Адрес редакции: 300026, г. Тула, пр. Ленина, 125

Тел: +79156812638, 8(4872)374051

E-mail: cheb@tsput.ru

URL: http://www.chebsbornik.ru

В журнале публикуются оригинальные статьи по направлениям современной математики: теория чисел, алгебра и математическая логика, теория функций вещественного и комплексного переменного, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, теория оптимизации и др. Также публикуются статьи о памятных датах и юбилеях.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата наук и доктора наук (перечень ВАК), индексируются и/или реферируются: Scopus, MathSciNet, Zentralblatt MATH, Russian Science Citation Index (RSCI), РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», РИНЦ, Google Scholar Metrics.

Журнал выходит под эгидой Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Российской академии наук, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского педагогического государственного университета, Тульского государственного университета.

Главный редактор
В. Н. Чубариков (Россия, г. Москва)

Ответственные секретари:
Н. Н. Добровольский (Россия, г. Тула)
И. Ю. Реброва (Россия, г. Тула)

Заместители главного редактора: Н. М. Добровольский (Россия, г. Тула), А. В. Михалёв (Россия, г. Москва), А. И. Нижников (Россия, г. Москва)

Редакционная коллегия:

А. И. Боровков (Россия, г. Санкт-Петербург)
В. А. Быковский (Россия, г. Хабаровск)
С. В. Востоков (Россия, г. Санкт-Петербург)
А. Е. Гвоздев (Россия, г. Тула)
Д. В. Георгиевский (Россия, г. Москва)
В. И. Горбачев (Россия, г. Москва)
С. А. Гриценко (Россия, г. Москва)
С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
В. Г. Дурнев (Россия, г. Ярославль)
А. М. Зубков (Россия, г. Москва)
А. О. Иванов (Россия, г. Москва)
В. И. Иванов (Россия, г. Тула)
В. К. Карташов (Россия, г. Волгоград)
М. А. Королёв (Россия, г. Москва)
В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
Ю. В. Матиясевич (Россия, г. Санкт-Петербург)
С. П. Мищенко (Россия, г. Ульяновск)
Ю. В. Нестеренко (Россия, г. Москва)
В. А. Панин (Россия, г. Тула)
У. М. Пачев (Россия, г. Нальчик)
А. Л. Семёнов (Россия, г. Москва)
Л. А. Толоконников (Россия, г. Тула)
А. А. Фомин (Россия, г. Москва)
В. Г. Чирский (Россия, г. Москва)
И. Аллаков (Узбекистан, г. Термез)
А. Я. Белов (Израиль, г. Рамат Ган)
В. И. Берник (Беларусь, г. Минск)
П. О. Касьянов (Украина, г. Киев)
А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Лю Юнпин (Китай, г. Пекин)
М. Дж. Марданов (Азербайджан, г. Баку)
О. Р. Мусин (США, г. Браунсвилл)
З. Х. Рахмонов (Таджикистан, г. Душанбе)
А. Х. Табари (Таджикистан, г. Куляб)
Л. Фукшанский (США, г. Клермонт)
Д. Шяучюнас (Литва, г. Шяуляй)

12+

СОДЕРЖАНИЕ

Том 22 Выпуск 4

От редакции 5

И. М. Виноградов. Суммы Гаусса и приложение их к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов 6

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя. О проблеме сопряженности слов в некотором классе подгрупп групп Артина 87

Д. В. Горбачев. Константы Никольского для компактных однородных пространств 99

В. И. Иванов. Потенциал Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье 113

В. И. Иванов. Свойства и применение положительного оператора сдвига для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье 135

А. Я. Канель-Белов, М. О. Коматовский, С. А. Тищенко. О динамических процессах в экономике многосторонних сетевых платформ 152

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений 167

В. Б. Поплавский. Частичные порядки и идемпотенты моноидов 182

З. Х. Рахмонов Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах 199

С. А. Скобельцын, Н. Ю. Пешков. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным внешним слоем вблизи плоскости 224

С. Ю. Соловьев. Об одном классе множителей многочленов Чебышева 240

В. И. Субботин. О существовании RR-многогранников, связанных с икосаэдром 252

А. М. Тропин. О бифуркации решения задачи Ферма — Штейнера при 1-параметрической вариации границы в $H(\mathbb{R}^2)$ 264

В. М. Чикин. Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных метрических пространств 288

В. Н. Чубариков. О кратных рациональных тригонометрических суммах над полем алгебраических чисел 305

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Е. В Манохин, Н. О. Козлова, В. Э. Комов. Харьковская школа М. И. Кадеца и математики Тулы 323

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем 331

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Н. Н. Авдеев. Об оценках на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями полуобщего положения 343

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Математическое эффективное уравнение разгрузки пористых металлических композиционных материалов 351

И. М. Буркин, О. И. Кузнецова. Новая мегастабильная система с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями 360

А. А. Трещев, Ю. А. Завьялова, М. А. Лапшина, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Е. С. Крупицын. Математические определяющие уравнения деформирования материалов с двойной анизотропией 369

ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

Памяти Валентина Фёдоровича Бутузова 384

РЕДКОЛЛЕГИЯ 387

THE EDITORIAL BOARD 391

TABLE OF CONTENTS 395

Данный выпуск Чебышевского сборника посвящён 130-летию со дня рождения великого советского математика, академика Академии наук СССР, дважды Героя социалистического труда Ивана Матвеевича Виноградова



Выпуск открывается дипломной работой И. М. Виноградова, выполненной в 1914 году под руководством академика Я. В. Успенского.

Данная публикация подготовлена к печати профессором М. А. Королёва по рукописи черновика дипломной работы И. М. Виноградова. Подстрочные замечания, введение и дополнения подготовлены профессором М. А. Королёвым.

Отсканированный вариант этого черновика хранится на сервере Математического института им. В. А. Стеклова РАН http://www.mi-ras.ru/persons/directors/vinogradov/Vinogradov.pdf и впервые публикуется в настоящем выпуске.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-6-48

Суммы Гаусса и приложение их к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов

И. М. Виноградов

Виноградов Иван Матвеевич — доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук СССР.

Аннотация

Впервые публикуется текст дипломной работы И. М. Виноградова, выполненной им под руководством Я. В. Успенского на математическом отделении физико-математического факультета Петербургского университета в 1914 г.

Ключевые слова: суммы Гаусса, символ Лежандра, квадратичные вычеты и невычеты, закон взаимности

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
И. М. Виноградов. Суммы Гаусса и приложение их к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 6–48.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-6-48

Gaussian sums and their application to the proof of quadratic reciprocity law

I. M. Vinogradov

Vinogradov Ivan Matveevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, academician of the USSR Academy of Sciences.

Abstract

This is the first publication of I. M. Vinogravos's senior thesis written under the scientific guidance of Ya. V. Uspensky at the mathematical department of the Faculty of physics and mathematics of Petersbourg's University in 1914.

Keywords: Gaussian sums, Legendre symbol, quadratic residues and non-residues, quadratic reciprocity law

Bibliography: 18 titles.

For citation:
I. M. Vinogradov, 2021, "Gaussian sums and their application to the proof of quadratic reciprocity law", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 6–48.

1. Введение

Настоящий том "Чебышевского сборника" посвящен 130-й годовщине со дня рождения академика И.М. Виноградова и открывается его студенческим сочинением "Суммы Гаусса и приложение их к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов", написанным в 1914 г.

История появления этой работы в общих чертах известна. Вероятно, в конце 1912 или начале 1913 г. молодой приват-доцент Петербургского университета Яков Викторович Успенский[1] (1883-1947), уже зарекомендовавший себя как выдающийся специалист по теории чисел, поставил перед студентом физико-математического факультета Иваном Виноградовым задачу "дать простое изложение одного из доказательств квадратичного закона взаимности Гаусса" (см. [3, с. 5], [4, с. 5]). Размышления над ней, глубокое изучение работ классиков привели Ивана Матвеевича к новой оригинальной задаче, связанной с оценками суммы символов Лежандра и распределением квадратичных вычетов по заданному модулю, которую он блестяще решил. Именно с упоминания о ней и принято начинать рассказ о научном творчестве И.М. Виноградова (см., например: [3, с. 5-7], [4, с. 4-6], [5, с. 321], [6, с. 7-8]). Работа же о суммах Гаусса остается в тени.

Отчасти это оправдано. Оценивая ее формально, можно сказать, что эта работа не представляет самостоятельной научной ценности, столь характерной для всех последующих математических публикаций И.М. Виноградова, так как является лишь изложением результатов других математиков (К.Ф. Гаусса, П.Г.Л. Дирихле и О. Коши), хотя и не лишенным самобытности. Возникает естественный вопрос: нуждается ли вообще в публикации эта "зеленая" студенческая работа, не предназначавшаяся, кстати, самим автором к печати?

После долгих размышлений и колебаний мы все же пришли к положительному ответу на этот вопрос. По нашему мнению, такая публикация представляет, прежде всего, значительный историко-математический интерес для исследователей научного творчества И.М. Виноградова и для будущих биографов ученого. Действительно, внимательное изучение рукописи этой работы наряду с ранними печатными публикациями позволяет хотя бы отчасти реконструировать круг чтения молодого Ивана Матвеевича, а также понять, труды каких ученых сформировали его математические "вкусы", заметнее всего повлияли на его математические интересы и в итоге привели к выбору теории чисел как будущей специальности.[2]

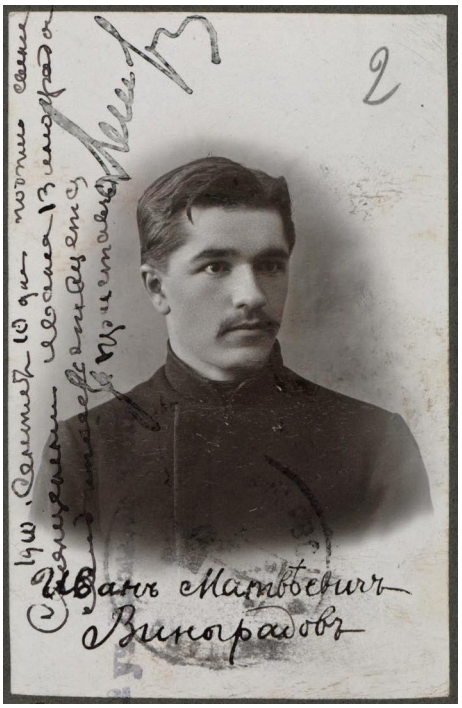
В этой студенческой работе мы уже можем разглядеть характерные черты научно-педагогического таланта И.М. Виноградова, хотя еще и не вполне устоявшиеся: ясность изложения, отбор и расположение излагаемого материала и даже умелый выбор обозначений. Удивительно, но некоторые обозначения, использованные в рукописи, "доживут" до последнего, девятого по счету, прижизненного издания его всемирно известного учебника "Основы теории чисел" (1981 г.).

Кроме того, публикация работы о суммах Гаусса устраняет и неопределенность, связанную с найденной И.М. Виноградовым и упоминавшейся выше оценкой суммы символов Лежандра

$$S = S(p; M, N) = \sum_{n=N+1}^{N+M} \left(\frac{n}{p}\right), \quad p - \text{простое число}.$$

[1] В сентябре 1912 г. Я.В. Успенский был приглашен читать лекции в Петербургском университете, где стал преподавать теорию чисел, исчисление конечных разностей и вести упражнения по приложениям интегрального исчисления к геометрии [1, с. 115]. С 1914 г. официально руководил студенческим кружком по математике, в котором принимали участие не только студенты, но и окончившие университет специалисты. Многие участники этого кружка впоследствии стали известными учеными: А.А. Фридман, Я.Д. Тамаркин, Н.С. Кошляков и др. [2]

[2] Не лишним будет напомнить, что "при обучении в университете Иван Матвеевич с большим интересом занимался теорией вероятностей, которую им читал А.А. Марков" и "знал курс Маркова наизусть" (см. [4, с. 5]).



И.М. Виноградов. Фотомастерская М.С. Мельника (г. Великие Луки), 10 июня 1910 г. Пометы: «Иван Матвеевич Виноградов»; «Подпись сына Священника Ивана Виноградова (2 слова неразб.). Пристав (подпись)». Штамп: «2й У Ч[АСТОК] (неразб.) ЧАСТИ». Круглая печать (неразб.).
Личное дело студента С.-Петербургского Императорского Университета И.М. Виноградова,
ЦГИА СПб, ф. 14, оп. 3, д. 57325, л. 2.

После прочтения соответствующих абзацев из очерков А.А. Карацубы [4, с. 3-5], [6, с. 7-8], может сложиться впечатление, что именно оценка вида

$$|S| < \sqrt{p}\,\ln p, \tag{1}$$

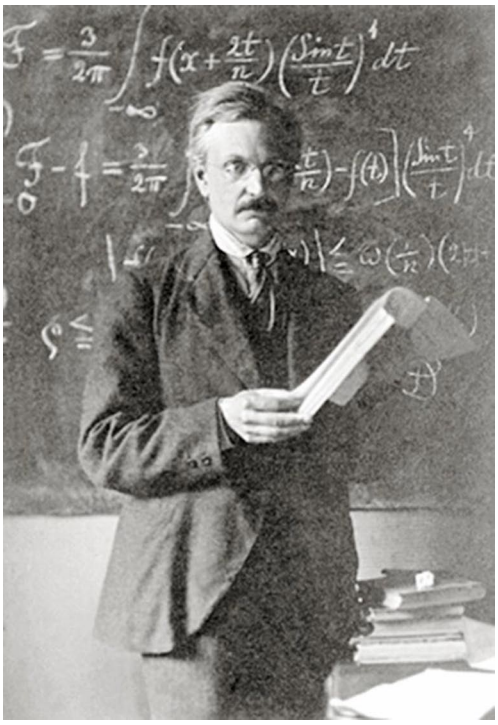
найденная Иваном Матвеевичем и принесшая ему широкую известность, и составила предмет его диплома. Между тем, оценка (1) была доказана чуть позже написания статьи о суммах Гаусса, в том же 1914 или в начале 1915 г.[3]

Наконец, такая публикация представляет интерес для исследователей педагогического таланта научного руководителя И.М. Виноградова – Я.В. Успенского. Ведь именно он столь промыслительно указал начинающему математику тему для исследований. Именно из этой студенческой работы как из семечка выросло в конечном итоге могучее древо метода тригонометрических сумм, в корне изменившего облик аналитической теории чисел.

Перейдем к содержательной части работы. Для этого напомним некоторые определения. Пусть p – нечетное простое число. Число n, не кратное p, называется квадратичным вычетом по модулю p, если оно сравнимо по модулю p с квадратом некоторого целого числа, и называется квадратичным невычетом в противном случае. Символ Лежандра $\left(\frac{n}{p}\right)$ определяется, соответственно, соотношением

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{квадратичный вычет по модулю } p, \\ -1, & \text{если } n - \text{квадратичный невычет по модулю } p, \\ 0, & \text{если } n \text{ кратно } p. \end{cases}$$

[3]Более точная датировка едва ли возможна. В [5], [6] доказательство И.М. Виноградовым неравенства (1) датируется 1915 г., в [3] - 1914 г. В силу ряда обстоятельств оценка (1) была опубликована лишь в 1918 г. на французском языке в “Журнале физико-математического общества при Пермском университете” (см. [7]).



Я.В. Успенский. Фотоснимок с официального сайта Российской Академии наук.

Квадратичный закон взаимности формулируется следующим образом: если p и q – различные нечетные простые числа, то

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \;=\; (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}. \tag{2}$$

Эта теорема была известна еще Л. Эйлеру и частично доказана А.М. Лежандром; полное доказательство (2) было найдено К.Ф. Гауссом в 1795 г. (см. [8, с.179, примечания к гл. V]). Позже Гаусс дал несколько различных доказательств закона взаимности. Одно из них, четвертое по счету, и стало объектом исследования И.М. Виноградова.

Это доказательство опирается на квадратичные суммы Гаусса, т.е. тригонометрические суммы вида

$$\varphi(h,n) \;=\; \sum_{s=0}^{n-1} e^{2\pi i\frac{hs^2}{n}} \;=\; \sum_{s=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2\pi hs^2}{n} \;+\; i\sin\frac{2\pi hs^2}{n}\right)$$

(здесь h – целое число, взаимно простое с n). Несложно убедиться, что при нечетном простом $n=p$ имеет место равенство

$$\varphi(h,p) \;=\; \left(\frac{h}{p}\right)\varphi(1,p). \tag{3}$$

Гауссом было найдено точное значение суммы $\varphi(1,n)$ для произвольного n:

$$\varphi(1,n) \;=\; \frac{1+i^{-n}}{1-i}\,\sqrt{n}. \tag{4}$$



И.М. Виноградов - выпускник университета.
Фотомастерская М.Д. Стуколкина (Санкт-Петербург), 1914 г.
Фотоснимок из фондов Дома-музея И.М. Виноградова в г. Великие Луки[4].

Равенства (3), (4) наряду с легко проверяемым соотношением

$$\varphi(h, mn) = \varphi(hm, n)\varphi(hn, m), \quad (m, n) = 1, \tag{5}$$

позволяют вывести равенство (2). Таким образом, доказательство квадратичного закона сводится, по сути, к нахождению явной формулы для суммы $\varphi(1; n)$. Способ, указанный для этого самим К.Ф. Гауссом, был вполне элементарным и требовал одних лишь алгебраических преобразований. Впоследствии для вычисления $\varphi(1; n)$ были предложены иные средства: аппарат рядов Фурье (П.Г.Л. Дирихле, 1835; М. Шаар, 1848-1850; Л. Кронекер, 1856), формула Абеля-Плана (А. Геноччи, 1852), тета-ряды (О. Коши, 1840), контурное интегрирование (Л. Кронекер, 1880) и др.[5]

И.М. Виноградовым были основательно изучены три метода вычисления квадратичной суммы Гаусса, принадлежащие, соответственно, самому Гауссу, Дирихле и Коши. Их подробное изложение и составляет содержание работы. Первый способ нахождения $\varphi(1; n)$ был опубликован Гауссом в 1811 г. в статье [11] под названием "Суммирование некоторых рядов определенного вида"[6]. Метод Гаусса основан на изучении свойств функций

$$(m, \mu) = \frac{(1 - x^m)(1 - x^{m-1}) \dots (1 - x^{m-\mu+1})}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^\mu)},$$

которые именуются теперь многочленами Гаусса, и, в частности, на вычислении их значений в точках $x = e^{2\pi i h/n}$.

[4]Публикуется с любезного разрешения директора Дома-музея И.М. Виноградова в г. Великие Луки Т.Г. Бобкиной.

[5]История исследований сумм Гаусса и их обобщений достаточно подробно изложена в статье [9], а также в примечаниях к первой главе книги [10].

[6]Интересно отметить, что перевод этой статьи на русский язык появился лишь в 1959 г. в составе "Трудов по теории чисел" К.Ф. Гаусса [12], изданных под общей редакцией академика И.М. Виноградова.

Второй метод был предложен в 1835 г. Дирихле в работе "Об одном новом приложении определенного интеграла к суммированию конечных и бесконечных рядов" [13]. Он основан на соотношении

$$2\pi \sum_{n=0}^{N}{}' f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi N} f(x)\cos(nx)dx, \tag{6}$$

называемом теперь формулой суммирования Пуассона (штрих означает, что слагаемые с $n = 0, N$ входят в сумму с коэффициентом 0.5). Применение (6) к случаю $N = 2m$, $f(x) = \cos\left(\dfrac{x^2}{8\pi m} + \delta\right)$ (δ – произвольное вещественное число) приводит к явным формулам для сумм

$$\sum_{s=0}^{4m-1} \cos\frac{2\pi s^2}{4m}, \quad \sum_{s=0}^{4m-1} \sin\frac{2\pi s^2}{4m},$$

и, следовательно, для суммы $\varphi(1,n)$ в случае $n = 4m \equiv 0 \pmod 4$. Значения $\varphi(1,n)$ для оставшихся n могут быть легко найдены из полученного результата и тождества (5).

Наконец, третий метод вычисления $\varphi(1,n)$, опубликованный О. Коши в статье "Новый простой метод вычисления знакопеременных сумм, образованных при помощи примитивных корней двучленных уравнений" [14], основан на тождестве

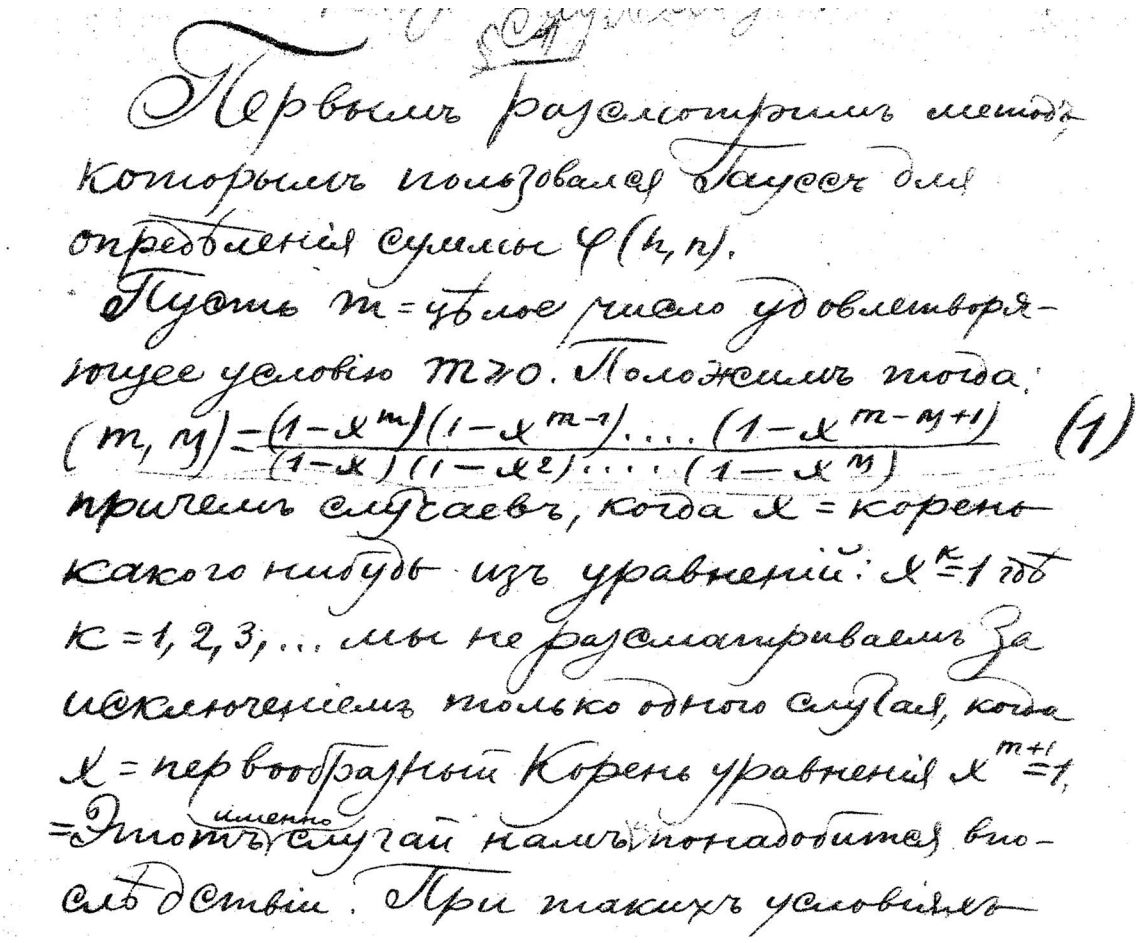
$$\sqrt{a}\left\{\frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \ldots\right\} = \sqrt{b}\left\{\frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + e^{-9b^2} + \ldots\right\}, \tag{7}$$

которое справедливо для любых комплексных чисел a, b с положительными вещественными частями, связанных равенством $ab = \pi$. Искомый результат получается из (7), если положить $a^2 = -2\pi i/n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и устремить затем ε к нулю.

Все три упомянутые работы вошли в собрания трудов Гаусса [15], Дирихле [16] и Коши [17] и в таком виде могли быть доступны Ивану Матвеевичу. Работа с ними оказала решающее воздействие на научное творчество И.М. Виноградова и позволила ему со временем осознать и блестяще раскрыть потенциал нового инструмента в аналитической теории чисел – метода тригонометрических сумм.

Текст работы публикуется по ксерокопии с рукописи, хранящейся в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова (шифр К 26471). Местонахождение оригинала неизвестно. Рукопись содержит 38 непронумерованных листов, написанных чернилами. На титульном листе указаны фамилия автора и название работы[7]. В нижней части листа почерком, отличным от почерка автора (предположительно, шариковой ручкой), проставлена дата создания рукописи: "1914". В левом верхнем углу помещен библиотечный шифр, в центре – штамп Математического института. Как отмечено в [3, с. 9], в верхней части титульного листа оригинала рукописи присутствовала помета Я.В. Успенского: "Представленную работу считать весьма удовлетворительной". К сожалению, плохое качество ксерокопии и способ нанесения (простой карандаш) делает эту и иные многочисленные пометы Я.В. Успенского на листах рукописи практически нечитаемыми.

[7] Фотоснимок титульного листа приведен в [3, с. 9].



Первым рассмотрим метод, которым пользовался Гаусс для определения суммы $\varphi(k,n)$.

Пусть m = целое число удовлетворяющее условию $m \geq 0$. Положим тогда:

$$(m,n) = \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-n+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)} \quad (1)$$

причем случаев, когда x = корень какого нибудь из уравнений: $x^k = 1$ где $k = 1, 2, 3, \dots$ мы не рассматриваем за исключением только одного случая, когда x = первообразный Корень уравнения $x^{m+1} = 1$, = Этот именно случай нам понадобится впоследствии. При таких условиях

Фрагмент рукописи И.М. Виноградова

Текст рукописи разбит Я.В. Успенским на 17 частей: введение и 16 параграфов; им же даны названия некоторым из них (эти названия мы, однако, сочли возможным опустить в тексте публикации): “§1. Доказательство ... служащих для определения $\varphi(1,n)$”, “§7. Некоторые ...”, “§14. Доказательство Коши формул ...”, “§16. Формулы ...” (многоточие обозначает либо слова, не поддающиеся прочтению, либо вовсе отсутствующие в рукописи). Знаки §§2, 4, 8, 12 и 15 в рукописи не читаются и проставлены публикатором.

Тест работы публикуется в современной орфографии и пунктуации; сокращенно написанные слова воспроизводятся полностью, восстановленные части слов заключаются в квадратные скобки. Описки в формулах (лишние символы, пропуски, замена одного символа другим и т.п.) в тексте устранены, но отмечены в подстрочных примечаниях. Математическая символика автора в целом сохранена. Так, вместо знака $\lim_{m\to+\infty}$ оставлены использованные И.М. Виноградовым обозначения пред.$_{m=\infty}$, предел$_{m=\infty}$ (скорректированные с учетом современной орфографии). В ряде случаев, во избежание путаницы, отсутствующие скобки добавлены, квадратные заменены круглыми. Эти исправления виду их незначительности никак не оговариваются.

Текст работы подготовлен к публикации М.А. Королёвым.

2. Текст работы

Прежде чем приступить к настоящему исследованию, напомним некоторые предложения из теории двучленного уравнения $x^n = 1$.

Пусть n – любое целое положительное число, и пусть $h_1 = 1, h_2, h_3, \ldots, h_{\varphi(n)}$ – числа, меньшие n и с ним взаимно простые. Обозначим $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ чрез ϱ.

Тогда числа $1, \varrho, \varrho^2, \ldots, \varrho^{n-1}$ представят все решения уравнения $x^n = 1$, и числа ϱ, ϱ^{h_2}, $\varrho^{h_3}, \ldots, \varrho^{h_{\varphi(n)}}$ – все различные первообразные корни этого уравнения. Пусть h – любое из чисел $h_1, h_2, \ldots, h_{\varphi(n)}$, и положим $\varrho^h = r$. Тогда все решения уравнения $x^n = 1$ и все различные его первообразные корни соответственно так представятся: $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$ и: $r, r^{h_2}, r^{h_3}, \ldots, r^{h_{\varphi(n)}}$.

Сумму

$$\varphi(h, n) = 1 + r + r^4 + \cdots + r^{(n-1)^2},$$

полное определение которой дал впервые Гаусс, назовем суммою Гаусса.

Исследования наши будут расположены в следующем порядке: сначала мы покажем, как определить величину $\varphi(h, n)$ для случая $h = 1$; далее мы покажем, как определяется $\varphi(h, n)$ при любом $h = h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{\varphi(n)}$. При этом, если вести исследование 2-мя путями, то для суммы $\varphi(h, n)$ можно получить 2 выражения, отличных формально одно от другого. Из сравнения этих выражений и получается закон взаимности квадратичных вычетов.

§1

Первым рассмотрим метод, которым пользовался Гаусс для определения суммы $\varphi(h, n)$.

Пусть m – целое число, удовлетворяющее условию $m \geqslant 0$. Положим тогда

$$(m, \mu) = \frac{(1 - x^m)(1 - x^{m-1}) \ldots (1 - x^{m-\mu+1})}{(1 - x)(1 - x^2) \ldots (1 - x^\mu)} \tag{8}$$

причем случаев, когда x – корень какого-нибудь из уравнений: $x^k = 1$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, мы не рассматриваем, за исключением только одного случая, когда x – первообразный корень уравнения $x^{m+1} = 1$. Этот именно случай нам и понадобится впоследствии. При таких условиях функция (m, μ) для $\mu = 1, 2, 3, \ldots, m$ вполне определяется формулой (8). Для значений же μ, превышающих m, функция $(m, \mu) = 0$, если не имеет места вышеупомянутый исключительный случай, и обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$ в этом случае. Однако для сокращения дальнейших рассуждений будем полагать $(m, \mu) = 0$ при $\mu > 0$ и в случае когда x – первообразный корень уравнения $x^{m+1} = 1$. По тем же соображениям будем полагать всегда $(m, 0) = 1$ и $(m, \mu) = 0$, если $\mu < 0$. Тогда для любого значения $\mu = \cdots, -2, -1, 0, +1, +2, \cdots$ легко доказываются следующие 2 равенства:

$$(m, \mu) = (m - 1, \mu) + x^{m-\mu}(m - 1, \mu - 1) \tag{9}$$

и

$$(m, \mu) = (m, m - \mu). \tag{10}$$

§2

Рассмотрим ряд

$$f(x, m) = \sum (-1)^\mu (m, \mu), \tag{11}$$

где суммирование распространяется на все целые значения μ. Применяя сюда формулу (9), находим:

$$f(x, m) = \sum (-1)^\mu (m - 1, \mu) + \sum (-1)^\mu x^{m-\mu} (m - 1, \mu - 1).$$

Заметим, далее, что во всех суммах вида $\sum \psi(\mu)(m, \mu)$, где суммирование распространяется по μ на все целые числа, очевидно, можно всегда вместо μ подставить $\pm\mu + k$, где k – любое целое число, и считать, что суммирование опять распространено на все целые значения μ.

На этом основании находим:

$$f(x,m) = \sum(-1)^{\mu}(m-1,\mu) + \sum(-1)^{\mu+1}x^{m-\mu-1}(m-1,\mu) = \\ = \sum(-1)^{\mu}(1 - x^{m-\mu-1})(m-1,\mu).$$

Далее, легко видеть, что $(1-x^{m-\mu-1})(m-1,\mu) = (1-x^{m-1})(m-2,\mu)$ и след[овательно]:

$$f(x,m) = \sum(-1)^{\mu}(1-x^{m-1})(m-2,\mu) = (1-x^{m-1})\sum(-1)^{\mu}(m-2,\mu),$$

то есть:

$$f(x,m) = (1-x^{m-1})f(x,m-2).$$

Положим теперь, что m – четное число. Находим последовательно:

$$f(x,0) = (-1)^0(0,0) = 1$$

[u] далее

$$f(x,2) = (1-x)f(x,0)$$
$$f(x,4) = (1-x^3)f(x,2)$$
$$\dots$$
$$f(x,m) = (1-x^{m-1})f(x,m-2).$$

Перемножая все эти равенства, находим:

$$f(x,m) = \sum(-1)^{\mu}(m,\mu) = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots(1-x^{m-1}). \tag{12}$$

§3

Рассмотрим еще такой ряд:

$$F(x,m) = \sum x^{\frac{\mu}{2}}(m,\mu), \tag{13}$$

где суммирование опять распространяется на все целые значения μ. Равенство это на основании формулы (10) так можно переписать:

$$F(x,m) = \sum x^{\frac{\mu}{2}}(m,m-\mu)$$

Заменив в этой сумме μ на $-\mu+m$ и переписав ее в обратном порядке, имеем

$$F(x,m) = \sum x^{\frac{m-\mu}{2}}(m,\mu),$$

или еще, заменяя μ на $\mu-1$:

$$F(x,m) = \sum x^{\frac{m+1}{2}-\frac{\mu}{2}}(m,\mu-1),$$

откуда

$$x^{\frac{m+1}{2}}F(x,m) = \sum x^{m+1-\frac{\mu}{2}}(m,\mu-1). \tag{14}$$

Складывая равенства (13) и (14), найдем:

$$F(x,m)\big(1 + x^{\frac{m+1}{2}}\big) = \sum x^{\frac{\mu}{2}}\big[(m,\mu) + x^{m+1-\mu}(m,\mu-1)\big].$$

Откуда, принимая во внимание формулу (9), находим окончательно:

$$F(x,m)\big(1 + x^{\frac{m+1}{2}}\big) = \sum x^{\frac{\mu}{2}}(m+1,\mu) = F(x,m+1).$$

Но

$$F(x,0) = 1;$$

далее,

$$\begin{aligned} F(x,1) &= \big(1+x^{\frac{1}{2}}\big)F(x,0)\\ F(x,2) &= (1+x)F(x,1)\\ &\dots\\ F(x,m) &= \big(1+x^{\frac{m}{2}}\big)F(x,m-1). \end{aligned}$$

Перемножая эти равенства, найдем:

$$F(x,m) = \big(1+x^{\frac{1}{2}}\big)\big(1+x\big)\dots\big(1+x^{\frac{m}{2}}\big). \tag{15}$$

§4

Пусть теперь n – целое нечетное число. Заменим в формуле (12) m на $n-1$ и x – первообразным корнем уравнения $x^n = 1$. Найдем тогда:

$$\sum(-1)^\mu(n-1,\mu) = (1-r)(1-r^3)\cdots(1-r^{n-2}),$$

причем знак Σ достаточно распространить на значения $\mu = 0,1,2,\dots,n-1$. Но

$$\begin{aligned} (-1)^\mu(n-1,\mu) &= (-1)^\mu\,\frac{(1-r^{n-1})(1-r^{n-2})\dots(1-r^{n-\mu})}{(1-r)(1-r^2)\dots(1-r^\mu)} =\\ &= (-1)^\mu\,\frac{(1-r^{-1})(1-r^{-2})\dots(1-r^{-\mu})}{(1-r^1)(1-r^2)\dots(1-r^\mu)} = r^{-1-2-\dots-\mu} = r^{-\frac{\mu(\mu+1)}{2}} \end{aligned}$$

и след[овательно] получаем:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} r^{-\frac{\mu(\mu+1)}{2}} = (1-r)(1-r^3)\cdots(1-r^{n-2}).$$

Эта формула справедлива, если понимать под r какой угодно первообразный корень уравнения $x^n = 1$. Легко видеть, что r^{-2} будет также первообразным корнем уравнения $x^n = 1$, т[ак] как -2 – число, взаимно простое с n. Заменив в последнем равенстве r на r^{-2}, находим:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} r^{\mu(\mu+1)} = (1-r^{-2})(1-r^{-6})(1-r^{-10})\cdots(1-r^{-2(n-2)}). \tag{16}$$

Умножив обе части этого равенства на $r^{\frac{1}{4}(n-1)^2} = r\cdot r^3\cdot r^5\cdots r^{n-2}$, найдем в левой части:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} r^{\mu^2+\mu-\mu n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n-1} r^{\left(\frac{n-1}{2}-\mu\right)^2} = \sum_{\mu=0}^{\frac{n-1}{2}} r^{\left(\frac{n-1}{2}-\mu\right)^2} + \sum_{\mu=\frac{n+1}{2}}^{n-1} r^{\left(\frac{n-1}{2}-\mu+n\right)^2} =$$

$$= \sum_{t=\frac{n-1}{2}}^{0} r^{t^2} + \sum_{t=\frac{n+1}{2}}^{n-1} r^{t^2} = \sum_{t=0}^{n-1} r^{t^2} = \varphi(h,n).$$

Равенство (16) теперь так переписывается:

$$\varphi(h,n) = (r-r^{-1})(r^3-r^{-3})(r^5-r^{-5})\cdots(r^{n-2}-r^{-(n-2)}). \tag{17}$$

Имеем далее:

$$\begin{aligned} r-r^{-1} &= -(r^{n-1}-r^{-(n-1)}) \\ r^3-r^{-3} &= -(r^{n-3}-r^{-(n-3)}) \\ &\cdots \\ r^{n-2}-r^{-(n-2)} &= -(r^2-r^{-2}) \end{aligned}$$

и след[овательно]:

$$\varphi(h,n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(r^2-r^{-2}\right)\left(r^4-r^{-4}\right)\ldots\left(r^{n-1}-r^{-(n-1)}\right). \tag{18}$$

Перемножая (17) и (18), найдем:

$$\left[\varphi(h,n)\right]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(r-r^{-1}\right)\left(r^2-r^{-2}\right)\ldots\left(r^{n-1}-r^{-(n-1)}\right)$$

или:

$$\left[\varphi(h,n)\right]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} r^{1+2+3+\cdots+n-1}(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-2(n-1)}) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1-r^{-2})(1-r^{-4})\cdots(1-r^{-2(n-1)}).$$

Но $r^{-2}, r^{-4}, \ldots, r^{-2(n-1)}$, очевидно, представляют все корни такого уравнения: $\frac{x^n-1}{x-1}=0$, и след[овательно]:

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 = (x-r^{-2})\cdots(x-r^{-2(n-1)})$$

при $x=1$ находим отсюда:

$$n = (1-r^{-2})\cdots(1-r^{-2(n-1)})$$

и след[овательно], окончательно: $\left[\varphi(h,n)\right]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$. Т[о] есть если n формы $4\mu+1$, то $\varphi(h,n)=\pm\sqrt{n}$; если же n формы $4\mu+3$, то: $\varphi(h,n)=\pm i\sqrt{n}$.

Знак, который нужно брать в 2-х последних формулах, мы определим следующим образом: пока лишь для случая, когда $h=1$, т[о]есть для случая $r=\varrho$. Имеем тогда

$$\varrho^s - \varrho^{-s} = e^{2\frac{\pi}{n}si} - e^{-2\frac{\pi}{n}si} = i\cdot 2\sin\frac{2\pi\cdot s}{n},$$

и формула (17) дает нам:

$$\varphi(1,n) = 2^{\frac{n-1}{2}} i^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin 3\frac{2\pi}{n}\cdots\sin(n-2)\frac{2\pi}{n}.$$

Если притом n формы $4\mu+1$, то числа

$$\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n},\quad \Big(\frac{n+1}{2}+1\Big)\frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad (n-2)\,\frac{2\pi}{n}$$

будут больше π, соответственно чему $\frac{n-1}{4}$ синусов будут отрицательны. Кроме того, $i^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{4}}$ и след[овательно] знак всего произведения определится знаком выражения:

$$(-1)^{\frac{n-1}{4}}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{4}} = 1,$$

т[о] есть будет «+». Если же n формы $4\mu+3$, то числа

$$\frac{n+3}{2}\cdot\frac{2\pi}{n},\quad \Big(\frac{n+3}{2}+1\Big)\cdot\frac{2\pi}{n},\quad \ldots,\quad (n-2)\cdot\frac{2\pi}{n}$$

будут больше π, соответственно чему $\frac{n-3}{4}$ синусов будут отрицательны, и, кроме того, $i^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-3}{4}} i$. След[овательно], в этом случае все произведение равно положительному числу, умноженному на $i\cdot(-1)^{\frac{n-3}{4}}\cdot(-1)^{\frac{n-3}{4}}$, т[о] есть на i. Итак, окончательно:

$$\begin{cases}\varphi(1,n) & = +\sqrt{n}, \quad \text{если } n \text{ формы } 4\mu+1\\ \text{и}\ \ \varphi(1,n) & = +i\sqrt{n}, \quad \text{если } n \text{ формы } 4\mu+3.\end{cases} \tag{19}$$

§5

Пусть n – четное число $\equiv 2(\text{мод } 4)$. В таком случае сумму $\varphi(h,n)$ так разложим:

$$\varphi(h,n) = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} + \sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} r^{t^2}.$$

Во второй из полученных сумм переменную суммирования заменим по формуле $t = \frac{n}{2}+t_1$; тогда она примет вид

$$\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\frac{n^2}{4}+nt_1+t_1^2}.$$

Но легко видеть, что $\frac{n^2}{4}+nt_1 \equiv \frac{n}{2}(\text{мод } n)$, и, следовательно, окончательно вторая сумма принимает вид:

$$\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\frac{n}{2}+t_1^2} = \sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t_1^2},$$

т[ак] как $r^{\frac{n}{2}} = -1$. Итак, имеем:

$$\varphi(h,n) = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} - \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} = 0. \tag{20}$$

§6

Рассмотрим, наконец, случай $n \equiv 0 (\text{мод } 4)$. В формуле (15) положим $m = \frac{n}{2} - 1$ и $x^{\frac{1}{2}} = -r^{-1}$ (нетрудно убедиться в том, что $x = r^{-2}$ – первообразный корень уравнения $x^{\frac{n}{2}} = 1$). После такого преобразования формула (15) примет вид:

$$\sum (-1)^{\mu} r^{-\mu} (m, \mu) = (1 - r^{-1})(1 + r^{-2})(1 - r^{-3}) \cdots (1 - r^{-\frac{n}{2}+1}), \tag{2.8'}$$

причем знак $\sum$ достаточно распространить на значения $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$. (m, μ) будет равно теперь такому выражению:

$$\frac{(1 - r^{-n+2})(1 - r^{-n+4}) \cdots (1 - r^{-n+2\mu})}{(1 - r^{-2})(1 - r^{-4}) \cdots (1 - r^{-2\mu})} =$$

$$= \frac{(1 - r^2)(1 - r^4)(1 - r^6) \cdots (1 - r^{2\mu})}{(1 - r^{-2})(1 - r^{-4})(1 - r^{-6}) \cdots (1 - r^{-2\mu})} =$$

$$= (-1)^{\mu} r^{2(1+2+3+\cdots+\mu)} = (-1)^{\mu} r^{\mu(\mu+1)};$$

след[овательно], сумма, стоящая в левой части равенства (2.8′), преобразуется в:

$$\sum_{\mu=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^{\mu} r^{-\mu} \cdot (-1)^{\mu} r^{\mu(\mu+1)} = \sum_{\mu=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\mu^2}.$$

С другой стороны, находим:

$$\varphi(h, n) = \sum_{t=0}^{n-1} r^{t^2} = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} + \sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} r^{t^2}.$$

Вторую из полученных сумм подстановкой $t = \frac{n}{2} + t_1$ приведем к следующей:

$$\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\frac{n^2}{4} + n t_1 + t_1^2}.$$

Замечая, что $\frac{n^2}{4} + n t_1 \equiv 0 (\text{мод } n)$, найдем для второй суммы такое выражение: $\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t_1^2}$, и след[овательно]: $\varphi(h, n) = 2 \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2}$.

На этом основании формула (8′) окончательно преобразуется в следующую:

$$\varphi(h, n) = 2(1 - r^{-1})(1 + r^{-2})(1 - r^{-3}) \cdots \left(1 - r^{-\frac{n}{2}+1}\right); \tag{2.8''}$$

далее находим:

$$1 + r^{-2} = -r^{\frac{n}{2}-2}\left(1 - r^{-\frac{n}{2}+2}\right)$$

$$1 + r^{-4} = -r^{\frac{n}{2}-4}\left(1 - r^{-\frac{n}{2}+4}\right)$$

$$\cdots$$

$$1 + r^{-\frac{n}{2}+2} = -r^{-2}\big(1 - r^{-2}\big),$$

и след[овательно]

$$\varphi(h,n) = 2(-1)^{\frac{n}{4}-1} r^{2\left(1+2+\cdots+\left(\frac{n}{4}-1\right)\right)}(1-r^{-1})(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-\frac{n}{2}+1}) =$$
$$= 2(-1)^{\frac{n}{4}-1} r^{\frac{n^2}{16}-\frac{n}{4}}(1-r^{-1})(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-\frac{n}{2}+1}); \quad (21)$$

далее находим:

$$1 - r^{-1} = -r^{-1}\big(1 - r^{-n+1}\big)$$
$$1 - r^{-2} = -r^{-2}\big(1 - r^{-n+2}\big)$$
$$\cdots$$
$$1 + r^{-\frac{n}{2}+1} = -r^{-\frac{n}{2}+1}\big(1 - r^{-\frac{n}{2}-1}\big).$$

Принимая во внимание эти равенства, формулу (21) так перепишем:

$$\varphi(h,n) = 2(-1)^{\frac{3}{4}n} r^{-\frac{n^2}{16}}\big(1 - r^{-\frac{n}{2}-1}\big)\big(1 - r^{-\frac{n}{2}-2}\big)\cdots\big(1 - r^{-n+1}\big). \quad (22)$$

Перемножая равенства (21), (22) и $2 = \big(1 - r^{\frac{n}{2}}\big)$, имеем:

$$2\big[\varphi(h,n)\big]^2 = 4(-1)^{\frac{n}{4}-1+\frac{3}{4}n} r^{-\frac{n}{4}}(1-r^{-1})(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-n+1})$$

или:

$$\big[\varphi(h,n)\big]^2 = 2r^{\frac{n}{4}}(1-r^{-1})(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-n+1}).$$

Заметим, что:

$$r^{\frac{n}{8}} = \cos\Big(\frac{2\pi h}{n}\cdot\frac{n}{8}\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi h}{n}\cdot\frac{n}{8}\Big) = \cos\frac{\pi h}{4} + i\sin\frac{\pi h}{4} = \pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}},$$

причем в числителе берется знак «+» или «−» смотря по тому, будет ли h формы $4\mu+1$, или формы $4\mu+3$. Кроме того,

$$(1-r^{-1})(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-n+1}) = n,$$

поэтому окончательно находим

$$\varphi(h,n) = \pm(1\pm i)\sqrt{n}. \quad (23)$$

Остается определить знак, стоящий пред выражением $(1\pm i)\sqrt{n}$. Это мы сделаем пока лишь для случая $h = 1$. Полагая $R = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ и замечая что $R^n = -1$, мы формулу (2.8″) так преобразуем для случая $h = 1$:

$$\varphi(h,n) = 2(1+R^{n-2})(1+R^{-4})(1+R^{n-6})\cdots(1+R^{-n+4})(1+R^2)$$

или

$$\varphi(h,n) = 2(1+R^2)(1+R^{-4})(1+R^6)\cdots(1+R^{-n+4})(1+R^{n-2});$$

далее находим:

$$1 + R^2 = R(R^{-1}+R^1) = 2R\cos\frac{\pi}{n}$$

$$1+R^{-4} = 2R^{-2}\cos\frac{2\pi}{n}$$
$$1+R^{6} = 2R^{3}\cos\frac{3\pi}{n}$$
$$\dots$$
$$1+R^{n-2} = 2R^{\frac{n}{2}-1}\cos\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\frac{\pi}{n}$$

и след[овательно]:

$$\varphi(h,n) = 2^{\frac{n}{2}}R^{\frac{n}{4}}\cos\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\cdots\cos\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\frac{\pi}{n}.$$

Все косинусы, входящие в это произведение, положительны, и кроме того: $R^{\frac{n}{4}} = (1+i)$ и след[овательно] $\varphi(1,n)$ = положительному числу, умноженному на $(1+i)$; т[о] есть:

$$\varphi(1,n) = (1+i)\sqrt{n}. \tag{24}$$

Собирая формулы (19), (20), (24), имеем окончательно:

$$\begin{cases} \varphi(1,n) = (1+i)\sqrt{n}, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu; \\ \varphi(1,n) = \sqrt{n}, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu+1; \\ \varphi(h,n) = 0, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu+2; \\ \varphi(1,n) = i\sqrt{n}, & \text{если } n \text{ формы } 4\mu+3. \end{cases} \tag{25}$$

§7

Метод Гаусса, которым мы получили формулы (25), – метод алгебраический, так как выполняется чисто алгебраическими преобразованиями. Сейчас мы рассмотрим другие доказательства тех же формул, основанные на довольно высоких предложениях математического анализа. Одно из них дано Дирихле, другое Коши. При рассмотрении этих доказательств нам придется пользоваться некоторыми предложениями из теории рядов Фурье. Выводом этих предложений мы и займемся.

Пусть γ – некоторое положительное число, и пусть функция $F(\theta)$ – конечная, непрерывная, убывающая в промежутке $(0,\gamma)$, удовлетворяющая условию: $F(\theta)\geqslant 0$. Положим

$$S_p = \int_0^{\gamma}\frac{\sin p\theta}{\theta}F(\theta)d\theta \quad \text{и рассмотрим} \quad \operatorname*{предел}_{p=\infty} S_p.$$

Подстановкою $p\theta = x$ найдем:

$$S_p = \int_0^{p\gamma}\frac{\sin x}{x}F\Big(\frac{x}{p}\Big)dx.$$

Пусть теперь $p\gamma = q\pi+\rho$, где $0\leqslant\rho<\pi$. Тогда интеграл S_p можно разложить по следующей схеме:

$$S_p = \Big(\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\cdots+\int_{(q-1)\pi}^{q\pi}+\int_{q\pi}^{q\pi+\rho}\Big)\frac{\sin x}{x}F\Big(\frac{x}{p}\Big)dx.$$

n-ый интеграл этого ряда, т[о] есть

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}F\Big(\frac{x}{p}\Big)dx,$$

подстановкою $x = (n-1)\pi+\xi$ преобразуется к интегралу:

$$(-1)^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi}{(n-1)\pi+\xi}F\Big(\frac{(n-1)\pi+\xi}{p}\Big)d\xi,$$

подынтегральная функция которого, очевидно, постоянно $\geqslant 0$, и след[овательно] n-ый член нашего ряда можно представить в виде: $(-1)^{n-1}u_n$ где $u_n > 0$. Можно написать на этом основании:

$$S_p = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{q-1}u_q + R_q \tag{26}$$

где положено:

$$R_q = \int_{q\pi}^{q\pi+\rho} \frac{\sin x}{x} F\Big(\frac{x}{p}\Big)dx.$$

$(n+1)$-ый же член нашего ряда после преобразования имеет вид:

$$(-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin\xi}{n\pi+\xi} F\Big(\frac{n\pi+\xi}{p}\Big)d\xi.$$

Сравнивая это выражение с выражением для n-го члена и принимая во внимание, что $F(\theta)$ – функция убывающая, легко найдем, что $u_{n+1} < u_n$, т[о] есть члены знакопеременного ряда (26) убывают по мере удаления от начала ряда. На основании общей теории знакопеременных рядов можем написать поэтому:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots - u_{2k} < S_p - R_q < u_1 - u_2 + \cdots + u_{2k+1}$$

и след[овательно]: $S_p - R_q = u_1 - u_2 + \cdots - u_{2k} + \varepsilon_k u_{2k+1}$, где $0 < \varepsilon_k < 1$[8], то есть

$$S_p = \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} F\Big(\frac{x}{p}\Big)dx + \varepsilon_k \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} F\Big(\frac{x}{p}\Big)dx + \int_{q\pi}^{q\pi+\rho} \frac{\sin x}{x} F\Big(\frac{x}{p}\Big)dx.$$

Применяя к последним двум интегралам теорему о среднем значении, преобразовав их предварительно подстановками $x = 2k\pi + \xi$ и $x = q\pi + \xi$, найдем:

$$S_p = \int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x} F\Big(\frac{x}{p}\Big)dx + \vartheta_k \frac{\sin\vartheta\pi}{2k+\vartheta} F\left(\frac{2k\pi+\vartheta\pi}{p}\right) + (-1)^q \frac{\rho\sin\vartheta_1\rho}{q\pi+\vartheta_1\rho} F\left(\gamma - \frac{(1-\vartheta_1)\rho}{p}\right)$$

где $0 < \vartheta < 1$ и $0 < \vartheta_1 < 1$[9]. Оставляя k постоянным, будем приближать p, а след[овательно] и q к пределу ∞. Найдем:

$$\operatorname*{пред.}_{p=\infty} S_p = F(0)\int_0^{2k\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \operatorname*{пред.}_{p=\infty} \varepsilon_k \cdot \frac{\sin\vartheta\pi}{2k+\vartheta} F(0),$$

причем будет, очевидно, $0 \leqslant \operatorname*{предел}_{p=\infty} \varepsilon_k \leqslant 1$ в силу условия: $0 < \varepsilon_k < 1$.

Увеличивая теперь произвольное до сих пор число k до бесконечности, найдем:

$$\operatorname*{предел}_{p=\infty} S_p = F(0)\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{27}$$

Интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ представляет собою конечное определенное число. Действительно, разлагая этот интеграл по схеме:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots,$$

[8]Здесь k – произвольное целое число с условиями $1 \leqslant k < [q/2]$. - *Прим. публ.*

[9]Исправлено. В рукописи: $0 < \vartheta < \pi$ и $0 < \vartheta_1 < \pi$. – *Прим. публ.*

легко убеждаемся, что ряд, выражающий этот интеграл, знакопеременный; члены его убывают беспредельно по мере удаления от начала ряда. Следовательно, интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходящийся, т[о] есть $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \kappa$ – постоянному числу, и след[овательно]:

$$\operatorname*{предел}_{p=\infty} S_p \;=\; \kappa F(0). \tag{28}$$

Не определяя пока постоянной κ, обобщим формулу (28) на более общие случаи выбора $F(\theta)$.

Пусть $F(\theta)$ принимает в интервале $(0,\gamma)$ отрицательные значения. В силу конечности функции $F(\theta)$ можно найти такое число A, что $A+F(\theta)$ в промежутке $(0,\gamma)$ будет принимать только положительные значения. Но тогда по формуле (28):

$$\operatorname*{предел}_{p=\infty} \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta}\big[A+F(\theta)\big]\,d\theta \;=\; \kappa\big[F(0)+A\big],$$

откуда

$$\operatorname*{предел}_{p=\infty} \int_0^\gamma F(\theta)d\theta \;=\; \kappa F(0),$$

т[о] есть формула (28) справедлива и в этом случае.

Если $F(\theta)$ – возрастающая функция в интервале $(0,\gamma)$, то $-F(\theta)$ – убывающая функция в том же интервале, и к последней функции можно, след[овательно], применить формулу (28). Найдем:

$$\operatorname*{предел}_{p=\infty} \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta}\big[-F(\theta)\big]\,d\theta \;=\; \kappa\big[-F(0)\big],$$

откуда опять получается формула (28).

Найдем теперь

$$\operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta}\,F(\theta)d\theta,$$

полагая, что $F(\theta)$ монотонна в интервале (α,β). Пусть для определенности $\beta > \alpha > 0$[10]. Всегда можно выбрать в интервале $(0,\beta)$ такую монотонную функцию $F_1(\theta)$, которая бы для значений θ в интервале (α,β) совпадала с функцией $F(\theta)$ (на черт[еже] I кривая MN изображает функцию $F(\theta)$ и CB – графическое изображение функции $F_1(\theta)$).

Найдем тогда:

$$\operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta}\,F_1(\theta)d\theta \;=$$

$$= \operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_0^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta}\,F_1(\theta)d\theta \;-\; \operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_0^\alpha \frac{\sin p\theta}{\theta}\,F_1(\theta)d\theta \;=\; \kappa F(0) \;-\; \kappa F(0) \;=\; 0,$$

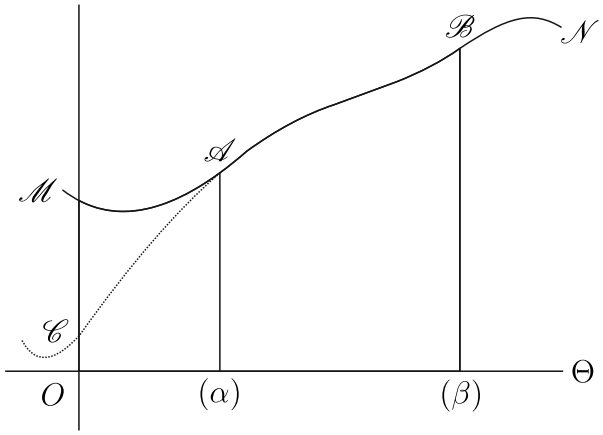
а следовательно и

$$\operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta}\,F(\theta)d\theta \;=\; 0. \tag{29}$$

Положим теперь, что функция $F(\theta)$ не монотонна в интервале $(0,\gamma)$. Пусть все максимумы и минимумы ее соответствуют значениям $\theta = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k$. Интеграл $\int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta}\,F(\theta)\,d\theta$ расположим по схеме:

$$\int_0^\gamma = \int_0^{\mu_1} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} + \ldots + \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} + \int_{\mu_k}^{\gamma}.$$

[10]Исправлено. В рукописи: $\beta > \alpha$. - *Прим. публ.*



Чертеж I.

Так как в каждом из интервалов $(0, \mu_1), (\mu_1, \mu_2), \ldots (\mu_k, \gamma)$ функция $F(\theta)$ монотонна, то можно применить к первому из этих интегралов формулу (28), а к каждому из остальных – формулу (29), после чего придем снова к формуле (28).

Положим наконец, что $F(\theta)$ заключает в себе мнимые параметры. Отделив вещественную часть $F(\theta)$ от мнимой, найдем: $F(\theta) = \varphi(\theta) + i\psi(\theta)$. Полученные функции $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ также конечны и непрерывны и к ним, след[овательно], можно применить формулу (28). Найдем:

$$\operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta}\, \varphi(\theta) d\theta \;=\; \kappa\varphi(0) \quad \text{и} \quad \operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin p\theta}{\theta}\, \psi(\theta) d\theta \;=\; \kappa\psi(0).$$

Принимая во внимание эти равенства, найдем:

$$\operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta}\, F(\theta) d\theta \;=$$
$$= \operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta}\, \varphi(\theta) d\theta \;+\; i \cdot \operatorname*{пред.}_{p=\infty} \int_0^\gamma \frac{\sin p\theta}{\theta}\, \psi(\theta) d\theta \;=\; \kappa\varphi(0) + i \cdot \kappa\psi(0) \;=\; \kappa F(0).$$

Итак, формула (28) справедлива и в этом случае.

Для определения постоянной κ воспользуемся формулою (28). Т[ак] как $\kappa = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ не зависит ни от вида функции $F(\theta)$, ни от γ и p, то для определения его в формуле (28) можно положить $F(\theta) = \frac{\theta}{\sin\theta}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $p = 2n + 1$. Найдем тогда:

$$\operatorname*{пред.}_{n=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta \;=\; \kappa, \quad \text{ибо} \quad F(0) = 1.$$

Применяя сюда известную формулу

$$\cos 2\theta + \cos 4\theta + \ldots + \cos 2n\theta \;=\; \frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta} \;-\; \frac{1}{2}, \tag{30}$$

найдем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\, d\theta \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[1 + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta + 2\cos 6\theta + \ldots + 2\cos 2n\theta\Big] d\theta \;=\; \frac{\pi}{2} \tag{31}$$

и след[овательно] $\kappa = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. Формула (28) теперь примет следующий вид:

$$\underset{p=\infty}{\text{пред.}} \int_0^{\gamma} \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta)d\theta \;=\; \frac{\pi}{2} F(0) \tag{32}$$

§8

Обратимся теперь к разысканию такого предела:

$$\underset{m=\infty}{\text{пред.}} \int_0^{\gamma} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta,$$

причем положим, что m – целое нечетное число. Положим $F(\theta) = \dfrac{\theta}{\sin\theta} f(\theta)$, где $f(\theta)$ – конечная непрерывная функция. $F(\theta)$ будет также конечной непрерывной функцией для всякого θ, лежащего в интервале $(0, \infty)$, за исключением $\theta = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, для которых $F(\theta) = \infty$. Если $\gamma < \pi$,[11] то непосредственно, след[овательно], можем применить к $F(\theta)$ формулу (32). Найдем тогда:

$$\text{пред.} \int_0^{\gamma} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta \;=\; \frac{\pi}{2} f(0). \tag{33}$$

Если $\gamma = \pi$, то $\displaystyle\int_0^{\gamma} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta$ представляем в виде суммы интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta \quad \text{и} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta.$$

Второй из этих интегралов подстановкою $\theta = \pi - \theta_1$ преобразуется к следующему:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta_1}{\sin\theta_1} f(\pi - \theta_1)d\theta_1,$$

и след[овательно]

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} \big[f(\theta) + f(\pi - \theta)\big]d\theta.$$

Функция, стоящая в скобках вида [ ], – конечная непрерывная функция в промежутке $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Поэтому можно применить к ней формулу (32). Найдем тогда:

$$\underset{m=\infty}{\text{пред.}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} \big[f(\theta) + f(\pi - \theta)\big]d\theta \;=\; \frac{\pi}{2} \big[f(0) + f(\pi)\big],$$

т[о] есть

$$\underset{m=\infty}{\text{пред.}} \int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta \;=\; \frac{\pi}{2} \big[f(0) + f(\pi)\big]. \tag{34}$$

Рассмотрим теперь случай, когда γ – любое кратное π положительное число; положим $\gamma = h\pi$. Интеграл

$$\int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)d\theta$$

[11] Исправлено. В рукописи: $\gamma < 0$. – *Прим. публ.*

разложим по схеме:

$$\int_0^{h\pi} = \left(\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \ldots + + \int_{(h-1)\pi}^{h\pi} \right) \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta.$$

Подставляя в каждом k-ом интеграле этого ряда: $(k-1)\pi + \theta_1$ вместо θ, получим, след[овательно], равенство:

$$\int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} \left[f(\theta) + f(\pi+\theta) + \ldots + f((h-1)\pi+\theta) \right] d\theta.$$

Т[ак] как функция, стоящая в скобках вида $[\ ]$, конечна и непрерывна, то к последнему интегралу мы можем применить формулу (34). Найдем тогда:

$$\underset{m=\infty}{\text{пред.}} \int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta = \pi \left[\frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f((h-1)\pi) + \frac{1}{2} f(h\pi) \right]. \qquad (35)$$

Положим наконец $\gamma = h\pi + \rho$, где $0 < \rho < \pi$. Имеем:

$$\int_0^{h\pi+\rho} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta = \int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta + \int_{h\pi}^{h\pi+\rho} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta =$$
$$= \int_0^{h\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\, d\theta + \int_0^{\rho} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(h\pi+\theta)\, d\theta.$$

Применив к первому из полученных интегралов формулу (35), и ко второму – формулу (33), найдем:

$$\underset{m=\infty}{\text{пред.}} \int_0^{h\pi+\rho} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta = \pi \left[\frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f(h\pi) \right]. \qquad (36)$$

Для нашей цели важно еще рассмотреть тот случай, когда γ стремится к пределу ∞. Пусть притом $f(\theta)$ такова, что $|f(\theta)|$ представляет монотонную убывающую функцию[12], такую что ряд

$$|f(\theta)| + |f(\pi+\theta)| + |f(2\pi+\theta)| + \ldots \qquad (37)$$

– сходящийся. Как легко видеть в этом случае, интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta$ есть интеграл сходящийся. Действительно, рассмотрим[13]

$$J_k = \int_{k\cdot\frac{\pi}{2}}^{k_1\cdot\frac{\pi}{2}+r} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant r < \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл этот можно разложить по следующей схеме:

$$J_k = \left(\int_{k\cdot\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}} + \int_{(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}}^{(k+2)\cdot\frac{\pi}{2}} + \cdots + \int_{k_1\cdot\frac{\pi}{2}}^{k_1\cdot\frac{\pi}{2}+r} \right) \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta) d\theta,$$

или, после очевидных преобразований, можно положить J_k равным

[12] Из общего контекста рассуждений следует, что И.М. Виноградов рассматривал лишь непрерывные функции $f(\theta)$. Это и предполагается в дальнейшем; см. раздел 3 "Дополнение". – *Прим. публ.*

[13] Следующий фрагмент рукописи до слов "на основании сходимости ряда (37)" содержит ошибочные рассуждения, которые, впрочем, не влияют на правильность основного результата. По этому поводу см. раздел 3 "Дополнение". - *Прим. публ.*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f\left(k\,\frac{\pi}{2}+\theta\right)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f\left((k+1)\,\frac{\pi}{2}+\theta\right)d\theta + \\ + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f\left((k+2)\,\frac{\pi}{2}+\theta\right)d\theta + \ldots + \int_0^{r} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f\left(k_1\,\frac{\pi}{2}+\theta\right)d\theta.$$

Замечая же, что $\dfrac{\sin m\theta}{\sin\theta}$ постоянно $\geqslant 0$ и что $|f(\theta)|$ – убывающая монотонная функция, находим без труда:

$$|J| \leqslant \left|f\left(k\,\frac{\pi}{2}\right)\right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}d\theta + \left|f\left((k+1)\,\frac{\pi}{2}\right)\right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}d\theta + \ldots + \left|f\left(k_1\,\frac{\pi}{2}\right)\right| \int_0^{r} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}d\theta.$$

Заменяя теперь интеграл $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}d\theta$ его значением из формулы (31), именно чрез $\dfrac{\pi}{2}$, и замечая что

$$\int_0^{r} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\,d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\,d\theta,$$

$$|J_k| < \frac{\pi}{2}\left(\left|f\left(k\,\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|f\left((k+1)\,\frac{\pi}{2}\right)\right| + \ldots + \left|f\left(k_1\,\frac{\pi}{2}\right)\right|\right) = \frac{\pi}{2}\,\varepsilon_k$$

на основании сходимости ряда (37) заключаем, что ε_k, а вместе с тем и $|J_k|$ при достаточно большом k и при всяком $k_1 > l$ будет сколь угодно мало, и, след[овательно], $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\,d\theta$ – интеграл сходящийся. На этом основании заключаем, что формула (35) или (36) остается справедливой и в предельном случае – при $h = \infty$, если только $f(\theta)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Можем написать поэтому:

$$\operatorname*{пред.}_{m=\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\theta)\,d\theta = \pi\left[\frac{1}{2}\,f(\theta) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \ldots\right].^{14} \tag{38}$$

§9

Положим теперь $A_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2h\pi} f(t)\cos nt\,dt$ и рассмотрим ряд[15]

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \ldots = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{2h\pi} f(t)\left[1 + 2\cos x\cos t + 2\cos 2x\cos 2t + \ldots\right]dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{2h\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(x-t) + 2\cos 2(x-t) + \ldots + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} + \cos(t+x) + \cos 2(t+x) + \ldots\right]dt$$

Принимая во внимание формулу (30), найдем отсюда:

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots =$$

[14] Исправлено. В рукописи пропущен множитель π в правой части. – *Прим. публ.*

[15] Из дальнейших рассуждений оказывается, что этот ряд рассматривается для значений $0 \leqslant x < \pi$. – *Прим. публ.*

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \underset{n=\infty}{\text{предел}} \int_0^{2h\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt \;+\; \underset{n=\infty}{\text{предел}} \int_0^{2h\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)} f(t)\,dt \right\} \quad (39)$$

Интеграл

$$U_n \;=\; \int_0^{2h\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}\, f(t)dt$$

преобразуем подстановкою: $\frac{1}{2}(t-x)=\omega$, т[о] есть $t = x+2\omega$; получим тогда:

$$U_n \;=\; \int_{-\frac{x}{2}}^{h\pi-\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\omega}{\sin\omega}\, f(x+2\omega)d\omega \;=$$

$$= \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\omega}{\sin\omega}\, f(x-2\omega)d\omega \;+\; \int_0^{h\pi-\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)\omega}{\sin\omega}\, f(x+2\omega)d\omega.$$

Отсюда для случая $x \neq 0$ находим по формулам (33) и (36) предел первого интеграла при $n=\infty$ равным $\frac{\pi}{2}f(x)$, а второго

$$\pi\left\{\frac{1}{2}f(x) \;+\; f(2\pi+x) \;+\; f(4\pi+x) \;+\; \ldots \;+\; f(2(h-1)\pi+x)\right\}$$

и след[овательно]:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, U_n \;=\; \pi\big\{f(x) \;+\; f(2\pi+x) \;+\; f(4\pi+x) \;+\; \ldots \;+\; f(2(h-1)\pi+x)\big\}.$$

Если же $x=0$, то первый интеграл равен 0, а для второго по формуле (35) получается предел

$$\pi\left\{\frac{1}{2}f(0) \;+\; f(2\pi) \;+\; \ldots \;+\; \frac{1}{2}f(2h\pi)\right\}$$

и след[овательно]:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, U_n \;=\; \pi\left\{\frac{1}{2}f(0) \;+\; f(2\pi) \;+\; \ldots \;+\; \frac{1}{2}f(2h\pi)\right\}.$$

Аналогично находим, обозначая

$$\int_0^{2h\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)} f(t)\,dt \quad \text{чрез} \quad V_n,$$

для $x \neq 0$:

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\, V_n \;=\; \pi\big\{f(2\pi-x) \;+\; f(4\pi-x) \;+\; \ldots \;+\; f(2h\pi-x)\big\},$$

и если $x=0$, то

$$\pi\left\{\frac{1}{2}\,f(0) \;+\; f(2\pi) \;+\; \ldots \;+\; f(2(h-1)\pi) \;+\; \frac{1}{2}\,f(2h\pi)\right\}.$$

Формула (39) обращается теперь в следующую:

$$\frac{1}{2}A_0 \;+\; A_1\cos x \;+\; A_2\cos 2x \;+\; \ldots \;=\; f(x) \;+\; f(2\pi-x) \;+\; f(2\pi+x) \;+$$

$$+\; f(4\pi-x) \;+\; f(4\pi+x) \;+\; \ldots \;+\; f(2(h-1)\pi+x) \;+\; f(2h\pi-x)$$

если $x \neq 0$ и лежит в интервале $(0, \pi)$, и

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1 + \ldots = 2\left[\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \ldots + f(2(h-1)\pi + x) + \frac{1}{2}f(2h\pi)\right]$$

если $x = 0$. Замечая, что $\cos nt = \cos(-n)t$, последнюю формулу приведем к виду:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^{2h\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\pi\left\{\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \right.$$
$$\left. + \ldots + f(2(h-1)\pi) + \frac{1}{2}f(2h\pi)\right\}. \quad (40)$$

§10

Пусть, наконец,

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos nt\,dt,$$

где $f(t)$ означает функцию, удовлетворяющую условиям, указанным при выводе формулы (38). Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots .$$

Можно все интегралы, представляющие члены этого ряда, объединить под одним знаком. Найдем тогда:

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2} + 2\cos x\cos t + 2\cos 2x\cos 2t + \ldots\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos 2(t-x) + \ldots + \frac{1}{2} + \cos(t+x) + \cos 2(t+x) + \ldots\right]dt.^{16}$$

Принимая во внимание формулу (30), найдем отсюда:

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\underset{n=\infty}{\text{предел}}\int_0^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt + \underset{n=\infty}{\text{пред.}}\int_0^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)}f(t)\,dt\right\}$$

Интеграл

$$U_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt$$

преобразуем подстановкой: $\frac{1}{2}(t-x) = \omega$, откуда $t = x + 2\omega$. Получим тогда:

$$U_n = \int_{-\frac{x}{2}}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\omega}{2\sin\omega}f(x+2\omega)\,d\omega =$$
$$= \int_0^{\frac{x}{2}}\frac{\sin(2n+1)\omega}{2\sin\omega}f(x-2\omega)\,d\omega + \int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\omega}{2\sin\omega}f(x+2\omega)\,d\omega.$$

[16] Исправлено. В рукописи под последним интегралом вместо x используется переменная u. Тоже относится к приводимым ниже формулам для U_n и ω. – *Прим. публ.*

Если x лежит в промежутке $(0,\pi)$ и не равно 0, то к первому из полученных интегралов можно применить формулу (33), а ко второму – формулу (38). Предел первого интеграла при $n=\infty$ будет $\frac{1}{2}\pi f(x)$, а второго –

$$\pi\Big\{\frac{1}{2}\,f(x)\,+\,f(2\pi+x)\,+\,\ldots\Big\},$$

и, след[овательно],

$$U_\infty\,=\,\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\,U_n\,=\,\pi\big\{f(x)\,+\,f(2\pi+x)\,+\,\ldots\big\}.$$

Если же $x=0$, то первый интеграл $=0$ и, след[овательно],

$$U_\infty\,=\,\pi\Big\{\frac{1}{2}f(0)\,+\,f(2\pi)\,+\,f(4\pi)\,+\,\ldots\Big\}.$$

Аналогично найдем:

$$V_\infty\,=\,\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\int_0^\infty\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)}f(t)\,dt\,=\,\pi\big\{f(2\pi-x)\,+\,f(4\pi-x)\,+\,\ldots\big\},$$

если $x\neq 0$, и

$$V_\infty\,=\,\pi\Big\{\frac{1}{2}f(0)\,+\,f(2\pi)\,+\,f(4\pi)\,+\,\ldots\Big\}$$

если $x=0$ и, след[овательно],

$$\frac{1}{2}A_0\,+\,A_1\cos x\,+\,A_2\cos 2x\,+\,\ldots\,=\,f(x)\,+\,f(2\pi-x)\,+\,f(2\pi+x)\,+\,\ldots\quad\text{если}\quad x\neq 0$$
$$\text{и}\quad\frac{1}{2}A_0\,+\,A_1\,+\,A_2\,+\,\ldots\,=\,2\Big[\frac{1}{2}f(0)\,+\,f(2\pi)\,+\,f(4\pi)\,+\,\ldots\Big]\quad\text{при}\;\;x=0.\quad(41)$$

§11

Имея в виду доказательство Дирихле, рассмотрим 2 следующие интеграла:

$$p\,=\,\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)dx\quad\text{и}\quad q\,=\,\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)dx.$$

Прежде всего убедимся, что они имеют конечные определенные значения. Преобразовав интеграл p подстановкой $x^2=y$, найдем:

$$p\,=\,2\int_0^\infty\cos(x^2)dx\,=\,2\int_0^\infty\frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy.$$

Разложив полученный интеграл по схеме

$$p\,=\,2\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\,+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\,+\ldots+\int_{r\pi+\frac{\pi}{2}}^{r\pi+\frac{3\pi}{2}}\,\ldots\Big],$$

рассмотрим 2 соседние интеграла этой схемы:

$$J_r\,=\,\int_{r\pi+\frac{\pi}{2}}^{r\pi+\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy\quad\text{и}\quad J_{r+1}\,=\,\int_{r\pi+\frac{3\pi}{2}}^{r\pi+\frac{5\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy.$$

Подстановкою $y = \pi + \xi$ второй из них преобразуется в следующий:

$$-\int_{r\pi+\frac{\pi}{2}}^{r\pi+\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sqrt{\pi+y}}dy,$$

откуда ясно, что $|J_r| > |J_{r+1}|$,[17] и, кроме того, что J_r и J_{r+1} разных знаков. С другой стороны, находим:

$$|J_r| < \int_{r\pi+\frac{\pi}{2}}^{r\pi+\frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} < \frac{\pi}{\sqrt{\pi r+\frac{\pi}{2}}},$$

откуда следует, что $\underset{r=\infty}{\text{пред.}}\, J_r = 0$.

Итак, полученное разложение для p представляет собою убывающий знакопеременный ряд, члены которого беспредельно убывают по мере удаления от начала ряда и, след[овательно], p имеет конечное определенное значение. Подобным же образом докажем сходимость интеграла q.

Обозначив чрез δ величину некоторого угла, положим $\Delta = p\cos\delta - q\sin\delta$, т[о] есть

$$\Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\cos\delta\cos x^2 - \sin\delta\sin x^2\right\}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + x^2)dx.$$

Пусть теперь α – некоторая положительная постоянная величина. Заменив в последнем интеграле x на αx, найдем

$$\frac{\Delta}{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + \alpha^2x^2)\,dx. \tag{42}$$

Обозначив чрез β другую положительную постоянную величину, полученный интеграл разложим следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta + \alpha^2x^2)dx = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \int_{s\beta}^{(s+1)\beta} \cos(\delta + \alpha^2x^2)dx.$$

Каждый отдельный интеграл

$$J_s = \int_{s\beta}^{(s+1)\beta} \cos(\delta + \alpha^2x^2)dx$$

преобразуем подстановкой $x = s\beta + \xi$; получим:

$$J_s = \int_0^{\beta} \cos\left(\delta + \alpha^2s^2\beta^2 + 2\alpha^2s\beta x + \alpha^2x^2\right)dx.$$

Постоянные α и β, которые до сих пор были совершенно произвольны, подчиним следующим 2-м условиям. Пусть m – некоторое целое положительное число; положим тогда $\alpha^2\beta^2 = 2m\pi$, $2\alpha^2\beta = 1$, откуда находим $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{8m\pi}}$ и $\beta = 4m\pi$. Интеграл J_s преобразуется теперь в следующий:

$$J_s = \int_0^{\beta} \cos(\delta + sx + \alpha^2x^2)dx = \int_0^{\beta} \cos\left(\delta + sx + \frac{x^2}{8m\pi}\right)dx =$$
$$= \int_0^{\beta} \cos\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right)\cos sx\,dx - \int_0^{\beta} \sin\left(\delta + \frac{x^2}{8m\pi}\right)\sin sx\,dx.$$

[17] Исправлено. В рукописи пропущены знаки абсолютной величины. – *Прим. публ.*

Формула(42) принимает теперь такой вид:

$$\Delta\sqrt{8m\pi} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{4m\pi}\cos\left(\delta+\frac{x^2}{8m\pi}\right)\cos sx\,dx - \sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{4m\pi}\sin\left(\delta+\frac{x^2}{8m\pi}\right)\sin sx\,dx.$$

Но так как $\sin(0\cdot x)=0$ и $\sin(sx)=-\sin(-sx)$, то вторая из полученных сумм, очевидно, равна 0 и, след[овательно],

$$\Delta\sqrt{8m\pi} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{4m\pi}\cos\left(\delta+\frac{x^2}{8m\pi}\right)\cos sx\,dx.$$

Отсюда на основании формулы (40) находим:

$$\Delta\sqrt{8m\pi} = 2\pi\left\{\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \ldots + f(2(2m-1)\pi) + \frac{1}{2}f(4m\pi)\right\}, \tag{43}$$

если обозначим $\cos\left(\delta+\dfrac{x^2}{8m\pi}\right)$ чрез $f(x)$.

Легко видеть, что $f(4m\pi+2s\pi)=f(2s\pi)$ и, следовательно, $f(2s\pi)$ можно рассматривать как сумму

$$\frac{1}{2}f(2s\pi) + \frac{1}{2}f(4m\pi+2s\pi).$$

Применяя это равенство к членам $f(2\pi), f(4\pi), \ldots, f(2(m-1)\pi)$, вместо формулы (43) получим следующую:

$$\Delta\sqrt{8m\pi} = \pi\sum_{s=0}^{4m-1}f(2s\pi) = \pi\sum_{s=0}^{4m-1}\cos\left(\delta + s^2\cdot\frac{\pi}{2m}\right). \tag{36'}$$

Положим теперь $4m=n$, и пусть $\sqrt{n}$ – арифметическое значение $\sqrt{n}$. Тогда найдем:

$$\Delta\sqrt{n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\cos\left(\delta+s^2\cdot\frac{2\pi}{n}\right),$$

где $\Delta = p\cos\delta - q\sin\delta$. Легко определить отсюда p и q. Полагая $n=4$, находим:

$$2(p\cos\delta - q\sin\delta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\delta + \cos\left(\delta+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\delta+\frac{4\pi}{2}\right) + \cos\left(\delta+\frac{9\pi}{2}\right)\right] =$$
$$= 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\delta + \cos\left(\delta+\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\delta - \sin\delta\right]$$

или

$$\left(p-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\cos\delta = \left(q-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\sin\delta,$$

откуда в силу произвольности угла δ находим: $p=q=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Формулу (36') можно на этом основании так переписать:

$$\sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\delta - \sin\delta\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\cos\left(\delta + s^2\cdot\frac{2\pi}{n}\right),$$

или еще:

$$\cos\delta - \sin\delta = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\cos\delta\cos\left(s^2\frac{2\pi}{n}\right) - \sin\delta\sin\left(s^2\frac{2\pi}{n}\right)\right),$$

откуда, ввиду произвольности угла δ, находим:

$$\sqrt{n} = \sum_{s=0}^{n-1} \cos\left(s^2 \frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{и} \quad \sqrt{n} = \sum_{s=0}^{n-1} \sin\left(s^2 \frac{2\pi}{n}\right).$$

Умножив второе равенство почленно на i и сложив с первым, находим:

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\pi i}{n}} = (1+i)\sqrt{n}, \quad \text{т[о] есть} \quad \varphi(1,n) = (1+i)\sqrt{n}. \tag{44}$$

§12

Чтобы распространить эту формулу на другие значения n, докажем следующие свойства функции $\varphi(h,n)$:

1) Если $h \equiv h' (\text{мод } p)$, то

$$\varphi(h,n) = \varphi(h',n), \quad \text{так как} \quad e^{s^2 \cdot \frac{2h\pi i}{n}} = e^{s^2 \cdot \frac{2h'\pi i}{n}}; \tag{45}$$

2) Если a – число, взаимно простое с n, то

$$\varphi(ha^2,n) = \varphi(h,n). \tag{46}$$

Действительно,

$$\varphi(ha^2,n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{(as)^2 \frac{2\pi}{n}}.$$

Но когда s пробегает полную систему вычетов по модулю n, as также пробегает полную систему вычетов по модулю n.

3) Если m и n – взаимно простые числа, то

$$\varphi(hm,n)\varphi(hn,m) = \varphi(h,mn). \tag{47}$$

Действительно, перемножив почленно равенства

$$\varphi(hm,n) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{r^2 \frac{2hm\pi}{n}} \quad \text{и} \quad \varphi(hn,m) = \sum_{t=0}^{m-1} e^{t^2 \frac{2hn\pi}{m}},$$

найдем:

$$\varphi(hm,n)\varphi(hn,m) = \sum e^{(r^2 \frac{m}{n} + t^2 \frac{n}{m}) \cdot 2h\pi i} = \sum e^{\frac{(rm)^2 + (tn)^2}{mn} \cdot 2h\pi i} =$$
$$= \sum e^{\frac{(rm)^2 + 2rmtn + (nt)^2}{mn} \cdot 2h\pi i} = \sum e^{\frac{(rm+tn)^2}{mn} 2h\pi i}.$$

Здесь соответственно значениям: $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $t = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ число $rm + t$ принимает mn значений, несравнимых между собою по модулю mn. В самом деле, допустив что

$$r_1 m + t_1 n \equiv r_2 m + t_2 n \ (\text{мод } mn) \quad \text{или} \quad (r_1 - r_2)m + (t_1 - t_2)n \equiv 0 \ (\text{мод } mn),$$

мы имели бы следующие сравнения:

$$(r_1 - r_2)m \equiv 0 \ (\text{мод } n) \quad \text{и} \quad (t_1 - t_2)n \equiv 0 \ (\text{мод } m),$$

откуда следует, что:

$$r_1 \equiv r_2 \,(\text{мод}\, n) \quad \text{и} \quad t_1 \equiv t_2 \,(\text{мод}\, m).$$

На основании этих соображений находим окончательно:

$$\varphi(hm, n)\varphi(hn, m) = \sum_{s=0}^{mn-1} e^{s^2 \frac{2h\pi i}{mn}} = \varphi(h, nm).$$

§13

Пусть n – нечетное число. Согласно (47) находим: $\varphi(4, n)\varphi(n, 4) = \varphi(1, 4n)$. Но $\varphi(4, n) = \varphi(1, n)$ согласно (46);

$$\varphi(4, n) = \sum_{s=0}^{3} e^{s^2 \frac{2n\pi i}{4}} = 2\big(1 \pm e^{\frac{n\pi i}{2}}\big) = 2(1 \pm i),$$

где берется знак «+» или «−» смотря по тому, будет ли $n \equiv 1$ или $\equiv 3 (\text{мод}\, 4)$; наконец $\varphi(1, 4n) = 2(1 + i)\sqrt{n}$ согласно формуле (44). Имеем, следовательно:

$$\varphi(1, n) = \frac{(1 + i)\sqrt{n}}{1 \pm i} = \sqrt{n} \quad \text{или} \quad i\sqrt{n} \tag{48}$$

смотря по тому, будет ли $n \equiv 1$ или $\equiv 3 (\text{мод}\, 4)$. Для случая же $n \equiv 2 (\text{мод}\, 4)$ можно повторить доказательство, приведенное при рассмотрении метода Гаусса. Итак, мы снова пришли к формулам ...[18]

§14

Обращаясь к рассмотрению доказательства Коши, рассмотрим такой определенный интеграл:

$$U = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx \, dx,$$

где a^2 – некоторое комплексное число. Полагая его равным $\alpha + \beta i$, находим:

$$U = \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta i)x^2} \cos bx \, dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \big(\cos \beta x^2 + i \sin \beta x^2\big) \cos bx \, dx.$$

Но так как $\big|e^{-\alpha x^2} \big(\cos \beta x^2 + i \sin \beta x^2\big) \cos bx\big| \leqslant e^{-\alpha x^2}$, то, следовательно:

$$|U| < \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx.$$

Последний же интеграл, как известно, при $\alpha > 0$ равен $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Итак,

$$|U| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

т[о] есть интеграл U – сходящийся, если только вещественная часть a^2 больше 0.

[18] Конец фразы в копии рукописи утрачен. – *Прим. публ.*

Для определения значения этого интеграла воспользуемся методом дифференциальных уравнений. Заметим, что интеграл

$$V = \int_0^\infty -xe^{-a^2x^2} \sin bx\, dx,$$

полученный из интеграла U дифференцированием по параметру b, равномерно сходящийся. Действительно,[19]

$$\left| \int_u^\infty -xe^{-a^2x^2} \sin bx\, dx \right| < \int_u^{+\infty} xe^{-a^2x^2}\, dx = -\frac{1}{2a^2}\left[e^{-a^2x^2}\right]_u^\infty = \frac{1}{2a^2}\, e^{-a^2u^2}$$

и, следовательно, при $u = \infty$ стремится к пределу 0 независимо от того, какое значение имеет параметр b. Это же показывает, что V есть интеграл равномерно сходящийся.

Итак, интеграл U – сходящийся при всяком b, а интеграл V – равномерно сходящийся при всяком b. В таком случае, как известно, справедливо равенство:

$$\frac{dU}{db} = V = \int_0^\infty -xe^{-a^2x^2} \sin bx\, dx =$$
$$= \int_0^\infty \frac{x}{2a^2} \sin bx\, de^{-a^2x^2} = \left[\frac{x}{2a^2} \sin bx\, e^{-a^2x^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{b}{2a^2}\, e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx.$$

Но

$$\left[\frac{x}{2a^2} \sin bx\, e^{-a^2x^2}\right]_0^\infty = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial b} = -\frac{b}{2a^2}\, U.$$

Отсюда, разделяя переменные, находим

$$\frac{dU}{U} = -\frac{b\, db}{2a^2},$$

откуда

$$\lg U = -\frac{b^2}{4a^2} + \lg C \quad \text{или:} \quad U = Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \tag{49}$$

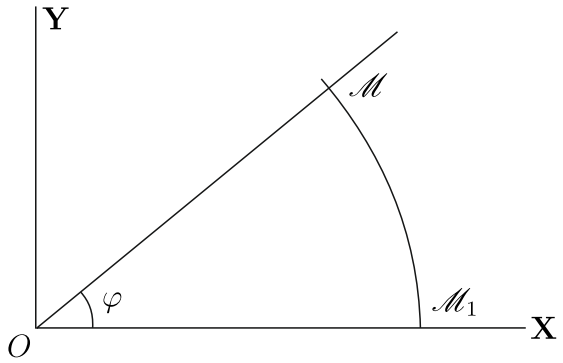
В этой формуле C – постоянная, не зависящая от b. Для определения ее положим в (49) $b = 0$; найдем:

$$C = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx.$$

Рассмотрим теперь интеграл $\int e^{-z^2} dz$, взятый по контуру OMM_1, состоящему из 2-х прямых OM и OM_1, угол между которыми обозначим чрез φ, и дуги окружности M_1M радиуса R.

Функция e^{-z^2}, которую можно представить в виде $e^{-\varrho^2(\cos 2u + i \sin 2u)}$, если положить $z = \varrho(\cos u + i \sin u)$, очевидно, не имеет полюсов на части плоскости, простирающейся в ∞ выделяемой прямыми OP и OP_1 (включая и точки, лежащие на этих прямых), если только $\cos 2u > 0$. Чтобы это было постоянно, нужно, чтобы угол φ был острый, и, след[овательно], чтобы было: $\varphi < \frac{\pi}{4}$.

[19] В правой части следующего неравенства опущены знаки абсолютных величин, присутствующие в рукописи. - *Прим. публ.*



Чертеж II.

Итак, при условии $\varphi < \frac{\pi}{4}$ внутри контура OMM_1 и на обводе его функция e^{-z^2} остается целой и след[овательно]:

$$\int_{OM} e^{-z^2}\,dz = \int_{OM_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{M_1M} e^{-z^2}\,dz.$$

Первый интеграл второй части этого равенства, очевидно, равен

$$\int_0^R e^{-x^2}\,dx;$$

предельное значение его при $R = \infty$ есть [интеграл][20]

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \quad \text{равный} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

второй же можно преобразовать подстановкой $z = R(\cos u + i \sin u)$ к следующему интегралу:

$$T = \int_0^\varphi e^{-R^2 \cos 2u}(-R\sin u + iR\cos u)du.$$

По формуле Дарбу,

$$|T| \leqslant e^{-R^2\cos 2\varphi} \cdot R \cdot \varphi$$

и так как $\varphi < \frac{\pi}{4}$, то: $\cos 2\varphi > 0$ и след[овательно] $\underset{R=\infty}{\text{предел}}\, T = 0$. Итак, предел $\int_{M_1M} e^{-z^2}dz$, если точка M по направлению OM удаляется в ∞, получается равным $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Подстановкою $z = pa$, где $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$, интеграл этот преобразуем в следующий: $\int_0^R e^{-a^2p^2} \cdot a\,dp$ и, следовательно,

$$\underset{R=\infty}{\text{предел}}\, a\int_0^R e^{-a^2p^2}\,dp = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{или:} \quad a\int_0^\infty e^{-a^2p^2}dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

и окончательно:

$$\int_0^\infty e^{-a^2p^2}dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad \text{если} \quad a = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \text{и} \quad \varphi < \frac{\pi}{4},$$

[20] В рукописи отсутствует, добавлено по смыслу. – *Прим. публ.*

а это и есть нужный нам интеграл C. Формула (49) примет теперь следующий вид:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \tag{50}$$

§15

Применим теперь формулу (41) к функции $e^{-a_1^2x^2}$, где a_1^2 – некоторое комплексное число с положительною вещественной частью. Получим:

$$\pi\left\{\frac{1}{2} + e^{-a_1^2(2\pi)^2} + e^{-a_1^2(4\pi)^2} + e^{-a_1^2(6\pi)^2} + \ldots\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-a_1^2x^2}dx + \int_0^\infty e^{-a_1^2x^2}\cos x\,dx + \int_0^\infty e^{-a_1^2x^2}\cos 2x\,dx + \ldots$$

Принимая во внимание формулу (50), перепишем последнее равенство в таком виде:

$$\pi\left\{\frac{1}{2} + e^{-(2\pi a_1)^2} + e^{-4(2\pi a_1)^2} + e^{-9(2\pi a_1)^2} + \ldots\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-4\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-9\left(\frac{1}{2a_1}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + \ldots$$

Положим $2\pi a_1 = a$ и $\dfrac{1}{2a_1} = b$; тогда будет:

$$\pi\left\{\frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \ldots\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left\{\frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + e^{-9b^2} + \ldots\right\}.$$

Но так как $2a\sqrt{\pi} = \sqrt{2a}\sqrt{2a\pi} = \cdots$,[21] то формула эта окончательно принимает такой вид:

$$a^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \ldots\right\} = b^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + e^{-9b^2} + \ldots\right\} \tag{51}$$

где b связано с a таким равенством: $ab = \dfrac{2\pi a_1}{2a_1} = \pi$. Формула (51) справедлива в том случае, когда a^2 имеет положительную вещественную часть, так как формула (50) была установлена только для этого случая. Но $a = \dfrac{\alpha}{2\pi}$ и $a^2 = \dfrac{\alpha^2}{4\pi^2}$, откуда ясно, что α^2 имеет тот же аргумент что и a^2; следовательно, можем сказать теперь, что формула (51) справедлива в том случае, когда вещественная часть α^2 положительна.

Положим в формуле (51) $a^2 = \alpha^2 - \dfrac{2\pi i}{n}$, причем α^2 означает положительное число, весьма малое. Из условия $a^2b^2 = \pi^2$ следует, что b^2 должно отличаться от $\dfrac{\pi^2}{2\pi i/n}$, т[о] есть от $\dfrac{n\pi i}{2}$ на весьма малую величину. Положим $b^2 = \beta^2 + \dfrac{n\pi}{2}i$. Тогда условие $a^2b^2 = \pi^2$ даст нам:

$$\alpha^2\beta^2 \;-\; \beta^2\cdot\frac{2\pi i}{n} + \alpha^2\cdot\frac{n\pi i}{2} + \pi^2 \;=\; a^2b^2$$

или:

$$\alpha^2\beta^2 \;-\; \beta^2\cdot\frac{2\pi i}{n} + \alpha^2\cdot\frac{n\pi i}{2} \;=\; 0,$$

[21] Конец формулы вписан карандашом рукою Я.В. Успенского и потому плохо читается. Вероятно, это $\dfrac{a^{1/2}}{b^{1/2}}\,2\pi$. – *Прим. публ.*

откуда после простых преобразований находим

$$\frac{4\beta^2}{n^2\alpha^2} = \left(1 + \frac{n}{2\pi i}\,\alpha^2 i\right)^{-1},$$

откуда следует, что $\frac{4\beta^2}{n^2\alpha^2} = -\frac{2\pi i/n}{a^2}$;[22] след[овательно], и $\frac{2\beta}{n\alpha}$ [23] стремится к пределу 1, когда α стремится к пределу 0. Можем написать потому:

$$\frac{2\beta}{n\alpha} = 1+\varepsilon, \quad \text{или} \quad 2\beta = n\alpha(1+\varepsilon), \quad \text{где} \quad \operatorname*{пред.}_{\alpha=0} \varepsilon = 0.$$

Обозначим $\frac{2\pi}{n}$ чрез ω; тогда формулу (51) можно так переписать:

$$a^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{1}{2} + e^{-\alpha^2+\omega i} + e^{-4\alpha^2+4\omega i} + \dots e^{-(n-1)^2\alpha^2+(n-1)^2\omega i} + \\ + e^{-n^2\alpha^2} + e^{-(n+1)^2\alpha^2+\omega i} + e^{-(n+2)^2\alpha^2+4\omega i} + \dots + e^{-(2n-1)^2\alpha^2+(n-1)^2\omega i} + \dots\Big\} = \\ = b^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{1}{2} + e^{-\beta^2-\frac{n\pi}{2}i} + e^{-4\beta^2} + e^{-9\beta^2-\frac{n\pi}{2}i} + \dots\Big\}$$

или

$$a^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{1}{2} + e^{-n^2\alpha^2} + e^{-4n^2\alpha^2} + e^{-9n^2\alpha^2} + \dots \\ + e^{\omega i}\big(e^{-\alpha^2} + e^{-(n+1)^2\alpha^2} + e^{-(2n+1)^2\alpha^2} + e^{-(3n+1)^2\alpha^2} + \dots\big) + \\ + e^{4\omega i}\big(e^{-4\alpha^2} + e^{-(n+2)^2\alpha^2} + e^{-(2n+2)^2\alpha^2} + e^{-(3n+2)^2\alpha^2} + \dots\big) + \\ + e^{9\omega i}\big(e^{-9\alpha^2} + e^{-(n+3)^2\alpha^2} + e^{-(2n+3)^2\alpha^2} + e^{-(3n+3)^2\alpha^2} + \dots\big) + \\ \dots \\ \dots \\ + e^{(n-1)^2\omega i}\big\{e^{-(n-1)^2\alpha^2} + e^{-(2n-1)^2\alpha^2} + e^{-(3n-1)^2\alpha^2} + e^{-(4n-1)^2\alpha^2} + \dots\big\}\Big\} = \\ = b^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{1}{2} + e^{-4\beta^2} + e^{-16\beta^2} + e^{-36\beta^2} + \dots + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\big(e^{-\beta^2} + e^{-9\beta^2} + e^{-25\beta^2} + \dots\big)\Big\}.$$

Умножим первую часть последнего равенства на $n\alpha$, а вторую – на равную ей величину $2\beta/(1+\varepsilon)$;[24] и заменяя $\frac{1}{2}$ на $1-\frac{1}{2}$, находим:

$$a^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{n\alpha}{2} + n\alpha\big(e^{-n^2\alpha^2} + e^{-4n^2\alpha^2} + e^{-9n^2\alpha^2} + \dots\big) \\ + e^{\omega i}n\alpha\big(e^{-\alpha^2} + e^{-(n+1)^2\alpha^2} + e^{-(2n+1)^2\alpha^2} + e^{-(3n+1)^2\alpha^2} + \dots\big) + \\ + e^{4\omega i}n\alpha\big(e^{-4\alpha^2} + e^{-(n+2)^2\alpha^2} + e^{-(2n+2)^2\alpha^2} + e^{-(3n+2)^2\alpha^2} + \dots\big) + \\ \dots$$

[22] Исправлено. В рукописи в правой части равенства фигурирует число a. – *Прим. публ.*

[23] Исправлено. В рукописи пропущено n в знаменателе. – *Прим. публ.*

[24] Исправлено. В рукописи: $2\beta(1+\varepsilon)$. Соответствующая поправка внесена в (52) и ряд последующих формул. – *Прим. публ.*

$$+ e^{(n-1)^2\omega i} n\alpha (e^{-(n-1)^2\alpha^2} + e^{-(2n-1)^2\alpha^2} + e^{-(3n-1)^2\alpha^2} + e^{-(4n-1)^2\alpha^2} + \dots)\Big\} =$$

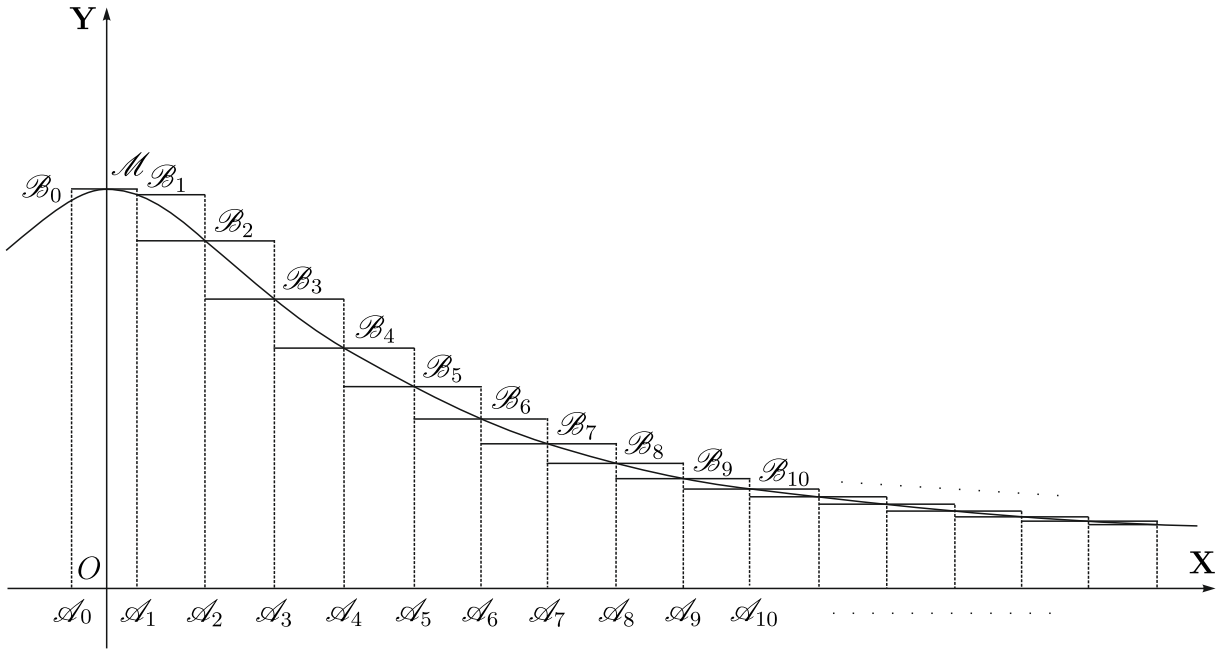
$$= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+\varepsilon}\Big\{-\frac{2\beta}{2} + 2\beta\big(1 + e^{-4\beta^2} + e^{-16\beta^2} + e^{-36\beta^2} + \dots\big) +$$

$$+ e^{-\frac{n\pi i}{2}}\big(e^{-\beta^2} + e^{-9\beta^2} + e^{-25\beta^2} + \dots\big)\Big\}. \quad (52)$$

Суммы, стоящие в скобках вида (52), заменим на основании следующих соображений. Рассмотрим сумму

$$\Delta x\big(e^{-(\tau\Delta x)^2} + e^{-(\Delta x+\tau\Delta x)^2} + e^{-(2\Delta x+\tau\Delta x)^2} + \dots\big) = S,$$

где $0 \leqslant \tau < 1$. Возьмем прямоугольную систему координат (черт. 3) и построим кривую, выражаемую уравнением $y = e^{-x^2}$. Так как $y' = -2xe^{-x^2}$ отрицательна для всех значений



Чертеж III.

x внутри промежутка $(0, \infty)$, то y – функция, убывающая в этом промежутке. Кроме того, легко убедиться: y имеет максимум при $x = 0$.

Проведем теперь ординаты, соответствующие абсциссам: $OA_0 = \Delta x + \tau\Delta x$, $OA_1 = \tau\Delta x$, $OA_2 = \Delta x + \tau\Delta x, \dots$, которые пересекут кривую в точках B_0, B_1, $B_2, \dots$. Построим прямоугольники на A_0A_1, A_1A_2, $A_2A_3, \dots$ с высотами соответственно: $OM = 1$, A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \dots$. Сумма площадей этих прямоугольников, очевидно, равна $S + \Delta x$. Легко видеть, что она больше площади фигуры, ограниченной кривою линией $MB_1B_2B_3B_4 \dots$, ординатою OM и осью x-ов. Площадь же эта, как известно, равна:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Итак, $S + \Delta x > \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Строя же прямоугольники на A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \dots$ с высотами соответственно: A_2B_2, A_3B_3, $A_4B_4, \dots$, легко убеждаемся, что $S - \Delta x < \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ и, следовательно,

имеем неравенства

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \Delta x < S < \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \Delta x,$$

откуда тотчас находим:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \lambda\Delta x,$$

где λ – положительная или отрицательная правильная дробь. Применяя это равенство к формуле (52), находим:

$$a^{\frac{1}{2}}\Big\{-\frac{n\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \lambda_1\cdot n\alpha + e^{\omega i}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{\omega i}\lambda_2\cdot n\alpha + e^{4\omega i}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{4\omega i}\lambda_3\cdot n\alpha + \\ + \cdots + e^{(n-1)^2\omega i}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{(n-1)^2\omega i}\lambda_n\cdot n\alpha\Big\} = \\ = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+\varepsilon}\Big\{-\frac{2\beta}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \mu_1\cdot 2\beta + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\mu_2\cdot 2\beta\Big\},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2$ – положительные или отрицательные правильные дроби.

Напишем полученные равенства в следующем виде:

$$a^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\big\{1 + e^{\omega i} + e^{4\omega i} + e^{9\omega i} + \ldots + e^{(n-1)^2\omega i}\big\} + \\ + a^{\frac{1}{2}}\cdot n\alpha\Big(-\frac{1}{2} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{\omega i} + \lambda_3 e^{4\omega i} + \ldots + \lambda_n e^{(n-1)^2\omega i}\Big) = \\ = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+\varepsilon}\Big\{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\big(1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\big) + 2\beta\Big(-\frac{1}{2} + \mu_1 + {}^{-\frac{n\pi i}{2}}\mu_2\Big)\Big\}.$$

Полученная формула справедлива при всяких значениях α, не равных 0. Следовательно, она будет справедлива и в пределе при $\alpha = 0$. Переходя к пределу при $\alpha = 0$, заметим, что

$$\Big|-\frac{1}{2} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{\omega i} + \ldots + \lambda_n e^{(n-1)^2\omega i}\Big| < \frac{1}{2} + |\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_n| < n+1;$$

далее

$$\Big|-\frac{1}{2} + \mu_1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\mu_2\Big| < \frac{1}{2} + |\mu_1| + |\mu_2| < 3.$$

Наконец, a обращается в пределе в $a_1 = \sqrt{-\dfrac{2\pi i}{n}}$, b обращается в $\sqrt{\dfrac{n\pi i}{2}} = b_1$ и, след[овательно], формула наша принимает такой вид:

$$a_1^{\frac{1}{2}}\varphi(1,n)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = b_1^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\big(1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\big),$$

или

$$\varphi(1,n) = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}}\big(1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\big);$$

но $a_1 b_1 = \pi$, откуда $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{\pi}{a_1^2}$ и, след[овательно],

$$\varphi(1,n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a_1}\big(1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\big).$$

Но

$$a_1^2 = -\frac{2\pi i}{n} \quad \text{и:} \quad a_1 = \sqrt{-\frac{2\pi i}{n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}\,(1-i),$$

откуда

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a_1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,(1-i)} = \frac{\sqrt{n}(1+i)}{2}$$

и, следовательно, окончательно:

$$\varphi(1,n) = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}\,(1+i)\big(1 + e^{-\frac{n\pi i}{2}}\big).$$

Полагая в этой формуле $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$, снова придем к формулам (25).

§16

Обратимся ко второй части нашего исследования, т[о] есть на основании свойств суммы $\varphi(1,n)$, доказанных нами, выведем закон взаимности квадратичных вычетов.

Положим $n =$ простому нечетному числу p. Имеем:

$$\varphi(h,p) = \sum_{s=0}^{p-1} \varrho^{hs^2} = 1 + 2\sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \varrho^{hs^2}, \tag{53}$$

в чем легко убедиться, принимая во внимание, что: $s^2 \equiv (p-s)^2 \pmod p$.

Обозначим чрез α любой квадратичный вычет модуля p и чрез β – любой квадратичный невычет его, взятые среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$. Формула (53) принимает тогда следующий вид

$$\varphi(h,p) = 1 + 2\sum \varrho^{\alpha h} \tag{53'}.$$

Но

$$\sum (\varrho^h)^\alpha + (\varrho^h)^\beta + 1$$

как сумма всех корней уравнения $x^n = 1$ равна 0 и следовательно

$$\sum \varrho^{h\alpha} = -1 - \sum \varrho^{h\beta}.$$

Принимая во внимание это равенство, формулу (46') так перепишем:

$$\varphi(h,p) = \sum \varrho^{\alpha h} - \sum \varrho^{\beta h},$$

или, употребляя обозначение $\left(\frac{s}{p}\right)$:

$$\varphi(h,p) = \sum_{s=1}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right)\varrho^{sh}.$$

Но

$$\left(\frac{hs}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right)\left(\frac{s}{p}\right) \quad \text{и следовательно} \quad \left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right)\left(\frac{hs}{p}\right),$$

и формула наша принимает такой вид:

$$\varphi(h,p) = \left(\frac{h}{p}\right)\sum_{s=1}^{p-1}\left(\frac{hs}{p}\right)\varrho^{sh}.$$

Замечая, что hs пробегает полную систему вычетов по модулю p, если s пробегает ее, имеем, полагая $hs = t$:

$$\varphi(h,p) \;=\; \Big(\frac{h}{p}\Big)\sum_{t=1}^{p-1}\Big(\frac{t}{p}\Big)\varrho^{t},$$

т[о] есть

$$\varphi(h,n) \;=\; \Big(\frac{h}{n}\Big)\varphi(1,n). \tag{54}$$

Формулу эту, выведенную нами в предположении, что $n = p$ – простому числу, можно распространить на случай какого угодно нечетного n. Положим сначала, что n – некоторая степень простого числа p: $n = p^{2k}q$,[25] где $q = p$ или 1. Имеем:

$$\varphi(h,p) \;=\; \sum_{s=0}^{p^{2k}-1}\varrho^{hs^2}.$$

Выделим отсюда члены, индексы s которых делятся на p^k. Найдем тогда:[26]

$$\varphi(h,p) \;-\; \big(1 \;+\; \varrho^{hp^{2k}} \;+\; +\varrho^{4hp^{2k}} \;+\; \ldots \;+\; +\varrho^{(p^kq-1)^2hp^{2k}}\big) \;=\; \sum\varrho^{hs_1^2},$$

где индекс s_1 принимает все значения, не делящиеся на p^k. Эти значения для s_1 можно соединить в группы, смотря по тому, какой остаток дает s_1 при делении на p^kq. Группа, соответствующая остатку λ ($\lambda < p^kq$), будет:

$$\lambda \;+\; p^kq,\;\; \lambda \;+\; 2p^kq,\;\; \ldots,\;\; \lambda \;+\; (p^k-1)p^kq.$$

Соответственно этому будет (γ под знаком $\sum$ – член $\varrho^{hp^{2k}s^2}$):[27]

$$\varphi(h,p) \;-\; \sum_{s=0}^{p^kq-1}\gamma \;=\; \sum\sum_{s=0}^{p^k-1}\varrho^{h(\lambda+sp^kq)^2} \;=\; \sum\varrho^{h\lambda^2}\sum_{s=0}^{p^k-1}\varrho^{2h\lambda sp^kq} \;=\; \sum\varrho^{h\lambda^2}\,\frac{1-\varrho^{2h\lambda n}}{1-\varrho^{2h\lambda p^k}} \;=\; 0.$$

Итак,[28]

$$\varphi(h,n) \;=\; \sum_{s=0}^{p^kq-1}\varrho^{hp^{2k}\cdot s^2}.$$

Если $q = 1$, то

$$\varphi(h,n) \;=\; \sum_{s=0}^{\sqrt{n}-1}\varrho^{hns^2} \;=\; \sqrt{n}.$$

В этом случае n, как легко видеть, будет формы $4m+1$ и следовательно, согласно формулам (25): $\varphi(1,n) = \sqrt{n}$; кроме того, употребляя символ Якоби, имеем: $\Big(\frac{h}{n}\Big) = 1$, и, следовательно, можем написать: $\varphi(h,n) \;=\; \Big(\frac{h}{n}\Big)\varphi(1,n)$, т[о] есть формула (54) распространяется и на этот случай.

[25] Исправлено. В рукописи: $n = p^{2k+1}q$. – *Прим. публ.*

[26] В показателях степеней в левой части формулы добавлен множитель h, пропущенный в рукописи. – *Прим. публ.*

[27] В двух последних суммах добавлен множитель $\varrho^{h\lambda^2}$, пропущенный в рукописи. Суммирование во внешних суммах проводится по числам $0 \leqslant \lambda < p^kq$, $\lambda \not\equiv 0 \pmod{p^k}$. – *Прим. публ.*

[28] Исправлено. В рукописи слагаемое содержит лишний множитель в показателе: $\varrho^{hp^{2k}q\cdot s^2}$. – *Прим. публ.*

Положим $q = p$, тогда:

$$\varphi(h,n) \;=\; \sum_{s=0}^{p^{k+1}-1} \varrho^{\frac{n}{p}hs^2}$$

Числа s разбиваем на следующие p^k групп:

$$0,1,2,3,\ldots,p-1;\quad p,p+1,p+2,\ldots,2p-1;\;\ldots,\;p^{k+1}-p,p^{k+1}-p+1,\;\ldots,\;p^{k+1}-1;$$

соответственно этому будет:

$$\varphi(h,n) \;=\; \sum_{\lambda=0}^{p^k-1}\sum_{s=0}^{s=p-1} \varrho^{\frac{n}{p}\cdot h(\lambda p^k+s)^2} \;=\; \sum_{\lambda=0}^{p^k-1}\sum_{s=0}^{p-1} \varrho^{\frac{n}{p}\cdot hs^2} \;=\; p^k \sum_{s=0}^{s=p-1} \varrho^{\frac{n}{p}\cdot hs^2}.$$

Но $\varrho^{\frac{n}{p}} = R$ – первообразный корень уравнения $x^p = 1$, и именно: $R = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$. Формула наша принимает вид:

$$\varphi(h,n) \;=\; p^k \sum_{s=0}^{s=p-1} R^{hs^2} \;=\; p^k\varphi(h,p) \;=\; \Big(\frac{h}{p}\Big)\sqrt{n},$$

или, употребляя символ Якоби и принимая во внимание, что

$$\Big(\frac{h}{p}\Big) \;=\; \Big(\frac{h}{p^{2k+1}}\Big) \;=\; \Big(\frac{h}{n}\Big),$$

находим: $\varphi(h,n) \;=\; \Big(\dfrac{h}{p}\Big)\sqrt{n}$. Итак, формула (54) справедлива, если n – простое нечетное число или любая степень такого числа.

Пусть, наконец, $n = a_1a_2\ldots a_k$ = произведению нечетных взаимно простых множителей; положим

$$\begin{aligned} b_1 \;&=\; a_2a_3\ldots a_k,\\ b_2 \;&=\; a_3a_4\ldots a_k,\\ &\ldots\\ b_{k-1} \;&=\; a_k, \end{aligned}$$

так что $n = a_1b_1$, $b_1 = a_2b_2$, …, $b_{k-1} = a_k$. На основании формулы (47) имеем:

$$\begin{aligned} &\varphi(h,n) \;=\; \varphi\Big(h\,\frac{n}{b_1},b_1\Big)\varphi\Big(h\,\frac{n}{a_1},a_1\Big)\\ &\varphi\Big(h\,\frac{n}{b_1},b_1\Big) \;=\; \varphi\Big(h\,\frac{n}{b_1}\cdot\frac{b_1}{b_2},b_2\Big)\varphi\Big(h\,\frac{n}{b_1}\cdot\frac{b_1}{b_2},a_2\Big) \;=\; \varphi\Big(h\,\frac{n}{b_2},b_2\Big)\varphi\Big(h\,\frac{n}{a_2},a_2\Big)\\ &\varphi\Big(h\,\frac{n}{b_2},b_2\Big) \;=\; \varphi\Big(h\,\frac{n}{b_3},b_3\Big)\varphi\Big(h\,\frac{n}{a_3},a_3\Big)\\ &\ldots\\ &\varphi\Big(h\,\frac{n}{b_{k-2}},b_{k-2}\Big) \;=\; \varphi\Big(h\,\frac{n}{b_{k-1}},b_{k-1}\Big)\varphi\Big(h\,\frac{n}{a_{k-1}},a_{k-1}\Big)\\ &\varphi\Big(h\,\frac{n}{b_{k-1}},b_{k-1}\Big) \;=\; \varphi\Big(h\,\frac{n}{a_k},a_k\Big). \end{aligned}$$

Перемножая почленно полученные равенства, находим окончательно:

$$\varphi(h,n) \;=\; \varphi\Big(h\,\frac{n}{a_1},a_1\Big)\varphi\Big(h\,\frac{n}{a_2},a_2\Big)\varphi\Big(h\,\frac{n}{a_3},a_3\Big)\ldots\varphi\Big(h\,\frac{n}{a_k},a_k\Big). \tag{55}$$

Полагая же $h = 1$, находим:

$$\varphi(1,n) \;=\; \varphi\Big(\frac{n}{a_1},a_1\Big)\varphi\Big(\frac{n}{a_2},a_2\Big)\dots\varphi\Big(\frac{n}{a_k},a_k\Big). \tag{56}$$

В равенстве (55) каждый множитель правой части можно так преобразовать:

$$\varphi\Big(h\frac{n}{a_s},a_s\Big) \;=\; \Big(\frac{h\cdot\frac{n}{a_s}}{a_s}\Big)\varphi(1,a_s),$$

если только каждое a_s представляет простое число или степень его, или иначе:

$$\varphi\Big(h\frac{n}{a_s},a_s\Big) \;=\; \Big(\frac{h}{a_s}\Big)\Big(\frac{\frac{n}{a_s}}{a_s}\Big)\varphi(1,a_s) \;=\; \Big(\frac{h}{a_s}\Big)\varphi\Big(\frac{n}{a_s},a_s\Big)$$

и следовательно:

$$\varphi(h,n) \;=\; \Big(\frac{h}{a_1}\Big)\Big(\frac{h}{a_2}\Big)\dots\Big(\frac{h}{a_k}\Big)\varphi\Big(\frac{n}{a_1},a_1\Big)\dots\varphi\Big(\frac{n}{a_k},a_k\Big),$$

т[о] есть

$$\varphi(h,n) \;=\; \Big(\frac{h}{n}\Big)\varphi(1,n),$$

если пользоваться символом Якоби. Следовательно, формула (54) справедлива для всякого целого нечетного числа n. В соединении с формулами (25) эта формула дает средство найти $\varphi(h,n)$ для всякого целого нечетного n.

Положим теперь, что $n = p_1p_2p_3\dots p_l\,q_1q_2q_3\dots q_m$ = произведению взаимно простых чисел, и числа p суть формы $4\mu+1$, а числа q суть формы $4\mu+3$. Имеем по формуле (56):

$$\varphi(1,n) \;=\; \Big(\frac{\frac{n}{p_1}}{p_1}\Big)\varphi(1,p_1)\Big(\frac{\frac{n}{p_2}}{p_2}\Big)\varphi(1,p_2)\dots\Big(\frac{\frac{n}{p_l}}{p_l}\Big)\varphi(1,p_l)\cdot\Big(\frac{\frac{n}{q_1}}{q_1}\Big)\varphi(1,q_1)\dots\Big(\frac{\frac{n}{q_m}}{q_m}\Big)\varphi(1,q_m) \;=$$
$$=\; \Big(\frac{\frac{n}{p_1}}{p_1}\Big)\Big(\frac{\frac{n}{p_2}}{p_2}\Big)\dots\Big(\frac{\frac{n}{p_l}}{p_l}\Big)\Big(\frac{\frac{n}{q_1}}{q_1}\Big)\dots\Big(\frac{\frac{n}{q_m}}{q_m}\Big)\,i^m\sqrt{n}.$$

С другой стороны, $\varphi(1,n) = i^{m^2}\sqrt{n}$, т[ак] как n будет формы $4\mu+1$ или $4\mu+3$ смотря по тому, будет ли m четное или нечетное. Следовательно,

$$\Big(\frac{\frac{n}{p_1}}{p_1}\Big)\Big(\frac{\frac{n}{p_2}}{p_2}\Big)\dots\Big(\frac{\frac{n}{q_m}}{q_m}\Big) \;=\; i^{m^2-m}. \tag{57}$$

Но $i^{m(m-1)} = +1$, если $m \equiv 0$ или $\equiv 1 \pmod 4$, и $= -1$, если $m \equiv 2$ или $\equiv 3 \pmod 4$ и, следовательно, $i^{m^2-m} = (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]}$, где r – остаток от деления m на 4. След[овательно],

$$\Big(\frac{\frac{n}{p_1}}{p_1}\Big)\dots\Big(\frac{\frac{n}{q_m}}{q_m}\Big) \;=\; (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]}. \tag{50$'$}$$

Из этой теоремы как частный случай следует закон взаимности квадратичных вычетов. Именно, пусть $n = a_1a_2$ = произведению нечетных взаимно простых чисел. Тогда формула (50$'$) дает:

$$\Big(\frac{\frac{n}{a_1}}{a_1}\Big)\Big(\frac{\frac{n}{a_2}}{a_2}\Big) \;=\; \Big(\frac{a_2}{a_1}\Big)\Big(\frac{a_1}{a_2}\Big) \;=\; (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]}.$$

«-1» в этом случае может получиться только тогда если $m = 2$, т[о] есть оба числа a_1 и a_2 формы $4\mu+3$. Следовательно, можем написать:

$$\Big(\frac{a_2}{a_1}\Big)\Big(\frac{a_1}{a_2}\Big) \;=\; (-1)^{\frac{a_1-1}{2}\cdot\frac{a_2-1}{2}},$$

а это равенство при a_1 и a_2 простых и выражает закон взаимности квадратичных вычетов.

С помощью того же метода легко определить значения символов $\left(\frac{-1}{p}\right)$ и $\left(\frac{2}{p}\right)$. Имеем:

$$\varphi(-1,p) = \left(\frac{-1}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}.$$

Но из формулы

$$\varphi(-1,p) = \sum e^{s^2 \cdot \frac{2\pi(-i)}{p}}$$

следует, что $\varphi(-1,p)$ найдем из выражения $\varphi(1,p)$, если заменим в нем i чрез $(-i)$, т[о] есть:

$$\varphi(-1,p) = (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

и след[овательно]

$$\left(\frac{-1}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p} = (-i)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p},$$

откуда

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Положим теперь в формуле (47) $h=1$, $m=8$, $n=p$; найдем:

$$\varphi(8,p)\varphi(p,8) = \varphi(1,8p).$$

Но $\varphi(1,8p) = (1+i)\sqrt{8p}$,

$$\varphi(p,8) = \sum_{s=0}^{7} e^{s^2 \cdot p^2 \frac{\pi i}{8}} = \sum_{s=0}^{7} e^{ps^2 \cdot \frac{\pi i}{8}} =$$
$$= 1 + e^{\frac{1}{4}p\pi i} + e^{p\pi i} + e^{2\frac{1}{4}p\pi i} + e^{4p\pi i} + e^{6\frac{1}{4}p\pi i} + e^{9p\pi i} + e^{12\frac{1}{4}p\pi i} = 4e^{\frac{1}{4}p\pi i}.$$

Наконец,

$$\varphi(p,8) = \varphi(2,p) = \left(\frac{2}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}$$

и след[овательно]

$$\left(\frac{2}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p} \cdot 4e^{\frac{1}{4}p\pi i} = (1+i)\sqrt{8p},$$

откуда

$$\left(\frac{2}{p}\right) = \frac{(1+i)\cdot 2\sqrt{2}}{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} 4e^{\frac{1}{4}p\pi i}} = \frac{1+i}{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \cdot 4e^{\frac{1}{4}p\pi i}} =$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{4}\pi i}}{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{2} e^{\frac{1}{4}p\pi i}} = \frac{1}{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} e^{\frac{p-1}{4}\pi i}} = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

3. Заключение

Ошибка является исключительно редким фактом в трудах И.М. Виноградова; тем не менее, данный фрагмент рукописи содержит ошибочную формулу для интеграла J_k и неверное утверждение о том, что функция $\sin(m\theta)/\sin\theta$ неотрицательна на промежутке $\bigl(0,\pi/2\bigr)$. Соответственно, основанное на них доказательство формулы для случая $\gamma=\infty$ становится некорректным. Последний недостаток может быть устранен, например, с помощью следующего рассуждения.

Рассмотрим интеграл

$$J_k \;=\; \int_{\pi k}^{\pi k_1+r} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\, f(\theta)d\theta,$$

где $0\leqslant r<\pi$, а $k_1>k$ – произвольное целое число. После очевидных преобразований получим:

$$\begin{aligned} J_k \;&=\; \Bigl(\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} + \int_{\pi(k+1)}^{\pi(k+2)} + \ldots + \int_{\pi k_1}^{\pi k_1+r}\Bigr)\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\, f(\theta)d\theta \;= \\ &=\; \int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\, f(\pi k+\theta)d\theta \;+\; \int_0^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\, f(\pi(k+1)+\theta)d\theta \;+\ldots+\; \int_0^{r} \frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\, f(\pi k_1+\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $f(\theta)$ непрерывна, из условия монотонности $|f(\theta)|$ следует и монотонность $f(\theta)$. Тогда, пользуясь второй теоремой о среднем (см., например, [18, п. 306]), для любого ν, $k\leqslant\nu\leqslant k_1$ и $a=r$, $a=\pi$ находим:

$$\int_0^a \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} f(\pi\nu+\theta)\,d\theta \;=\; f(\pi\nu)\int_0^{\xi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\,d\theta \;+\; f(\pi\nu+a)\int_{\xi}^{a}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\,d\theta,$$

где $0\leqslant\xi\leqslant a$. Интегралы по отрезкам $[0,\xi]$ и $[\xi,a]$ ограничены абсолютной постоянной. Действительно, пусть сперва $a=\pi$. Тогда в случае $0\leqslant\xi\leqslant\pi/2$ имеем

$$\int_0^{\xi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\,d\theta \;=\; \int_0^{m\xi}\frac{\sin x}{m\sin(x/m)}\,dx \;=\; \int_0^{m\xi}\frac{\sin x}{x}\,dx \;+\; \int_0^{m\xi}\varphi(x)\sin x\,dx,$$

$$\varphi(x) \;=\; \frac{1}{m\sin(x/m)} \;-\; \frac{1}{x}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \varphi(x) \;&=\; \Bigl(\frac{x}{m} \;-\; \sin\frac{x}{m}\Bigr)\frac{1}{x\sin(x/m)} \;=\; \frac{1}{x\sin(x/m)}\int_0^{x/m}(1-\cos u)du \;= \\ &=\; \frac{2}{x\sin(x/m)}\int_0^{x/m}\sin^2\frac{u}{2}\,du \;\leqslant\; \frac{2}{x\sin(x/m)}\int_0^{x/m}\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)^2 du \;=\; \frac{x/m}{\sin(x/m)}\,\frac{x}{6m^2} \;\leqslant\; \frac{\pi x}{12m^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\Bigl|\int_0^{m\xi}\varphi(x)\sin x\,dx\Bigr| \;\leqslant\; \int_0^{m\xi}\frac{\pi x}{12m^2}\,dx \;=\; \frac{\pi\xi^2}{24} \;\leqslant\; \frac{\pi^3}{96}.$$

Пользуясь тем, что

$$0 \;\leqslant\; \int_0^{m\xi}\frac{\sin x}{x}\,dx \;\leqslant\; \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

заключаем:

$$\Bigl|\int_0^{\xi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}\,d\theta\Bigr| \;\leqslant\; \frac{\pi^3}{96}+\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; C \;=\; 2.17492\ldots\,.$$

Если $\pi/2 < \xi \leqslant \pi$, то $0 \leqslant \pi - \xi \leqslant \pi/2$, так что в силу доказанного имеем

$$\left| \int_0^{\xi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta}\, d\theta \right| = \left| -\int_0^{\pi-\xi} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta}\, d\theta \right| \leqslant C.$$

Наконец, при $0 < a = r < \pi$ полученные оценки дают:

$$\left| \int_{\xi}^{a} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta}\, d\theta \right| = \left| \left(\int_{\xi}^{\pi} - \int_{a}^{\pi} \right) \frac{\sin m\theta}{\sin \theta}\, d\theta \right| \leqslant 2C.$$

Таким образом, для любых рассматриваемых ν и a имеем:

$$\left| \int_0^{a} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta}\, f(\theta)\, d\theta \right| \leqslant 2C\big(|f(\pi\nu)| + |f(\pi\nu + a)|\big).$$

Следовательно,

$$J_k < 4C \sum_{\nu=k}^{k_1} |f(\pi\nu)| + 2C|f(\pi k_1 + r)| < \varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при неограниченном возрастании k.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Успенский Я.В., Соображения о возможно целесообразном преподавании математики в проектируемом институте инженеров земельных улучшений. Предисловие, публикация и комментарии А.А. Сергеева // Историко-математические исследования. 1999. № 4(39). С. 114–123.

2. Ермолаева Н., Успенский, Яков Викторович. В сб.: Русское зарубежье: Золотая книга эмиграции. Первая треть XX века. Энциклопедический биографический словарь. М., РОССПЭН, 1997.

3. Карацуба А.А., И.М. Виноградов и его метод тригонометрических сумм // Теория чисел и анализ, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И.М. Виноградова. Тр. МИАН, Т. 207, М., Наука, 1994. С. 3–20.

4. Карацуба А.А., Иван Матвеевич Виноградов (к девяностолетию со дня рождения) // УМН. 1981. Т. 36. № 6(222). С. 3–16.

5. Делоне Б.Н., Петербургская школа теории чисел. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1947.

6. Карацуба А.А., Краткий очерк научной, научно-организационной и педагогической деятельности. В кн.: Иван Матвеевич Виноградов. Материалы к библиографии ученых СССР. Серия математики, вып. 14. М., Наука, 1978. С. 7–16.

7. Виноградов И.М., Sur la distribution des residus et des non-residus des puissances // Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те. 1918. Т. 1. С. 94–98.

8. Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел. М., Мир, 1974.

9. Berndt B.C., Evans, R.J., The determination of Gauss sums // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 5. № 2. P. 107–129.

10. Berndt B.C., Evans, R.J., Williams K.S., Gauss and Jacobi Sums. John Wiley & Sons, Inc., 1998.

11. Gauss K.F., Summatio quarumdam serierum singularium // Commentat. Soc. Regiae Sci. Gott. Recent. 1811. Vol. 1.

12. Гаусс К.Ф., Труды по теории чисел. М., Изд-во АН СССР, 1959.

13. Dirichlet L., Üeber eine neue Anwendung bestimmter Integrate auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen // Abh. K. Preuss. Akad. Wiss. 1835. S. 391–407.

14. Cauchy A., Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1840. Vol. 10. P. 560–572.

15. Gauss K.F., Werke. Bd. 2. Göttingen, 1863. S. 11–45.

16. Dirichlet G.L., Werke. Bd. 1. Berlin, 1889. S. 239–256.

17. Cauchy A., Œuvres complètes d'Augustin Cauchy. I^{re} Série. T. V. Paris, 1885. P. 152–166.

18. Финтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. 6-е изд. М., Наука, 1966.

REFERENCES

1. Uspensky J.V., 1999, The ideas concerning the possibly expedient teaching mathematics at the future Institute of Land Improvement Engineers. The publication of A.A. Sergeev (with preface and comments), *Historical and mathematical researches*, no. № 4(39), pp. 114-123 (in Russian).

2. Ermolaeva N., 1997, "Uspensky, Yakov Victorovich", in: Russian abroad: Golden book of emigration. The first third of the XX century. Encyclopedic Biographical Dictionary. Moscow, ROSSPEN (in Russian).

3. Karatsuba A.A., 1995, "I.M. Vinogradov and his method of trigonometric sums", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 1-33.

4. Karatsuba A.A., 1981, "Ivan Matveevich Vinogradov (on his ninetieth birthday)", *Russian Math. Surveys*, vol. 36, no. 6, pp. 1–17.

5. Delone B.N., 1947, "Peterboug's school of number theory", Moscow-Leningrad, Publ. Akad. Nauk SSSR (in Russian).

6. Karatsuba A.A., 1978, "A brief sketch of scientific, organizing and pedagogical activity", in: Ivan Matveevich Vinogradov. Materials for the bibliography of scientists of the USSR. Ser. Math., no. 14. N., Nauka, pp. 7-16 (in Russian).

7. Vinogradov I.M., 1918, "Sur la distribution des residus et des non-residus des puissances", *J. Phys.-Math. Soc. Perm. Univ.*, vol. 1, pp. 94–98.

8. Chandrasekharan K., 1968, "Introduction to Analytic Number Theory", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

9. Berndt B.C., Evans, R.J., 1981, "The determination of Gauss sums", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 5, no. 2, pp. 107–129.

10. Berndt B.C., Evans, R.J., Williams K.S., 1998, “Gauss and Jacobi Sums”, John Wiley & Sons, Inc.

11. Gauss K.F., 1811, “Summatio quarumdam serierum singularium”, *Commentat. Soc. Regiae Sci. Gott. Recent.*, vol. 1.

12. Gauss K.F., 1959, “Works in Number Theory”, Moscow, Publ. Akad. Nauk SSSR (in Russian).

13. Dirichlet L., 1835, “Üeber eine neue Anwendung bestimmter Integrate auf die Summation endlicher oder unendlicher Reihen”, *Abh. K. Preuss. Akad. Wiss.*, s. 391–407.

14. Cauchy A., 1840, “Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 10, pp. 560–572.

15. Gauss K.F., 1863, Werke. Bd. 2. Göttingen, s. 11–45.

16. Dirichlet G.L., 1889, Werke. Bd. 1. Berlin, s. 239–256.

17. Cauchy A., 1885, Œuvres complètes d’Augustin Cauchy. I^{re} Série. T. V. Paris, p. 152–166.

18. Fikhtengoltz G.M., 1966, Differential and integral calculus course, vol. II. 6th ed., Moscow, Nauka.

Получено 19.09.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

К 36471

И. Виноградовъ

Суммы Гаусса

и

приложеніе ихъ къ доказательству закона взаимности квадратичныхъ вычетовъ.

БИБЛИОТЕКА
...
Академ... СССР

1914

Введение

Прежде чем приступить к настоящему изследованию напомним некоторые предложения из теории двучленного уравнения $x^n = 1$.

Пусть n = любое целое положительное число и пусть $h_1 = 1, h_2, h_3, \ldots h_{\varphi(n)}$ числа меньшие n и с ним взаимно простые. Обозначим $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ чрез ρ. Тогда числа $1, \rho, \rho^2, \ldots \rho^{n-1}$ представят нам все решения уравнения $x^n = 1$ и числа $\rho, \rho^{h_2}, \rho^{h_3}, \ldots \rho^{h_{\varphi(n)}}$ все различные первообразные корни этого уравнения. Пусть h = любое из чисел $h_1, h_2, \ldots h_{\varphi(n)}$ и положим $\rho^h = \kappa$. Тогда все решения уравнения $x^n = 1$ и все различные его первообразные корни соответственно так представятся: $1, \kappa, \kappa^2, \ldots \kappa^{n-1}$ и $\kappa, \kappa^{h_2}, \kappa^{h_3}, \ldots \kappa^{h_{\varphi(n)}}$.

Сумму $\varphi(h, n) = 1 + \kappa + \kappa^h + \ldots + \kappa^{(n-1)h}$ полное определение которой дано впервые Гауссом назовем суммою Гаусса.

Изследование наше будет расположено в следующем порядке. Сначала мы покажем как определить величину $\varphi(h, n)$ для случая $h = 1$, далее мы покажем как определяется $\varphi(h, n)$ при любом $h = h_1, h_2, \ldots h_{\varphi(n)}$. При этом, если вести изследование двумя путями, что для суммы $\varphi(h, n)$ можно получить 2 выражения отличные формально одно от другого. Из сравнения этих выражений и получается закон взаимности квадратичных вычетов.

Первым рассмотрим метод, которым пользовался Гаусс для определения суммы $\varphi(k,n)$.

Пусть m = целое число удовлетворяющее условию $m \geq 0$. Положим тогда:

$$(m,\mu) = \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\mu)} \quad (1)$$

причем случаевъ, когда x = корень какого нибудь изъ уравнений: $x^\kappa = 1$ гдѣ $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ мы не разсматриваемъ за исключеніемъ только одного случая, когда x = первообразный Корень уравненія $x^{m+1} = 1$, =Этотъ именно случай намъ понадобится впослѣдствіи. При такихъ условіяхъ функція (m,μ) для $\mu = 1, 2, 3, \dots m$ вполнѣ опредѣляется формулой (1). Для значеній же μ превышающихъ m функція: $(m,\mu) = 0$ если не имѣетъ мѣста вышеупомянутый исключительный случай и обращается въ неопредѣленность вида $\frac{0}{0}$ въ этомъ случаѣ. Однако для сокращенія дальнѣйшихъ разсужденій будемъ полагать $(m,\mu) = 0$ при $\mu > 0$ и въ случаѣ когда x = первообразный корень уравненія $x^{m+1} = 1$. По тѣмъ же соображеніямъ будемъ полагать всегда: $(m,0) = 1$ и $(m,\mu) = 0$ если $\mu < 0$. Тогда для любого значенія $\mu = \dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots$ легко доказываются слѣдующія 2 равенства: $(m,\mu) = (m-1,\mu) + x^{m-\mu}(m-1,\mu-1)$ (2)

и: $(m,\mu) = (m, m-\mu) \dots\dots\dots$ (3)

$(m,\mu) = x^\mu (m-1,\mu) + (m-1,\mu-1)$ (2)

$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})}{(1-x^\mu)(1-x^{m-\mu})} = \frac{1-x^{m-\mu}}{1-x^\mu}$

Разсмотримъ рядъ:

(4) $f(x,m)=\sum(-1)^n(m,n)$, гдѣ суммированіе распространяется на всѣ цѣлыя значенія n. Принимая снова формулу (2) находимъ: $f(x,m)=\sum(-1)^n(m-1,n)+\sum(-1)^{n+1}x^{m-n-1}(m-1,n-1)$. Замѣтимъ далѣе что во всѣхъ суммахъ вида $\sum\varphi(n)(m,n)$ гдѣ суммированіе распространяется по n на всѣ цѣлыя числа очевидно можно всегда вмѣсто n поставить $\pm n+k$, гдѣ k=любое цѣлое число и считать что суммированіе опять распространено на всѣ цѣлыя значенія n. На этомъ основаніи находимъ:

$f(x,m)=\sum(-1)^n(m-1,n)+\sum(-1)^{n+1}x^{m-n-1}(m-1,n)=$
$=\sum(-1)^n(1-x^{m-n-1})(m-1,n)$. Далѣе легко видѣть что: $(1-x^{m-n-1})(m-1,n)=(1-x^{m-1})(m-2,n)$ и слѣд.: $f(x,m)=\sum(-1)^n(1-x^{m-1})(m-2,n)=$
$=(1-x^{m-1})\sum(-1)^n(m-2,n)$, то есть:

$$f(x,m)=(1-x^{m-1})f(x,m-2)$$

Положимъ теперь что m=четное число находимъ послѣдовательно: $f(x,0)=(-1)^0(0,0)=1$

далѣе $f(x,2)=(1-x)f(x,0)$

$f(x,4)=(1-x^3)f(x,2)$

$\dots\dots\dots\dots\dots$

$f(x,m)=(1-x^{m-1})f(x,m-2)$

Перемножая всѣ эти равенства находимъ

(5) $f(x,m)=\sum(-1)^n(m,n)=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots(1-x^{m-1})$

Разсмотримъ еще такой рядъ:

(6) $F(x,m)=\sum x^{\frac{n^2}{2}}(m,n)$ гдѣ суммированіе опять распространяется на всѣ цѣлыя значенія n. Равенство это на основаніи формулы (3) такъ можно переписать

$F(x,m)=\sum x^{\frac{\mu}{2}}(m,m-\mu)$. Заменив в этой сумме μ на $-\mu+m$ и переписав ее в обратном порядке имеем

$F(x,m)=\sum x^{\frac{m-\mu}{2}}(m,\mu)$ или еще заменяя μ на $\mu-1$: $F(x,m)=\sum x^{\frac{m+1-\mu}{2}}(m,\mu-1)$ откуда

$$x^{\frac{m+1}{2}}F(x,m)=\sum x^{m+1-\frac{\mu}{2}}(m,\mu-1)\quad\ldots\ldots(7)$$

Складывая равенства (6) и (7) найдем

$$F(x,m)(1+x^{\frac{m+1}{2}})=\sum x^{\frac{\mu}{2}}[(m,\mu)+x^{m+1-\mu}(m,\mu-1)]$$

Откуда принимая во внимание формулу (2) находим окончательно

$$F(x,m)(1+x^{\frac{m+1}{2}})=\sum x^{\frac{\mu}{2}}(m+1,\mu)=F(x,m+1).$$

Но: $F(x,0)=1$, далее

$$F(x,1)=(1+x^{\frac{1}{2}})F(x,0)$$
$$F(x,2)=(1+x)F(x,1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(x,m)=(1+x^{\frac{m}{2}})F(x,m-1)$$

Перемножая эти равенства найдем

$$F(x,m)=(1+x^{\frac{1}{2}})(1+x)\ldots(1+x^{\frac{m}{2}})\quad\ldots\ldots(8)$$

Пусть теперь n = целое нечетное число. Заменим в формуле (5) m на $n-1$ и x первообразным корнем уравнения $x^n=1$. Найдем тогда

$$\sum(-1)^{\mu}(n-1,\mu)=(1-r)(1-r^3)\ldots(1-r^{n-2})$$

приняв знак $\sum$ достаточно распространить на значения $\mu=0,1,2,\ldots n-1$.

Но $(-1)^{\mu}(n-1,\mu)=(-1)^{\mu}\frac{(1-r^{n-1})(1-r^{n-2})\ldots(1-r^{n-\mu})}{(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{\mu})}=$

$=(-1)^{\mu}\frac{(1-r^{-1})(1-r^{-2})\ldots(1-r^{-\mu})}{(1-r)(1-r^2)\ldots(1-r^{\mu})}=r^{-1-2-\ldots-\mu}=$

$=r^{-\frac{\mu(\mu+1)}{2}}$ и самое написание

$$\sum_{\mu=0}^{n-1}r^{-\frac{\mu(\mu+1)}{2}}=(1-r)(1-r^3)\ldots(1-r^{n-2})$$

Эта формула справедлива если понимать под r какой угодно первообразный корень уравнения $x^n=1$. Легко

видѣть что r^{-2} будетъ также первообразнымъ корнемъ уравненія $x^n=1$, т. какъ $-2=$ число взаимно простое съ n. Замѣнивъ въ послѣднемъ равенствѣ r на r^{-2} найдемъ:

$$(9)\quad \sum_{m=0}^{n-1} r^{m(m+1)} = (1-r^{-2})(1-r^{-6})(1-r^{-10})\cdots(1-r^{-2(n-2)})$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на $r^{\frac{1}{4}(n-1)^2} = r\cdot r^3\cdot r^5\cdots r^{n-2}$ найдемъ въ лѣвой части: $\sum r^{m^2+m-mn+(\frac{n-1}{2})^2} =$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} r^{(\frac{n-1}{2}-m)^2} = \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} r^{(\frac{n-1}{2}-m)^2} + \sum_{m=0}^{\frac{n-3}{2}} r^{(\frac{n-1}{2}-m+n)^2} =$$

$$= \sum_{t=\frac{n-1}{2}}^{0} r^{t^2} + \sum_{t=\frac{n+1}{2}}^{n-1} r^{t^2} = \sum_{t=0}^{n-1} r^{t^2} = \varphi(k,n).$$

Равенство (9) теперь такъ перепишется:

$$(10)\quad \varphi(k,n) = (r-r^{-1})(r^3-r^{-3})(r^5-r^{-5})\cdots(r^{n-2}-r^{-(n-2)}).$$

Имѣемъ далѣе: $r^1-r^{-1} = -(r^{n-1}-r^{-(n-1)})$

$$r^3-r^{-3} = -(r^{n-3}-r^{-(n-3)})$$

$$r^{n-2}-r^{-(n-2)} = \pm(r^2-r^{-2})$$

$$(11)\quad \text{и слѣд.:}\quad \varphi(k,n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(r^2-r^{-2})(r^4-r^{-4})\cdots(r^{n-1}-r^{-(n-1)})$$

Перемножая (10) и (11) найдемъ:

$$[\varphi(k,n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(r-r^{-1})(r^2-r^{-2})\cdots(r^{n-1}-r^{-(n-1)})$$

или: $[\varphi(k,n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} r^{1+2+3+\cdots+n-1}(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-2(n-1)}) =$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1-r^{-2})(1-r^{-4})\cdots(1-r^{-2(n-1)}).$$ Но: $r^{-2}, r^{-4}, \ldots, r^{-2(n-1)}$ очевидно представляютъ всѣ корни такого уравненія: $\frac{x^n-1}{x-1}=0$ и слѣд.: $\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 = (x-r^{-2})\cdots(x-r^{-2(n-1)})$ при $x=1$ найдемъ отсюда:

$n = (1-r^{-2})(1-r^{-4})\cdots(1-r^{-2(n-1)})$ и слѣд. окончательно: $[\varphi(k,n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$. Т. е. если n формы $4m+1$ то $\varphi(k,n) = \pm\sqrt{n}$ если же n формы $4m+3$ то: $\varphi(k,n) = \pm i\sqrt{n}$

Знакъ который нужно брать въ 2хъ послѣднихъ формулахъ мы опредѣлимъ слѣдующимъ образомъ:

пока лишь для случая, когда $k=1$, т. есть для случая $r=\rho$. Имеем тогда
$\rho^s-\rho^{-s}=e^{\frac{2\pi}{n}sr}-e^{-\frac{2\pi}{n}sr}=i\cdot 2\sin\frac{2\pi}{n}\cdot s$
и формула (10) даетъ намъ:
$\varphi(1,n)=2^{\frac{n-1}{2}}\,i^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin 3\cdot\frac{2\pi}{n}\cdots\sin(n-2)\cdot\frac{2\pi}{n}$
Если принять n формы $4y+1$ то числа $\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}, \left(\frac{n+1}{2}+1\right)\frac{2\pi}{n},\ldots(n-2)\cdot\frac{2\pi}{n}$ будутъ больше π, соотвѣтственно чему $\frac{n-1}{4}$ синусовъ будутъ отрицательны; кромѣ того $i^{\frac{n-1}{2}}=(-1)^{\frac{n-1}{4}}$ и слѣд. знакъ всего произведенія опредѣлится знакомъ выраженія: $(-1)^{\frac{n-1}{4}}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{4}}=1$ т. есть будетъ $+$
Если же n формы $4y+3$ то числа $\frac{n+3}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}, \left(\frac{n+3}{2}+1\right)\frac{2\pi}{n},\ldots(n-2)\cdot\frac{2\pi}{n}$ будутъ больше π соотвѣтственно чему $\frac{n-3}{4}$ синусовъ будутъ отрицательны и кромѣ того $i^{\frac{n-1}{2}}=(-1)^{\frac{n-3}{4}}\,i$
Слѣд. въ этомъ случаѣ все произведеніе равно положительному числу умноженному на $i\cdot(-1)^{\frac{n-1}{4}}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{4}}$ т. есть на i
Итакъ окончательно:

$$\varphi(1,n)=+\sqrt{n},\ \text{если } n \text{ формы } 4y+1 \qquad (12)$$
$$\text{и } \varphi(1,n)=+i\sqrt{n},\ \text{если } n \text{ формы } 4y+3.$$

Пусть $n=$ четное число $\equiv 2 \pmod 4$
Въ такомъ случаѣ сумму $\varphi(k,n)$ такъ разложимъ: $\varphi(k,n)=\sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1}r^{t^2}+\sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1}r^{t^2}$
Во второй изъ полученныхъ сумм перемѣнимъ суммированіе, замѣнивъ по формулѣ $t=\frac{n}{2}+t_1$ тогда она приметъ видъ $\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1}r^{\frac{n^2}{4}+nt_1+t_1^2}$. Нетрудно видѣть что: $\frac{n^2}{4}+nt_1\equiv\frac{n}{2}\pmod n$ и слѣдовательно

окончательно. Вторая сумма принимает вид: $\sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\frac{n}{2}+t^2} = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2}$, т. как $r^{\frac{n}{2}} = -1$.

(13) Итак имеем: $\varphi(k,n) = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} - \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} = 0$.

Рассмотрим наконец случай $n \equiv 0 \pmod 4$. В формуле (8) положим $m = \frac{n}{2} - 1$ и $x^{\frac{1}{2}} = -r^{-1}$ (нетрудно убедиться, что $x = r^{-2}$ = первообразный корень уравнения $x^{\frac{n}{2}} = 1$). После такого преобразования формула (8) примет

(8') вид: $\sum (-1)^m r^{-m}(m,m) = (1-r^{-1})(1+r^{-2})(1-r^{-3})\dots(1-r^{-\frac{n}{2}+1})$,

причем знак $\sum$ достаточно распространить на значения $m = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$.

(m,m) будет равно теперь такому выражению: $\frac{(1-r^{-n+2})(1-r^{-n+4})\dots(1-r^{-n+2m})}{(1-r^{-2})(1-r^{-4})\dots(1-r^{-2m})} =$

$= \frac{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\dots(1-r^{2m})}{(1-r^{-2})(1-r^{-4})(1-r^{-6})\dots(1-r^{-2m})} =$

$= (-1)^m r^{2(1+2+3+\dots+m)} = (-1)^m r^{m(m+1)}$, след.

сумма стоящая в левой части равенства (8') преобразуется в:

$\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^m r^{-m} \cdot (-1)^m r^{m(m+1)} = \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{m^2}$.

С другой стороны находим:

$\varphi(k,n) = \sum_{t=0}^{n-1} r^{t^2} = \sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2} + \sum_{t=\frac{n}{2}}^{n-1} r^{t^2}$. Вторую из полученных сумм подстановкой $t = \frac{n}{2} + t_1$ приведем к следующей: $\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{\frac{n^2}{4} + nt_1 + t_1^2}$. Замечая что $\frac{n^2}{4} + nt_1 \equiv 0 \pmod n$ найдем для второй суммы такое выражение: $\sum_{t_1=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t_1^2}$ и след.: $\varphi(k,n) = 2\sum_{t=0}^{\frac{n}{2}-1} r^{t^2}$.

На этом основании формула

(8'') окончательно преобразуется в следующую: $\varphi(k,n) = 2(1-r^{-1})(1+r^{-2})(1-r^{-3})\dots(1-r^{-\frac{n}{2}+1})$.

Далее находим:

$1+r^{-2}=-r^{\frac{n}{2}-2}(1-r^{-\frac{n}{2}+2})$

$1+r^{-4}=-r^{\frac{n}{2}-4}(1-r^{-\frac{n}{2}+4})$

. . . . . .

$1+r^{-\frac{n}{2}+2}=-r^{2}(1-r^{-2})$ и слѣд.:

$\varphi(h,n)=2(-1)^{\frac{n}{4}-1}r^{2(1+2+\cdots+(\frac{n}{4}-1))}(1+r^{-2})(1+r^{-4})\cdots(1-r^{-\frac{n}{2}+1})=$

$=2(-1)^{\frac{n}{4}-1}r^{\frac{n^2}{16}-\frac{n}{4}}(1-r^{-1})(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-\frac{n}{2}+1})\cdots(14)$

Далѣе находимъ: $1-r^{-1}=-r^{-1}(1-r^{-n+1})$

$1-r^{-2}=-r^{-2}(1-r^{-n+2})$

. . . . . .

$1-r^{-\frac{n}{2}+1}=-r^{-\frac{n}{2}+1}(1-r^{-\frac{n}{2}-1})$

Принимая во вниманіе эти равенства формулу (14) такъ перепишемъ:

$\varphi(h,n)=2(-1)^{\frac{n}{4}}r^{-\frac{n^2}{16}}(1-r^{-\frac{n}{2}-1})(1-r^{\frac{n}{2}-2})\cdots(1-r^{-n+1})\cdots(15)$

Перемноживъ равенства (13), (15) и $2=(1-r^{\frac{n}{2}})$ имѣемъ: $2[\varphi(h,n)]^2=$

$=4(-1)^{\frac{n}{4}-1+\frac{n}{4}}r^{-\frac{n}{4}}(1-r^{-1})(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-n+1})$

или: $[\varphi(h,n)]^2=2r^{-\frac{n}{4}}(1-r^{-1})(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-n+1})$.

Замѣтимъ, что: $r^{\frac{n}{8}}=\cos\frac{2\pi h}{n}\cdot\frac{n}{8}+i\sin\frac{2\pi h}{n}\cdot\frac{n}{8}=$

$=\cos\frac{\pi h}{4}+i\sin\frac{\pi h}{4}=\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ причемъ въ числителѣ

берется знакъ + или − смотря по тому

будетъ ли h формы $4m+1$, или формы $4m+3$.

Кромѣ того $(1-r^{-1})(1-r^{-2})\cdots(1-r^{-n+1})=n$

поэтому окончательно находимъ

$\varphi(h,n)=\pm(1\pm i)\sqrt{n}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$

Остается опредѣлить знакъ стоящій предъ выраженіемъ $(1\pm i)\sqrt{n}$. Это мы сдѣлаемъ пока лишь для случая $h=1$.

Полагая $R=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$ и замѣчая что $R^n=-1$ мы формулу (8''') такъ преобразуемъ для случая $h=1$.

$\varphi(h,n)=2(1+R^{n-2})(1+R^{-4})(1+R^{n-6})\cdots(1+R^{-n+4})(1+R^2)$

или $\varphi(h,n)=2(1+R^2)(1+R^{-4})(1+R^6)\cdots(1+R^{-n+4})(1+R^{n-2})$

Далѣе находимъ: $1+R^2=R(R^{-1}+R^1)=2R\cos\frac{\pi}{n}$

$1+R^{-4}=2R^{-2}\cos\frac{2\pi}{n}$

$1+R^6=2R^3\cos\frac{3\pi}{n}$

. . . . . .

$1+R^{n-2}=2R^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$

и след.: $\varphi(1,n)=2^{\frac{n}{2}}R^{\frac{n}{4}}\cos\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\cdots\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi}{n}$

Все косинусы входящие в это произведение положительны кроме того $\rho^{\frac{n}{4}}=(1+i)a$ либо $\varphi(1,n)=$ положительному числу умноженному на $(1+i)$ т. есть:

$$\varphi(1,n)=(1+i)\sqrt{n}. \tag{17}$$

Собирая формулы (12), (13), (17) имеем окончательно:

$$\begin{cases}\varphi(1,n)=(1+i)\sqrt{n} & \text{если } n \text{ формы } 4m\\ \varphi(1,n)=\sqrt{n} & \text{если } n \text{ формы } 4m+1\\ \varphi(k,n)=0 & \text{если } n \text{ формы } 4m+2\\ \varphi(1,n)=i\sqrt{n} & \text{если } n \text{ формы } 4m+3.\end{cases} \tag{18}$$

Метод Гаусса, которым мы получили формулы (18) = методом алгебраическим так как выполняется чисто алгебраическими преобразованиями.

Сейчас мы рассмотрим другие доказательства тех же формул, основанные на довольно высоких представлениях математического анализа. Одно из них дано Дирихле, другое Коши. При рассмотрении этих доказательств нам придется пользоваться некоторыми предложениями из теории рядов Фурье. Выведем сначала вспомогательные предложения.

Пусть χ = некоторое положительное число и пусть функция $F(\theta)$ конечная непрерывная убывающая в промежутке $(0,\chi)$, удовлетворяющая условию $F(\theta)>0$. Положим $S_p=\int_0^{\chi}\rho^{i\theta}F(\theta)\,d\theta$

и рассмотрим предел S_p. Подстановкою $px=x$ найдем: $Sp=\int_0^{p\pi}\frac{\sin x}{x}F'(\frac{x}{p})dx$
Пусть теперь $p\gamma=q\pi+\xi$, где $0\leqslant\xi<\pi$.
Тогда интеграл Sp можно разложить по следующей схеме:
$Sp=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\cdots+\int_{(q-1)\pi}^{q\pi}+\int_{q\pi}^{q\pi+\xi}\frac{\sin x}{x}F'(\frac{x}{p})dx$
$n^{\text{ый}}$ интеграл этого ряда т. есть $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x}F'(\frac{x}{p})dx$ для подстановкого $x=(n-1)\pi+\xi$ преобразуется к интегралу: $(-1)^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi}{(n-1)\pi+\xi}F'(\frac{(n-1)\pi+\xi}{p})d\xi$ под интегральная функция которого очевидно постоянно >0 и след. $n^{\text{ый}}$ член нашего ряда можно представить в виде: $(-1)^{n-1}U_n$ где $U_n>0$. Можно написать на этом основании:
$Sp=U_1-U_2+U_3-U_4+\cdots(-1)^{q-1}U_q+R_q$ (19)
где положено: $R_q=\int_{q\pi}^{q\pi+\xi}\frac{\sin x}{x}F'(\frac{x}{p})dx$.
$n+1^{\text{ый}}$ же член нашего ряда после преобразования имеет вид: $(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi}{n\pi+\xi}F'(\frac{n\pi+\xi}{p})d\xi$. Сравнивая это выражение с выражением для $n^{\text{го}}$ члена и принимая во внимание что $F'(0)$ функция убывающая легко найдем что $U_{n+1}<U_n$ т. есть члены знакопеременного ряда (1) убывают по мере удаления от начала ряда. На основании общей теории знакопеременных рядов можем написать поэтому:
$U_1-U_2+U_3-U_4+\cdots-U_{2k}<S_p-R_q<U_1+U_2+\cdots+U_{2k+1}$
и след: $Sp-R_q=U_1-U_2+\cdots-U_{2k}+\varepsilon_k U_{2k+1}$
где $0<\varepsilon_k<1$. то-есть

$$J_p = \int_0^{q\kappa\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \varepsilon_\kappa \int_{2\kappa\pi}^{(2\kappa+\vartheta)\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx +$$
$$+ \int_{q\pi}^{q\pi+\rho} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx.$$

Применяя к последним двум интегралам теорему о среднем значении, преобразованных предварительно подстановками: $x = 2\kappa\pi + \xi$ и $x = q\pi + \xi$ найдем:

$$J_p = \int_0^{q\kappa\pi} \frac{\sin x}{x} F\left(\frac{x}{p}\right) dx + \varepsilon_\kappa \frac{\sin \vartheta\pi}{2\kappa+\vartheta} F\left(\frac{q\kappa\pi + \vartheta_1}{p}\right)$$
$$+ (-1)^q \frac{\rho \sin \vartheta\rho}{q\pi + \vartheta\rho} F\left(\gamma - \frac{(1-\vartheta_1)\rho}{p}\right) \quad \text{где } 0 < \vartheta < 1,\ 0 < \vartheta_1 < \pi,\ 0 < \gamma < \pi.$$

Оставляя κ постоянным будем приближать p, а след. и q к пределу ∞. Найдем:

$$\operatorname*{пред}_{p=\infty} J_p = F(0) \int_0^{2\kappa\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \operatorname*{пред}_{p=\infty} \varepsilon_\kappa \cdot \frac{\sin \vartheta\pi}{2\kappa+\vartheta} F(0)$$

причем будет очевидно $\operatorname*{пред}_{p=\infty} \varepsilon_\kappa \leq 1$ в силу условий: $0 < \varepsilon < 1$.

Увеличивая теперь произвольное до сих пор κ до бесконечности найдем:

(20) $\operatorname*{пред}_{p=\infty} J_p = F(0) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ представляет собою конечное определенное число. Действительно разлагая этот интеграл по скобкам: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \dots$ легко убеждаемся, что ряд выражающий этот интеграл знакопеременный; члены его убывают безпредельно по мере удаления от начала ряда. Следовательно интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходящийся, т. есть $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = K$ = постоянному числу.

(21) и след.: $\operatorname*{пред}_{p=\infty} J_p = K F(0)$

Не определив пока постоянной K обобщим формулу (21)

на болѣе общіе случаи выбора $F(\theta)$

Пусть $F(\theta)$ принимаетъ въ интервалѣ $(0,\delta)$ отрицательныя значенія. Въ силу конечности функціи $F(\theta)$ можно найти такое число A что $A+F(\theta)$ въ промежуткѣ $(0,\delta)$ будетъ принимать только положительныя значенія. Но тогда по формулѣ (21):

$$\text{пред}_{p=\infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin p\theta}{\theta}[A+F(\theta)]\,d\theta = K[A+F(0)]$$

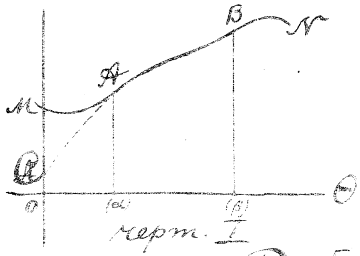
откуда $\text{Пред}_{p=\infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} F(\theta)\,d\theta = KF(0)$ т. есть формула (21) справедлива и въ этомъ случаѣ.

Если $F(\theta)$ возрастающая функція въ интервалѣ $(0,\delta)$, то $-F(\theta)$ = убывающая функція въ томъ же интервалѣ и къ послѣдней функціи можно опять применить формулу (21). Найдемъ:

$$\text{пред}_{p=\infty} \int_0^{\delta} \frac{\sin p\theta}{\theta}[-F(\theta)]\,d\theta = K[-F(0)]$$

откуда опять получается формула (21).

Найдемъ теперь $\text{пред}_{p=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} F(\theta)\,d\theta$ полагая, что $F(\theta)$ монотонна въ интервалѣ (α,β). Пусть для опредѣленности $\beta > \alpha$. Всегда можно выбрать въ интервалѣ $(0,\beta)$ такую монотонную функцію $F_1(\theta)$ которая для значеній θ въ интервалѣ (α,β) совпадала съ функціей $F(\theta)$. На черт. I кривая MN изображаетъ функцію $F(\theta)$ и CB = графическое изображеніе функціи $F_1(\theta)$. Найдемъ тогда:



черт. I

$$\text{пред}_{p=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} F_1(\theta)\,d\theta =$$

$$= \text{пред}_{p=\infty} \int_0^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} F_1(\theta)\,d\theta - \text{пред}_{p=\infty} \int_0^{\alpha} \frac{\sin p\theta}{\theta} F_1(\theta)\,d\theta =$$

$= KF(0) - KF(0) = 0$ а следовательно и:

(22) $\underset{p=\infty}{\text{пред}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta)\, d\theta = 0$

Положимъ теперь что функція $F(\theta)$ не монотонна въ интервалѣ (α, β). Пусть всѣ максимумы и минимумы ея соотвѣтствуютъ значеніямъ $\theta = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_k$. Интегралъ $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta)\, d\theta$ разложимъ по схемѣ:

$$\int_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\mu_1} + \int_{\mu_1}^{\mu_2} + \ldots + \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} + \int_{\mu_k}^{\beta}.$$

Такъ какъ въ каждомъ изъ интерваловъ $(\alpha, \mu_1), (\mu_1, \mu_2) \ldots (\mu_k, \beta)$ функція $F(\theta)$ монотонна то можно приложить къ первому изъ этихъ интеграловъ формулу (21), а къ каждому изъ остальныхъ формулу (22), послѣ чего придемъ снова къ формулѣ (21).

Положимъ наконецъ что $F(\theta)$ заключаетъ въ себѣ мнимые параметры. Отдѣливъ вещественную часть $F(\theta)$ отъ мнимой найдемъ: $F(\theta) = \varphi(\theta) + i\psi(\theta)$. Полученныя функціи $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ также конечны и непрерывны и къ нимъ слѣд. можно приложить формулу (21). Найдемъ: $\underset{p=\infty}{\text{пред}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} \varphi(\theta)\, d\theta = K\varphi(0)$ и $\underset{p=\infty}{\text{пред}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} \psi(\theta)\, d\theta = K\psi(0)$.

Принимая во вниманіе эти равенства найдемъ: $\underset{p=\infty}{\text{пред}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} F(\theta)\, d\theta = \underset{p=\infty}{\text{пред}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} \varphi(\theta)\, d\theta + i \underset{p=\infty}{\text{пред}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin p\theta}{\theta} \psi(\theta)\, d\theta = K\varphi(0) + iK\psi(0) = KF(0)$. Итакъ формула (21) справедлива и въ этомъ случаѣ.

Для опредѣленія постоянной K

Воспользуемся формулою (21). Т. как $K=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ не зависит от вида функции $F(\theta)$ ни от γ и p то для определения его в формуле (21) можно положить: $F(\theta)=\frac{\theta}{\sin\theta}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$, и $p=2n+1$. Найдем тогда:

$$\text{пред}_{n=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}d\theta=K \text{ ибо } F(0)=1.$$

Применим сюда известную формулу:

$$\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots+\cos 2n\theta=\frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta}-\frac{1}{2}\quad\ldots(23)$$

найдем: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}d\theta=$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+2\cos 2\theta+2\cos 4\theta+2\cos 6\theta+\cdots+2\cos 2n\theta\right]d\theta=\frac{\pi}{2}\quad(24)$$

и след.: $K=\text{пред}_{n=\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$. формула (21) теперь примет следующий вид:

$$\text{предел}_{p=\infty}\int_0^{\gamma}\frac{\sin p\theta}{\theta}F(\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}F(0)\quad\ldots\ldots(25)$$

Обратимся теперь к разысканию такого предела: $\text{предел}_{m=\infty}\int_0^{\gamma}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}F(\theta)d\theta$ причем положим что m = целое нечетное число. Положим $F(\theta)=\frac{\theta}{\sin\theta}f(\theta)$ где $f(\theta)$ конечная непрерывная функция $F(\theta)$ будет также конечной непрерывной функцией для всякого θ лежащего в интервале $(0,\infty)$ за исключением $\theta=\pi, 2\pi, 3\pi,\ldots$ для которых $F(\theta)=\infty$. Если $\gamma<\pi$ то непосредственно след. можем применить к $F(\theta)$ формулу (25) найдем тогда:

$$\text{пред.}\int_0^{\gamma}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}f(0)\quad\ldots\ldots(26)$$

Если $\gamma=\pi$ то $\int_0^{\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)d\theta$ представляем в виде суммы интегралов: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)d\theta$ и $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)d\theta$. Второй из этих интегралов подстано-

кого $\theta=\pi-\theta_1$ преобразуется к следующему: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\pi-\theta_1)\,d\theta_1$ и след.:
$\int_0^{\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}[f(\theta)+f(\pi-\theta)]\,d\theta$.
функция стоящая в скобках вида [ ] = конечная непрерывная функция в промежутке $(0,\frac{\pi}{2})$. Поэтому можно применить к ней формулу (25)
Найдем тогда,
$\text{пред.}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}[f(0)+f(\pi-0)]\,d\theta=\frac{\pi}{2}[f(0)+f(\pi)]$
(25) $m=\infty$ т. есть $\text{пред}_{m=\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{2}[f(0)+f(\pi)]$

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma=$ любое кратное π положительное число; положим $\gamma=k\pi$. Интеграл, $\int_0^{k\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta$ разложим по схеме:
$\int_0^{k\pi}=\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{3\pi}+\dots+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta$.
Подставляя в каждом конечном интеграле этого ряда $(k-1)\pi+\theta$, вместо θ мы ~~равенство~~ получим соотв. равенств.:
$\int_0^{k\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}[f(\theta)+f(\pi+\theta)+\dots+f((k-1)\pi+\theta)]\,d\theta$
П., как функция стоящая в скобках вида [ ] конечна и непрерывна то к полученному интегралу мы можем применить формулу (25) найдем тогда: $\text{пред.}\int_0^{k\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta=$
(28) $=\pi\left[\frac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\dots+f((k-1)\pi)\right]+\frac{1}{2}f(k\pi)$
Положим наконец $\gamma=k\pi+\rho$ где $0<\rho<\pi$. Имеем:
$\int_0^{k\pi+\rho}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta=\int_0^{k\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta+$
$+\int_{k\pi}^{k\pi+\rho}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta=$
$=\int_0^{k\pi}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(\theta)\,d\theta+\int_0^{\rho}\frac{\sin m\theta}{\sin\theta}f(k\pi+\theta)\,d\theta$
Применив к первому из полученных интегралов формулу (28)

и ко второму формулу (26) найдем:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{n\pi+\delta} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} f(\theta)\,d\theta = \pi\left[\frac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\cdots+f(n\pi)\right] \quad \ldots (29)$$

Для нашей цели важно еще рассмотреть тот случай, когда δ стремится к пределу ∞. Пусть притом $f(\theta)$ такова, что $|f(\theta)|$ представляет монотонную убывающую функцию, такую что ряд:

$$|f(0)|+|f(\pi+\theta)|+|f(2\pi+\theta)|+\cdots \text{ сходящийся} \quad \ldots (30)$$

Как легко видеть в этом случае интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} f(\theta)\,d\theta$ есть интеграл сходящийся.

Для отвлеченности рассмотрим

$$J_k = \int_{k\frac{\pi}{2}}^{k\frac{\pi}{2}+\kappa} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} f(\theta)\,d\theta \quad \text{где } 0<\kappa<\frac{\pi}{2}$$

Интеграл этот можно разложить по следующей схеме:

$$J_k = \int_{k\cdot\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} + \int_{(k+1)\frac{\pi}{2}}^{(k+2)\frac{\pi}{2}} + \cdots + \int_{k_1\frac{\pi}{2}}^{k_1\frac{\pi}{2}+\kappa} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} f(\theta)\,d\theta$$

или, после очевидных преобразований, можно положить J_k равными:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} f\left(k\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} f\left((k+1)\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} f\left((k+2)\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)d\theta + \cdots + \int_0^{\kappa} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} f\left(k_1\tfrac{\pi}{2}+\theta\right)d\theta.$$

Замечая же что $\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ положительно >0 и что $|f(\theta)|$ убывающая монотонная функция находим без труда:

$$|J| < \left|f\left(k\tfrac{\pi}{2}\right)\right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,d\theta + \left|f\left((k+1)\tfrac{\pi}{2}\right)\right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,d\theta + \cdots + \left|f\left(k_1\tfrac{\pi}{2}\right)\right| \int_0^{\kappa} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,d\theta$$

Заменяя теперь интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,d\theta$ его значением из формулы (24) именно через $\frac{\pi}{2}$ и замечая что $\int_0^{\kappa} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,d\theta$

$$|J_k| < \frac{\pi}{2}\left(\left|f\left(k\tfrac{\pi}{2}\right)\right| + \left|f\left((k+1)\tfrac{\pi}{2}\right)\right| + \cdots + \left|f\left(k_1\tfrac{\pi}{2}\right)\right|\right) = \frac{\pi}{2}\varepsilon_k$$

на основании сходимости ряда (30)

заключаем, что ε_k а вместе с тем и $|J_k|$ при достаточно большом k и при всяком $k_1 > k$ будет сколь угодно мало и след. $\int_0^\infty \frac{\sin t\sigma}{\sin\sigma} f(\sigma)\,d\sigma$ = интеграл сходящийся. На этом основании заключаем, что формула (28) или (29) остается справедливой и в предельном случае при $h = \infty$ если только $f(\sigma)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Можем написать ее так:

$$(31)\quad \lim_{m=\infty} \int_0^\infty \frac{\sin t\sigma}{\sin\sigma} f(\sigma)\,d\sigma = \frac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \dots$$

Положим теперь $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\cos nt\,dt$ и рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \dots$$

Можно все интегралы представляющие члены этого ряда объединить подо одним знаком. Найдем тогда:

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \dots =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[1 + 2\cos x\cos t + 2\cos 2x\cos 2t + \dots\right]dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos 2(t-x) + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} + \cos(t+x) + \cos 2(t+x) + \dots\right]dt$$

Принимая во внимание формулу (29) найдем отсюда:

$$(32)\quad \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \dots = \frac{1}{\pi}\left\{\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt + \right.$$
$$\left. + \lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t+x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)} f(t)\,dt\right.$$

Интеграл $U_n = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)} f(t)\,dt$ преобразуем подстановкой: $\frac{1}{2}(t-x) = w$ т. е. $t = x + 2w$; получим тогда:

$$U_n = \int_{-\frac{x}{2}}^{n\pi-\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(x+2w)\,dw =$$

$$= \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(x-2w)\,dw + \int_0^{n\pi-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w} f(x+2w)\,dw$$

Отсюда для случая $\alpha \neq 0$ находим — по формулам (26) и (29) предел первого интеграла (при $n=\infty$) равным $\frac{\pi}{2} f(\alpha)$, а второго $\pi\left\{\frac{1}{2}f(x) + f(2\pi+x) + f(4\pi+x) + \cdots + f[2(n-1)\pi+x]\right\}$ и след.: $\operatorname{пред}_{n=\infty} U_n = \pi\left\{f(\alpha) + f(2\pi+x) + f(4\pi+x) + \cdots + f[2n-1)\pi+x]\right\}$

Если же $\alpha = 0$, то для первого интеграла равен 0, а для второго по формуле (28) получается предел $\pi\left\{\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \cdots + \frac{1}{2}f(2n\pi)\right\}$ и след.: $\operatorname{пред}_{n=\infty} U_n = \pi\left\{\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \cdots + \frac{1}{2}f(2n\pi)\right\}$

аналогично находим — обозначая $\int_0^{2n\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(t+\alpha)} f(t)\,dt$ через V_n

Для $\alpha \neq 0$:

$\operatorname{пред}_{n=\infty} V_n = \pi\left\{-f(2\pi-\alpha) + f(4\pi-x) + \cdots + f(2n\pi-x)\right\}$ и если $x \equiv 0$ то: $\pi\left\{\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \cdots + f[2(n-1)\pi] + \frac{1}{2}f(2n\pi)\right\}$

Формула (32) обращается теперь в следующую:

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \cdots = f(x) + f(2\pi-x) + f(2\pi+x) + f(4\pi-x) + f(4\pi+x) + \cdots + f(2(n-1)\pi+x) + f(2n\pi-x)$$

если $x \neq 0$ и лежит в интервале $(0, \pi)$

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + \cdots = 2\left[\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + \cdots + f(2(n-1)\pi) + \frac{1}{2}f(2n\pi)\right]$$ если $x = 0$

Замечая что $\cos nt = \cos(-n)t$ последнюю формулу приведем к виду:

$$\sum_{n=-n}^{n=+n} \int_0^{2n\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\pi\left\{\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \cdots + f[2(n-1)\pi] + \frac{1}{2}f(2n\pi)\right\} \quad (33)$$

Пусть наконец $A_n = \frac{2}{\pi}\int f(t)\cos nt\,dt$, где $f(t)$ означает функцию удовлетворяющую условиям указанным при выводе формулы (31). Рассмотрим ряд $\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \cdots$. Можно без интегралы представляющие члены

Этого ряда объединить под одним знаком. Найдем тогда:

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \dots =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(t)\left[1 + 2\cos x\cos t + 2\cos 2x\cos 2t + \dots\right]dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(t-u) + \cos 2(t-u) + \dots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} + \cos(t+u) + \cos 2(t+u) + \dots\right]dt$$

Принимая во внимание формулу (33) найдем отсюда:

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \dots$$
$$= \frac{1}{\pi}\left\{\operatorname*{пред}_{n=\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)dt + \operatorname*{пред}_{n=\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)}f(t)dt\right\}$$

Интеграл $U_n = \int_0^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-u)}{2\sin\frac{1}{2}(t-u)}f(t)\,dt$ преобразуем подстановкой: $\frac{1}{2}(t-u) = w$, откуда $t = u + 2w$. Получим тогда:

$$U_n = \int_{-\frac{x}{2}}^\infty \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w}f(x+2w)dw =$$
$$= \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w}f(x-2w)dw + \int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)w}{\sin w}f(x+2w)dw$$

Если x лежит в промежутке $(0,\pi)$ и неравно 0 то к первому из полученных интегралов можно применить формулу (26), а ко второму формулу (31). Предел первого интеграла при $n=\infty$ будет $\frac{1}{2}\pi f(x)$, а второго: $\pi\left\{\frac{1}{2}f(x) + f(2\pi+x) + \dots\right\}$ и следов. $U_\infty = \operatorname*{пред}_{n=\infty} U_n = \pi\left\{f(x) + f(2\pi+x) + \dots\right\}$

Если же $x=0$ то первый интеграл $=0$ и следов.

$$U_\infty = \pi\left\{\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots\right\}.$$

Аналогично найдем: $V_\infty = \operatorname*{пред}_{n=\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t+x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)}f(t)dt =$
$= \pi\left\{f(2\pi-x) + f(4\pi-x) + \dots\right\}$ если $x \neq 0$ и

$V_\infty = \pi\left\{\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots\right\}$ если $x=0$

и следов: $\frac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \dots =$
$= f(x) + f(2\pi-x) + f(2\pi+x) + \dots$ если $x \neq 0$ и

$$\frac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + \dots =$$
$$(34) \quad = 2\left[\frac{1}{2}f(0) + f(2\pi) + f(4\pi) + \dots\right] \text{ если } x = 0$$

Имѣя въ виду доказательство Дирихле разсмотримъ 2 слѣдующіе интеграла $p=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x^2)\,dx$ и $q=\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2)\,dx$.
Прежде всего убѣдимся, что они имѣютъ конечныя опредѣленныя значенія. Преобразовавъ интегралъ p подстановкой $x^2=y$ найдемъ: $p=2\int_0^{\infty}\cos(x^2)\,dx=2\int_0^{\infty}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy$
Разложивъ полученный интегралъ по схемѣ: $p=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}+\ldots+\int_{r\pi+\frac{\pi}{2}}^{r\pi+\frac{3\pi}{2}}+\ldots\right]$, разсмотримъ 2 сосѣдніе интеграла этой схемы $J_r=\int_{r\pi+\frac{\pi}{2}}^{r\pi+\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy$ и $J_{r+1}=\int_{r\pi+\frac{3\pi}{2}}^{r\pi+\frac{5\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sqrt{y}}\,dy$
Подстановкою $y=\pi+\xi$ второй изъ нихъ преобразуется въ слѣдующій: $-\int_{r\pi+\frac{\pi}{2}}^{r\pi+\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sqrt{\pi+y}}\,dy$
откуда ясно, что: $J_r>J_{r+1}$ и кромѣ того что J_r и J_{r+1} разныхъ знаковъ. Съ другой стороны находимъ $|J_r|<\left|\int_{r\pi+\frac{\pi}{2}}^{r\pi+3\pi}\frac{dy}{\sqrt{y}}\right|<\frac{\pi}{\sqrt{r\pi+\frac{\pi}{2}}}$
откуда слѣдуетъ что: $\operatorname{пред}_{r=\infty} J_r=0$.
Итакъ полученное разложеніе для p представитъ собою убывающій знакопеременный рядъ членовъ которыхъ безпрерывно убываютъ по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда и слѣд. p имѣетъ конечное опредѣленное значеніе. Подобнымъ же образомъ докажемъ сходимость интеграла q.
Обозначивъ чрезъ δ величину нѣкотораго угла положимъ $\Delta=p\cos\delta-q\sin\delta$ т. е.
$\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\delta\cos x^2-\sin\delta\sin x^2)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\delta+x^2)\,dx$
Пусть теперь α = нѣкоторая положительная постоянная величина. Замѣнивъ въ послѣднемъ интегралѣ x на $\frac{x}{\alpha}$ найдемъ $\frac{\Delta}{\alpha}=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\delta+\alpha^2x^2)\,dx$ ..... (35)
Обозначивъ чрезъ β другую положи-

тельную постоянную величину полученный интеграл разложимъ следующимъ образомъ:
$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\delta+\alpha^2x^2)dx = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \int_{s\beta}^{(s+1)\beta} \cos(\delta+\alpha^2x^2)dx$
Каждый отдѣльный интегралъ $J_s = \int_{s\beta}^{(s+1)\beta} \cos(\delta+\alpha^2x^2)dx$ преобразуемъ подстановкой: $x = s\beta+\xi$, получимъ:
$J_s = \int_0^{\beta} \cos(\delta+\alpha^2s^2\beta^2+2\alpha^2s\beta x+\alpha^2x^2)dx$.
Постоянныя α и β, которыя до сихъ поръ были совершенно произвольны подчинимъ слѣдующимъ 2мъ условіямъ:
Пусть m = нѣкоторое цѣлое положительное число, положимъ тогда:
$\alpha^2\beta^2 = 2m\pi$, $2\alpha^2\beta = 1$, откуда находимъ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{8m\pi}}$ и $\beta = 4m\pi$. Интегралъ J_s преобразуется теперь въ слѣдующій: $J_s =$
$= \int_0^{\beta} \cos(\delta+sx+\alpha^2x^2)dx = \int_0^{\beta} \cos(\delta+sx+\frac{x^2}{8m\pi})dx =$
$= \int_0^{\beta} \cos(\delta+\frac{x^2}{8m\pi})\cos sx\,dx - \int_0^{\beta} \sin(\delta+\frac{x^2}{8m\pi})\sin sx\,dx$.
Формула (35) принимаетъ теперь такой видъ: $\Delta\sqrt{8m\pi} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \cos(\delta+\frac{x^2}{8m\pi})\cos sx\,dx +$
$- \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \sin(\delta+\frac{x^2}{8m\pi})\sin sx\,dx$. Но такъ какъ $\sin 0.x = 0$ и $\sin(sx) = \sin(-sx)$ то вторая изъ полученныхъ суммъ очевидно равна 0 и слѣд.: $\Delta\sqrt{8m\pi} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_0^{4m\pi} \cos(\delta+\frac{x^2}{8m\pi})\cos sx\,dx$. Отсюда на основаніи формулы (33) находимъ:
(36) $\Delta\sqrt{8m\pi} = 2\pi\{\frac{1}{2}f(0)+f(2\pi)+\dots+f(2[2m-1]\pi)+\frac{1}{2}f(4m\pi)\}$
гдѣ обозначимъ $\cos(\delta+\frac{x^2}{8m\pi})$ черезъ $f(x)$.
Легко видѣть что $f(4m\pi+2s\pi) = f(2s\pi)$ и слѣдовательно: $f(2s\pi)$ можно разсматривать какъ сумму: $\frac{1}{2}f(2s\pi)+$
$+\frac{1}{2}f(4m\pi+2s\pi)$. Принимая это равенство къ членамъ $f(2\pi), f(4\pi), \dots f(2[m-1]\pi)$

вместо формулы (36) получим следующую: $\Delta\sqrt{\vartheta m\pi} = \pi\sum_{s=0}^{4m-1} f(\vartheta s\pi) = \pi\sum_{s=0}^{4m-1}\cos(\delta + s^2\frac{\pi}{2m})$ (36')

Положим теперь $4m = n$ и пусть $\sqrt{n}$ = арифметическое значение $\sqrt{n}$. Тогда найдем: $\Delta\sqrt{n} = \sqrt{\frac{\pi}{q}}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\cos(\delta + s^2\frac{2\pi}{n})$; где: $\Delta = p\cos\delta - q\sin\delta$. Легко определить отсюда p и q. Полагая $n = 4$ находим:

$2(p\cos\delta - q\sin\delta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\delta + \cos(\delta+\frac{\pi}{2}) + \cos(\delta+\pi) + \cos(\delta+\frac{3\pi}{2})\right.$
$\left. + \cos(\delta+\frac{\pi}{2}) + \cos(\delta+\frac{3\pi}{2})\right] = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\delta + \cos(\delta+\frac{\pi}{2})\right] = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\delta - \sin\delta\right]$

или $(p - \sqrt{\frac{\pi}{2}})\cos\delta = (q - \sqrt{\frac{\pi}{2}})\sin\delta$, откуда в силу произвольности угла δ находим $p = q = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Формулу (36) можно на этом основании так переписать

$\sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos\delta - \sin\delta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\cos(\delta + s^2\frac{2\pi}{n})$ или еще

$\cos\delta - \sin\delta = \sum_{s=0}^{n-1}\cos\delta\cos s^2\frac{2\pi}{n} - \sin\delta\sin s^2\frac{2\pi}{n}$,

откуда в виду произвольности угла δ находим

$\sqrt{n} = \sum_{s=0}^{n-1}\cos s^2\frac{2\pi}{n}$ и $\sqrt{n} = \sum_{s=0}^{n-1}\sin s^2\frac{2\pi}{n}$. Умножив второе равенство почленно на i и сложив с первым находим:

$\sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2\cdot\frac{2\pi i}{n}} = (1+i)\sqrt{n}$ т. есть $\varphi(1,n) = (1+i)\sqrt{n}$ (37)

Чтобы распространить эту формулу на другие значения h докажем следующие свойства функции $\varphi(h,n)$.

1) Если $h \equiv h' \pmod n$ то $\varphi(h,n) = \varphi(h',n)$, так как (38)
$e^{s^2\frac{2h\pi i}{n}} = e^{s^2\frac{2h'\pi}{n}}$

2) Если a = число взаимно простое с n (39) то: $\varphi(ha^2,n) = \varphi(h,n)$. Действительно $\varphi(ha^2,n) = \sum_{s=0}^{n-1} e^{(as)^2\frac{2h\pi i}{n}}$. Но когда s пробегает полную систему вычетов по модулю n, as также пробегает полную систему вычетов по модулю n.

(40) 3) Если m и n взаимно простые числа то: $\varphi(hm,n)\varphi(hn,m)=\varphi(h,mn)$. Действительно перемножив почленно равенства: $\varphi(hm,n)=\sum_{r=1}^{n-1} e^{r^2\cdot\frac{2hm\pi i}{n}}$ и $\varphi(hn,m)=\sum_{t=1}^{m-1} e^{t^2\cdot\frac{2hn\pi i}{m}}$ найдем: $\varphi(hm,n)\varphi(hn,m)=$
$=\sum e^{\left(r^2\frac{m}{n}+t^2\frac{n}{m}\right)\cdot 2h\pi i}=\sum e^{\frac{(rm)^2+(tn)^2}{mn}\cdot 2h\pi i}=$
$=\sum e^{\frac{(rm)^2+2rmtn+(tn)^2}{mn}\cdot 2h\pi i}=\sum^{}\frac{(rm+tn)^2}{mn}\cdot 2h\pi i$.

Здесь соответственно значениям $r=0,1,2,\dots,n-1$ и $t=0,1,2,\dots,m-1$ числа $rm+tn$ принимают mn значений попарно несравнимых между собою по модулю mn.

В самом деле, допустив что: $r_1m+t_1n\equiv r_2m+t_2n\pmod{mn}$ или: $(r_1-r_2)m+(t_1-t_2)n\equiv 0\pmod{mn}$ мы имели бы следующие сравнения: $(r_1-r_2)m\equiv 0\pmod n$ и $(t_1-t_2)n\equiv 0\pmod m$ откуда следует что: $r_1\equiv r_2\pmod n$ и $t_1\equiv t_2\pmod m$.

На основании этих соображений находим окончательно: $\varphi(hm,n)\varphi(hn,m)=\sum_{s=1}^{mn-1} e^{s^2\cdot\frac{2h\pi i}{mn}}=\varphi(h,mn)$.

Пусть $n=$ нечетное число. Согласно (40) находим $\varphi(4,n)\varphi(n,4)=\varphi(1,4n)$. Но $\varphi(4,n)=\varphi(1,n)$ согласно (39), $\varphi(n,4)=\sum_{s=0}^{3} e^{s^2\cdot\frac{2n\pi i}{4}}=2(1+e^{\frac{n\pi i}{2}})=2(1\pm i)$ где перед i знак $+$ или $-$ смотря по тому будет $n\equiv 1$, или $\equiv 3\pmod 4$; наконец $\varphi(1,4n)=2(1+i)\sqrt{n}$ согласно формуле (39). (41) Имеем следовательно: $\varphi(1,n)=\frac{1+i}{1\pm i}\sqrt{n}=\sqrt{n}$ или $i\sqrt{n}$ смотря по тому будет ли $n\equiv 1$ или $\equiv 3\pmod 4$.

Для случая же $n\equiv 2\pmod 4$ можно повторить доказательство приведенное при разборе метода Гаусса. Итак мы снова пришли к формуле

14 Определительное Коши

Обращаясь к разысканию доказательства Коши разсмотрим такой определенный интеграл: $U=\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\cos bx\,dx$ где α^2 = некоторое комплексное число. Полагая его равным $\alpha+\beta i$ находимъ:

$U=\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta i)x^2}\cos bx\,dx=\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}(\cos\beta x^2+i\sin\beta x^2)\cos bx\,dx$

Но так как $|e^{-\alpha x^2}(\cos\beta x^2+i\sin\beta x^2)\cos bx|<e^{-\alpha x^2}$ то следовательно: $|U|<\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx$.

Последний же интеграл как извѣстно при $\alpha>0$ равенъ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Итакъ $|U|<\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ т. есть интегралъ U = сходящійся, если только вещественная часть α^2 больше 0.

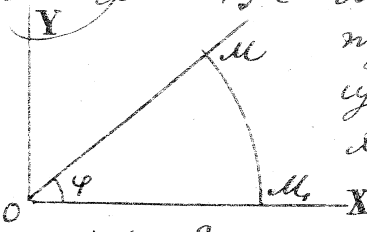
Для опредѣленія значенія этого интеграла воспользуемся методомъ дифференціальныхъ уравненій. Замѣтимъ что интегралъ $V=\int_0^\infty -xe^{-a^2x^2}\sin bx\,dx$ полученный изъ интеграла U дифференцированіемъ по параметру b равномѣрно сходящійся. Дѣйствительно: $\left|\int_u^\infty -xe^{-a^2x^2}\sin bx\,dx\right|<\left|\int_u^\infty xe^{-a^2x^2}dx\right|=\left|-\frac{1}{2a^2}\left[e^{-a^2x^2}\right]_u^\infty\right|=\frac{1}{2a^2}e^{-a^2u^2}$ и слѣдовательно при $u=\infty$ стремится къ предѣлу 0 независимо отъ того какое значеніе имѣетъ параметръ b. Это же и показываетъ что V есть интегралъ равномѣрно сходящійся.

Итакъ интегралъ U сходящійся при всякомъ b, а интегралъ V равномѣрно сходящійся при всякомъ b. Въ такомъ случаѣ какъ извѣстно справедливо равенство: $\frac{dU}{db}=V=\int_0^\infty -xe^{-a^2x^2}\sin bx\,dx=$

~~$-\int_0^\infty \frac{b}{2a^2}e^{-a^2x^2}\sin bx\,dx$~~

$= \int_0^\infty \frac{x}{2a^2} \sin bx \cdot de^{-a^2x^2} = \left[\frac{x}{2a^2} \sin bx\, e^{-a^2x^2}\right]_0^\infty -$
$- \int_0^\infty \frac{b}{2a^2} e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx$. Но: $\left[\frac{x}{2a^2} \sin bx \cdot e^{-a^2x^2}\right]_0^\infty = 0$
и следовательно: $\frac{du}{db} = -\frac{b}{2a^2} u$.
Отсюда разделяя переменные находим:
$\frac{du}{u} = -\frac{b\,db}{2a^2}$, откуда:
(42) $\ln u = -\frac{b^2}{4a^2} + \ln c$ или: $u = Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}}$.

В этой формуле C = постоянная независящая отъ b. Для определенія ея положимъ въ (42) $b = 0$, найдемъ:
$C = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx$. Разсмотримъ теперь интегралъ: $\int e^{-z^2} dz$ взятый по контуру OMM_1, состоящему изъ 2хъ прямыхъ OM и OM_1, уголъ между которыми обозначимъ чрезъ φ и дуги окружности MM_1 радиуса R.



черт. 2

Функція e^{-z^2}, которую можно представить въ видѣ: $e^{-\rho^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)}$, если положить $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ очевидно не имѣетъ полюсовъ на части плоскости, простирающейся въ ∞ всѣ внѣшней прямыми OP и OP_1 (включая и точки, лежащія на этихъ прямыхъ), если только $\cos 2\varphi > 0$. Что бы это было возможно нужно чтобы уголъ φ былъ острый, и слѣд. чтобы было: $\varphi < \frac{\pi}{4}$.

Итакъ при условіи $\varphi < \frac{\pi}{4}$ внутри контура OMM_1 и на обводѣ его функція e^{-z^2} остается цѣлой и слѣд.:
$\int_{OMM_1} e^{-z^2} dz = \int_{OM_1} e^{-z^2} dz + \int_{M_1M} e^{-z^2} dz$.

Первый интегралъ второй части

Этого равенства очевидно равенъ $\int_0^R e^{-x^2} dx$, предѣльное значеніе которо при $R=\infty$ есть $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ равный $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, которой же можно преобразовать подстановкой: $z=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ къ слѣдующему интегралу: $T=\int_0^\varphi e^{-R^2\cos 2\varphi - R\sin\varphi+iR\cos\varphi} d\varphi$. По формулѣ Дарбу: $|T|<e^{-R^2\cos 2\varphi}.R.\varphi$ и такъ какъ $\varphi<\frac{\pi}{4}$ то $\cos 2\varphi>0$ и слѣдов. предѣлъ $T=0$. Итакъ предѣлъ $\int e^{-z^2} dz$ если точка M по направленію сѣкущей OM удаляется въ ∞ получаетъ равный $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Подстановкою $z=\rho a$, гдѣ $a=\cos\varphi+i\sin\varphi$ интегралъ этотъ преобразуемъ въ слѣдующій: $\int_0^R e^{-a^2\rho^2}.a\,d\rho$ и слѣдовательно: предѣлъ $a\int_0^R e^{-a^2\rho^2} d\rho=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ или: $a\int_0^\infty e^{-a^2\rho^2} d\rho=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ и окончательно: $\int_0^\infty e^{-a^2\rho^2} d\rho=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ если $a=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и $\varphi<\frac{\pi}{4}$, а это и есть нужный намъ интегралъ. С. формула (42) приметъ теперь слѣдующій видъ:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \quad (43)$$

Применимъ теперь формулу (34) къ функціи $e^{-a^2x^2}$, гдѣ a^2=нѣкоторое комплексное число съ положительною вещественною частью. Получимъ:

$$\pi\left\{\frac{1}{2}+e^{-a^2(\pi)^2}+e^{-a^2(2\pi)^2}+e^{-a^2(3\pi)^2}+\dots\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx+\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos x\,dx+\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos 2x\,dx+\dots$$

Принимая во вниманіе формулу (43) перепишемъ послѣднее равенство въ такомъ видѣ:

$$\pi\left\{\frac{1}{2}+e^{-1^2\pi a^2}+e^{-4(\pi a)^2}+e^{-9(\pi a)^2}+\dots\right\}=$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-\left(\frac{1}{2a}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a} + e^{-4\left(\frac{1}{2a}\right)^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + e^{-9\left(\frac{1}{2a}\right)^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2a_1} + \dots$$

Положимъ: $2\pi a_1 = \alpha$ и $\frac{1}{2a_1} = \beta$, тогда будетъ

$$\pi\left\{\frac{1}{2} + e^{-\alpha^2} + e^{-4\alpha^2} + e^{-9\alpha^2} + \dots\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left\{\frac{1}{2} + e^{-\beta^2} + e^{-4\beta^2} + e^{-9\beta^2} + \dots\right\}$$

Но такъ какъ: $2a\sqrt{\pi} = \sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta}$,

то формула эта окончательно принимаетъ такой видъ:

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2} + e^{-\alpha^2} + e^{-4\alpha^2} + e^{-9\alpha^2} + \dots\right\} =$$

$$(44) \quad = \beta^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2} + e^{-\beta^2} + e^{-4\beta^2} + e^{-9\beta^2} + \dots\right\}$$

гдѣ β связано съ α такимъ равенствомъ: $\alpha\beta = \frac{2\pi a_1}{2a_1} = \pi$. Формула (44) справедлива въ томъ случаѣ, когда α^2 имѣетъ положительную вещественную часть, такъ какъ формула (43), гдѣ установлена справедлива только въ этомъ случаѣ. Но $a = \frac{\alpha}{\pi}$ и $a^2 = \frac{\alpha^2}{4\pi^2}$, откуда ясно что α^2 имѣетъ тотъ же аргументъ что и a^2; слѣдовательно можемъ сказать теперь что формула (44) справедлива въ томъ случаѣ, когда вещественная часть α^2 положительна.

Положимъ въ формулѣ (44) $a^2 = \alpha^2 - \frac{2\pi i}{n}$ причемъ α^2 означаетъ положительное число весьма малое. Изъ условія $\alpha^2\beta^2 = \pi^2$ слѣдуетъ что β^2 должно отличаться отъ $\frac{\pi}{\frac{2\pi i}{n}}$ часть отъ $\frac{\pi i}{2}$ весьма малую величину. Положимъ $\beta^2 = \beta'^2 + \frac{n\pi}{2}i$. Тогда условіе $\alpha^2\beta^2 = \pi^2$ даетъ намъ: $\alpha^2\beta'^2 - \beta'^2\frac{2\pi i}{n} + \alpha^2\frac{n\pi i}{2} + \pi^2 = \alpha^2\beta^2$ или: $\alpha^2\beta'^2 - \beta'^2\frac{2\pi i}{n} + \alpha^2\frac{n\pi i}{2} = 0$, откуда послѣ простыхъ преобразованій находимъ $\frac{\beta'^2}{n^2\alpha^2} = \left(1 + \frac{n}{2\pi}\alpha^2 i\right)^{-1}$ откуда слѣдуетъ что $\frac{4\beta'^2}{n^2\alpha^2} = \alpha$ слѣд. и $\frac{\beta'}{\alpha}$ стремится

Къ предѣлу 1, когда α стремится къ предѣлу 0. Можемъ написать потому $\frac{2\beta}{n\alpha} = 1+\varepsilon$, или $2\beta = n\alpha(1+\varepsilon)$, гдѣ $\varepsilon = 0$. Обозначимъ $\frac{\pi}{n}$ чрезъ ω, тогда формулу (44) можно такъ переписать

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\Big\{\tfrac{1}{2}+e^{-\alpha^2+\omega i}+e^{-4\alpha^2+4\omega i}+\dots+e^{-(n-1)^2\alpha^2+(n-1)^2\omega i}$$
$$+e^{-n^2\alpha^2}+e^{-(n+1)^2\alpha^2+\omega i}+e^{-(n+2)^2\alpha^2+4\omega i}+\dots+e^{-(2n-1)^2\alpha^2+(n-1)^2\omega i}$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\Big\}$$
$$=\beta^{\frac{1}{2}}\Big\{\tfrac{1}{2}+e^{-\beta^2-\frac{n\pi}{2}i}+e^{-4\beta^2}+e^{-9\beta^2-\frac{n\pi}{2}i}+\dots\Big\}$$

или:

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\Big\{\tfrac{1}{2}+e^{-n^2\alpha^2}+e^{-4n^2\alpha^2}+e^{-9n^2\alpha^2}+\dots+$$
$$+e^{\omega i}\big(e^{-\alpha^2}+e^{-(n+1)^2\alpha^2}+e^{-(2n+1)^2\alpha^2}+e^{-(3n+1)^2\alpha^2}+\dots\big)+$$
$$+e^{2\omega i}\big(e^{-4\alpha^2}+e^{-(n+2)^2\alpha^2}+e^{-(2n+2)^2\alpha^2}+e^{-(3n+2)^2\alpha^2}+\dots\big)+$$
$$+e^{3\omega i}\big(e^{-9\alpha^2}+e^{-(n+3)^2\alpha^2}+e^{(2n+3)^2\alpha^2}+e^{-(3n+3)^2\alpha^2}+\dots\big)+$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+e^{(n-1)^2\omega i}\big(e^{-(n-1)^2\alpha^2}+e^{-(2n-1)^2\alpha^2}+e^{-(3n-1)^2\alpha^2}+e^{-(4n-1)^2\alpha^2}+\dots\big)\Big\}=$$
$$=\beta^{\frac{1}{2}}\Big\{\tfrac{1}{2}+e^{-4\beta^2}+e^{-16\beta^2}+e^{-36\beta^2}+\dots\dots\dots+$$
$$+e^{-\frac{n\pi}{2}i}\big(e^{-\beta^2}+e^{-9\beta^2}+e^{-25\beta^2}+\dots\big)\Big\}$$

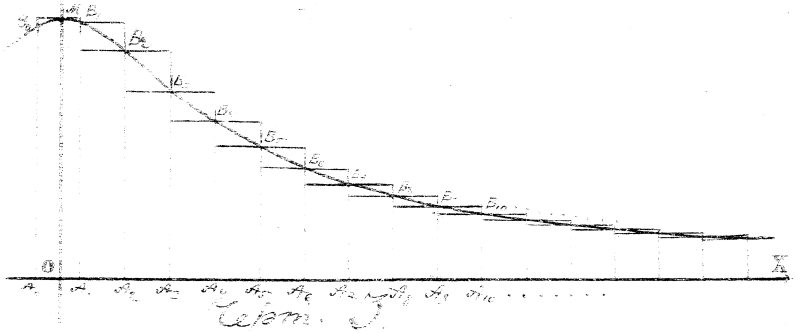
Умноживъ первую часть послѣдняго равенства на $n\alpha$, а вторую на равную ей величину $2\beta/(1+\varepsilon)$, и замѣнивъ ε на $1-\frac{1}{2}$, находимъ:

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\Big\{-\frac{n\alpha}{2}+n\alpha\big(1+e^{-n^2\alpha^2}+e^{-4n^2\alpha^2}+e^{-9n^2\alpha^2}+\dots\big)+$$
$$+e^{\omega i}\cdot n\alpha\big(e^{-\alpha^2}+e^{-(n+1)^2\alpha^2}+e^{-(2n+1)^2\alpha^2}+e^{-(3n+1)^2\alpha^2}+\dots\big)+$$
$$+e^{2\omega i}\cdot n\alpha\big(e^{-4\alpha^2}+e^{-(n+2)^2\alpha^2}+e^{-(2n+2)^2\alpha^2}+e^{-(3n+2)^2\alpha^2}+\dots\big)+$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+e^{(n-1)^2\omega i}\cdot n\alpha\big(e^{-(n-1)^2\alpha^2}+e^{-(2n-1)^2\alpha^2}+e^{-(3n-1)^2\alpha^2}+e^{-(4n-1)^2\alpha^2}+\dots\big)\Big\}=$$
$$=\beta^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)\Big\{-\frac{2\beta}{2}+2\beta\big(1+e^{-4\beta^2}+e^{-16\beta^2}+e^{-36\beta^2}+\dots\dots\big)+$$
$$+e^{\frac{n\pi}{2}i}\big(e^{-\beta^2}+e^{-9\beta^2}+e^{-25\beta^2}+\dots\big)\Big\}$$

Суммы, стоящія въ скобкахъ вида $(\ )$, замѣнимъ на основаніи слѣдующихъ соображеній

Рассмотрим сумму:
$$\Delta x/\ell - (\tau\Delta x)^2/\ell - (\Delta x+\tau\Delta x)^2/\ell - (2\Delta x+\tau\Delta x)^2/\ell - \dots) = S$$
(где $0 \le \tau < 1$)

Будем строить ломаную систему вспомогательных (черт. 1) и по строенной кривой



черт. 1

сопрягающему уравнению $y = e^{-x^2}$.

Так как $y' = -2xe^{-x^2}$ отрицательна для всех значений x внутри промежутка $(0, \infty)$, то y = функция убывающая в этом промежутке, кроме того легко убедиться, что и является наименьшим при $x = \infty$.

Отрежем теперь отношением, соответствующим абсциссам $OA_1 = \Delta x + \tau\Delta x$, $OA_2 = 2\Delta x + \tau\Delta x$, ..., кривую $BB_1B_2\dots$

Построим прямоугольники на A_1A', A_2A_1, ... высотами соответственно A_1B, A_2B_1, ... Сумма площадей этих прямоугольников очевидно больше $1 + \Delta x$, легко видеть, что она больше площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой линией $AB, B_1B_2B_3\dots$, осью Ox и y. Отсюда же это видно аналитически: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Итак $S+\Delta x > \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Строя ~~ломаную~~ прямоугольники
$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ с основаниями
соответственно $A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4, \ldots$
легко убедиться, что $S-\Delta x < \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
и следовательно имеем неравенство
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} < \Delta x < S < \frac{1}{2}\sqrt{\pi}+\Delta x$, откуда тотчас находим: $S = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}+\lambda\Delta x$, где
λ = положительная или отрицательная правильная дробь. Применяя
это равенство к формуле (45)
находим:

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\Big\{-\frac{n\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}+\lambda_1 n\alpha+$$
$$+e^{\omega\omega}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}+e^{\omega\omega}\lambda_0 n\alpha+$$
$$+e^{2\omega\omega}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}+e^{2\omega\omega}\lambda_2 n\alpha+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+e^{(n-1)^2\omega\omega}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}+e^{(n-1)^2\omega\omega}\lambda_n n\alpha=$$
$$=(1+\varepsilon)\beta^{\frac{1}{2}}\Big\{-\frac{n\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}+\mu_1\cdot 2\beta+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\mu_2\cdot 2\beta\Big\}$$

где $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\ \mu_1\mu_2$ положительные или
отрицательные правильные дроби.
Напишем полученное равенство в
следующем виде:

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(1+e^{\omega\omega}+e^{2\omega\omega}+\ldots+e^{(n-1)^2\omega\omega}\right)+$$
$$+\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot n\alpha\left(-\frac{1}{2}+\lambda_1+\lambda_2 e^{\omega\omega}+\lambda_2 e^{2\omega\omega}+\ldots+\lambda_n e^{(n-1)^2\omega\omega}\right)$$
$$=(1+\varepsilon)\beta^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(1+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\right)+2\beta\left(-\frac{1}{2}+\mu_1+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\mu_2\right)\Big\}$$

Полученное равенство имеет место при всяких положительных и отрицательных значениях α и β, если только α и β достаточно малы. Переходя к пределу при $\alpha=0$, $\beta=0$ и замечая, что
$\left|-\frac{1}{2}+\lambda_1+\lambda_2 e^{\omega\omega}+\ldots+\lambda_n e^{(n-1)^2\omega\omega}\right| < \frac{1}{2}+|\lambda_1|+|\lambda_2|+\ldots+|\lambda_n| < n+1$
далее: $\left|-\frac{1}{2}+\mu_1+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\mu_2\right| < \frac{1}{2}+|\mu_1|+|\mu_2| < 3$,

наконец a обращается в $\sqrt{-\frac{2\pi i}{n}}$; b обращается в $\sqrt{\frac{n\pi i}{2}} = b_1$,
и след. формула наша принимает такой вид:
$a_1^{\frac{1}{2}} \varphi(1,n) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = b_1^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(1+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\right)$, или
$\varphi(1,n) = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\right)$; но $a_1 b_1 = \pi$, откуда
$\frac{b_1}{a_1} = \frac{\pi}{a_1^2}$ и след.: $\varphi(1,n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a_1}\left(1+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\right)$ но:
$a_1^2 = -\frac{2\pi i}{n}$ и: $a_1 = \sqrt{-\frac{2\pi i}{n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\frac{(1-i)}{\sqrt{2}} =$
$= \sqrt{\frac{\pi}{n}}(1-i)$, откуда $a_1 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{a_1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\pi}{n}}(1-i)} = \frac{\sqrt{n}(1+i)}{2}$
и след окончательно:
$\varphi(1,n) = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}(1+i)\left(1+e^{-\frac{n\pi i}{2}}\right)$. Полагая
в этой формуле $n \equiv 0,1,2,3 \pmod 4$
снова придем к формулам (18)

Обратимся ко второй части нашего исследования т. есть на основании свойств сумм $\varphi(h,n)$, доказанных нами выведем закон взаимности квадратичных вычетов.

Положим n = простому нечетному числу p. Имеем:

$$\varphi(h,p)=\sum_{s=0}^{p-1}\rho^{hs^2}=1+2\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}}\rho^{hs^2} \quad \ldots\ldots (46)$$

в чем легко убедиться, принимая во внимание что: $s^2\equiv(p-s)^2 \pmod p$

Обозначим через α любой квадратичный вычет модуля p и через β любой квадратичный невычет его, взятые среди чисел $1, 2, \ldots p-1$. Формула (46) принимает тогда следующий вид: $\varphi(h,p)=1+2\sum\rho^{\alpha h} \quad \ldots\ldots$ (46')

Но $\sum(\rho^{h})^{\alpha}+\sum(\rho^{h})^{\beta}+1$ как сумма всех корней уравнения $x^p=1$ равна 0 и следовательно $\sum\rho^{h\alpha}=-1-\sum\rho^{h\beta}$

Принимая во внимание это равенство формулу (46') так перепишем: $\varphi(h,p)=\sum\rho^{\alpha h}-\sum\rho^{\beta h}$ или употребляя обозначение $\left(\frac{s}{p}\right)$: $\varphi(h,p)=\sum_{s=1}^{p-1}\left(\frac{s}{p}\right)\rho^{sh}$

Но $\left(\frac{rs}{p}\right)=\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{s}{p}\right)$ и следовательно $\left(\frac{s}{p}\right)=\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{rs}{p}\right)$ и формула наша примет такой вид: $\varphi(h,p)=\left(\frac{h}{p}\right)\sum_{s=1}^{p-1}\left(\frac{hs}{p}\right)\rho^{hs}$

Заметим теперь пробегает полную систему вычетов по модулю p если s пробегает ее имея в виду $hs=t$: $\varphi(h,p)=\left(\frac{h}{p}\right)\sum_{t=1}^{p-1}\left(\frac{t}{p}\right)\rho^{t}$ т. есть: $\varphi(h,p)=\left(\frac{h}{p}\right)\varphi(1,p) \quad \ldots\ldots$ (46'')

если $h=p$ = простому числу

формулу Эту выведенную нами в предположении что $n=p$ = простому числу, можно распространить на случай какого угодно нечетного n. Положим сначала что $n=$ = некоторая степень простого числа p: $n=p^{2k+1}$, где $q=p$ или 1.

Имеем: $\varphi(h,n)=\sum_{s=0}^{p^{2k}-1} e^{\frac{2\pi i}{p^{2k+1}}hs^2}$. Выделим отсюда члены индексы которых делятся на p^k, найдем тогда: $\varphi(h,n)=(1+p^k+p^{2k}+\dots+p^{2k}(p^{k}-1))\sum_{s=0}^{p^{k+1}-1} e^{\frac{2\pi i}{p^{2k+1}}hs^2}$ где индекс s принимает все значения не делящиеся на p^k. Эти значения для s можно соединить в группы, смотря по тому какой остаток дает s при делении на $p^k q$. Группа соответствующая остатку λ [$\lambda<p^k q$] будет:

$\lambda+pq^k, \lambda+2pq^k, \dots \lambda+(p^k-1)pq^k$.

Соответственно этому будет:

$$\varphi(h,n)=\sum^{p^k q}=\sum_{s=0}^{p^k-1}\sum e^{\frac{2\pi i}{p^{2k+1}}h(\lambda+spq^k)s^2}=$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{p^k-1}\sum_{s=0}^{p^k-1} e^{\frac{2\pi i}{p^{2k+1}}h\lambda^2}e^{\frac{2\pi i}{p}hs\lambda q^k}=\sum_{\lambda=0}^{p^k-1}\frac{1-e^{2\pi i h\lambda p}}{1-e^{\frac{2\pi i}{p}h\lambda q^k}}=0$$

итак $\varphi(h,n)=\sum_{s=0}^{p^{2k}-1} e^{\frac{2\pi i}{p^{2k+1}}hs^2}$

Если $q=1$, то $\varphi(h,n)=\sum_{s=0}^{\sqrt{n}-1} e^{\frac{2\pi i}{n}hs^2}=\sqrt{n}$

в этом случае n, как легко видеть будет формы γ_{n+1} и следовательно согласно формулам (18): $\varphi(1,n)=\sqrt{n}$; кроме того употребляя символ Якоби имеем: $\left(\frac{h}{n}\right)=1$ и следовательно можем написать: $\varphi(h,n)=\left(\frac{h}{n}\right)\varphi(1,n)$ т. е. вся формула (17) распространяется и на этот случай.

положимъ $q=p$, тогда:

$\varphi(h,n)=\sum_{s=0}^{p^{\kappa+1}-1} \rho^{\frac{n}{p}hs^2}$. Числа s разбиваемъ на слѣдующія p^κ группъ:

$0,1,2,3,\dots,p-1;\ p,p+1,p+2,\dots,2p-1,\dots\dots p^{\kappa+1}-p,p^{\kappa+1}-p+1,\dots p^{\kappa+1}-1,$

Соотвѣтственно этому будетъ:

$\varphi(h,n)=\sum_{\lambda=0}^{p^\kappa-1}\sum_{s=0}^{s=p-1}\rho^{\frac{n}{p}h(\lambda p^\kappa+s)^2}=\sum_{\lambda=0}^{p^\kappa-1}\sum_{s=0}^{p-1}\rho^{\frac{n}{p}hs^2}=p^\kappa\sum_{s=0}^{s=p-1}\rho^{\frac{n}{p}hs^2}$

Но $\rho^{\frac{n}{p}}=R=$ первообразный корень уравненія $x^p=1$ и именно: $R=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$.

формула наша принимаетъ видъ:

$\varphi(h,n)=p^\kappa\sum_{s=0}^{s=p-1}R^{hs^2}=p^\kappa\varphi(h,p)=\left(\frac{h}{p}\right)\sqrt{n}$

или употребляя символъ Якоби и принимая во вниманіе что:

$\left(\frac{n}{p}\right)=\left(\frac{n}{p^{\kappa+1}}\right)=\left(\frac{n}{h}\right)$ находимъ: $\varphi(h,n)=\left(\frac{h}{n}\right)\sqrt{n}$

Итакъ формула (48) справедлива если $n=$ простое нечетное число, или любая степень такого числа.

Пусть наконецъ $n=a_1a_2\dots a_\kappa=$ произведенію нечетныхъ взаимно простыхъ множителей, положимъ:

$b_1=a_2a_3a_4\dots a_\kappa$

$b_2=a_3a_4\dots a_\kappa$

$b_{\kappa-1}=a_\kappa$

такъ что $n=a_1b_1$, $b_1=a_2b_2\dots b_{\kappa-1}a_\kappa$.

На основаніи формулы (40) имѣемъ:

$\varphi(h,n)=\varphi\left(h\frac{n}{a_1},a_1\right)\varphi\left(h\frac{n}{a_1},b_1\right)$

$\varphi\left(h\frac{n}{b_1},b_1\right)=\varphi\left(h\frac{n}{b_1}\cdot\frac{b_1}{b_2},b_2\right)\varphi\left(h\frac{n}{b_1}\cdot\frac{b_1}{b_2},a_2\right)=$

$=\varphi\left(h\frac{n}{b_2},b_2\right)\varphi\left(h\frac{n}{a_2},a_2\right)$

$\varphi\left(h\frac{n}{b_2},b_2\right)=\varphi\left(h\frac{n}{b_3},b_3\right)\varphi\left(h\frac{n}{a_3},a_3\right)$

. . . . . .

$\varphi\left(h\frac{n}{b_{\kappa-2}},b_{\kappa-2}\right)=\varphi\left(h\frac{n}{b_{\kappa-1}},b_{\kappa-1}\right)\varphi\left(h\frac{n}{a_{\kappa-1}},a_{\kappa-1}\right)$

$\varphi\left(h\frac{n}{b_{\kappa-1}},b_{\kappa-1}\right)=\varphi\left(h\frac{n}{a_\kappa},a_\kappa\right)$.

Перемножая почленно полу-

Полагая $n=1$ находим:

$$\varphi(h,n)=\varphi\left(h\tfrac{n}{a_1},a_1\right)\varphi\left(h\tfrac{n}{a_2},a_2\right)\varphi\left(h\tfrac{n}{a_3},a_3\right)\cdots\varphi\left(h\tfrac{n}{a_k},a_k\right) \tag{48}$$

Полагая же $h=1$ находим:

$$\varphi(1,n)=\varphi\left(\tfrac{n}{a_1},a_1\right)\varphi\left(\tfrac{n}{a_2},a_2\right)\cdots\varphi\left(\tfrac{n}{a_k},a_k\right) \tag{49}$$

В равенстве (48) каждый множитель (такой части) можно так преобразовать:

$\varphi\left(h\tfrac{n}{a_s},a_s\right)=\left(\tfrac{h\cdot\frac{n}{a_s}}{a_s}\right)\varphi(1,a_s)$; если только каждое a_s представлять простое число или степень его или иначе:

$\varphi\left(h\tfrac{n}{a_s},a_s\right)=\left(\tfrac{h}{a_s}\right)\left(\tfrac{\frac{n}{a_s}}{a_s}\right)\varphi(1,a_s)=\left(\tfrac{h}{a_s}\right)\varphi\left(\tfrac{n}{a_s},a_s\right)$

и следовательно: $\varphi(h,n)=\left(\tfrac{h}{a_1}\right)\left(\tfrac{h}{a_2}\right)\cdots\left(\tfrac{h}{a_k}\right)\varphi\left(\tfrac{n}{a_1},a_1\right)\cdots\varphi\left(\tfrac{n}{a_k},a_k\right)$

т. есть $\varphi(h,n)=\left(\tfrac{h}{n}\right)\varphi(1,n)$ – если пользоваться символом Якоби. Следовательно формула (47) справедлива для всякого целого нечетного n. Въ соединении съ формулами (18) эта формула даетъ средство найти $\varphi(h,n)$ для всякаго цѣлаго нечетнаго n.

Положимъ теперь что:

$n=p_1p_2p_3\cdots p_e\,q_1q_2q_3\cdots q_m$ = произведенію данныхъ простыхъ чиселъ и числа p суть формы $4\nu+1$, а числа q суть формы $4\nu+3$. Имѣемъ по формулѣ (49):

$$\varphi(1,n)=\left(\tfrac{n}{p_1}\right)\varphi(1,p_1)\left(\tfrac{n}{p_2}\right)\varphi(1,p_2)\cdots\left(\tfrac{n}{p_e}\right)\varphi(1,p_e)\cdot$$
$$\left(\tfrac{n}{q_1}\right)\varphi(1,q_1)\cdots\left(\tfrac{n}{q_m}\right)\varphi(1,q_m)=$$
$$=\left(\tfrac{n}{p_1}\right)\left(\tfrac{n}{p_2}\right)\cdots\left(\tfrac{n}{p_e}\right)\left(\tfrac{n}{q_1}\right)\cdots\left(\tfrac{n}{q_m}\right)i^m\sqrt{n}\,.$$

Съ другой стороны: $\varphi(1,n)=i^{m_2}\sqrt{n}$ такъ какъ показатель формулы $4\nu+1$ или $4\nu+3$ смотря по тому будетъ m четное или нечетное.

Следовательно

$$\left(\frac{m}{p_1}\right)\left(\frac{m}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{m}{q_m}\right)=\varepsilon^{m^2-m} \qquad (5'')$$

Но $\varepsilon^{m(m-1)}=+1$ если $m\equiv 0$ или $\equiv 1 \pmod 4$

$=-1$ если $m\equiv 2$ или $\equiv 3 \pmod 4$

и следовательно $\varepsilon^{m^2-m}=(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]}$ где

ε = остаток от деления m на 4

Итак $\left(\frac{m}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{m}{q_m}\right)=(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \qquad (5')$

Из этой теоремы как частный случай следует закон взаимности квадратичных вычетов сложных чисел

$m=a_1 a_2$ тогда формула (5') даёт

$$\left(\frac{m}{a_1}\right)\left(\frac{m}{a_2}\right)=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]}=-1$$

Этот случай может быть только тогда если $m=2$, т. е. оба числа a_1 и a_2 формы $4n+3$.

Следовательно можем написать

$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=(-1)^{\frac{a_1-1}{2}\cdot\frac{a_2-1}{2}}$, а это равенство верно при a_1 и a_2 простых и выражает закон взаимности квадратичных вычетов.

Таким путём легко доказать теорему о числе $\left(\frac{-1}{p}\right)$ и $\left(\frac{2}{p}\right)$. Именно:

$\varphi(-1,p)=\left(\frac{-1}{p}\right)\varepsilon^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{p}$

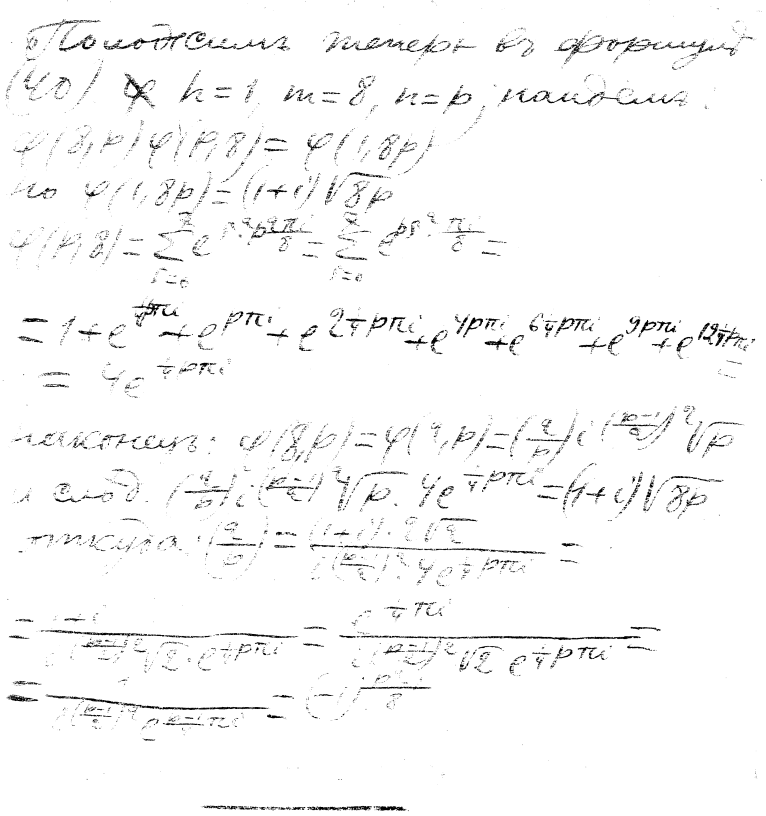
по нашей формуле: $\varphi(-1,p)=\sum\varepsilon^{k^2\cdot\frac{2\pi(-1)}{p}}$

Следовательно что $\varphi(-1,p)$ остаётся инвариантным если p заменить на p и через (-1) т. е. если

$\varphi(-1,p)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\varepsilon^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{p}$ и потому

$\left(\frac{-1}{p}\right)\varepsilon^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{p}=(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}$

откуда $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 514.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-87-98

О проблеме сопряженности слов в некотором классе подгрупп групп Артина[1]

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя

Безверхний Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Безверхняя Наталия Борисовна — кандидат физико-математических наук, Академия гражданской защиты МЧС России (г. Москва).
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Аннотация

Одной из основных проблем в комбинаторной теории групп является проблема равенства и сопряжённости слов. Известно, что в классе конечноопределенных групп данная проблема алгоритмически неразрешима. Возникает задача изучения данных проблем в определенных классах групп, а также, наследуют ли подгруппы данного класса групп алгоритмическую разрешимость проблемы сопряженности слов.

Д. Коллинзом и К. Миллером была определена группа с разрешимой проблемой сопряженности слов, содержащая подгруппу конечного индекса, в которой не разрешима проблема сопряженности слов. А также построена группа с неразрешимой проблемой сопряженности слов, содержащая подгруппу конечного индекса с разрешимой проблемой сопряженности слов.

Э. Артином были определены группы кос и им же было доказано, что в группах кос алгоритмически разрешима проблема равенства слов. А.А. Марков построил алгебраическую теорию групп кос и передоказал, используя построенную теорию, проблему равенства слов.

Ф. Гарсайд доказал разрешимость проблемы сопряженности слов в группах кос $\mathfrak{B}_{n+1}$. Э. Брискорн и К. Сайто, используя идеи Ф. Гарсайда, доказали разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа. Известно, что данному классу групп принадлежат группы кос.

Интерес представляет исследование разрешимости данной проблемы в подгруппах групп данного класса групп, в частности, в нормальном делителе, порожденном квадратами образующих группы называемой крашенной подгруппой данной группы.

В [1] доказано, что в крашенной подгруппе групп Артина конечного типа проблема сопряженности слов разрешима.

Известно, что в группах Артина с древесной структурой проблема сопряженности слов также разрешима. [2]. В данной статье доказывается, что крашенные подгруппы групп Артина с древесной структурой наследуют свойство положительной разрешимости проблемы сопряженности слов.

Ключевые слова: Группы Артина, крашенная подгруппа, проблема сопряженности слов.

Библиография: 12 названий.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-41-710002_р_а.

Для цитирования:
В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя. О проблеме сопряженности слов в некотором классе подгрупп групп Артина // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 87–98.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 514.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-87-98

On the problem of conjugacy of words in a certain class of subgroups of Artin groups

V. N. Bezverkhnii, N. B. Bezverkhnyaya

Bezverkhnii Vladimir Nicolaevich — professor, doctor of physical and mathematical sciences, Academy of Civil Protection of the Ministry of Emergency Situations of Russia (Moscow).
e-mail: vnbezv@rambler.ru
Bezverkhnyaya Natalia Borisovna — candidate of physical and mathematical sciences, Academy of Civil Protection of the Ministry of Emergency Situations of Russia (Moscow).
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Abstract

One of the main problems in combinatorial group theory is the problem of equality and conjugacy of words. It is known that this problem is algorithmically unsolvable in the class of finitely defined groups. The problem arises of studying these problems in certain classes of groups, as well as whether subgroups of this class of groups inherit the algorithmic solvability of the word conjugacy problem.

D. Collins and K. Miller defined a group with a solvable word conjugacy problem containing a subgroup of finite index in which the word conjugacy problem is not solvable. We also construct a group with an unsolvable word conjugacy problem containing a subgroup of finite index with a solvable word conjugacy problem.

E. Artin defined braid groups and proved that the problem of word equality is algorithmically solvable in braid groups. A. A. Markov constructed an algebraic theory of braid groups and re-proved, using the constructed theory, the problem of word equality.

F. Garside proved that the conjugacy problem of words in braid groups B_(n+1) is solvable. Saito, using the ideas Of F. Garside, proved the solvability of the problem of equality and conjugacy of words in Artin groups of finite type. It is known that this class of groups belongs to braid groups.

The interest is to study the solvability of this problem in subgroups of the class groups, in particular, in the normal divisor generated by the squares forming a group called painted subgroup of this group.

In [1] it is proved that in a colored subgroup of Artin groups of finite type, the word conjugacy problem is solvable.

It is known that in Artin groups with a tree structure, the word conjugacy problem is also solvable. [2]. In this paper, we prove that colored subgroups of Artin groups with a tree structure inherit the property of positive solvability of the word conjugacy problem.

Keywords: Artin groups, colored subgroup, word conjugation problem.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
V. N. Bezverkhnii, N. B. Bezverkhnyaya, 2021, “On the problem of conjugacy of words in a certain class of subgroups of Artin groups”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 87–98.

1. Введение

В комбинаторной теории групп основными алгоритмическими проблемами являются проблемы равенства и сопряженности слов. Если в группе разрешима проблема сопряженности слов, то будет ли она разрешима в подгруппах данной группы? Д. Коллинзом и К. Миллером было доказано, что существуют группы с разрешимой проблемой сопряженности слов, содержащие подгруппу конечного индекса, в которой проблема сопряженности неразрешима. И наоборот, существуют группы, в которых в подгруппах конечного индекса разрешима проблема сопряженности слов, а в самих группах неразрешима. Для групп Артина конечного типа в было доказано, что крашеные подгруппы, то есть нормальные подгруппы, порожденные квадратами образующей группы, наследуют свойства сопряжённости слов групп.

В данной статье авторами доказывается, что крашеные подгруппы групп Артина с древесной структурой наследуют свойство разрешимости проблемы сопряженности слов.

2. Группы Артина с двумя образующими

Группа Артина определяется конечной системой образующих: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ и системой определяющих соотношений: $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}$, где $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i\ldots$ – слово, из чередующихся образующих σ_i, σ_j длины m_{ij}, m_{ij}– элемент симметрической матрицы Кокстера $M = (m_{ij})\, i, j \in \overline{1,n}, m_{ii} = 1$ для всех $i \in \overline{1,n}$ при $i \neq j, m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}, m_{ij} = \infty$ — означает, что соотношение с образующими σ_i, σ_j отсутствует.

Копредставление группы Артина имеет вид:

$$G = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1,n} \right\rangle \tag{1}$$

Поставим в соответствие группе G конечный граф Γ, каждой вершине v_i которого ставится в соответствие образующий σ_i группы G, а ребру, соединяющему вершины v_i, v_j – элемент $m_{ij} \in M$, причем, если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то паре соответствует $m_{ij} = \infty$.

Такой граф называется графом Кокстера, а соответствующая ему группа Артина имеет копредставление (1) и обозначается G_Γ.

С каждой группой Артина G_Γ связана группа Кокстера $\overline{G}_\Gamma$. Если группа $\overline{G}_\Gamma$ конечна, то группа G_Γ называется группой Артина конечного типа. Данный класс групп содержит группы кос $\mathcal{B}_{n+1}$, в которых Ф. А. Гарсайдом в 1969 г. была решена проблема сопряженности слов. [3]

Э. Брискорном и К. Сайто была доказана разрешимость проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа. [4]

П. Шупп и К. Аппель определили широкие классы групп Артина большого ($m_{ij} \geqslant 3$) и экстрабольшого типа ($m_{ij} > 3$).[5]

Для групп экстрабольшого типа, используя диаграммный метод, ими была решена проблема равенства и сопряженности слов. [5]

В работах [6], [7] авторами независимо были решены проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина большого типа.

В [8] были определены группы Артина с древесной структурой.

Определение 1. *Группа Артина G_Γ называется группой Артина с древесной структурой, если соответствующий ей граф Γ, является дерево-графом.*

В группах Артина с древесной структурой числа Кокстера m_{ij} при $i \neq j$, принимают любые значения $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$.

Для описания строения диаграмм, соответствующих равенству и сопряженности слов в группе Артина с древесной структурой нам, понадобятся следующие леммы:

Лемма 1. *[5] Если* $G_{ab} = \langle a,\ b; \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$ *группа Артина,* w *— нетривиальное слово в свободной группе, и равно* w *единице в* G_{ab}*, то* $\|w\| \geqslant 2m_{ab}$.

($\|w\|$ — слоговая длина слова w в группе, являющейся свободным произведением циклических групп $\langle a\rangle, \langle b\rangle$).

Лемма 2. *[5] Пусть* $w \in G_{ab}, w = w_1w_2$, w *— нетривиальное свободно приведенное слово, равное единице в* G_{ab}*. Тогда*

а) если $\|w_1\| \leqslant m_{ab}$,*то* $\|w_1\| \leqslant \|w_2\|$,

б) если $\|w_1\| < m_{ab}$,*то* $\|w_1\| < \|w_2\|$.

Лемма 3. *[9] Пусть* $G_{ab} = \langle a,\ b; \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$ *— группа Артина,* $w \in G_{ab}, w$ *— циклически несократимое слово в свободной группе и имеет слоговую длину, равную* $2m_{ab}$ *и равно единице в* G_{ab}.

Тогда, если $m_{ab} = 2k+1$, *то* w *имеет вид:*

а) $a^mba\dots ab^{-m}a^{-1}\dots b^{-1}$ *либо*

б) $ab\dots a^mb^{-1}\dots b^{-m}$, *либо*

обратные им, либо их циклические перестановки;

если $m_{ab} = 2k$, *то* w *имеет вид:*

а) $a^mba\dots ba^{-m}b^{-1}\dots b^{-1}$ *либо*

б) $ab\dots b^ma^{-1}b^{-1}\dots b^{-m}$, *либо*

обратные им, либо их циклические перестановки, $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

3. Доказательство основного результата

Пусть $w = v$ в группе Артина G с древесной структурой, то есть $wv^{-1} = 1$ в G.

Из теоремы ван-Кампена следует, что равенству $wv^{-1} = 1$ в G соответствует диаграмма M, $\partial M = \gamma\delta$,где $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v^{-1}$,с областями, метки которых есть определяющие соотношения группы G.

Будем говорить, что диаграмма M R-приведена, если для любых двух областей $D, D^{'}$, имеющих общее ребро, их метки принадлежат разным группам $G_{ab}, G_{a'b'}$ где $a = a^{'}$ либо $b = b^{'}$.

Диаграмма M с границей $\partial M = \gamma\delta$ называется однослойной, если любая область $D \subset M$ имеет непустое пересечение как с γ так и с δ, то есть $\partial D \cap \gamma \neq \emptyset, \partial D \cap \delta \neq \emptyset$.

Через $d(D)$ обозначим число ребер, на которые соотношение $\phi(D)$ разбивает границу D, при этом, меткой каждого ребра является некоторая степень образующего группы, двум соседним ребрам соответствуют степени с разными основаниями.

Обозначим через $\|\varphi(D)\|$ слоговую длину метки области D, равную числу ребер в D.

Пусть $\gamma_1 = \partial D \cap \gamma$, тогда $|\gamma_1|$ есть число ребер пути γ_1, равное числу слогов метки $\varphi(\gamma_1), |\gamma_1| = \|\varphi(\gamma_1)\|$

Область D назовем граничной областью с $\gamma(\delta)$, если $\partial D \cap \gamma \neq \emptyset, (\partial D \cap \delta \neq \emptyset)$.

Граничная с $\gamma(\delta)$ область D называется деновской, если $|\partial D \cap \gamma| > |\partial D\backslash(\partial D \cap \gamma)|$, то есть $\|\varphi(\partial D \cap \gamma)\| > \|\varphi(\partial D\backslash(\partial D \cap \gamma))\|$.

Аналогично определяется деновская область вдоль границы δ диаграммы M. Пусть D — деновская область диаграммы M вдоль границы γ. Тогда удаление пути $\gamma_1 = \partial D \cap \gamma$, то есть, замена пути $\gamma = \gamma_0\gamma_1\gamma_0^{'}$ границы ∂M путем $\gamma^{'} = \gamma_0(\partial D\backslash\gamma_1)^{-1}\gamma_0^{'}$ назовем деновским сокращением слоговой длины $\varphi(\gamma)$ при этом метка $\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma_0)\varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_0^{'})$ заменяется меткой $\varphi\left(\gamma^{'}\right) = \varphi(\gamma_0)\left(\varphi(\partial D\backslash\gamma_1)\right)^{-1}\varphi\left(\gamma_0^{'}\right), \varphi(\gamma) = \varphi(\gamma')$ в группе G.

Определение 2. *[7],[9]. Поддиаграмма* $\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ *— образует полосу в R-приведенной диаграмме M вдоль граничного пути* $\gamma, \partial M = \gamma\delta^{-1}$, *если:*

1. $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n, \partial D_i \cap \gamma = \gamma_i$, *где* γ_i *правильная часть граничного цикла* ∂M;

2. $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n-1, \partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i, e_i$*– ребро;*

3. $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \cap \gamma)|, |\boldsymbol{\partial D_n \cap \gamma}| = |\boldsymbol{\partial D_n} \backslash (\boldsymbol{\partial D_n \cap \gamma})|$

4. $\forall j, 2 \leqslant j \leqslant n-1, |\partial D_j \cap \gamma| + 2 = |\partial D_j \backslash (\partial D_j \cap \gamma)|$

5. $\partial П \cap \partial M$ *– правильная часть в граничном цикле* ∂M.

Определение 3. *Удаление из граничного цикла* ∂M *пути* $\partial П \cap \gamma$ *назовем* R^**– сокращением границы* ∂M.

Определение 4. *Пусть* M *— связная, односвязная,* R *— приведенная диаграмма над группой Артина* G *с древесной структурой, где* $\partial M = \gamma\delta^{-1}$ *граничный цикл* M *с* $\varphi(\gamma)\varphi^{-1}(\delta) = 1$ *в* G.

Тогда под R^* будем обозначать сокращение $\varphi(\partial M)$ вдоль γ состоящее в замене слова $\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma_0)\varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_0^{'})$,
где $\varphi(\gamma_1) = \varphi(\gamma \cap \partial П)$, словом $\varphi(\gamma') = \varphi(\gamma_0)(\varphi(П \backslash (\gamma \cap \partial П))^{-1}\varphi\left(\gamma_0^{'}\right)$,где П – полоса диаграммы M вдоль границыγ.

Аналогично определяется R^*вдоль границы δ.

Лемма 4. *Пусть* M *— связная, односвязная,* R *— приведенная диаграмма над группой Артина* G *с древесной структурой, соответствующая равенству слов* $w = v$ *в* G; $\partial M = \gamma\delta^{-1}, \varphi(\gamma) = w, \varphi(\delta) = v$, *слова* w, v *–* R *несократимы. Тогда диаграмма* M *не содержит внутренних вершин и является однослойной.*

Доказательство. Пусть в M содержится внутренняя вершина v. Тогда существует по меньшей мере три ребра e_1, e_2, e_3, выходящие из v.

а) Пусть $\varphi(e_i) \neq \varphi(e_j)$ при $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}$, нетрудно убедиться в том, что это противоречит тому, что граф Γ группы G есть дерево-граф.

б) Пусть метки всех ребер: $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ выходящих из внутренней вершины v являются степенями одного образующего a.

Рассмотрим области $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$имеющие общую вершину$v$. Так как диаграмма M R – приведена, то метки областей $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$ различны. Пусть $D_1 \cap D_2 = e_2, D_2 \cap D_3 = e_3, \ldots, D_{n-2} \cap D_{n-1} = e_{n-1}, D_{n-1} \cap D_n = e_n, D_n \cap D_1 = e_1, \varphi(e_1) = a^{\alpha_1}, \varphi(e_2) = a^{\alpha_2}, \varphi(e_n) = a^{\alpha_n}$.

Тогда

$$\varphi(D_1) = a^{\alpha_n}\varphi(\gamma_1)\, a^{\alpha_1}, \varphi(D_2) = a^{\alpha'_1}\varphi(\gamma_2)\, a^{\alpha_2}, ..., \varphi(D_n) = a^{\alpha'_n}\varphi(\gamma_n)\, a^{\alpha'_1}$$

Очевидно, что концы каждого пути $\gamma_i \subset \partial D_i$ принадлежат ∂M, в противном случае, если одна из концевых вершин пути γ_i будет внутренней точкой, то из нее будут выходить минимум три ребра с разными метками, что невозможно.

Рассмотрим поддиаграмму M_i диаграммы M, $\partial M_i = \overline{\gamma}_i\gamma_i^{-1}$, где $\overline{\gamma}_i \subset \partial M, \overline{\gamma}_i$ соединяет концевые вершины v_i, v_{i+1} пути γ_i.

Так как $|\gamma_j| \geqslant 3$ и M — R-приведена, то вершины пути γ_i являются внутренними вершинами диаграммы M, что невозможно, поэтому $\overline{\gamma}_i \equiv \gamma_i$, но тогда ∂M R-сократима.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* wuv *– циклически* R *несократимые слова группы Артина* G *с древесной структурой. Тогда кольцевая диаграмма* M, *соответствующая сопряженности слов* wuv *в* G, *где* γ *и* δ *граничные циклы* M, $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\delta) = v$, *является однослойной.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 6. *[9] Пусть G — группа Артина с древесной структурой, и пусть степень образующего a^m сопряжена с w в G, где w — циклически, R и R^* несократимо. Тогда w есть степень некоторого образующего b^kпричем $m = k$.*

Лемма 7. *Пусть $G_{ab} = \langle a, b; \langle ab\rangle^{m_{ab}} = \langle ba\rangle^{m_{ba}}\rangle$. Если $m_{ab} = 2k$, то для любого $z \in G_{ab}$ соотношение $za^m z^{-1} = b^m$не имеет места, $m \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $m_{ab} = 2k$, тогда группа $G_{ab} = \left\langle a, b; \langle ab\rangle^{2k} = \langle ba\rangle^{2k}\right\rangle$ изоморфна группе $G = \left\langle x, y; y^{-1}x^k y = x^k\right\rangle$ определяемой отображением $\varphi : a \to y, b \to xy^{-1}$.[7]

Допустим, что в группе G_{ab} имеет место равенство $za^m z^{-1} = b^m$, тогда в группе G $\varphi(z)\,\varphi(a^m)\varphi(z)^{-1} = \varphi(b^m)$ и $\varphi(a)^m = y^m, \varphi(b)^m = xy^{-1}xy^{-1}\dots xy^{-1}$. Данные слова в группе G не сопряжены (лемма Бритона).

Лемма доказана.

Лемма 8. *[2], [9]. Пусть G – конечнопорожденная группа Артина с древесной структурой. Слова w и v, слоговые длины которых $\|w\| = \|v\| = 1$, сопряжены в G тогда и только тогда, когда существует ломаная, графа Γ, соединяющая вершины, соответствующие данным образующим группы и каждому из ребер, выделенного пути, соответствует соотношение с нечетным числом Кокстера m_{ij}и слово z сопрягающее w в v будет произведением кусков z_i определяющих соотношений группы, каждое из которых соответствует данному ребру, $\|z_i\| = m_{ij} - 1$.*

Лемма 9. *Централизатор образующего группы Артина с древесной структурой конечнопорожден.*

Доказательство.

Пусть Γ дерево-граф группы G, каждой вершине которого поставлен в соотвествие образующий G, а ребру соответсвующему σ_i, σ_j число Кокстера m_{ij}, которое соответсвует определяющее соотношение $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^{m_{ij}} = \langle\sigma_j\sigma_i\rangle^{m_{ji}}$.

Рассмотрим путь γ_{k+1} в Γ, выходящий из σ_1 с вершинами, которые для простоты рассуждения запишем как $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k, \sigma_{k+1}$, в котором всем ребрам $(\sigma_i, \sigma_{i+1}), i \le j \le k$, соответствуют нечётные числа Кокстера $m_{ii+1} = 2k_i + 1$, а ребру (σ_k, σ_{k+1}) — четное число $m_{kk+1} = 2k$, если оно содержится в Γ.

Каждому ребру $(\sigma_i, \sigma_{i+1}), i = \overline{1,k}$ поставим в соответствие кусок z_i определяющего соотношения $\langle\sigma_i\sigma_{i+1}\rangle^{m_{ii+1}} = \langle\sigma_{i+1}\sigma_i\rangle^{m_{i+1i}}, z_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\cdots\sigma_i, |z_i| = m_{i,i+1} - 1$, введем в рассмотрение $\overline{z_i} = \sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{i+1}, |\overline{z_i}| = m_{i,i+1} - 1$ — являющийся кускрм указанного определяющего соотношения.

Легко проверить, что слова $z^{(p)}(\sigma_1\sigma_s\sigma_i) = z_1 z_2\cdots z_{s-1}(z_s\cdots z_i\sigma_{i+1}^m\overline{z_i}\cdots\overline{z_s})^p\overline{z_{s-1}}\cdots\overline{z_1}$ при любых $1 \le i \le k, 1 < s \le i, m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}$, принадлежат центнрализатору элемента σ_1. Варьируя в $z^{(p)}(\sigma_1\sigma_s\sigma_i)$ параметры s, p можно получить слова

$z^{(0)}(\sigma_1, \sigma_i) = z_1 z_2\cdots z_i\overline{z_i}\cdots\overline{z_1}$;

$z^{(1)}(\sigma_1, \sigma_i) = z_1 z_2\cdots z_i\sigma_{i+1}\overline{z_i}\cdots\overline{z_1}$;

$z^1(\sigma_1, \sigma_s, \sigma_i) = \overline{z_1}^{-1}\cdots\overline{z_{s-1}}^{-1}(z_s\cdots z_i\sigma_{i+1}\overline{z_i}\cdots\overline{z_s})\overline{z_{s-1}}\cdots\overline{z_1}$

$\overline{z^1}(\sigma_1, \sigma_s, \sigma_i) = z_1\cdots z_{s-1}(z_s\cdots z_i\sigma_{i+1}\overline{z_i}\cdots\overline{z_s})z_{s-1}^{-1}\cdots z_1^{-1}$;

$z(\sigma_1, \sigma_i) = z_1\cdots z_i\sigma_{i+1}z_i^{-1}\cdots z_1^{-1}$

$\overline{z}(\sigma_1, \sigma_i) = \overline{z_1}^{-1}\cdots\overline{z_i}^{-1}\sigma_{i+1}\overline{z_i}\cdots\overline{z_1}$

К данному множеству слов нужно добавить слова $z^{(1)}(\sigma_1\sigma_s, \sigma_i), \overline{z^{(1)}}(\sigma_1\sigma_s, \sigma_i)$ при $1 < s \le i$. Слова $z(\sigma_1, \sigma_i), \overline{z}(\sigma_1, \sigma_i)$ равны σ_1 в группе G.

Подгруппу, порожденную данным множеством слов, соответствующую пути γ_i, выходящего из σ_1 и входящего в σ_i, обозначим $H(\sigma_1, \sigma_i)$,

$$H(\sigma_1, \sigma_i) < C_G(\sigma_1).$$

Пути γ_{k+1}, оканчивающегося ребром (σ_k, σ_{k+1})

С числом Коксетера $m_{k,k+1} = 2k$, и соответствующим ему куском z_{k+1} определяющего соотношения: $\langle \sigma_k \sigma_{k+1} \rangle^{m_{k,k+1}} = \langle \sigma_{k+1}, \sigma_k \rangle^{m_{k+1,k}}$, где $z_{k+1} = \sigma_{k+2}\sigma_{k+1}\sigma_{k+2} \cdots \sigma_{k+2}, |z_{k+1}| = m_{k,k+1} - 1$, соответствует подгруппа $H(\sigma_1 \sigma_{k+1})$, к которой кроме образующих

$z^{(1)}(\sigma_1, \sigma_{k+1}) = z_1 z_2 \cdots z_{k+1} \sigma_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_1}$;

$z^{(0)}(\sigma_1, \sigma_{k+1}) = z_1 z_2 \cdots z_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_1}$;

$z(\sigma_1, \sigma_{k+1}) = z_1 \cdots z_{k+1} \sigma_{k+1} z_{k+1}^{-1} \cdots z_1^{-1}$

$\overline{z}(\sigma_1, \sigma_{k+1}) = \overline{z_1}^{-1} \cdots \overline{z_{k+1}}^{-1} \sigma_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_1}$

Нужно добавить образующие

$z^1(\sigma_1, \sigma_s, \sigma_{k+1}) = \overline{z_1}^{-1} \cdots \overline{z_{s-1}}^{-1} (z_s \cdots z_{k+1} \sigma_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_s}) \overline{z_{s-1}} \cdots \overline{z_1}$;

$\overline{z^1}(\sigma_1, \sigma_s, \sigma_{k+1}) = z_1 \cdots z_{s-1} (z_s \cdots z_{k+1} \sigma_{k+1} \overline{z_{k+1}} \cdots \overline{z_s}) z_{s-1}^{-1} \cdots z_1^{-1}$,

где $1 < s \leq k+1$. Слова $z(\sigma_1, \sigma_{k+1}), \overline{z}(\sigma_1, \sigma_{k+1})$ равны σ_1 в группе G.

Отметим, что для продолжения пути $\gamma_k \subset \Gamma$, нужно начинать из вершины σ_k, так как слово $z(\sigma_1, \sigma_{k+2}) \notin C_G(\sigma_1)$

Подгруппы $H(\sigma_1, \sigma_j), 1 \leq j \leq n$, ($n$ — число вершин графа Γ) соответствующие всем путям, выходязим из вершины σ_1 графа Γ группы G, образующей свободное произведение подгруппы объединенных по циклической подгруппе $\langle \sigma_1 \rangle$. Обозначим эту подгруппа $H(\sigma_1)$, которая будет иметь копредставление

$$H(\sigma_1) = \prod_{j=1}^{n} * \langle H(\sigma_1, \sigma_j); \sigma_1 = \sigma_1 \rangle.$$

Очевидно, $H(\sigma_1) < C_G(\sigma_1)$. Нетрудно показать, что любое $w \in C_G(n)$ принадлежит $\langle \sigma_1 \; rangle \times H(\sigma_1)$, для этого необходимо использовать структуры образующих подгруппы $H(\sigma_1)$ и конечность графа Γ.

Таким образом

$$C_G(\sigma_1 = \langle \sigma_1 \rangle \times \prod_{j=1}^{n} * \langle H(\sigma_1, \sigma_j); \sigma_1 = \sigma_1 \rangle$$

Отсюда следует, что централизатор $C_G(\sigma_1)$ — конечнопорожден. Лемма доказана.

Пусть w, v — циклически, R и R^* несократимы в G и пусть w сопряжено v в G. Тогда существует кольцевая диаграмма сопряженности M с граничными циклами γ, δ, такими, что $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\sigma) = v^{-1}$.

Из леммы 5 следует, что диаграмма сопряженности слов является однослойной.

Пусть $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_s$- последовательность областей, образующих данную диаграмму M, и пусть для любого $s, 1 \leqslant s < n, D_s \cap D_{s+1} = e_s, D_n \cap D_1 = e_n$, и $\varphi(e_s) = a_j^{k_{sj}}$, где a_j−образующий группы G.

Параметром кольцевой диаграммы M называется число, ограничивающее абсолютные величины показателей степеней меток внутренних ребер диаграммы M.

Лемма 10. *Пусть w, v — циклически, R и R^* несократимы сопряжены в G (G — с древесной структурой). Тогда $|w| = |v|$.*

При доказательстве непосредственно используется лемма 3.

Обозначим через L замкнутый простой цикл кольцевой однослойной диаграммы M с граничными цикламиγ, δ.

Покажем, что параметр p кольцевой диаграммы сопряженности слов w, v не превосходит c, где c – максимальный по абсолютной величине показатель степени образующего, содержащегося в словах w, v.

Пусть D_i область M и $\varphi(D_i)$ ее метка.

1. Допустим, что $\|\partial D_i \cap \gamma\| = \|\partial D_i \cap \delta\|$, тогда

   i) если $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = \varphi(\gamma_i) a_\alpha^k$, либо $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = \varphi(\gamma_1) a_\alpha^m \varphi(\gamma_2)$, либо $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = a_\alpha^m \varphi(\gamma_2)$, то $|\varphi(e_{i-1})| = |\varphi(\partial D_{i-1} \cap \partial D_i)| = |\varphi(\partial D_i \cap \partial D_{i+1})| = |\varphi(e_{i-1})| = 1$

   ii) если $|\varphi(\partial D_{i-1} \cap \partial D_i)| = k$, то $|\varphi(\partial D_i \cap \partial D_{i+1})| = k$

2. Допустим, что $\|\partial D_i \cap \gamma\| = \|\partial D_i \cap \delta\| + 2$, $(\|\partial D_i \cap \delta\| = \|\partial D_i \cap \gamma\| + 2)$;

   iii) если $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = \varphi(\gamma_i) a_\alpha^k$,$(\varphi(\partial D_i \cap \delta) = \varphi(\delta_i) a_\alpha^k)$, то $|\varphi(e_{i-1})| = |\varphi(\partial D_{i-1} \cap \partial D_i)| = k$, аналогично, если $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = a_\alpha^k \varphi(\gamma_2)$, $(\varphi(\partial D_i \cap \delta) = a_\alpha^k \varphi(\delta_2))$, то $|\varphi(e_i)| = |\varphi(\partial D_i \cap \partial D_{i+1})| = k$;

   iv) если $\varphi(\partial D_i \cap \gamma) = \varphi(\gamma_1) a_\alpha^k \varphi(\gamma_2)$, либо $\varphi(\partial D_i \cap \delta) = \varphi(\delta_1) a_\beta^k \varphi(\delta_2)$ метки ребер $e_{i-1}, e_i : \varphi(e_{i-1}) = \varphi(e_i) = 1$.

Заметим, что в случае (ii), если все внутренние ребра $\varphi(e_i), i = \overline{1,n}$, имеют $|\varphi(e_i)| = k > 1$, то k можно взять равным единице.

Пусть максимальная слоговая длина определяющих соотношений группы G равна R_0, тогда длина замкнутого цикла диаграммы M ограничена сверху, а именно, $|\varphi(L)| < R_0(|v| + |w|)p$, где p — параметр диаграммы M.

Обозначим через $S(w, v)$ — множество всех слов группы G, длина которых не превышает $L_0 = R_0(|v| + |w|)p$.

Пусть $\mathcal{H}$– множество всех степеней образующих группы G, показатели которых k ограничены по абсолютной величине числом p, то есть$\mathcal{H} = \left\{a_i^k | 1 \leqslant i \leqslant n, |k| \leqslant p\right\}$.

Назовем элементы $\mathcal{H}$ кусками.

Рассмотрим следующую последовательность

$$w_0, H_1, w_1, H_2, w_2, \ldots, H_m, w_m, H_{m+1}, \ldots \tag{2}$$

где $w = w_0, w_i = H_i^{-1} w_{i-1} H_i, H_i \in \mathcal{H}, \forall i, w_i \in S(w, v)$.

Обозначим через $S_0 = |S(w, v)|$ — число слов, содержащихся в $S(w, v)$.

Определение 5. *Последовательность $w_0, H_1, w_1, H_2, w_2, \ldots, H_m, w_m, H_{m+1}, \ldots$ назовем фундаментальной, если не существуют $\alpha, \beta, 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant m$, такие, что $w_\alpha = w_\beta$.*

Лемма 11. *Пусть w, v — циклически, R и R^* несократимы в G (G – группа Артина с древесной структурой). w, v сопряжены в G тогда и только тогда, когда существует фундаментальная последовательность, оканчивающаяся, словом w_m, что $w_m = v$.*

Определение 6. . *Последовательность*

$$w_0, H_1, w_1, H_2, w_2, \ldots, H_\alpha, w_\alpha, H_{\alpha+1}, \ldots, H_\beta, w_\beta, H_{\beta+1}, \ldots \tag{3}$$

назовем базисной, если существуют α, β, такие, что $w_\alpha = w_\beta$, причем β — наименьшее из возможных.

Данной последовательности соответствует слово

$$T_{\alpha\beta} = H_1 H_2 \ldots H_{\alpha-1} H_\alpha \ldots H_\beta H_\alpha^{-1} \ldots H_1^{-1} \tag{4}$$

принадлежащее централизатору элемента $w_0 = w$, слово, (4) определяется последовательностью слов: $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_\alpha, \ldots, w_\beta$, в которой все w_i, кроме w_α, w_β того различны и для любых w_{i-1}, w_i существует $H_i \in \mathcal{H}$ такое, что $H_i^{-1} w_{i-1} H_i = w_i$.

Так как множество слов $S(w, v)$ конечно, то число различных базисных последовательностей конечно, следовательно, число слов $T_{\alpha\beta}$ конечно.

Лемма 12. *Централизатор элемента $w \in G$ (G – группа Артина с древесной структурой) конечнопорожден.*

Доказательство. Пусть слоговая длина слова w больше единицы. Рассмотрим подгруппу группы G, порожденную словами $T_{\alpha\beta}$, слоговая длина которых не превышает $2S_0+1$, ($S_0 = |S(w, w)|$)

Под длиной конечной последовательности (3), соответствующей слову $w = w_0$, будем понимать число слов w_i в ней, то есть: $w_0, H_1, w_1, H_2, \ldots, w_{m-1}, H_m, w_m, H_{m+1}$,где каждое $w_i \in S(w, w)$.

Очевидно, что всякая последовательность (3), соответствующая слову w_0, длины больше или равной $S_0 + 1$ является базисной.

Рассмотрим множество всех слов $T_{\alpha\beta}$, длины не превосходящих $2S_0 + 1$, соответствующих всевозможным базисным последовательностям (3) длины не превосходящих $2S_0 + 1$, соответствующих w_0.

Покажем, что всякое F, удовлетворяющее условию: $F^{-1} w_0 F = w_0$, принадлежит подгруппе $\langle\{T_{\alpha\beta}\}\rangle$.

Если $F = 1$, то $F \in \langle\{T_{\alpha\beta}\}\rangle$.

Пусть $F \neq 1$, тогда $F = H_1 H_2, \ldots, H_m$ где $H_i \in \mathcal{H}$, обозначим F через F_m и пусть для любого $k < m$ слово $F_k \in \langle\{T_{\alpha\beta}\}\rangle$.

Слову F_m будет соответствовать последовательность:

$$w_0, H_1, w_1, H_2, \ldots, H_{m-1}, w_{m-1} H_m w_m \tag{5}$$

Пусть $S_0 + 1 < m$, тогда последовательность (5) – базисная, то есть существуют $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant S_0 + 1 < m$, такие что $w_\alpha = w_\beta$.

Рассмотрим слово $T = H_1 H_2 \ldots H_{\alpha-1} H_\alpha \ldots H_\beta H_\alpha^{-1} \ldots H_1^{-1}$. Так как $\alpha < S_0, \beta \leqslant S_0 + 1$, то слово T имеет слоговую длину меньше $2S_0 + 1$, поэтому $T \in \langle\{T_{\alpha\beta}\}\rangle$.

Рассмотрим произведение $T^{-1}F = H_1 \ldots H_\alpha H_{\beta+1} \ldots H_m, T^{-1}F \in C_G(w_0)$, и так как $\|T^{-1}F\| < m$, то $T^{-1}F \in \langle\{T_{\alpha\beta}\}\rangle$, отсюда следует, что $F \in \langle\{T_{\alpha\beta}\}\rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 13. *Существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in G$ (G – группа Артина с древесной структурой) построить его централизатор.*

Доказательство.

Доказательство непосредственно следует из того факта, что длина любой фундаментальной последовательности для элемента $w, \|w\| > 1$, большей S_0, будет базисной, поэтому, как показано в лемме 13 множество всех слов $T_{\alpha\beta}$, длины которых не превосходят $2S_0 + 1$ соответствущих эитм последовательностям порождают $C_G(w_0)$. Централизаторы элементов, слоговая длина которых равна единице, как следует из выше изложенного, конечнопорождены и могут быть эффективно построены.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Централизатор любого элемента в группах Кокстера с древесной структурой конечнопорожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.*

Пусть G – группа Артина с древесной структурой и $\overline{G}$ — гомоморфная ей группа Кокстера. Пусть θ гомоморфизм G на $\overline{G}$, то есть $G/N_G = \theta(G) = \overline{G}$, где $N_G = \langle \sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2 \rangle^G$. Пусть $C_G(w)$ — централизатор элемента $w \in G$. Обозначим через $\theta(C_G(w))$ — гомоморфный образ подгруппы $C_G(w)$. Очевидно, что $\theta(C_G(w)) = C_G(w)/N_G$.

Определение 7. *В группе A разрешима проблема вхождения в конечнопорожденную подгруппу H, если существует алгоритм, позволяющий для любого элемента $w \in A$ установить, принадлежит ли w подгруппе H.*

Лемма 14. *[11] В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Лемма 15. *В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения в подгруппу $N_G = \langle \sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2 \rangle^G$.*

Доказательство. Рассмотрим образ данного слова w в группе Кокстера $\overline{G}$, соответствующей данной группе G. Если $w = 1$ в $\overline{G}$, то $w \in N_G$, что непосредственно следует из леммы 15, согласно которой в группе $\overline{G}$ разрешима проблема вхождения, а следовательно, разрешима и проблема равенства слов.

Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть F — решение уравнения $z^{-1}wz = v$, то есть $F^{-1}wF = v$, где $F, v, w \in G$. Тогда множество всех решений данного уравнения образует смежный класс $C_G(w) \bullet F$ подгруппы $C_G(w)$ в G.*

Лемма 17. *Пусть z_0 — решение уравнения $z^{-1}wz = v$ в группе G, G — группа Артина с древесной структурой, v, w принадлежат N_G. Слова v, w сопряжены в N_G тогда и только тогда, когда $\theta(z_0) \in \theta(C_G(w))$.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in N_G$, тогда $\theta(z_0) = 1$ и, следовательно, $\theta(z_0) \in \theta(C_G(w))$. Пусть $\theta(z_0) \in \theta(C_G(w))$, тогда $\theta(z_0) = \theta(u_1)\theta(u_2)\ldots\theta(u_m)$, где $\theta(u_i)$ образующие подгруппы$\theta(C_G(w))$.

Рассмотрим слово $s = u_1u_2\ldots u_m \in C_G(w)$, являющееся одним из прообразов слова $\theta(u_1)\theta(u_2)\ldots\theta(u_m)$, и рассмотрим произведение $z_0s^{-1}, z_0s^{-1} = h$, где $h \in N_G$. Поэтому $z_0s^{-1}w\big(z_0s^{-1}\big)^{-1} = hwh^{-1} = v$, то есть слова $v, w \in N_G$ сопряжены в N_G.

Если $C_G(w) < N_G$, то $\theta(C_G(w)) = E$, (E- единичная подгруппа), поэтому из того, что $\theta(z_0) \in \theta(C_G(w))$ следует, что $z_0 \in N_G$.

Пусть z_0 удовлетворяет соотношению $z_0^{-1}wz_0 = v$ и пусть $\Theta(z_0) \notin \Theta(C_G(w))$. Из леммы 16 следует, что смежный класс $C_G(w) \bullet z_0$ содержит все решения данного соотношения.

Очевидно, что для любого $h \in C_G(w)\Theta(hz_0) \notin \Theta(C_G(w))$. Допустим, что существует $s_0 \in N(G)$ такое, что $s_0^{-1}ws_0 = v$. Но тогда существует $h_0 \in C_G(w)$ такое, что$h_0z_0 = s_0$. Но тогда $z_0 = h_0^{-1}s_0$ и $\Theta(z_0) = \Theta(h_0^{-1}s_0) \in \Theta(C_G(w))$.

Получаем противоречие. Лемма доказана.

Таким образом, справедлива следующая теорема, анонсированная в [12].

Теорема 1. *Пусть G — группа Артина с древесной структурой, тогда в подгруппе $N_G \lhd G$разрешима проблема сопряженности слов.*

4. Заключение

Отметим, что для групп Артина с древесной структурой проблема сопряженности решается положительно. Таким образом, нами доказано, что крашеные подгруппы групп Артина с древесной структурой наследуют свойство группы: положительное решение проблемы сопряженности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н., Гринблат В. А. Решение обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа. \\ Мат. заметки. Т. 79, Вып. 5, 2006.

2. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблема равенства и сопряженности в группах Артина с древесной структурой.\\ Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. «Математика. Механика. Инфор¬матика». Т.11. Вып.1. «Математи¬ка». –Тула, 2006. С. 67-82.

3. Garsid F. A. The braid groups and other groups \\Quart. Math. Oxford. ser(2), 1969, №20, p. 235-254.

4. Брискорн Э., Сайто К. группы Артина и группы Кокстера \\ Математика. 1974, т. 18, №6, С. 56-79.

5. Appel K. J., Schupp E. Artin group and infinite Coxeter groups \\ Invent math, 1984, p. 50-78.

6. Appel K. J. On Artin groups and Coxeter groups of large type \\ Contempor. Math., 1984, p. 50-78.

7. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа. \\ Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вуз. сборник науч. трудов. Тула, 1986, С. 26-61.

8. Безверхний В. Н. О группах Артина, Кокстера с древесной структурой \\ V Международная конференция. Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения. Тезисы докладов. Тула. 2003, С. 33-34.

9. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа \\ Фундаментальная и прикладная математика, 1999, С. 1-38.

10. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина. \\ Фундаментальная и прикладная математика, 2019, том 22, №4, С.9-27

11. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема сопряженности подгрупп в конечнопорожденных группах Кокстера с древесной структурой. \\ Чебышевский сборник, 2010. — Т.11, № 3. С. 32-56.

12. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы сопряженности слов в некотором классе подгрупп Артина с древесной структурой. \\ Алгебра и теория чисел, и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV межд. конф. Посвященной 100-летию со дня рождения Н.М. Коробова Тула 2018 С. 67-69.

13. Collins D., Miller C. The conjugacy problem and subgroups of finite index. \\ Proc. London Math. Soc. (3)34 1977? №3, P.535-556.

REFERENCES

1. Bezverkhny V. N., Grinblat V. A. Solution of the generalized problem of conjugacy of words in colored subgroups of Artin groups of finite type. \\ Mate. notes. Vol. 79, Issue 5, 2006.

2. Bezverkhny V. N., Karpova O. Yu. The problem of equality and conjugacy in Artin groups with wood structure.\\ WPI. Tula state. UN-TA. Ser. «Mathematics. Mechanics. Informatics". Vol. 11. Issue 1. "Matematika". Tula, 2006

3. Garsid F. A. The braid groups and other groups \\ Quart. Math. Oxford. ser (2), 1969, №20, p. 235-254.

4. Briskorn E., Saito K. Artin groups and Coxeter groups \\ Mathematics. 1974, vol. 18, no. 6, Pp. 56-79., Pp. 67-82.

5. Appel K. J., Schupp E. Artin group and infinite Coxeter groups\\ Invent math, 1984, p. 50-78.

6. Appel K. J. On Artin groups and Coxeter groups of large type \\ Contempor. Math., 1984, p. 50-78.

7. Bezverkhny V. N. Solving the problem of conjugacy of words in Artin and Coxeter groups of large type. \\ Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups. collection of scientific works. Tula, 1986, Pp. 26-61.

8. Bezverkhny V. N. about Artin and Coxeter groups with wood structure \\ V international conference. Algebra and number theory. Modern problems and their applications. Thesis of reports. Tula. 2003, Pp. 33-34.

9. Bezverkhny V. N. Solving the problem of generalized conjugacy of words in large-type Artin groups \\ Fundamental and applied mathematics, 1999, Pp. 1-38.

10. Bezverkhny V. N., Bezverkhnyaya N. B. Solving the problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups. \\ Fundamental and applied mathematics, 2019, vol. 22, no. 4, P. 9-27

11. Bezverkhny V. N., Inchenko O. V. the problem of conjugacy of subgroups in finite-born Coxeter groups with wood structure.\\ Chebyshev collection, 2010. — Vol. 11, No. 3. Pp. 32-56.

12. Bezverkhny V. N., Bezverkhnyaya N. B. Solving the problem of conjugation of words in a certain class of Artin subgroups with a tree structure. \\ Algebra and number theory and discrete geometry: modern problems and applications. Materials of the XV international Conf. Dedicated to the 100th anniversary of the birth of N. M. Korobov Tula 2018 P. 67-69.

13. Collins D., Miller C. The conjugacy problem and subgroups of finite index.\\ Proc. London Math. Soc. (3)34 1977? №3, P.535-556.

Получено 24.06.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-99-112

Константы Никольского для компактных однородных пространств[1]

Д. В. Горбачев

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; Тульский государственный университет (г. Екатеринбург, г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются точные L^p-константы Никольского для случая римановых симметрических многообразий $\mathbb{M}^d$ ранга 1. Данные пространства классифицированы полностью и включают единичную евклидову сферу $\mathbb{S}^d$, а также проективные пространства $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. На этих многообразиях имеется общий гармонический анализ, в частности, определены подпространства полиномов $\Pi_n(\mathbb{M}^d)$ порядка не выше n. В общем случае точная L^p-константа Никольского для подпространства $Y \subset L^\infty$ определяется равенством

$$\mathcal{C}(Y, L^p) = \sup_{f \in (Y \cap L^p) \setminus \{0\}} \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p}.$$

В.А. Иванов (1983) привел асимптотику

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d), L^p(\mathbb{M}^d)) \asymp n^{d/p}, \quad n \to \infty, \quad p \in [1, \infty).$$

Для случая сферы этот результат был значительно усилен автором совместно с F. Dai и S. Tikhonov (2020):

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{S}^d), L^p(\mathbb{S}^d)) = \mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d)) n^{d/p}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \quad p \in (0, \infty),$$

где $\mathcal{E}_1^d$ — множество целых функций экспоненциального сферического типа не выше 1, ограниченных на $\mathbb{R}^d$. M.I. Ganzburg (2020) перенес это равенство на случай многомерного тора $\mathbb{T}^d$ и тригонометрических полиномов. Для $d = 1$ данные результаты вытекают из основополагающей работы E. Levin и D. Lubinsky (2015).

В совместной работе автора и И.А. Мартьянова (2020) доказаны следующие явные границы сферической константы Никольского, которые уточняют приведенные выше результаты при $p \geqslant 1$:

$$n^{d/p} \leqslant \frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{S}^d), L^p(\mathbb{S}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \left(n + 2\lceil \tfrac{d+1}{2p} \rceil\right)^{d/p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad p \in [1, \infty).$$

Данный результат был доказан при помощи одномерного варианта задачи для случая периодического веса Гегенбауэра.

Развитие данного метода позволяет доказать следующий общий результат: при $p \geqslant 1$

$$n^{d/p} \leqslant \frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d), L^p(\mathbb{M}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \left(n + \lceil \tfrac{\alpha_d + 3/2}{p} \rceil + \lceil \tfrac{\beta_d + 1/2}{p} \rceil\right)^{d/p},$$

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

где $\alpha_d = d/2-1$, $\beta_d = d/2-1$, $-1/2$, 0, 1, 3 соответственно для $\mathbb{S}^d$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. Доказательство данного результата опирается на связь гармонического анализа на $\mathbb{M}^d$ с анализом Якоби на $[0,\pi]$ и $\mathbb{T}$ с периодическим весом $\left|2\sin\frac{t}{2}\right|^{2\alpha+1}\left|\cos\frac{t}{2}\right|^{2\beta+1}$. Также приведены родственные результаты для тригонометрических констант Никольского в L^p на $\mathbb{T}$ с весом Якоби и констант Никольского для целых функций экспоненциального типа в L^p на $\mathbb{R}$ со степенным весом.

Ключевые слова: константа Никольского, однородное пространство, полином, целая функция экспоненциального типа, вес Якоби.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев. Константы Никольского для компактных однородных пространств // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4, с. 99–112.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-99-112

Nikol'skii constants for compact homogeneous spaces[2]

D. V. Gorbachev

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Tula State University (Yekaterinburg, Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru

Abstract

In this paper, we study the sharp L^p-Nikol'skii constants for the case of Riemannian symmetric manifolds $\mathbb{M}^d$ of rank 1. These spaces are fully classified and include the unit Euclidean sphere $\mathbb{S}^d$, as well as the projective spaces $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. There is a common harmonic analysis on these manifolds, in particular, the subspaces of polynomials $\Pi_n(\mathbb{M}^d)$ of order at most n are defined. In the general case, the sharp L^p-Nikol'skii constant for the subspace $Y \subset L^\infty$ is defined by the equality

$$\mathcal{C}(Y, L^p) = \sup_{f\in(Y\cap L^p)\setminus\{0\}} \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p}.$$

V.A. Ivanov (1983) gave the asymptotics

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d), L^p(\mathbb{M}^d)) \asymp n^{d/p}, \quad n\to\infty, \quad p\in[1,\infty).$$

For the case of a sphere, this result was significantly improved by the author together with F. Dai and S. Tikhonov (2020):

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{S}^d), L^p(\mathbb{S}^d)) = \mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d))n^{d/p}(1+o(1)), \quad n\to\infty, \quad p\in(0,\infty),$$

where $\mathcal{E}_1^d$ is the set of entire functions of exponential spherical type at most 1 bounded on $\mathbb{R}^d$. M.I. Ganzburg (2020) transferred this equality to the case of the multidimensional torus $\mathbb{T}^d$

[2]The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement number 075-02-2021-1383).

and trigonometric polynomials. For $d = 1$, these results follow from the fundamental work of E. Levin and D. Lubinsky (2015).

In a joint work of the author and I.A. Martyanov (2020), the following explicit boundaries of the spherical Nikol'skii constant were proved, which refine the above results for $p \geqslant 1$:

$$n^{d/p} \leqslant \frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{S}^d), L^p(\mathbb{S}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \bigl(n + 2\lceil \tfrac{d+1}{2p} \rceil\bigr)^{d/p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad p \in [1, \infty).$$

This result was proved using a one-dimensional version of the problem for the case of a periodic Gegenbauer weight.

The development of this method allows us to prove the following general result: for $p \geqslant 1$

$$n^{d/p} \leqslant \frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d), L^p(\mathbb{M}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \bigl(n + \lceil \tfrac{\alpha_d + 3/2}{p} \rceil + \lceil \tfrac{\beta_d + 1/2}{p} \rceil\bigr)^{d/p},$$

where $\alpha_d = d/2 - 1$, $\beta_d = d/2 - 1$, $-1/2$, 0, 1, 3 respectively for $\mathbb{S}^d$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. The proof of this result is based on the connection of harmonic analysis on $\mathbb{M}^d$ with Jacobi analysis on $[0, \pi]$ and $\mathbb{T}$ with periodic weight $\bigl|2 \sin \frac{t}{2}\bigr|^{2\alpha+1} \bigl|\cos \frac{t}{2}\bigr|^{2\beta+1}$. Also we give related results for the trigonometric Nikol'skii constants in L^p on $\mathbb{T}$ with Jacobi weight and Nikol'skii constants for entire functions of exponential type in L^p on $\mathbb{R}$ with power weight.

Keywords: Nikolskii constant, homogeneous space, polynomial, entire function of exponential type, Jacobi weight.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev 2021, "Nikol'skii constants for compact homogeneous spaces" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 99–112.

1. Введение

Неравенства Никольского разных метрик в пространствах L^p функций на многообразиях M и точные константы в них являются классическим объектом теории приближений и ее приложений. Их изучению посвящено достаточно большое число исследований (см., например, обзоры результатов в [1, 2, 4]). В стандартных постановках константы Никольского определяются на классах $Y \subset L^q$ (обычно подпространств) полиномов и целых функций экспоненциального типа как решения экстремальных задач вида

$$\mathcal{C}(Y, L^p, L^q) = \sup_{f \in (Y \cap L^p) \setminus \{0\}} \frac{\|f\|_q}{\|f\|_p}.$$

С точки зрения гармонического анализа классы Y можно охарактеризовать как множества функций с компактным носителем соответствующего преобразования Фурье. Поэтому экстремальные задачи Никольского нужно отнести к проблемам оптимизации Фурье. Проблемы данного типа находят важные приложения уже не только в теории приближений, но также в теории чисел, метрической геометрии (см., например, [4]). Этот факт дополнительно мотивирует изучать именно точные константы Никольского.

В данной работе исследуется поднятый в работах [12, 4, 6] вопрос о предельных равенствах для полиномиальных констант Никольского и констант для целых функций экспоненциального типа. В нем спрашивается, как для семейства $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ вложенных конечномерных подпространств ведет себя последовательность $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}(Y_n, L^p, L^q)$. Типичный результат имеет вид $\mathcal{C}_n \asymp n^{d(1/p - 1/q)_+}$ при $n \to \infty$, где $d = \dim M$. Однако интересно выяснить, когда можно написать асимптотическое равенство $\mathcal{C}_n = \mathcal{C} n^{d(1/p-1/q)_+}(1 + o(1))$. Если такое равенство

установлено, возникает следующий вопрос о оценке остаточного члена. Его можно решать, предъявляя явные границы $\mathcal{C}_n$, которые смыкаются при $n \to \infty$.

Как и в упомянутых выше работах здесь рассматривается только случай $0 < p < \infty$, $q = \infty$ (случай $q \neq \infty$ остается открытым). Поэтому положим

$$\mathcal{C}(Y, L^p) = \mathcal{C}(Y, L^p, L^\infty),$$

где $L^p = L^p_w(M)$ — в общем случае весовое пространство измеримых функций $f\colon M \to \mathbb{C}$ с конечной нормой (квази-нормой при $p < 1$)

$$\|f\|_p = \|f\|_{p,w} = \left(\int_M |f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p}, \quad p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} |f(x)|,$$

При необходимости уточнить многообразие будем писать $\|f\|_{p,w;M}$ и всегда опускаем $w \equiv 1$.

Точные значения $\mathcal{C}(Y, L^p)$ известны при $p = 2$ для подпространств Y с воспроизводящим ядром, когда можно воспользоваться неравенством Коши–Буняковского (см., например, [10, 2, 4]). Во всех остальных случаях пока получены верхние и нижние границы. Уточнение этих границ для случая компактных однородных пространств M является главной целью данной работы. Перейдем к изложению основных результатов.

Пусть $\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}\colon |x| = 1\}$ — d-мерная единичная евклидова сфера, $d \in \mathbb{N}$. В статье [4] для случая $M = \mathbb{S}^d$ и множества $Y_n = \Pi^d_n$ сферических полиномов на $\mathbb{S}^d$ порядка не выше $n \in \mathbb{Z}_+$ доказано асимптотическое равенство

$$\mathcal{C}(\Pi^d_n, L^p(\mathbb{S}^d)) = \mathcal{C}(\mathcal{E}^d_1, L^p(\mathbb{R}^d))n^{d/p}(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \quad p \in (0, \infty), \tag{1}$$

где $\mathcal{E}^d_\sigma$ — множество целых функций экспоненциального сферического типа не выше $\sigma > 0$, ограниченных на $\mathbb{R}^d$.

Пусть $\mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ — d-мерный тор, $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d\colon |x| \leqslant 1\}$ — единичный евклидов шар. В работе [6] установлено аналогичное предельное соотношение для множества $\mathcal{T}^d_n$ тригонометрических полиномов на $\mathbb{T}^d$ со спектром в шаре nB^d радиуса n:

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}^d_n, L^p(\mathbb{T}^d)) = \mathcal{C}(\mathcal{E}^d_1, L^p(\mathbb{R}^d))n^{d/p}(1 + o(1)). \tag{2}$$

При $d = 1$ соотношения (1), (2) объединяются в одно равенство, которое для всех $0 < p < \infty$ было установлено в работе [12]. До этой работы помимо $p = 2$ был известен случай $p = 1$ (см. [7]). На наш взгляд, данные результаты можно считать определенным прорывом в области точных констант Никольского, поскольку до этого были известны только порядковые равенства, как, например, в [9].

Стоит специально отметить серию недавних работ M.I. Ganzburg, начиная с [6], в которых последовательно развивается общий подход к получению предельных равенств типа (1), (2) для тригонометрических и алгебраических констант Бернштейна–Никольского. В этих работах приведено много одномерных и многомерных примеров, включая весовые. Однако данный подход не дает возможности оценивать остаточные члены.

Пусть для краткости

$$\mathcal{A}_{dp}(n) = \frac{\mathcal{C}(\Pi^d_n, L^p(\mathbb{S}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}^d_1, L^p(\mathbb{R}^d))}.$$

Из (1) следует, что $\mathcal{A}_{dp}(n) = n^{d/p}(1 + o(1))$ при фиксированных $d \in \mathbb{N}$, $p \in (0, \infty)$ и $n \to \infty$. Оценка остаточного члена здесь при $p \geqslant 1$ вытекает из результатов работы [8], где изучены полиномиальные константы Никольского для веса Гегенбауэра. Именно, для всех $d \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливы неравенства

$$n^{d/p} \leqslant \mathcal{A}_{dp}(n) \leqslant \left(n + 2\lceil \tfrac{d+1}{2p} \rceil\right)^{d/p}. \tag{3}$$

Для $d = 1$ можно убрать множитель 2 перед округлением. Если $d = 1, 2$, то неравенства справедливы и при $p < 1$. Для остальных d это доказано только в ослабленной формулировке, когда супремум-норма функций в определении констант Никольского заменяется значением в определенной фиксированной точке (см. [8], раздел 2 и определение (8) в нем).

Сфера $\mathbb{S}^d$ $(d = 1, 2, 3, \ldots)$ принадлежит к семейству $\mathbb{M}^d$ $(d = \dim \mathbb{M}^d)$ компактных римановых симметрических многообразий ранга 1 (см., например, [5, 11, 14]). Это семейство также включает проективные пространства $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ $(d = 2, 3, 4, \ldots)$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$ $(d = 4, 6, 8, \ldots)$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$ $(d = 8, 12, 16, \ldots)$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$. На $\mathbb{M}^d$ имеется унифицированный гармонический анализ. В частности, определено семейство $\{\Pi_n(\mathbb{M}^d)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ вложенных подпространств полиномов порядка не выше n. Каждое $\Pi_n(\mathbb{M}^d)$ содержит зональное воспроизводящее ядро, которое выражается через полином Якоби $P_n^{(\alpha_d+1,\beta_d)}$. Параметры

$$\alpha_d = \frac{d}{2} - 1, \quad \beta_d = \frac{d}{2} - 1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 3 \tag{4}$$

соответственно для $\mathbb{S}^d$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$, $\mathbb{P}^{16}(\mathrm{Ca})$ (подробнее см. раздел 2).

Константы Никольского на подпространствах $\Pi_n(\mathbb{M}^d)$ изучались в работах [9, 10]. В частности, в [9] показано, что

$$\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d), L^p(\mathbb{M}^d)) \asymp n^{d/p}, \quad n \to \infty, \quad p \in [1, \infty).$$

Для $p = 2$ константы Никольского вычислены в работе [10].

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{M}^d$ — компактное риманово симметрическое многообразие ранга 1 с параметрами α_d, β_d (4) и нормировкой меры (6). Тогда для всех $p \in [1, \infty)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$n^{d/p} \leqslant \frac{\mathcal{C}(\Pi_n(\mathbb{M}^d), L^p(\mathbb{M}^d))}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \big(n + \lceil \tfrac{\alpha_d+3/2}{p} \rceil + \lceil \tfrac{\beta_d+1/2}{p} \rceil\big)^{d/p}.$$

Данная теорема обобщает и уточняет неравенства (3) для случая сферы. В разделе 2 мы приведем вспомогательные утверждения о взаимосвязи многомерных и одномерных констант Никольского для веса Якоби, которые имеют самостоятельное значение. Теорема 1 будет доказана в разделе 3. В заключении мы приведем открытые проблемы.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $M = \mathbb{M}^d$ — d-мерное компактное риманово симметрическое многообразие ранга 1, которое также называется двухточечно-однородным пространством. Будем пользоваться сведениями из [5, 11, 14]. Имеем $M = G/H$, где G — группа движений M и H — стационарная подгруппа некоторой зафиксированной точки $o \in M$ (начала координат). Пусть ρ — метрика на M с нормировкой $\operatorname{diam} M = \pi$, dx — риманова метрика на M,

$$\int_M f(x)\,dx = \int_0^\pi \int_{\rho(o,\xi)=t} f(\xi)\,d\xi\,dt = \int_0^\pi S^t f(o)\,dt, \tag{5}$$

где точку o можно заменить любой другой, $S^t f(x) = \frac{1}{A(t)} \int_{\rho(x,\xi)=t} f(\xi)\,d\xi$ — оператор среднего значения по сфере радиуса t, $A(t) = \int_{\rho(x,\xi)=t} d\xi$ (не зависит от x), оператор S^0 тождественный,

$$A(t) = |\mathbb{S}^{d-1}|\, w_{\alpha_d\beta_d}(t), \quad w_{\alpha\beta}(t) = \big|2\sin\tfrac{t}{2}\big|^{2\alpha+1}\big|\cos\tfrac{t}{2}\big|^{2\beta+1}, \quad |M| = \int_0^\pi A(t)\,dt, \tag{6}$$

параметры α_d, β_d определены в (4), $w_{\alpha\beta}$ — тригонометрический вес Якоби.

Пусть $\varphi_k^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)}$ — тригонометрические полиномы Якоби. Они образуют базис в пространстве $L^2_A([0,\pi])$ с весом $A(t)$.

Для подпространства полиномов степени не выше n справедливо разложение

$$\Pi_n = \Pi_n(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k,$$

где $\mathcal{H}_k$ — подпространства гармоник на M порядка k. Пусть $d_k = \dim \mathcal{H}_k$, $\{Y_{kj}\}_{j=1}^{d_k}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Этот базис можно выбрать так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{d_k} Y_{kj}(x)\overline{Y_{kj}(y)} = \frac{d_k}{|M|}\,\varphi_k(\rho(x,y)) = Y_{k1}(\rho(x,y)), \tag{7}$$

где $\varphi_k = \varphi_k^{(\alpha_d,\beta_d)}$ — зональное воспроизводящее ядро $\mathcal{H}_k$. Отсюда для любого полинома $f \in \Pi_n$ получаем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{d_k} \widehat{f}_{kj} Y_{kj}(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{d_k} Y_{kj}(x)\int_M f(y)\overline{Y_{kj}(y)}\,dy = \int_M f(y)\Phi_n(\rho(x,y))\,dy,$$

где Φ_n — зональное воспроизводящее ядро подпространства Π_n,

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{|M|}\sum_{k=0}^{n} d_k\varphi_k(t) = \frac{\dim \Pi_n}{|M|}\,\varphi_n^{(\alpha_d+1,\beta_d)}(t), \quad \dim \Pi_n = \sum_{k=0}^{n} d_k.$$

Здесь мы воспользовались известной формулой Кристоффеля–Дарбу для полиномов Якоби.

Нам потребуется формула умножения для гармоник

$$S^t Y_{kj}(x) = \varphi_k(t) Y_{kj}(x),$$

с помощью которой можно отображать произвольные полиномы в зональные. Также напомним, что для произвольного движения $g \in G$ сдвинутая гармоника

$$Y_{kj}(gx) \in \mathcal{H}_k.$$

Установим взаимосвязь между многомерными и одномерными константами Никольского. Для сферы это сделано в [1]. Для общих M подобная взаимосвязь применялась, например, в [10]. Однако там не рассматривался общий случай L^p. Пусть $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{P}_n$ — соответственно множества комплекснозначных 2π-периодических тригонометрических и алгебраических полиномов степени не выше n, «*even*» означает четные функции. Также как в работах [1, 2, 8] введем «ослабленную» константу Никольского равенством

$$\tilde{\mathcal{C}}_{x_0}(Y, L^p) = \sup_{f \in (Y \cap L^p)\setminus\{0\}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|_p}. \tag{8}$$

Далее положим для краткости $L^p = L^p(M)$, $L^p_A = L^p_A([0,\pi])$.

Лемма 1. *Для $p \in (0,\infty)$*

$$\mathcal{C}(\Pi_n, L^p) = \tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n, L^p).$$

Доказательство. Стандартно применяем G-инвариантность гармоник и меры dx, откуда для $f \in \Pi_n$ и $f_g(x) = f(gx)$, $g \in G$, будет $f_g \in \Pi_n$ и $\|f_g\|_p = \|f\|_p$, $p \in (0,\infty]$. Осталось выбрать сдвиг g из условия $go = x_0$, где $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$, тогда $\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p} = \frac{|f_g(o)|}{\|f_g\|_p}$. $\square$

Лемма 2. *Для* $p \in [1,\infty)$

$$\tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n, L^p) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L_A^p).$$

Доказательство. По аналогии с [1] оценку снизу получим на подмножестве зональных полиномов, а для оценки сверху воспользуемся оператором усреднения по сферам S^t.

Пусть $f(x) = f_0(\rho(o,x)) = \sum_{k=0}^n a_k Y_{k1}(\rho(o,x))$ — произвольный зональный полином степени не выше n. Тогда по (7), (5) имеем $f_0 \in \mathcal{T}_n^{even}$ и

$$\int_M |f(x)|^p\,dx = \int_0^\pi |f_0(t)|^p A(t)\,dt.$$

Потому

$$\frac{|f(o)|}{\|f\|_{p;M}} = \frac{|f_0(0)|}{\|f_0\|_{p,A;[0,\pi]}},$$

откуда

$$\tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n, L^p) \geqslant \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L_A^p).$$

Теперь пусть $f(x)$ — произвольный полином из Π_n. Положим $f_0(t) = S^t f(o)$. Тогда $f_0(t) \in \mathcal{T}_n^{even}$ и $f_0(0) = f(o)$. По неравенству Гёльдера при $p \in [1,\infty)$

$$|f_0(t)|^p = \left|\frac{1}{A(t)}\int_{\rho(o,\xi)=t} f(\xi)\,d\xi\right|^p \leqslant \frac{1}{A(t)}\int_{\rho(o,\xi)=t} |f(\xi)|^p\,d\xi.$$

Поэтому

$$\int_0^\pi |f_0(t)|^p A(t)\,dt \leqslant \int_0^\pi \int_{\rho(o,\xi)=t} |f(\xi)|^p\,d\xi\,dt = \|f\|_{p;M}^p,$$

откуда

$$\frac{|f(o)|}{\|f\|_{p;M}} \leqslant \frac{|f_0(0)|}{\|f_0\|_{p,A;[0,\pi]}}$$

и

$$\tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n, L^p) \leqslant \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L_A^p).$$

Лемма доказана. □

Лемма 3 ([2]). *Для* $p \in [1,\infty)$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}([0,\pi])) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}([0,\pi])).$$

В [2] данная лемма доказана в алгебраической версии при помощи положительного оператора обобщенного сдвига Якоби. Однако, как обычно, для $g \in \mathcal{P}_n$ имеем $g(\cos t) \in \mathcal{T}_n^{even}$ и

$$\int_0^\pi |g(\cos t)|^p \left|2\sin\tfrac{t}{2}\right|^{2\alpha+1}\left|\cos\tfrac{t}{2}\right|^{2\beta+1} dt = \int_{-1}^1 |g(u)|^p\, 2^{\alpha-\beta}(1-u)^\alpha(1+u)^\beta\,du.$$

Поэтому приходим к тригонометрической версии леммы, в частности, имеем

$$\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}([0,\pi])) = \tilde{\mathcal{C}}_1\big(\mathcal{P}_n, L^p_{2^{\alpha-\beta}(1-u)^\alpha(1+u)^\beta}([-1,1])\big).$$

Представляет интерес обобщить лемму 3 на весь класс полиномов $\mathcal{T}_n$ в пространстве $L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$ на всем периоде. При $\alpha = \beta$ это сделано в работе [13] при помощи положительного оператора обобщенного сдвига Гегенбауэра–Чертовой [15]. Для случая $\alpha > \beta$ можно действовать аналогично, только взять оператор Якоби–Во Тхи Кук [3].

Лемма 4. *Пусть* $p \in [1,\infty)$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_n, L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})). \tag{9}$$

Доказательство. При $\alpha = \beta$ лемма доказана в [13], поэтому пусть $\alpha > \beta$. Воспользуемся результатами работы [3], где есть следующие факты.

(1) Произвольный полином $f(t) \in \mathcal{T}_n$ можно разложить по ортогональному в $L^2_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$ базису Якоби

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} (a_k\varphi_k(t) + b_k\varphi_k'(t)), \quad b_0 = 0. \tag{10}$$

(2) На основе оператора Якоби–Курнвиндера в пространстве локально измеримых функций на торе $\mathbb{T}$ определяется положительный оператор обобщенного сдвига T^s. Его можно записать в виде

$$T^s f(t) = \int_{\mathbb{T}} f(u)\, d\mu_{s,t}(u), \quad s,t \in \mathbb{T},$$

где $\mu_{s,t}$ — локальная вероятностная мера. Имеем $T^{-s}f(t) = T^s f(t)$, $T^0 f(t) = f(t)$,

$$T^s(a_k\varphi_k(t) + b_k\varphi_k'(t)) = \varphi_k(s)(a_k\varphi_k(t) + b_k\varphi_k'(t)), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$|T^s f(t)| \leqslant \|f\|_\infty, \quad \|T^t f(\cdot)\|_p \leqslant \|f\|_p, \quad p \geqslant 1,$$

где $\|f\|_p = \|f\|_{p,w_{\alpha\beta};\mathbb{T}}$. На четных функциях оператор T^s совпадает с симметричным оператором Якоби–Курнвиндера: $T^s f(t) = T^t f(s)$, если $f(-t) = f(t)$.

Перейдем к доказательству леммы. Нам потребуются свойства функции $g(s) = T^s f(t_0)$, где t_0 — произвольная фиксированная точка. Ясно, что $\|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Покажем, что

$$\|g\|_p \leqslant \|f\|_p, \quad p \geqslant 1, \tag{11}$$

(в [3] этого свойства нет). В силу интерполяционной теоремы Рисса–Торина достаточно ограничиться случаем $p = 1$.

Если f — полином вида (10), то функция

$$g(s) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(s)(a_k\varphi_k(t_0) + b_k\varphi_k'(t_0))$$

будет четным полином по переменной s той же степени. Отсюда в силу ортогональности

$$\int_{\mathbb{T}} T^s f(t_0) w_{\alpha\beta}(s)\, ds = a_0 \int_{\mathbb{T}} w_{\alpha\beta}(s)\, ds = \int_{\mathbb{T}} f(t) w_{\alpha\beta}(t)\, dt.$$

Данное равенство можно расширить на произвольные функции $f \in L^1_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$ и записать

$$\int_{\mathbb{T}} T^s |f(t_0)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds = \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, w_{\alpha\beta}(t)\, dt = \|f\|_1.$$

Действительно, в силу симметричности T^s на четных функциях и других его свойств

$$\int_{\mathbb{T}} |T^s f(t_0)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds \leqslant \int_{\mathbb{T}} T^s |f(t_0)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds \leqslant \int_{\mathbb{T}} T^s (|f(t_0)| + |f(-t_0)|)\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds$$
$$= \int_{\mathbb{T}} T^{t_0} (|f(s)| + |f(-s)|)\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds \leqslant 2\|f\|_1.$$

Теперь можно воспользоваться плотностью $\mathcal{T}_n$ в $L^1_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$.

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{T}} |g(s)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds \leqslant \int_{\mathbb{T}} T^s|f(t_0)|\, w_{\alpha\beta}(s)\, ds = \|f\|_1$$

и (11) установлено.

Завершим доказательство леммы. Оценка снизу в (9) очевидна, поэтому установим оценку сверху. Для этого возьмем произвольный полином $f \in \mathcal{T}_n$, $\|f\|_\infty = |f(t_0)|$. Как выше положим $g(s) = T^s f(t_0)$. Тогда $g \in \mathcal{T}_n^{even}$, $|g(0)| = |f(t_0)|$ и $\|g\|_p \leqslant \|f\|_p$. Поэтому

$$\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p} \leqslant \frac{|g(0)|}{\|g\|_p} \leqslant \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_{w_{\alpha\beta}}([0,\pi])),$$

что влечет нужную оценку сверху. $\square$

Нам потребуется еще следующая лемма для множества $\mathcal{E}_\sigma$ целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma > 0$, ограниченных на $\mathbb{R}$. Хорошо известно, что для таких функций f справедлива оценка $|f(z)| \leqslant \|f\|_{\infty;\mathbb{R}} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Лемма 5. *Пусть $p \in [1,\infty)$, $\alpha \geqslant -1/2$. Тогда*

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R})) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1^{even}, L^p_{2x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)).$$

Если $d \in \mathbb{N}$, то

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d)) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1^{even}, L^p_{|\mathbb{S}^{d-1}|x^{d-1}}(\mathbb{R}_+)).$$

Лемма вытекает из известных результатов, приведенных в работе [8].

Замечание 1. *Для простоты мы не стали это писать, но в леммах 2, 5 и других аналогичных случаях имеют место равенства*

$$\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_A([0,\pi])) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n, L^p_{2^{-1}A}(\mathbb{T})),$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1^{even}, L^p_{x^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}_+)) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1, L^p_{2^{-1}|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R})).$$

Действительно, нижняя оценка следует на четных функциях из соответствующего подпространства Y, а оценка сверху вытекает из рассмотрения четной части функции $f_e(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, для которой $f_e \in Y$, $f_e(0) = f(0)$ и $\|f_e\|_p \leqslant \|f\|_p$ при $p \geqslant 1$ в силу четности соответствующего веса.

3. Доказательство основной теоремы

Вначале установим следующий вариант теоремы 1 в пространстве $L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T})$ при $p > 0$ для периодического веса Якоби $w_{\alpha\beta}$ (6), который имеет самостоятельное значение.

Предложение 1. *Пусть $p \in (0,\infty)$, $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$. Тогда для всех $n \in \mathbb{Z}_+$*

$$n^{(2\alpha+2)/p} \leqslant \frac{\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n, L^p_{w_{\alpha\beta}}(\mathbb{T}))}{\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^{2\alpha+1}}(\mathbb{R}))} \leqslant \big(n + \lceil \tfrac{\alpha+3/2}{p} \rceil + \lceil \tfrac{\beta+1/2}{p} \rceil\big)^{(2\alpha+2)/p}. \tag{12}$$

Доказательство. Воспользуемся доказательством аналогичной теоремы при $\alpha = \beta$ из работы [8]. Мы повторим его с небольшими сокращениями и изменениями в нужных местах. Положим для удобства

$$2a = 2\alpha + 1 \geqslant 0, \quad 2b = 2\beta + 1 \geqslant 0, \quad w(x) = \big|2\sin\tfrac{x}{2}\big|^{2a}\big|\cos\tfrac{x}{2}\big|^{2b}.$$

Получим оценку снизу в (12). Для $n = 0$ она очевидна, поэтому полагаем $n \geqslant 1$. Возьмем произвольную функцию $f \neq 0$ из $\mathcal{E}_1 \cap L^p_{|x|^{2a}}(\mathbb{R})$. По весовому неравенству Никольского она будет ограничена на оси.

Пусть $\varphi(x) = \big(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\big)^2$ — интегральное ядро Фейера. Тогда $\varphi \in \mathcal{E}_1$ и $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+2\pi k) = 1$ для $x \in \mathbb{R}$.

Положим $g(x) = f(nx)\varphi(x)$. Функция $g \in \mathcal{E}_{n+1}$ и $g(x) = O(x^{-2})$ при $x \to \pm\infty$, поэтому ее преобразование Фурье $\widehat{g}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ixy}\,dx$ непрерывно на $\mathbb{R}$ и по теореме Пэли–Винера $\widehat{g}(y) = 0$ при $|y| \geqslant n+1$. Отсюда для периодизации функции g получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x+2\pi k) = \sum_{|k|\leqslant n} \widehat{g}(k)e^{ikx} =: T(x) \in \mathcal{T}_n.$$

Оценим сверху норму

$$\|T\|^p_{p,w} = \int_{-\pi}^{\pi} |T(x)|^p w(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x+2\pi k)\Big|^p w(x)\,dx,$$

где

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x+2\pi k)\Big|^p \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|\varphi(x+2\pi k)\Big)^p =: I \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p.$$

Действительно, при $p < 1$ в силу $|\varphi| \leqslant 1$

$$I \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p \varphi^p(x+2\pi k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p.$$

При $p \geqslant 1$ по неравенству Гёльдера

$$I \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^{p'}(x+2\pi k)\Big)^{p/p'} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p,$$

где была применена оценка

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^q(x+2\pi k)\Big)^{1/q} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+2\pi k) = 1, \quad q \geqslant 1. \tag{13}$$

Таким образом, с учетом $w(\frac{x}{n}) = \big|2\sin\frac{x}{2n}\big|^{2a}\big|\cos\frac{x}{2n}\big|^{2b} \leqslant \big|\frac{x}{n}\big|^{2a}$ для $x \in \mathbb{R}$, имеем

$$\begin{aligned}\|T\|^p_{p,w} &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+2\pi k))|^p w(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi n(k-1/2)}^{2\pi n(k+1/2)} |f(x)|^p w(\tfrac{x}{n})\,dx \\ &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p w(\tfrac{x}{n})\,dx \leqslant \frac{1}{n^{2a+1}}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{2a}\,dx = \frac{\|f\|^p_{p,|x|^{2a}}}{n^{2a+1}}.\end{aligned}$$

Отсюда и из

$$T(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2\pi kn)\varphi(2\pi k) = f(0)$$

получаем

$$n^{(2a+1)/p}\,\frac{|f(0)|}{\|f\|_{p,|x|^{2a}}} \leqslant \frac{|T(0)|}{\|T\|_{p,w}} \leqslant \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n, L^p_w(\mathbb{T})),$$

что влечет оценку снизу в (12).

Докажем оценку сверху в (12). Пусть $n \geqslant 0$, $T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}$ — произвольный полином.

Положим $g(x) = T(x)\varphi^s(x)(\cos\frac{x}{2})^{2t}$, где целые неотрицательные степени s, t выберем чуть позже. Так как $T \in \mathcal{E}_n$, то $g \in \mathcal{E}_{n+s+t}$.

Оценим сверху норму g. Для $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|g(x)|^p|x|^{2a} = |T(x)|^p\Big|\frac{\sin(x/2)}{x/2}\Big|^{2ps}\Big|\cos\frac{x}{2}\Big|^{2pt}|x|^{2a} = \frac{|T(x)|^p\Big|\frac{\sin(x/2)}{x/2}\Big|^{2ps}\Big|\cos\frac{x}{2}\Big|^{2pt}|x|^{2a}}{\Big|2\sin\frac{x}{2}\Big|^{2a}\Big|\cos\frac{x}{2}\Big|^{2b}}\,w(x)$$
$$= |T(x)|^p\Big|\frac{\sin(x/2)}{x/2}\Big|^{2ps-2a}\Big|\cos\frac{x}{2}\Big|^{2pt-2b}w(x) \leqslant |T(x)|^p\varphi^{ps-a}(x)w(x),$$

если выбрать t, так чтобы $pt - b \geqslant 0$. Выберем s из условия $sp - a \geqslant 1$. Тогда с учетом периодичности T, w

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p|x|^{2a}\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |T(x)|^p\varphi^{ps-a}(x)w(x)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi(k-1/2)}^{2\pi(k+1/2)} |T(x)|^p\varphi^{ps-a}(x)w(x)\,dx$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi} |T(x+2\pi k)|^p\varphi^{ps-a}(x+2\pi k)w(x+2\pi k)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |T(x)|^p|w(x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi^{ps-a}(x+2\pi k)\,dx$$
$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |T(x)|^p|w(x)\,dx,$$

где на заключительном шаге мы воспользовались (13).

Сделаем замену $g(x) = f((n+s+t)x)$. Тогда $f \in \mathcal{E}_1$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p|x|^{2a}\,dx = (n+s+t)^{2a+1}\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p|x|^{2a}\,dx \leqslant (n+s+t)^{2a+1}\int_{-\pi}^{\pi} |T(x)|^p w(x)\,dx$$

и $f(0) = g(0) = T(0)$. Следовательно,

$$\frac{|T(0)|}{\|T\|_{p,w}} \leqslant (n+s+t)^{(2a+1)/p}\,\frac{|f(0)|}{\|f\|_{p,|x|^{2a}}} \leqslant (n+s+t)^{(2a+1)/p}\,\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^{2a}}(\mathbb{R})).$$

Осталось выбрать s, t минимально возможными при указанных на них ограничениях, что дает $s = \lceil\frac{a+1}{p}\rceil$, $t = \lceil\frac{b}{p}\rceil$ и оценку сверху в (12). $\square$

Теперь мы готовы доказать теорему 1. Продолжим пользоваться обозначениями раздела 2. Последовательно применим леммы 1, 2, 4, 5, тогда с учетом замечания 1 получаем при $p \geqslant 1$

$$\mathcal{C}(\Pi_n, L^p) = \tilde{\mathcal{C}}_o(\Pi_n, L^p) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n^{even}, L^p_A([0,\pi])) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n, L^p_{2^{-1}|\mathbb{S}^{d-1}|\,w_{\alpha_d\beta_d}}(\mathbb{T})),$$

$$\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d)) = \tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1, L^p_{2^{-1}|\mathbb{S}^{d-1}|\,|x|^{d-1}}(\mathbb{R})).$$

Отсюда и из $\alpha_d = d/2 - 1$ находим

$$\frac{\mathcal{C}(\Pi_n, L^p)}{\mathcal{C}(\mathcal{E}_1^d, L^p(\mathbb{R}^d))} = \frac{\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{T}_n, L^p_{w_{\alpha_d\beta_d}}(\mathbb{T}))}{\tilde{\mathcal{C}}_0(\mathcal{E}_1, L^p_{|x|^{2\alpha_d+1}}(\mathbb{R}))}.$$

Осталось воспользоваться предложением 1. Теорема 1 доказана.

4. Заключение

Все наши результаты доказаны для случаев $p \geqslant 1$, $q = \infty$ и компактных пространств ранга 1. Поэтому в развитие темы интересно решить следующие проблемы.

1. Доказать теорему 1 при $p < 1$.
2. Установить аналог теоремы 1 для тригонометрического случая (см. (2)).
3. Обобщить приведенные результаты на случай $q \neq \infty$.

Проблемы 1 и 3 кажутся особенно сложными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В.В., Дейкалова М.В. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.
2. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Anal. Math. 2016. Vol. 42, № 2. P. 91–120.
3. Во Тхи Кук. Операторы обобщенного сдвига в пространствах L_p на торе с весом Якоби и их применение // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 1. С. 17–43.
4. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, № 1. P. 161–185.
5. Gangolli R. Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters // Ann. Inst. H. Poincaré. 1967. Vol. 3, no. 2. P. 121–226.
6. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities // J. Fourier Anal. Appl. 2020. Vol. 26, № 11.
7. Горбачев Д.В. Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Том 11, № 2. С. 72–91.
8. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Том 26, № 4. С. 126–137.
9. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна–Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3 (231). С. 179–180.
10. Иванов В.А. Точные результаты в задаче о неравенстве Бернштейна–Никольского на компактных симметрических римановых пространствах ранга 1 // Тр. МИАН СССР. 1992. Том 194. С. 111–119.
11. Jaming P., Speckbacher M. Concentration estimates for finite expansions of spherical harmonics on two-point homogeneous spaces via the large sieve principle // Sampl. Theory Signal Process. Data Anal. 2021. Vol. 19, no. 9.
12. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, № 3. P. 459–468.

13. Мартьянов И.А. Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 247–258.

14. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

15. Чертова Д.В. Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1 \leqslant p \leqslant 2$, с периодическим весом Якоби // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 5–27.

REFERENCES

1. Arestov, V.V. & Deikalova, M.V. 2014. "Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, vol. 284, no. suppl. 1, pp. 9–23.

2. Arestov, V. & Deikalova, M. 2016. "Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval", *Anal. Math.*, vol. 42, no. 2, pp. 91–120.

3. Vo Thi Cuc. 2012. "Generalized translation operators in L_p-spaces on torus with Jacobi weight and their application", *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 5–27. (in Russ.)

4. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. "Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere", *J. d'Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.

5. Gangolli, R. 1967. "Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters", *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 3, no. 2, pp. 121–226.

6. Ganzburg, M.I. 2020. "Sharp constants of approximation theory. I. Multivariate Bernstein–Nikolskii type inequalities", *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 26, no. 11.

7. Gorbachev, D.V. 2005. "An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. Suppl. 2, pp. S117–S138.

8. Gorbachev, D.V., & Mart'yanov, I.A. 2020. "Bounds of the Nikol'skii polynomial constants in L^p with Gegenbauer weight", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 26, no. 4, pp. 126–137. (In Russ.)

9. Ivanov, V.A. 1983. "On the Bernstein–Nikol'skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1", *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 3, pp. 145–146.

10. Ivanov, V.A. 1993. "Precise results in the problem of the Bernstein–Nikol'skij inequality on compact symmetric Riemannian spaces of rank 1", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194, pp. 115–124.

11. Jaming, P. & Speckbacher, M. 2021. "Concentration estimates for finite expansions of spherical harmonics on two-point homogeneous spaces via the large sieve principle", *Sampl. Theory Signal Process. Data Anal.*, vol. 19, no. 9.

12. Levin, E. & Lubinsky, D. 2015. "Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle", *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 3, pp. 459–468.

13. Martyanov, I.A. 2020. "Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 247–258. (In Russ.)

14. Helgason, S. 1962. “Differential geometry and symmetric spaces”, Academic Press, New York.

15. Chertova, D.V. 2009. “Jackson theorems in L_p-spaces, $1 \leqslant p \leqslant 2$, with periodic Jacobi weight”, *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 5–27. (in Russ.)

Получено 27.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-113-134

Потенциал Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье[1]

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В пространствах с весом $|x|^{-1}v_k(x)$, где $v_k(x)$ — вес Данкля, действует $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье. Гармонический анализ в этих пространствах важен, в частности, в задачах квантовой механики. В работе для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье определен потенциал Рисса. Для потенциала Рисса доказано (L^q, L^p)-неравенство с радиальными степенными весами, являющееся аналогом известного неравенства Стейна–Вейса для классического потенциала Рисса. Для потенциала Рисса получено точное значение L^p-нормы с радиальными степенными весами. Точное значение L^p-нормы с радиальными степенными весами для классического потенциала Рисса было получено независимо У. Бекнером и С. Самко.

Ключевые слова: $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье, потенциал Рисса.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Потенциал Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4, с. 113–134.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-113-134

Riesz potential for $(k,1)$-generalized Fourier transform[2]

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

In spaces with weight $|x|^{-1}v_k(x)$, where $v_k(x)$ is the Dunkl weight, there is the $(k,1)$-generalized Fourier transform. Harmonic analysis in these spaces is important, in particular, in problems of quantum mechanics. We define the Riesz potential for the $(k,1)$-generalized Fourier transform and prove for it, a (L^q,L^p)-inequality with radial power weights, which is an analogue of the well-known Stein–Weiss inequality for the classical Riesz potential. For the Riesz potential we calculate the sharp value of the L^p-norm with radial power weights. The sharp value of the L^p-norm with radial power weights for the classical Riesz potential was obtained independently by W. Beckner and S. Samko.

Keywords: $(k,1)$-generalized Fourier transform, Riesz potential.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
V. I. Ivanov, 2021, "Riesz potential for $(k,1)$-generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 113–134.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$ и нормой $|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, $\mathbb{S}^{d-1}$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^d$, Δ — оператор Лапласа, $d\mu(x)=(2\pi)^{-d/2}\,dx$ — нормализованная мера Лебега, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1\le p<\infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_p=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца,

$$\mathcal{F}(y)=(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-i\langle x,y\rangle}\,dx$$

— преобразование Фурье.

Введем обозначение $A\lesssim B$, если $A\le CB$ с константой $C>0$, зависящей только от несущественных параметров, и $A\asymp B$, если $A\lesssim B$ и $B\lesssim A$. Как обычно, для $p>1$, $p'=\frac{p}{p-1}$ — сопряженный гельдеров показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E.

Потенциал Рисса или дробный интеграл I_α определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha f(x)=(\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)|x-y|^{\alpha-d}\,d\mu(y)=(\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\tau^{-y}f(x)|y|^{\alpha-d}\,d\mu(y),\qquad(1)$$

[2]The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation number 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

где $0<\alpha<d$, $\gamma_\alpha=2^{\alpha-d/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d-\alpha)/2)$, и $\tau^y f(x)=f(x+y)$ — оператор сдвига.

Формулы для преобразований Фурье

$$\mathcal{F}(I_\alpha f)=|\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}(f),\quad \mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2}f)=|\cdot|^{\alpha}\mathcal{F}(f),$$

указывают, что потенциал Рисса (1) является обратным оператором для дробной степени оператора Лапласа.

(L^p,L^q)-ограниченность потенциала Рисса с радиальными степенными весами записывается в виде неравенства Стейна–Вейса

$$\big\||x|^{-\gamma}I_\alpha f(x)\big\|_q\le \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^{\beta}f(x)\big\|_p$$

с точной константой $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

Необходимые и достаточные условия конечности константы $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ известны.

Теорема A. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant q<\infty$, $0<\alpha<d$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *конечна тогда и только тогда, когда* $\gamma<\frac{d}{q}$, $\beta<\frac{d}{p'}$, $\alpha\geqslant d(\frac1p-\frac1q)$ *и* $\alpha-\gamma-\beta=d(\frac1p-\frac1q)$.

Достаточность условий в теореме A была доказана Г.Х. Харди и Дж.И. Литтлвудом [1] для $d=1$, С.Л. Соболевым [2] для $d>1$ и $\gamma=\beta=0$, Е.М. Стейном и Г. Вейсом [3] в общем случае. Необходимость условий в теореме A установлена в [4].

При $p=q$ получено точное значение константы $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d)$ или L^p-нормы потенциала Рисса.

Теорема B. *Если* $d\in\mathbb{N}$, $1<p<\infty$, $\gamma<\frac{d}{p}$, $\beta<\frac{d}{p'}$, $\alpha>0$, *и* $\gamma=\alpha-\beta$, *то*

$$\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma(\frac12(\frac{d}{p}-\gamma))\Gamma(\frac12(\frac{d}{p'}-\beta))}{\Gamma(\frac12(\frac{d}{p'}+\gamma))\Gamma(\frac12(\frac{d}{p}+\beta))}.$$

Теорема B была доказана И.У. Хербстом [5] для $\beta=0$ и У. Бекнером [6] и независимо С. Самко [7] в общем случае.

Одним из важных обобщений преобразования Фурье является преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ (см. [8, 9]). Аналог потенциала Рисса для преобразования Данкля определили С. Тангавелу и Ю. Шу [10].

Пусть $R\subset\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R, $G(R)\subset O(d)$ — группа отражений, образованная отражениями $\{\sigma_a\colon a\in R\}$, где σ_a — отражение относительно гиперплоскости $\langle a,x\rangle=0$, $k\colon R\to\mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы G.

Пусть

$$v_k(x)=\prod_{a\in R_+}|\langle a,x\rangle|^{2k(a)},\quad d\mu_k(x)=c_kv_k(x)dx$$

— вес и мера Данкля, где $c_k^{-1}=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2/2}v_k(x)\,dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $\langle k\rangle=\sum_{a\in R_+}k(a)$, $\lambda_k=d/2-1+\langle k\rangle$, $d_k=2\lambda_k+2$ — обобщенная размерность пространства $\mathbb{R}^d$ с весом $v_k(x)$, $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $1\le p<\infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_{p,d\mu_k}=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\,d\mu_k\right)^{1/p}<\infty$,

$$T_jf(x)=D_jf(x)+\sum_{a\in R_+}k(a)\langle a,e_j\rangle\,\frac{f(x)-f(\sigma_ax)}{\langle a,x\rangle},\quad j=1,\dots,d,$$

—дифференциально-разностные операторы Данкля и $\Delta_k=\sum_{j=1}^d T_j^2$ — лапласиан Данкля.

Обобщенная экспонента или ядро Данкля $e_k(x,y)$ является единственным решением системы

$$T_j f(x) = iy_j f(x), \quad j = 1, \dots, d, \qquad f(0) = 1.$$

Ее свойства подобны свойствам классической экспоненты $e^{i\langle x,y\rangle}$.

Для $f \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ преобразование Данкля определяется равенством

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x,y)}\, d\mu_k(x).$$

Если $k \equiv 0$, то $\mathcal{F}_0$ совпадает с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$. Преобразование Данкля является изометрией в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$.

М. Реслер (см. [9]) определила оператор обобщенного сдвига τ^y, $y \in \mathbb{R}^d$, для преобразования Данкля равенством

$$\mathcal{F}_k(\tau^y f)(z) = e_k(y,z)\mathcal{F}_k(f)(z), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k),$$

или

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e_k(y,z)e_k(x,z)\mathcal{F}_k(f)(z)\, d\mu_k(z).$$

Если $k \equiv 0$, то $\tau^y f(x) = f(x+y)$ совпадает с обычным сдвигом.

С. Тангавелу и Ю. Шу [10] определили потенциал Данкля – Рисса на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ как интегральный оператор

$$I^k_\alpha f(x) = (\gamma^k_\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x)|y|^{\alpha - d_k}\, d\mu_k(y), \tag{2}$$

где $0 < \alpha < d_k$ и $\gamma^k_\alpha = 2^{\alpha - d_k/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d_k - \alpha)/2)$. Как и для потенциала Рисса для него справедливо равенство $\mathcal{F}_k(I^k_\alpha f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}_k(f)$.

Неравенство Стейна–Вейса для потенциала Данкля – Рисса примет вид

$$\big\||x|^{-\gamma} I^k_\alpha f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \le \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)\big\||x|^\beta f(x)\big\|_{p,d\mu_k}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

с точной константой $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)$ и $1 < p \leqslant q < \infty$.

Аналоги теорем A и B для потенциала (2) установлены в [11, 4]. Там же можно найти предшествующие результаты.

Теорема C. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)$ *конечна при* $p = q$ *или при* $p < q$ *и* $\alpha \geqslant d_k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p'}$ *и* $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.

Вопрос о необходимости условия $\alpha \geqslant d_k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ при $p < q$ и функции кратности $k \not\equiv 0$ остается открытым.

Теорема D. *Если* $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\gamma < \frac{d_k}{p}$, $\beta < \frac{d_k}{p'}$, $\alpha > 0$, *и* $\gamma = \alpha - \beta$, *то*

$$\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d_k) = 2^{-\alpha}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{d_k}{p} - \gamma))\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{d_k}{p'} - \beta))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{d_k}{p'} + \gamma))\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{d_k}{p} + \beta))}.$$

Как видим, в теоремах C и D размерность d заменяется на обобщенную размерность d_k.

Потенциал Рисса — положительный оператор. Из определения (2) положительность потенциала Данкля – Рисса не вытекает. В [11] потенциал Данкля – Рисса записан с помощью положительного оператора сдвига, являющегося усреднением оператора сдвига τ^y, и тем самым доказана положительность потенциала Данкля – Рисса.

Дальнейшее обобщение преобразований Фурье и Данкля получено в [12]. Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед [12] определили a-деформированный гармонический осциллятор Данкля

$$\Delta_{k,a} = |x|^{2-a}\Delta_k - |x|^a, \quad a > 0,$$

и двупараметрическое семейство унитарных операторов $\mathcal{F}_{k,a}$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu_{k,a}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, d\mu_{k,a}\right)^{1/p}, \quad p = 2,$$

названное (k,a)-обобщенным преобразованием Фурье. В спектральной форме

$$\mathcal{F}_{k,a} = \exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,(2\lambda_k + a)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,\Delta_{k,a}\Big), \tag{3}$$

где

$$d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a}v_{k,a}(x)\,dx, \quad v_{k,a}(x) = |x|^{a-2}v_k(x), \quad c_{k,a}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^a/a}v_{k,a}(x)\,dx.$$

Число $d_{k,a} = 2\lambda_k + a = d + 2\langle k\rangle + a - 2$ называют обобщенной размерностью пространства $\mathbb{R}^d$ с весом $v_{k,a}(x)$.

Если $a = 2$, то (3) — преобразование Данкля. Если $a = 2$ и $k \equiv 0$, то (3) — преобразование Фурье. Если $a \neq 2$, то (3) — деформированное преобразование Данкля и деформированное преобразование Фурье.

Важный случай обобщенного преобразования Фурье получается при $a = 1$. Оно может быть записано как интегральный оператор

$$\mathcal{F}_{k,1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,y)f(y)\,d\mu_{k,1}(y) \tag{4}$$

с непрерывным ядром $B_k(x,y)$.

Оператор сдвига τ^y для преобразования $\mathcal{F}_{k,1}$ определен Салемом Бен Саидом и Делеавалом [13] (см. также [14]) равенством:

$$\mathcal{F}_{k,1}(\tau^y f)(z) = B_k(y,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1}).$$

Но он также как и оператор сдвига для преобразования Данкля не является положительным оператором и его L^p-ограниченность известна только при $p = 2$.

Нами [15] в качестве оператора сдвига предложен оператор среднего значения τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\,d\sigma_{k,1}(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

где $d\sigma_{k,1}(y') = a_{k,1}v_{k,1}(y')\,dy'$ — вероятностная мера на сфере. В [15] доказано, что оператор (5) положительный и ограниченный в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Здесь под $L^\infty(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ понимается пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ непрерывных ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup|f(x)|$.

Определим потенциал Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье как интегральный оператор

$$I_\alpha^{k,1}f(x) = (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x)|y|^{\alpha-d_{k,1}}\,d\mu_{k,1}(y), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{6}$$

где $0 < \alpha < d_{k,1}$ и $\gamma_\alpha^{k,1} = \Gamma(\alpha)/\Gamma(d_{k,1} - \alpha)$.

Как для потенциалов Рисса и Данкля – Рисса для него справедливо соотношение

$$\mathcal{F}_{k,1}(I_\alpha^{k,1} f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}_{k,1}(f).$$

Потенциал (6) может быть записан с помощью оператора сдвига (5)

$$I_\alpha^{k,1} f(x) = (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_0^\infty T^t f(x) t^{\alpha-d_{k,1}}\, d\nu_{\lambda_k,1}(t), \tag{7}$$

где

$$d\nu_{\lambda_k,1}(r) = b_{\lambda_k,1} r^{2\lambda_k}\, dr, \quad b_{\lambda_k,1}^{-1} = \int_0^\infty e^{-r} r^{2\lambda_k}\, dr = \Gamma(2\lambda_k+1).$$

Из (7) следует положительность потенциала (6).

Нас интересует аналог неравенства Стейна–Вейса

$$\big\||x|^{-\gamma} I_\alpha^{k,1} f(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \le \mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)\big\||x|^{\beta} f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{8}$$

с точной константой $\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

Мы доказываем следующие результаты. В них и далее мы предполагаем, что $\lambda_k>0$ или $d_{k,1}>1$.

Теорема 1. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant q<\infty$, $0<\alpha<d_{k,1}$. *Константа* $\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d,k)$ *конечна при* $p=q$ *или при* $p<q$ *и* $\alpha\geqslant d_{k,1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\gamma<\frac{d_{k,1}}{q}$, $\beta<\frac{d_{k,1}}{p'}$, *и* $\alpha-\gamma-\beta=d_{k,1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

Теорема 2. *Если* $d\in\mathbb{N}$, $1<p<\infty$, $\gamma<\frac{d_{k,1}}{p}$, $\beta<\frac{d_{k,1}}{p'}$, $\alpha>0$, *и* $\gamma=\alpha-\beta$, *то*

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}-\gamma)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}-\beta)}{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}+\gamma)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}+\beta)}. \tag{9}$$

Как видим, в теоремах 1 и 2 появляется обобщенная размерность $d_{k,1}$. При доказательстве теорем 1, 2 используются работы [10, 11, 12, 13, 15, 16, 17].

2. Элементы обобщенного гармонического анализа и операторы сдвига

Пусть $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода и порядка $\alpha\geqslant -1/2$,

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha+1)(-1)^j z^{2j}}{2^{2j} j!\Gamma(j+\alpha+1)}$$

— нормированная функция Бесселя, $r\in\mathbb{R}_+$, $\lambda_k = d/2-1+\langle k\rangle>0$, $d_{k,1}=2\lambda_k+1$, $d\nu_{\lambda_k,1}(r)=b_{\lambda_k,1}r^{2\lambda_k}\,dr$, $b_{\lambda_k,1}^{-1}=\Gamma(d_{k,1})$, $L^p(\mathbb{R}_+,d\nu_{\lambda_k,1})$, $1\leqslant p<\infty$, — пространство Лебега с нормой $\|f\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}}^p=\int_0^\infty |f|^p\,d\nu_{\lambda_k,1}$, $L^\infty(\mathbb{R}_+,d\nu_{\lambda_k,1})=C_b(\mathbb{R}_+)$.

Гармонический анализ Данкля, в частности, строится с помощью дифференциально-разностных операторов

$$T_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a\in R_+} k(a)\langle a,e_j\rangle\,\frac{f(x)-f(\sigma_a x)}{\langle a,x\rangle}, \quad j=1,\dots,d,$$

где R_+ — положительная подсистема системы корней R, а $\{e_j\}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. А также лапласиана Данкля

$$\Delta_k f(x) = \sum_{j=1}^{d} T_j^2 f(x).$$

При $k \equiv 0$, Δ_k — оператор Лапласа Δ. В гармоническом анализе Данкля построен положительный оператор сплетения V_k, для которого

$$TjV_k f(x) = V_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Для него получено представление

$$V_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, d\mu_x^k(\xi)$$

с вероятностной мерой $d\mu_x^k$, носитель которой лежит в выпуклой оболочке орбиты $O^x = \{gx \colon g \in G\}$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [9].

Для ядра $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье (4) справедливо представление

$$B_k(x,y) = V_k(j_{\lambda_k - 1/2}(\sqrt{|x||y|(1+\langle x', \cdot\rangle)}))(y'), \quad x = |x|x',\ y = |y|y'. \tag{10}$$

Пусть $\lambda_k > 0$. В силу (10) и неравенства $|j_\alpha(z)| \leqslant 1$ будет $|B_k(x,y)| \leqslant 1$, $B_k(0,y) = 1$. Известно также [12], что

$$B_k(x,y) = B_k(y,x), \quad B_k(\lambda x, y) = B_k(x, \lambda y), \quad \lambda > 0, \tag{11}$$

$$|x|\Delta_k^x B_k(x,y) = -|y| B_k(x,y), \quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x, ty')\, d\sigma_{k,1}(y') = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|x|}). \tag{12}$$

Обобщенное преобразование Фурье — изометрия пространства $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и $\mathcal{F}_{k,1}^2 = Id$.

Если $f \in \mathcal{A} = \{f \colon f, \mathcal{F}_{k,1}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})\}$, то равенство (4) выполнено поточечно. Справедливо вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}$.

Основные факты об обобщенном преобразовании Фурье $\mathcal{F}_{k,1}$ можно найти в [12].

Оператор сдвига τ^y в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье может быть записан в интегральной форме

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,\xi) B_k(y,\xi) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\, d\mu_{k,1}(\xi). \tag{13}$$

Если $f \in \mathcal{A}$ равенство (11) справедливо поточечно.

В [13] установлена самосопряженность τ^y. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $g \in \mathcal{A}$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x) g(x)\, d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \tau^y g(x)\, d\mu_{k,1}(x). \tag{14}$$

Для оператора τ^y на радиальных функциях $f(x) = f_0(|x|) \in \mathcal{A}$ в [13] получено представление

$$\tau^y f(x) = \frac{\Gamma(\lambda_k + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda_k)} V_k\Big(\int_{-1}^{1} f_0\Big(|x| + |y| - \sqrt{2|x||y|(1+\langle x', \cdot\rangle)}u\Big)(1-u^2)^{\lambda_k - 1}\, du\Big)(y'), \tag{15}$$

где $x = |x|x'$, $y = |y|y'$. В [13, 17] для радиальных функций из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, доказано неравенство

$$\|\tau^y f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Согласно (13) оператор сдвига T^t (5) для функций из класса $\mathcal{A}$ может быть записан поточечно

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,\xi) j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\, d\mu_{k,1}(\xi),$$

то есть для него

$$\mathcal{F}_{k,1}(T^t f)(\xi) = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi).$$

Оператор T^t также самосопряженный. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $g \in \mathcal{A}$, то

$$\int_{\mathbb{R}^d} T^t f(x) g(x)\, d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) T^t g(x)\, d\mu_{k,1}(x).$$

В [15, 17] установлено, что на функциях из пространства Шварца

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, d\sigma^k_{t,x}(\xi), \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

с вероятностной мерой $d\sigma^k_{t,x}$ и, что оператор $T^t f(x)$ может быть распространен на пространства $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, с выполнением неравенств

$$\begin{aligned} \|T^t f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} &\leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \|T^t f(x)\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}} &\leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{16}$$

Операторы сдвига τ^y, T^t позволяют определить свертки (см. [17])

$$(f *_{\lambda_k} g_0)(x) = \int_0^\infty T^t f(x) g_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t),\ (f *_k g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau^x g(y)\, d\mu_{k,1}(y), \tag{17}$$

где $g(y) = g_0(|y|)$ — радиальная функция. Если $f \in \mathcal{A}$, $g_0 \in L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda_k,1})$, то для $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(f *_{\lambda_k} g_0)(x) = (f *_k g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x) g(y)\, d\mu_{k,1}(y), \tag{18}$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а $g(x) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и ограничена, то $(f *_{\lambda_k} g_0)(x) = (f *_k g)(x)$ и

$$\|(f *_k g)\|_{p,d\mu_{k,1}} \leq \|f\|_{p,d\mu_{k,1}} \|g\|_{1,d\mu_{k,1}}.$$

3. О потенциале Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье

Если $f \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1}) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, то интеграл (7), определяющий потенциал Рисса, в силу (16) для всех x сходится абсолютно

$$\begin{aligned} |I^{k,1}_\alpha f(x)| &\lesssim \int_0^\infty |T^t f(x)| t^{\alpha - d_{k,1}}\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) \\ &\lesssim \|T^t f\|_\infty \int_0^1 t^{\alpha-1}\, dt + \|T^t f\|_{1,d\nu_{\lambda_k,1}} \|t^{\alpha-d_{k,1}} \chi_{[1,\infty)}(t)\|_\infty \\ &\lesssim \|f\|_\infty + \|f\|_{1,d_{k,1}} < \infty. \end{aligned} \tag{19}$$

Лемма 1. *Если $0 < \alpha < d_{k,1}$, то в обобщенном смысле*

$$\mathcal{F}_{k,1}((\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}|\cdot|^{\alpha-d_{k,1}})(x) = |x|^{-\alpha},$$

то есть для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{\alpha-d_{k,1}}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\,d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d}|x|^{-\alpha}\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x). \tag{20}$$

Доказательство. Так как $\mathcal{F}_{k,1}\left(e^{-|\cdot|}\right)(x) = e^{-|x|}$ [13], то для $s > 0$

$$\mathcal{F}_{k,1}\left(e^{-s|\cdot|}\right)(x) = s^{-d_{k,1}}e^{-|x|/s}. \tag{21}$$

Следовательно, для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|x|}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\,d\mu_{k,1}(x) = s^{-d_{k,1}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|/s}\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x). \tag{22}$$

Пусть $\beta = d_{k,1} - \alpha$. Умножая левую и правую части равенства (22) на $s^{\beta-1}$ и интегрируя, получим

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s^{\beta-1}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|x|}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\,d\mu_{k,1}(x)\,ds &= \int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\int_0^\infty s^{\beta-1}e^{-s|x|}\,ds\,d\mu_{k,1}(x)\\ &= \Gamma(\beta)\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{-\beta}\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)\,d\mu_{k,1}(x)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s^{\beta-1-d_{k,1}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|/s}\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x)\,ds &= \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\int_0^\infty s^{\beta-1-d_{k,1}}e^{-|x|/s}\,ds\,d\mu_{k,1}(x)\\ &= \Gamma(d_{k,1}-\beta)\int_{\mathbb{R}^d}|x|^{\beta-d_{k,1}}\varphi(x)\,d\mu_{k,1}(x).\end{aligned}$$

Отсюда и из определения $\gamma_\alpha^{k,1}$ в (6), получаем (20). Лемма 1 доказана.

Замечание 1. *Лемма 1 справедлива для любой $\varphi \in \mathcal{A}$, для которой*

$$|\varphi(x)| \lesssim (1+|x|)^{-d_{k,1}}, \quad |\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)(x)| \lesssim (1+|x|)^{-d_{k,1}}.$$

Лемма 2. *Если $0 < \alpha < d_{k,1}$, то в обобщенном смысле*

$$\mathcal{F}_{k,1}(I_\alpha^{k,1}f)(x) = |x|^{-\alpha}\mathcal{F}_{k,1}(f)(x),$$

то есть для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d}(I_\alpha^{k,1}f(x))g(x)\,d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d}|x|^{-\alpha}\mathcal{F}_{k,1}(f)(x)\mathcal{F}_{k,1}(g)(x)\,d\mu_{k,1}(x). \tag{23}$$

Доказательство. Так как

$$t^{\alpha-d_{k,1}} = \frac{1}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)}\int_0^\infty e^{-st}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\,ds, \tag{24}$$

то учитывая (19)

$$\int_{\mathbb{R}^d}(I_\alpha^{k,1}f(x))g(x)\,d\mu_{k,1}(x)=(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty T^tf(x)t^{\alpha-d_{k,1}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)g(x)\,d\mu_{k,1}(x)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty T^tf(x)e^{-st}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)g(x)\,d\mu_{k,1}(x)\,ds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(e^{-s|\cdot|})(z)g(x)\,d\mu_{k,1}(z)d\mu_{k,1}(x)ds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\int_0^\infty s^{-\alpha-1}e^{-|z|/s}\,ds\,d\mu_{k,1}(z)$$

$$=\int_{\mathbb{R}^d}|z|^{-\alpha}\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\,d\mu_{k,1}(z).$$

Равенство (23) и лемма 2 доказаны.

Для оценки L^p-нормы потенциала Рисса (6) функции $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ будем использовать максимальную функцию Харди–Литтлвуда [13]:

$$M_{k,1}f(x)=\sup_{r>0}\frac{|(f*_k\chi_{B_r})(x)|}{\int_{B_r}d\mu_{k,1}},$$

где B_r — евклидов шар радиуса r с центром в нуле. В силу (17), (18)

$$M_{k,1}f(x)=\sup_{r>0}\frac{|\int_0^r T^tf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)|}{\int_0^r d\nu_{\lambda_k,1}}. \tag{25}$$

В [13] доказано, что максимальная функция — ограниченный оператор в $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1<p\leqslant\infty$,

$$\|M_kf\|_{p,d\mu_{k,1}}\lesssim\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{26}$$

Лемма 3. *Если* $1<p<q<\infty$, $0<\alpha<d_{k,1}$, $\alpha=d_{k,1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, *то для* $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|I_\alpha^{k,1}f\|_{q,d\mu_{k,1}}\lesssim\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{27}$$

Доказательство. Для $R>0$ разобъем (7) на сумму двух слагаемых

$$I_\alpha^{k,1}f(x)=(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_0^R T^tf(x)\frac{1}{t^{d_{k,1}-\alpha}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)$$
$$+(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_R^\infty T^tf(x)\frac{1}{t^{d_{k,1}-\alpha}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)=J_1+J_2. \tag{28}$$

Интегрируя J_1 по частям, получим

$$\gamma_\alpha^{k,1}J_1=\int_0^R t^{-(d_{k,1}-\alpha)}\,d\Big(\int_0^t T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)\Big)$$
$$=R^\alpha\cdot R^{-d_{k,1}}\int_0^R T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)$$
$$+(d_{k,1}-\alpha)\int_0^R t^{-d_{k,1}}\int_0^t T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)\,t^{\alpha-1}\,dt, \tag{29}$$

так как

$$\varepsilon^{\alpha}\cdot\varepsilon^{-d_{k,1}}\Big|\int_0^{\varepsilon}T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)\Big|\lesssim\varepsilon^{\alpha}\sup_{\varepsilon>0}\frac{|\int_0^{\varepsilon}T^tf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)|}{\int_0^{\varepsilon}\,d\nu_{\lambda_k,1}}=\varepsilon^{\alpha}M_{k,1}f(x)$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\varepsilon^{\alpha}\cdot\varepsilon^{-d_{k,1}}\int_0^{\varepsilon}T^sf(x)\,d\nu_{\lambda_k,1}(s)=0.$$

Из (29), получаем

$$|J_1|\lesssim R^{\alpha}M_{k,1}f(x)+\int_0^R M_{k,1}f(x)t^{\alpha-1}\,dt\lesssim R^{\alpha}M_{k,1}f(x).\tag{30}$$

Для оценки J_2 применяем неравенство Гельдера и (16)

$$|J_2|\leqslant(\gamma_{\alpha}^{k,1})^{-1}\Big(\int_R^{\infty}t^{-(d_{k,1}-\alpha)p'}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\Big)^{1/p'}\|T^tf(x)\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}}\lesssim R^{-d_{k,1}q}\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Отсюда и из (28), (30)

$$|I_{\alpha}^{k,1}f(x)|\lesssim R^{\alpha}M_{k,1}f(x)+R^{-d_{k,1}q}\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Полагая $R=\big(M_{k,1}f(x)/\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\big)^{-q/d_{k,1}}$, получим для любых $1<p<q$

$$|I_{\alpha}^{k,1}f(x)|\lesssim(M_{k,1}f(x))^{p/q}(\|f\|_{p,d\mu_{k,1}})^{1-p/q}.\tag{31}$$

Остается проинтегрировать (31) и воспользоваться неравенством (26)

$$\|I_{\alpha}^{k,1}f\|_{q,d\mu_{k,1}}\lesssim\|M_{k,1}f\|_{p,d\mu_{k,1}}^{p/q}\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}^{1-p/q}\lesssim\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Лемма 3 доказана.

4. Представление потенциала Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье

Потенциал Рисса (7) для $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ можно записать в виде

$$I_{\alpha}^{k,1}f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\Phi(x,y)\,d\mu_{k,1}(y),\tag{32}$$

где

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\tau^x(e^{-s|\cdot|})(y)\,ds.\tag{33}$$

Действительно, применяя (24), (18), (14), получим

$$\begin{aligned}I_{\alpha}^{k,1}f(x)&=(\gamma_{\alpha}^{k,1})^{-1}\int_0^{\infty}T^tf(x)t^{\alpha-d_{k,1}}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_0^{\infty}T^tf(x)e^{-st}\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\,ds\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}\tau^xf(y)e^{-s|y|}\,d\mu_{k,1}(y)\,ds\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}s^{d_{k,1}-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\tau^x(e^{-s|\cdot|})(y)\,d\mu_{k,1}(y)\,ds\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1} \tau^x(e^{-s|\cdot|})(y)\, ds\, d\mu_{k,1}(y).$$

В лемме 4 описываются свойства ядра $\Phi(x,y)$. Пусть

$$x = rx', \quad y = ty', \quad r,t \in \mathbb{R}_+, \quad x', y' \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Нам понадобятся следующие факты

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_{k,1}(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(rx')\, d\sigma_{k,1}(x')\, d\nu_{\lambda_k,1}(r), \tag{34}$$

$$\int_0^\infty e^{-sr} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{rt})\, d\nu_{\lambda_k,1}(r) = \frac{e^{-t/s}}{s^{d_{k,1}}}, \tag{35}$$

$$j_\lambda(\sqrt{a}) j_\lambda(\sqrt{b}) = \int_{-1}^1 j_\lambda\Big(\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}v}\Big)\, d\psi_\lambda(v), \tag{36}$$

где

$$d\psi_\lambda(u) = c_\lambda (1-u^2)^{\lambda-1/2}\, du, \quad c_\lambda = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)}.$$

Формулу (35) можно найти в [18, стр.33, формула 10]. Формула (36) — это теорема умножения Гегенбауэра для функций Бесселя [19, п. 11.41], записанная в удобной для нас форме.

Лемма 4. *Для ядра $\Phi(x,y)$ выполняются следующие свойства:*

1. $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$;

2. $\Phi(rx', ty') = r^{\alpha-d_{k,1}} \Phi(x', (t/r)y')$;

3. $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(rx', ty')\, d\sigma_{k,1}(x') = \Phi_0(r,t)$, *где*

$$\Phi_0(r,t) := (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} c_{2\lambda_k} \int_0^\pi (r+t-2\sqrt{rt}\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}} \sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\, d\varphi;$$

4. $\Phi(x,y) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \tau^y(|\cdot|^{\alpha-d_{k,1}})(x)$ *или, эквивалентно,*

$$\gamma_\alpha^{k,1} \Phi(x,y) = V_k\Big(\int_{-1}^1 \Big(|x|+|y| - \sqrt{2|x||y|(1+\langle x', \cdot\rangle)} u \Big)^{\alpha-d_{k,1}} d\psi_{\lambda_k-1/2}(u) \Big)(y').$$

Доказательство. В силу (13), (21) ядро можно записать в виде

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^d} B_k(rx', \xi) B_k(ty', \xi) e^{-|\xi|/s}\, d\mu_{k,1}(\xi)\, ds. \tag{37}$$

Из (37) сразу вытекает равенство 1.

Делая в (37) замену переменных $\xi = z/r$, $s = \rho/r$ и применяя (11), получим

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= \frac{r^{\alpha-d_{k,1}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \rho^{-\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x', z) B_k((t/r)y', z) e^{-|z|/\rho}\, d\mu_{k,1}(z)\, d\rho \\ &= r^{\alpha-d_{k,1}} \Phi(x', (t/r)y'). \end{aligned}$$

Равенство 2 доказано.

Проинтегрируем (37) по сфере $\mathbb{S}^{d-1}$ и воспользуемся (12), (34) – (36)

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(rx',ty')\,d\sigma_{k,1}(x') = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{-(\alpha+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{r|\xi|})B_k(y,\xi)e^{-|\xi|/s}\,d\mu_{k,1}(\xi)\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{-(\alpha+1)}\int_0^\infty j_{2\lambda_k}(2\sqrt{r\rho})j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t\rho})e^{-\rho/s}\,d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}\int_0^\infty j_{2\lambda_k}(2\sqrt{r\rho})j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t\rho})e^{-s\rho}\,d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}\int_{-1}^1\int_0^\infty j_{2\lambda_k}(2\sqrt{\rho(r+t-2\sqrt{rt}v)})e^{-s\rho}\,d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)\,d\psi_{2\lambda_k}(v)\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^1\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}e^{-s(r+t-2\sqrt{rt}v)}\,ds\,d\psi_{2\lambda_k}(v)$$

$$= (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}\int_{-1}^1 (r+t-2\sqrt{rt}v)^{\alpha-d_{k,1}}\,d\psi_{2\lambda_k}(v)$$

$$= (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1}c_{2\lambda_k}\int_0^\pi (r+t-2\sqrt{rt}\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}}\sin^{2(d_{k,1}-1)}\varphi\,d\varphi = \Phi_0(r,t).$$

Равенство 3 доказано.

Согласно (15), (24), (33)

$$\tau^y(e^{-s|\cdot|})(x) = V_k\Big(\int_{-1}^1 e^{-s(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u)}\,d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y')$$

и

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}V_k\Big(\int_{-1}^1 e^{-s(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u)}\,d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y')\,ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}V_k\Big(\int_{-1}^1\int_0^\infty s^{d_{k,1}-\alpha-1}e^{-s(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u)}\,ds\,d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y')$$

$$= (\gamma_\alpha^k)^{-1}V_k\Big(\int_{-1}^1\Big(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u\Big)^{\alpha-d_{k,1}}\,d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y')$$

$$= (\gamma_\alpha^k)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{-1}^1\Big(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\xi\rangle)}u\Big)^{\alpha-d_{k,1}}\,d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\,d\mu_{y'}^k(\xi).$$

Равенство 4 и лемма 4 доказаны.

5. Доказательство теоремы 1

Вначале изучим (L^p,L^q)-ограниченность со степенными радиальными весами вспомогательных операторов Харди и Беллмана:

$$Hf(x) = \int_{|y|\leqslant|x|} f(y)\,d\mu_{k,1}(y), \quad Bf(x) = \int_{|y|\geqslant|x|} f(y)\,d\mu_{k,1}(y).$$

Нас интересуют неравенства

$$\big\||x|^{-a}Hf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \leq \mathbf{c}_H(a,b,p,q,d,k)\big\||x|^b f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}},$$

$$\big\||x|^{-a}Bf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \leq \mathbf{c}_B(a,b,p,q,d,k)\big\||x|^b f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}$$

с конечными константами $\mathbf{c}_H(a,b,p,q,d,k)$, $\mathbf{c}_B(a,b,p,q,d,k)$ и $1<p\leqslant q<\infty$.

Лемма 5. *Пусть* $1<p\leqslant q<\infty$. *Константа* $\mathbf{c}_H(a,b,p,q,d,k)$ *конечна тогда и только тогда, когда*

$$a>\frac{d_{k,1}}{q},\quad b<\frac{d_{k,1}}{p'},\quad a+b=d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big). \tag{38}$$

Доказательство. В [4] установлено, что при доказательстве неравенств для оператора Харди с радиальными весами достаточно ограничиться радиальными функциями. На радиальных функциях мы приходим к эквивалентному неравенству

$$\Big(\int_0^\infty \Big(r^{\frac{2\lambda_k}{q}-a}\int_0^r f_0(t)\,dt\Big)^q dr\Big)^{1/q} \lesssim \mathbf{c}_H(a,b,p,q,d,k)\Big(\int_0^\infty \Big(r^{b-\frac{2\lambda_k}{p'}}f_0(r)\Big)^p dr\Big)^{1/p}.$$

Необходимое и достаточное условие конечности константы в последнем неравенстве известно (см., например, [20], [21, Section 1], [22, Introduction]):

$$\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_r^\infty \Big(r^{\frac{2\lambda_k}{q}-a}\Big)^q dr\Big)^{1/q}\Big(\int_0^r \Big(r^{b-\frac{2\lambda_k}{p'}}\Big)^{-p'} dr\Big)^{1/p'}<\infty.$$

Простой анализ выполнения этого условия приводит к условиям (38). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* $1<p\leqslant q<\infty$. *Константа* $\mathbf{c}_B(a,b,p,q,d,k)$ *конечна тогда и только тогда, когда*

$$a<\frac{d_{k,1}}{q},\quad b>\frac{d_{k,1}}{p'},\quad a+b=d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big). \tag{39}$$

Доказательство. Проводится аналогично. Только необходимое и достаточное условие конечности константы $\mathbf{c}_B(a,b,p,q,d,k)$ выглядит так

$$\sup_{0<r<\infty}\Big(\int_0^r \Big(r^{\frac{2\lambda_k}{q}-a}\Big)^q dr\Big)^{1/q}\Big(\int_r^\infty \Big(r^{b-\frac{2\lambda_k}{p'}}\Big)^{-p'} dr\Big)^{1/p'}<\infty.$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 при $p=q$ в части достаточности будет проведено в следующей секции. Пусть $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f(x)\geqslant 0$, $1<p<q<\infty$, $0<\alpha<d_{k,1}$,

$$\gamma<\frac{d_{k,1}}{q},\quad \beta<\frac{d_{k,1}}{p'},\quad \gamma+\beta\geqslant 0,\quad \alpha-\gamma-\beta=d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big). \tag{40}$$

Докажем достаточность этих условий. Все рассуждения можно проводить для оператора $\widetilde{I}_\alpha^{k,1}$ с ядром

$$\Phi_\alpha(x,y)=V_k\Big(\int_{-1}^1 \Big(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u\Big)^{\alpha-d_{k,1}} d\psi_{\lambda_k-1/2}(u)\Big)(y').$$

Напомним, что неравенство (8) с конечной константой при $\gamma=\beta=0$, $\alpha=d_{k,1}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$, доказано в лемме 3.

Пусть

$$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d=E_1\sqcup E_2\sqcup E_3,$$

где

$$E_1=\{(x,y)\colon 2^{-1}|x|<|y|<2|x|\},\quad E_2=\{(x,y)\colon |y|\leqslant 2^{-1}|x|\},$$
$$E_3=\{(x,y)\colon |y|\geqslant 2|x|\}.$$

Разобъем оператор $\widetilde{I}_\alpha^{k,1}$ на сумму трех операторов

$$\widetilde{I}_\alpha^{k,1} = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \int_{E_3} = A_1 + A_2 + A_3.$$

Вместо неравенства (8) для оператора A_1 будем доказывать для оператора

$$\widetilde{A}_1 f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\Phi_\alpha(x,y)\chi_{E_1}(x,y)}{|x|^\gamma |y|^\beta}\, d\mu_{k,1}(y)$$

эквивалентное безвесовое неравенство

$$\|\widetilde{A}_1 f(x)\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \|f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{41}$$

Так как для $(x,y) \in E_1$, $|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u \leqslant 2(|x|+|y|)$, то полагая $\widetilde{\alpha} = d_{k,1}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$, получим

$$\begin{aligned}\frac{(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u)^{\alpha-d_{k,1}}}{|x|^\gamma|y|^\beta} &\lesssim \frac{(|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u)^{\alpha-d_{k,1}}}{(|x|+|y|)^{\gamma+\beta}} \\ &\lesssim (|x|+|y|-\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u)^{\widetilde{\alpha}-d_{k,1}}\end{aligned}$$

и

$$\frac{\Phi_\alpha(x,y)\chi_{E_1}(x,y)}{|x|^\gamma|y|^\beta} \lesssim \Phi_{\widetilde{\alpha}}(x,y).$$

Так как $0 < \widetilde{\alpha} < d_{k,1}$, то неравенство (41) верно по лемме 3.

Если $(x,y) \in E_2$, то $\Phi_\alpha(x,y) \asymp |x|^{\alpha-d_{k,1}}$ и

$$A_2 f(x) \lesssim |x|^{\alpha-d_{k,1}} Hf(x).$$

Неравенство (8) для оператора A_2 будет выполнено, если

$$\big\||x|^{\alpha-\gamma-d_{k,1}} Hf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\||x|^\beta f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{42}$$

Если выполнены условия (40), то выполнены и условия (38)

$$a+b = d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big), \quad b = \beta < \frac{d_{k,1}}{p'},$$

$$a = d_{k,1}+\gamma-\alpha = d_{k,1} + d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big) - \beta > \frac{d_{k,1}}{p} > \frac{d_{k,1}}{q}.$$

Следовательно, по лемме 5 неравенство (42) верно.

Если $(x,y) \in E_3$, то $\Phi_\alpha(x,y) \asymp |y|^{\alpha-d_{k,1}}$ и

$$A_3 f(x) \lesssim \int_{|y|\geqslant|x|} |y|^{\alpha-d_{k,1}} f(y)\, d\mu_{k,1}(y).$$

Неравенство (8) для оператора A_3 будет выполнено, если

$$\big\||x|^{-\gamma} Bf(x)\big\|_{q,d\mu_{k,1}} \lesssim \big\||x|^{\beta-\alpha+d_{k,1}} f(x)\big\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{43}$$

Если выполнены условия (40), то выполнены и условия (39)

$$a+b = d_{k,1}\Big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\Big), \quad a = \gamma < \frac{d_{k,1}}{q},$$

$$b = d_{k,1}+\beta-\alpha = d_{k,1} + d_{k,1}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big) - \gamma > \frac{d_{k,1}}{q'} > \frac{d_{k,1}}{p'}.$$

Следовательно, по лемме 6 неравенство (43) также верно.

Так как операторы A_i, $i = 1,2,3$, положительные, то необходимые условия ограниченности норм операторов Харди и Беллмана в леммах 5, 6 будут необходимыми и для ограниченности норм потенциала Рисса. Таким образом, условия (40) будут необходимыми в теореме 1 при $1 < p \leqslant q < \infty$ (кроме условия $\gamma+\beta \geqslant 0$). Теорема 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2

Пусть

$$d\nu(r) = r^{-1}\,dr, \quad dm_k(x) = d\nu(r)\,d\sigma_{k,1}(x').$$

Отметим, что

$$d\mu_{k,1}(x) = d\nu_{\lambda_k,1}(r)\,d\sigma_{k,1}(x') = b_{\lambda_k,1}|x|^{d_{k,1}}\,dm_k(x).$$

Нам понадобятся точные оценки норм операторов, определяемых сверткой Меллина,

$$A_g f(r) = (f * g)(r) = \int_0^\infty f(r/t)g(t)\,d\nu(t).$$

Свертка Меллина коммутативная

$$(f * g)(r) = (g * f)(r). \tag{44}$$

Лемма 7 [11]. *Пусть* $L^p = L^p(\mathbb{R}_+, d\nu)$, $1 \le p \leqslant \infty$. *Если* $f \in L^p$, $h \in L^{p'}$, $g \in L^1$, *то*

$$\|f * g\|_p \le \|g\|_1 \|f\|_p,$$

или

$$\left|\int_0^\infty \int_0^\infty h(r)f(t)g(r/t)\,d\nu(t)\,d\nu(r)\right| \le \|g\|_1\|h\|_{p'}\|f\|_p.$$

Если $g \ge 0$, *то*

$$\|A_g\|_{p\to p} = \|g\|_1, \tag{45}$$

или

$$\sup_{\|f\|_p\le 1}\ \sup_{\|h\|_{p'}\le 1}\left|\int_0^\infty h(r)A_g f(r)\,d\nu(r)\right| = \|g\|_1.$$

Доказательство теоремы 2. Мы следуем работе [11]. Пусть

$$1 < p < \infty, \quad \gamma < \frac{d_{k,1}}{p}, \quad \beta < \frac{d_{k,1}}{p'}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha = \gamma + \beta. \tag{46}$$

Рассмотрим модифицированный оператор

$$\widetilde{I}_\alpha^{k,1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)|y|^{d_{k,1}/p'-\beta}\Phi(x,y)\,dm_k(y).$$

Неравенство (8) для $q = p$ эквивалентно

$$b_{\lambda_k,1}\left\||x|^{-\gamma+d_{k,1}/p}\widetilde{I}_\alpha^{k,1} f(x)\right\|_{p,dm_k} \leqslant \mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k)\|f(x)\|_{p,dm_k}.$$

Если $x = rx'$, $y = ty'$, то применяя замену переменных $y \to (r/t)y'$ и свойства (1), (2) в лемме 4, (44), получим

$$\widetilde{I}_\alpha^{k,1} f(x) = r^{-\beta+\alpha-d_{k,1}/p}\int_{\mathbb{R}^d} f((r/t)y')\Phi_1(t,x',y')\,dm_k(ty'),$$

где

$$\Phi_1(t,x',y') = t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi(tx',y').$$

В силу (46)

$$|x|^{-\gamma+d_k/p}\widetilde{I}_\alpha^{k,1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(ty')\Phi_1(r/t,x',y')\,dm_k(ty').$$

Положим

$$J := \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} h(rx')f(ty')\Phi_1(r/t,x',y')\,dm_k(x)\,dm_k(y)$$
$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty\int_0^\infty h(rx')f(ty')\Phi_1(r/t,x',y')\,d\nu(t)\,d\nu(r)\,d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y').$$

Применяя лемму 7 и неравенство Гельдера, получим

$$|J| \leqslant \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Big(\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\Big)^{1/p'}\Big(\int_0^\infty |f(ty')|^p\,d\nu(t)\Big)^{1/p}$$
$$\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\,d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y')$$
$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\Big(\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\Big)^{1/p'}$$
$$\Big(\int_0^\infty |f(ty')|^p\,d\nu(t)\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\Big)^{1/p}\,d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y')$$
$$\leqslant \Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\,d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y')\Big)^{1/p'}$$
$$\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |f(ty')|^p\,d\nu(t)\int_0^\infty \Phi_1(t,x',y')\,d\nu(t)\,d\sigma_{k,1}(x')\,d\sigma_{k,1}(y')\Big)^{1/p}.$$

Воспользовавшись свойствами (1) и (3) в лемме 4, придем к

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_1(t,x',y')\,d\sigma_{k,1}(x') = t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi(tx',y')\,d\sigma_{k,1}(x') = t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)$$

и

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_1(t,x',y')\,d\sigma_{k,1}(y') = t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(1,t) = t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1).$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$|J| \leqslant \Big(\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t)\Big)^{1/p'}\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |h(rx')|^{p'}\,d\nu(r)\,d\sigma_{k,1}(x')\Big)^{1/p'}$$
$$\Big(\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t)\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty |f(ty')|^p\,d\nu(t)\,d\sigma_{k,1}(y')\Big)^{1/p}$$
$$= \int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t)\,\|h\|_{p',dm_k}\|f\|_{p,dm_k}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) \leqslant b_{\lambda_k,1}\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t).$$

Так как для радиальных функций $f(x) = f_0(|x|) = f_0(r)$

$$|x|^{-\gamma+d_{k,1}/p}\widetilde{I}^{k,1}_\alpha f(x) = \int_0^\infty f_0(r/t)t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,\frac{dt}{t},$$

то лемма 7 (см. (45)) дает

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = b_{\lambda_k,1}\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\,d\nu(t).$$

Покажем, что условия (46) для конечности константы $\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k)$ достаточны. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k)\\
&= (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} c_{2\lambda_k} b_{\lambda_k,1} \int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta} \int_0^\pi \bigl(1+t-2\sqrt{t}\cos\varphi\bigr)^{\alpha-d_{k,1}} \sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\, d\varphi\, d\nu(t)\\
&= (\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} c_{2\lambda_k} b_{\lambda_k,1} \int_0^\infty \frac{t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}}{(1+t)^{d_{k,1}-\alpha}} \int_0^\pi \Bigl(1-\frac{2\sqrt{t}\cos\varphi}{1+t}\Bigr)^{\alpha-d_{k,1}} \sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\, d\varphi\, d\nu(t).
\end{aligned}$$

Относительно t интеграл имеет особенности в точках $t=0,1,\infty$. Он сходится в нуле тогда и только тогда, когда $\gamma=\alpha-\beta<\frac{d_{k,1}}{p}$. Он сходится в бесконечности только при $\beta<\frac{d_{k,1}}{p'}$. Для исследования поведения интеграла в окрестности точки $t=1$ положим $r=2\sqrt{t}/(1+t)$. Тогда при $r\to 1-0$

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= \int_0^\pi (1-r\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}} \sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\, d\varphi\\
&\asymp \int_0^1 (1-r+r\varphi^2/2)^{\alpha-d_{k,1}} \varphi^{2d_{k,1}-2}\, d\varphi + 1\\
&\asymp \int_0^{\sqrt{1-r}} (1-r)^{\alpha-d_{k,1}} \varphi^{2d_{k,1}-2}\, d\varphi + \int_{\sqrt{1-r}}^1 \varphi^{2\alpha-2}\, d\varphi + 1\\
&\asymp \begin{cases} (1-r)^{\alpha-1/2}, & 0<\alpha<1/2,\\ -\ln(1-r), & \alpha=1/2,\\ 1, & \alpha>1/2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Поэтому при $t\to 1$

$$\int_0^\pi \Bigl(1-\frac{2\sqrt{t}\cos\varphi}{1+t}\Bigr)^{\alpha-d_{k,1}} \sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\, d\varphi \asymp \begin{cases} |1-t|^{2\alpha-1}, & 0<\alpha<1/2,\\ -\ln|1-t|, & \alpha=1/2,\\ 1, & \alpha>1/2, \end{cases}$$

Следовательно, и при $t=1$ мы имеем интегрируемую особенность.

Остается вычислить интеграл $\int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\, d\nu(t)$. Ряд

$$(1-r\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}} = \frac{1}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n\Gamma(d_{k,1}-\alpha+n)}{\Gamma(n+1)} r^n\cos^n\varphi$$

при $0\leqslant r<1$ сходится равномерно на $[0,\pi]$ и

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= \int_0^\pi (1-r\cos\varphi)^{\alpha-d_{k,1}} \sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\, d\varphi\\
&= \frac{1}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)} \sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(d_{k,1}-\alpha+2m)}{\Gamma(2m+1)} r^{2m} \int_0^\pi \cos^{2m}\varphi \sin^{2d_{k,1}-2}\varphi\, d\varphi\\
&= \frac{\Gamma(d_{k,1}-\frac12)}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)} \sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(m+\frac12)\Gamma(d_{k,1}-\alpha+2m)}{\Gamma(2m+1)\Gamma(d_{k,1}+m)} r^{2m}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = b_{\lambda_k,1} \int_0^\infty t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta}\Phi_0(t,1)\, d\nu(t)$$

$$= \frac{(\gamma_\alpha^{k,1})^{-1} c_{2\lambda_k} b_{\lambda_k,1} \Gamma(d_{k,1}-\frac{1}{2})}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{2m}\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(d_{k,1}-\alpha+2m)}{\Gamma(2m+1)\Gamma(d_{k,1}+m)}$$
$$\times \int_0^\infty \frac{t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta+m-1}}{(1+t)^{d_{k,1}-\alpha+2m}}\, dt.$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{t^{d_{k,1}/p-\alpha+\beta+m-1}}{(1+t)^{d_{k,1}-\alpha+2m}}\, dt = \frac{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}+\beta-\alpha+m)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}-\beta+m)}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha+2m)}$$

и

$$\gamma_\alpha^{k,1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(d_{k,1}-\alpha)}, \quad c_{2\lambda_k} = \frac{\Gamma(d_{k,1})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(d_{k,1}-\frac{1}{2})}, \quad b_{\lambda_k,1} = \frac{1}{\Gamma(d_{k,1})},$$

то

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}+\beta-\alpha+m)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}-\beta+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(d_{k,1}+m)}.$$

Полагая

$$a = \frac{d_{k,1}}{p}+\beta-\alpha, \quad b = \frac{d_{k,1}}{p'}-\beta, \quad c = d_{k,1},$$

запишем

$$c_1(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}{\Gamma(1+m)\Gamma(c+m)}.$$

Далее используем гипергеометрическую функцию [23, Ch. II]

$$F(a,b;c;z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m!(c)_m}\, z^k, \quad (a)_m = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}.$$

Получим

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\, F(a,b;c;1).$$

Известно [23, Sect. 2.8, (46)], что

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c \neq 0,-1,-2,\ldots, \quad c > a+b,$$

поэтому

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

где $c-a-b=\alpha$, $c-a=\frac{d_k}{p'}+\alpha-\beta=\frac{d_k}{p'}+\gamma$, $\frac{d_k}{p}+\beta$.

Окончательно

$$\mathbf{c_1}(\alpha,\beta,\gamma,p,p,d,k) = \frac{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}-\gamma)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}-\beta)}{\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p'}+\gamma)\Gamma(\frac{d_{k,1}}{p}+\beta)}.$$

Теорема 2 доказана.

7. Заключение

В работе определен потенциал Рисса для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье. Для него доказан аналог известного неравенства Стейна–Вейса для (L^q, L^p)-норм с радиальными степенными весами. Исследована необходимость условий на параметры. Открытым остался только вопрос о необходимости условия $\alpha \geqslant d_{k,1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ при $1<p<q<\infty$. Этот вопрос открыт и для потенциала Данкля – Рисса. Другим направлением исследований может стать доказательство аналога неравенства Стейна–Вейса для радиальных кусочно-степенных весов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littelwood J. E. Some properties of fractional integrals, I // Math. Zeit. 1928. Vol.27. P. 565–606.

2. Soboleff S. On a theorem in functional analysis // Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 1938. Vol. 4(46), no.3. P. 471–497.

3. Stein E. M., Weiss G. Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space // J. Math. Mech. 1958. Vol. 7, no. 4. P. 503–514.

4. Горбачев Д.В, Иванов В.И. Весовые неравенства для потенциала Данкля – Рисса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, Вып. 1. С. 131–147.

5. Herbst I. W. Spectral theory of the operator $(p^2+m^2)^{1/2}-Ze^2/r$ // Comm. Math. Phys. 1977. Vol. 53. P. 285–294.

6. Beckner W. Pitt's inequality with sharp convolution estimates // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 136, no. 5. P. 1871–1885.

7. Samko S. Best constant in the weighted Hardy inequality: the spatial and spherical version // Fract. Calc. Anal. Appl. 2005. Vol. 8. P. 39–52.

8. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

9. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 2003. Vol. 1817. P. 93–135.

10. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform // Potential Analysis. 2021. Vol. 55, no. 4. P. 513–538.

12. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

13. Salem Ben Saïd, Deleaval L. Translation operator and maximal function for the $(k,1)$-generalized Fourier transform // Journal of Functional Analysis. 2020. Vol. 279, no. 8. Article 108706.

14. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform // International Mathematics Research Notices. 2016. Vol. 2016, no. 23. P. 7179–7200.

15. Иванов В. И. Ограниченный оператор сдвига для (k, 1)-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 4. С. 85–96.

16. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.

17. Иванов В. И. Свойства и применение положительного оператора сдвига для (k, 1)-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, № 4. С.

18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Преобразования Бесселя. Интегралы. М.: Наука, 1970. 328 с.

19. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 799 с.

20. Sinnamon G, Stepanov V. D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. Vol. 54, no 2. P. 89–101.

21. Kufner A., Opic B. Xardy-type inequalities. Pitman Research Notes in Mathematics Series. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1990. 333 p.

22. Kufner A., Persson L. E. Weighted inequalities of Xardy type. Singopure-London: World Scientific hrblishing Co. Pte. Ltd., 2003. 358 p.

23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеметрическая функция. функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

REFERENCES

1. Hardy G. H., Littelwood J. E., 1928, "Some properties of fractional integrals, I" , *Math. Zeit.*, vol. 27, pp. 565–606.

2. Soboleff S., 1938, "On a theorem in functional analysis" , *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 4(46), no. 3, pp. 471–497.

3. Stein E. M., Weiss G., 1958, "Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space" , *J. Math. Mech.*, vol. 7, no. 4, pp. 503–514.

4. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147.

5. HerbstI. W., 1977, "Spectral theory of the operator $(p^2+m^2)^{1/2}-Ze^2/r$" , *Comm. Math. Phys.*, vol. 53, pp. 285–294.

6. Beckner W., 2008, "Pitt's inequality with sharp convolution estimates" , *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 136, no. 5, pp. 1871–1885.

7. Samko S., 2005, "Best constant in the weighted Hardy inequality: the spatial and spherical version" , *Fract. Calc. Anal. Appl.*, vol.8, pp. 39–52.

8. Dunkl C. F., 1992, "Hankel transforms associated to finite reflections groups" , *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.

9. Rösler M., 2003, "Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions" , *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

10. Thangavelu S., Xu Y., 2007, "Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform" , *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.

11. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S.Yu., 2021, «Riesz potential and maximal function for Dunkl transform», Potential Analysis, vol. 55, no. 4, pp. 513–538.

12. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B., 2012, "Laguerre semigroup and Dunkl operators" , *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.

13. Salem Ben Saïd, Deleaval L., 2020, "Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform" , *Journal of Functional Analysis*, vol. 279, no. 8, Article 108706.

14. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2016, "Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform" , *International Mathematics Research Notices*, vol. 2016, no. 23, pp. 7179–7200.

15. Ivanov V. I., 2020, "Bounded translation operator for the (k,1)-generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 85–96. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-85-96

16. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2019, "Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications" , *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.

17. Ivanov V. I., 2021, "Properties and application of a positive translation operator for (k, 1)-generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. (In Russ.)

18. Bateman H., Erdélyi A., 1954, "Tables of Integral Transforms. Vol.2" , *New York, Toronto, London: MC GRAV-HILL Book COMPANY, INC*, 328 p.

19. Watson G.N., 1995, "A treatise on the theory of Bessel functions" , *Cambridge University Press*, 814 p.

20. Sinnamon G, Stepanov V. D., 1996, "The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$" , *J. London Math. Soc.*, vol. 54, no. 2, pp 89–101.

21. Kufner A., Opic B., 1990, "Xardy-type inequalities" , Pitman Research Notes in Mathematics Series, *Harlow: Longman Scientific and Technical*, 333 p.

22. Kufner A., Persson L. E., 2003, "Weighted inequalities of Xardy type" , *Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, 358 p.

23. Bateman H., Erdélyi A., 1953, "Higher Transcendental Functions, I" , *New York: McGraw Hill Book Company*, 296 p.

Получено 20.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-135-151

Свойства и применение положительного оператора сдвига для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье[1]

В. И. Иванов

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В 2012 году Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед определили двупараметрическое (k,a)-обобщенное преобразование Фурье, действующее в пространствах с весом $|x|^{a-2}v_k(x)$, $a>0$, где $v_k(x)$ — вес Данкля. Наиболее интересны случаи $a=2$ и $a=1$. При $a=2$ обобщенное преобразование Фурье совпадает с преобразованием Данкля и оно хорошо изучено. В случае $a=1$ гармонический анализ, важный, в частности, в задачах квантовой механики, изучен пока еще не достаточно. Одним из существенных элементов гармонического анализа является ограниченный оператор сдвига, позволяющий определить свертку и структурные характеристики функций. При $a=1$ имеется оператор сдвига τ^y. Его L^p-ограниченность установлена Салемом Бен Саидом и Делеавалом, но только на радиальных функциях и при $1\leqslant p\leqslant 2$. Ранее при $a=1$ мы предложили новый положительный оператор обобщенного сдвига $T^tf(x)$, $t\in\mathbb{R}_+$, $x\in\mathbb{R}^d$, и доказали его L^p-ограниченность по x. В настоящей работе доказана его L^p-ограниченность по t. Для оператора сдвига τ^y, L^p-ограниченность на радиальных функциях установлена и для $2<p<\infty$. С помощью оператора T^t определена свертка и для нее доказано неравенство Юнга. Для $(k,1)$-обобщенных средних, определяемых с помощью свертки, установлены достаточные условия L^p-сходимости и сходимости почти всюду. Выполнение этих условий проверено для аналогов классических методов суммирования Гаусса-Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера – Рисса.

Ключевые слова: $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье, положительный оператор сдвига.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
В. И. Иванов. Свойства и применение положительного оператора сдвига для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 4, с. 135–151.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-4-135-151

Properties and application of a positive translation operator for $(k,1)$-Generalized Fourier transform[2]

V. I. Ivanov

Ivanov Valerii Ivanovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

In 2012, Salem Ben Saĭd, Kobayashi, and Orsted defined the two-parametric (k,a)-generalized Fourier transform, acting in the space with weight $|x|^{a-2}v_k(x)$, $a>0$, where $v_k(x)$ is the Dunkl weight. The most interesting cases are $a=2$ and $a=1$. For $a=2$ the generalized Fourier transform coincides with the Dunkl transform and it is well studied. In case $a=1$ harmonic analysis, which is important, in particular, in problems of quantum mechanics, has not yet been sufficiently studied. One of the essential elements of harmonic analysis is the bounded translation operator, which allows one to determine the convolution and structural characteristics of functions. For $a=1$, there is a translation operator τ^y. Its L^p-boundedness was recently established by Salem Ben Saĭd and Deleaval, but only on radial functions and for $1\leqslant p\leqslant 2$. Earlier, we proposed for $a=1$ a new positive generalized translation operator and proved that it is L^p -bounded in x. In this paper, it is proved that it is L^p -bounded in t. For the translation operator τ^y, L^p-boundedness on radial functions is established for $2<p<\infty$. The operator T^t is used to define a convolution and to prove Young's inequality. For $(k,1)$-generalized means defined by convolution, sufficient conditions for L^p-convergence and convergence almost everywhere are established. The fulfillment of these conditions is verified for analogues of the classical summation methods of Gauss–Weierstrass, Poisson, Bochner–Riesz.

Keywords: $(k,1)$-generalized Fourier transform, Riesz potential.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
V. I. Ivanov, 2021, "Properties and application of a positive translation operator for $(k,1)$-Generalized Fourier transform" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 135–151.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$ и нормой $|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, Δ — оператор Лапласа,

$$\mathcal{F}(y)=(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,y\rangle}\,dx$$

— преобразование Фурье

[2]The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation number 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

Одним из обобщений преобразования Фурье стало преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ [1], определяемое с помощью системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$, группы отражений $G \subset O(d)$ и функции кратности $k\colon R \to \mathbb{R}$, инвариантной относительно G. Здесь G — конечная группа, порожденная отражениями $\{\sigma_\alpha\colon \alpha \in R\}$, где σ_α — отражение относительно гиперплоскости $(\alpha, x) = 0$. Роль оператора Лапласа в гармоническом анализе Данкля играет дифференциально-разностный оператор Δ_k, называемый лапласианом Данкля [2]. Для $k \equiv 0$, $\Delta_k = \Delta$. Лапласиан Данкля позволяет записать гармонический осциллятор Данкля $\Delta_k - |x|^2$ и преобразование Данкля в спектральной форме

$$\mathcal{F}_k = \exp\Big(\frac{i\pi}{4}\big(d + \sum_{\alpha\in R} k(\alpha)\big)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{4}\big(\Delta_k - |x|^2\big)\Big).$$

Дальнейшее обобщение преобразований Фурье и Данкля получено в [3]. Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед [3] определили a-деформированный гармонический осциллятор Данкля

$$\Delta_{k,a} = |x|^{2-a}\Delta_k - |x|^a, \quad a > 0,$$

и двупараметрическое семейство унитарных операторов в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu_{k,a}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\, d\mu_{k,a}(x)\right)^{1/p}, \quad p = 2,$$

названное (k,a)-обобщенным преобразованием Фурье:

$$\mathcal{F}_{k,a} = \exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,(2\lambda_k + a)\Big)\exp\Big(\frac{i\pi}{2a}\,\Delta_{k,a}\Big). \tag{1}$$

Здесь

$$\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \langle k\rangle, \qquad \langle k\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R} k(\alpha),$$

$$d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a}v_{k,a}(x)\,dx, \qquad v_{k,a}(x) = |x|^{a-2}v_k(x),$$

$$v_k(x) = \prod_{\alpha\in R} |\langle\alpha, x\rangle|^{k(\alpha)}, \qquad c_{k,a}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^a/a} v_{k,a}(x)\,dx.$$

Число $d_{k,a} = 2\lambda_k + a = d + 2\langle k\rangle + a - 2$ называют обобщенной размерностью пространства $\mathbb{R}^d$ с весом $|x|^{a-2}v_{k,a}(x)$.

Если $a = 2$, то (1) — преобразование Данкля. Если $a = 2$ и $k \equiv 0$, то (1) — преобразование Фурье. Если $a \neq 2$, то (1) — деформированное преобразование Данкля и деформированное преобразование Фурье. Они могут найти применение в разных задачах. Например, при $a = 1$ и $k \equiv 0$ деформированное преобразование Данкля является оператором унитарного обращения модели Шредингера минимального представления группы $O(N+1, 2)$ [4].

В гармоническом анализе и теории приближений большую роль играет оператор сдвига, так как он позволяет определить свертку и структурные характеристики функций. В гармоническом анализе Фурье оператор сдвига имеет вид $\tau^y f(x) = f(x + y)$. В гармоническом анализе Данкля оператор сдвига τ^y был определен Реслер для функций из $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,2})$ [5]. В этих пространствах он является ограниченным линейным оператором. Но его ограниченность в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,2})$, $p \neq 2$, доказана только для группы отражений $G = \mathbb{Z}_2^d$. Основная трудность состоит в том, что τ^y не является положительным оператором. Реслер [6] показала, что среднее значение τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\, d\sigma_k(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$— евклидова сфера, а $d\sigma_k(y') = a_k v_k(y')\, dy'$ — вероятностная мера на сфере, является положительным оператором. Опираясь на этот факт, в [7] доказана L^p-ограниченность оператора T^t для всех $1 \leqslant p < \infty$. Таким образом, его можно использовать как ограниченный оператор сдвига. Если $k \equiv 0$, то оператор T^t совпадает с оператором среднего значения по сфере и имеет широкое применение.

Следующий важный случай обобщенного преобразования Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$ при $a = 1$. Оператор сдвига τ^y для преобразования $\mathcal{F}_{k,1}$, ограниченный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, определен Салемом Бен Саидом и Делеавалом [8], (см. также [9]). Они доказали, что на радиальных функциях оператор τ^y положительный и ограниченный в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Нами в [10] при $\lambda_k > 0$ определен ограниченный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ оператор среднего значения τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\, d\sigma_{k,1}(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $d\sigma_{k,1}(y') = a_{k,1} v_{k,1}(y')\, dy'$ — вероятностная мера на сфере. В [10] доказано, что оператор T^t (2) положительный и на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ допускает представление

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, d\sigma^k_{t,x}(\xi), \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{3}$$

с вероятностной мерой $d\sigma^k_{t,x}$ и, что он может быть распространен на пространства $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, с выполнением неравенства

$$\|T^t f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \tag{4}$$

где под $L^\infty(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ понимается пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ непрерывных ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$.

Пусть $r \in \mathbb{R}_+$, $a > 0$, $2\lambda + a - 1 \geqslant 0$,

$$d\nu_{\lambda,a}(r) = b_{\lambda,a} r^{2\lambda+a-1}\, dr, \quad b^{-1}_{\lambda,a} = \int_0^\infty e^{-r^a/a} r^{2\lambda+a-1}\, dr = a^{2\lambda/a}\Gamma(2\lambda/a + 1),$$

$L^p(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda,a})$, $1 \leqslant p < \infty$, — банахово пространство измеримых по Лебегу функций с нормой $\|f\|^p_{p,d\nu_{\lambda,a}} = \int_0^\infty |f|^p\, d\nu_{\lambda,a}$, $L^\infty(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda,a}) = C_b(\mathbb{R}_+)$.

Наша цель — при $a = 1$ провести дальнейшее исследование свойств положительного оператора сдвига и указать его применение. Мы докажем неравенство

$$\|T^t f(x)\|_{p,d\nu_{\lambda,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{5}$$

Аналогичное неравенство в анализе Данкля ($a = 2$) было установлено в [7]. Для оператора сдвига τ^y на радиальных функциях L^p-ограниченность установим и для $2 < p < \infty$. С помощью оператора T^t определим свертку и для нее докажем неравенство Юнга. Что позволит вместе с L^p-ограниченностью максимальной функции Харди–Литтлвуда [8] исследовать условия сходимости $(k, 1)$-обобщенных средних Гаусса-Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и почти всюду.

Мы будем писать $A \lesssim B$, если $A \leq CB$ с константой $C > 0$, зависящей только от несущественных параметров, и $A \asymp B$, если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$. Как обычно, для $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный гельдеров показатель, $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E.

2. Элементы обобщенного гармонического анализа и операторы сдвига

Гармонический анализ Данкля, в частности, строится с помощью дифференциально-разностных операторов

$$T_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a \in R_+} k(a)\langle a, e_j\rangle \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{\langle a, x\rangle}, \quad j = 1, \dots, d,$$

где R_+ — положительная подсистема системы корней R, а $\{e_j\}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. А также лапласиана Данкля

$$\Delta_k f(x) = \sum_{j=1}^{d} T_j^2 f(x).$$

При $k \equiv 0$, Δ_k — оператор Лапласа Δ. Для радиальных функций

$$\Delta_k f(x) = \Delta f(x) + 2 \sum_{a \in R_+} k(a) \frac{\langle \nabla f(x), a\rangle}{\langle a, x\rangle},$$

где $\nabla f(x)$ — градиент функции $f(x)$.

В гармоническом анализе Данкля построен положительный оператор сплетения V_k, для которого

$$TjV_k f(x) = V_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Для него получено представление

$$V_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, d\mu_x^k(\xi)$$

с вероятностной мерой $d\mu_x^k$, носитель которой лежит в выпуклой оболочке орбиты $O^x = \{gx \colon g \in G\}$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [2].

Пусть $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода и порядка $\alpha \geqslant -1/2$,

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)(-1)^j z^{2j}}{2^{2j} j! \Gamma(j+\alpha+1)} \tag{6}$$

— нормированная функция Бесселя. Для нее $|j_\alpha(z)| \leqslant 1$.

В дальнейшем будем считать, что выполнено условие $\lambda_k > 0$. В пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ $(k,1)$-обобщенное преобразование Фурье (1) определяется как интегральный оператор

$$\mathcal{F}_{k,1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,y) f(y)\, d\mu_{k,1}(y) \tag{7}$$

с непрерывным ядром

$$B_k(x,y) = V_k(j_{\lambda_k - 1/2}(\sqrt{|x||y|(1 + \langle x', \cdot\rangle)}))(y'), \quad x = |x|x',\ y = |y|y', \tag{8}$$

для которого в силу представления (8)

$$|B_k(x,y)| \leqslant 1, \quad B_k(0,y) = 1, \quad |x|\Delta_k^x B_k(x,y) = -|y| B_k(x,y), \tag{9}$$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x,ty')\,d\sigma_{k,1}(y') = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|x|}). \tag{10}$$

Обобщенное преобразование Фурье — изометрия пространства $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и $\mathcal{F}_{k,1}^2 = Id$.

Если $f \in \mathcal{A} = \{f\colon f, \mathcal{F}_{k,1}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})\}$, то равенство (6) справедливо поточечно. Справедливо вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}$.

Основные факты об обобщенном преобразовании Фурье $\mathcal{F}_{k,1}$ можно найти в [3].

Оператор сдвига в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье определяется как интегральный оператор

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,\xi)B_k(y,\xi)\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\,d\mu_{k,1}(\xi). \tag{11}$$

В силу (9) норма оператора τ^y в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ равна 1. Если $f \in \mathcal{A}$ равенство (11) справедливо поточечно.

Для оператора τ^y на радиальных функциях $f(x) = f_0(|x|) \in \mathcal{A}$ в [8] получено представление

$$\tau^y f(x) = \frac{\Gamma(\lambda_k{+}1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda_k)} V_k\Big(\int_{-1}^1 f_0\Big(|x|+|y|{-}\sqrt{2|x||y|(1+\langle x',\cdot\rangle)}u\Big)(1{-}u^2)^{\lambda_k-1}\,du\Big)(y'), \tag{12}$$

где $x = |x|x'$, $y = |y|y'$. В [8] для радиальных функций из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, доказано неравенство

$$\|\tau^y f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{13}$$

В $C_b(\mathbb{R}^d)$ $(p = \infty)$ оно вытекает из (12).

Для функций из класса $\mathcal{A}$ оператор сдвига T^t определен равенством (2). В силу (10) он может быть записан как интегральный оператор

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,\xi) j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|})\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)\,d\mu_{k,1}(\xi). \tag{14}$$

Он также действует в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и его норма равна 1. Для функций из класса $\mathcal{A}$ равенство (14) выполняется поточечно. Из (14) также вытекает

$$\mathcal{F}_{k,1}(T^t f)(\xi) = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|})\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi).$$

3. Свойства положительного оператора сдвига

Определим a-деформированное преобразование Ганкеля

$$\mathcal{H}_{\lambda_k,a}(g_0)(\rho) = \int_0^\infty g_0(r) j_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho r)^{a/2}\Big)\,d\nu_{\lambda_k,a}(r), \quad \rho \in \mathbb{R}_+.$$

Преобразование Ганкеля является унитарным оператором в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda_k,a})$ и для радиальных функций позволяет записать (k,a)-обобщенное преобразование Фурье [3]. Если $g(x) = g_0(r)$, $r = |x|$, $\rho = |y|$, то

$$\mathcal{F}_{k,a}(g)(y) = (\mathcal{F}_{k,a}(g))_0(\rho),\ (\mathcal{F}_{k,a}(g))_0(\rho) = \mathcal{H}_{\lambda_k,a}(g_0)(\rho),\ \|g\|_{p,d\mu_{k,a}} = \|g_0\|_{p,d\nu_{\lambda_k,a}}.$$

С помощью операторов T^t и τ^x определим две свертки

$$(f *_{\lambda_k} g_0)(x) = \int_0^\infty T^t f(x) g_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t), \tag{15}$$

$$(f *_k g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x g(y)\, d\mu_{k,1}(y). \tag{16}$$

Свертка (16) была определена в [8], где для нее было доказано неравенство

$$\|(f *_k g)\|_{p,d\mu_{k,1}} \le \|f\|_{p,d\mu_{k,1}} \|g\|_{1,d\mu_{k,1}} \tag{17}$$

в предположении, что $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \le p \le \infty$, и радиальная функция $g \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и ограничена.

Лемма 1. Если $f \in \mathcal{A}$, $g_0 \in L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda_k,1})$, $g(y) = g_0(|y|)$, то для $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$(f *_{\lambda_k} g_0)(x) = (f *_k g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x) g(y)\, d\mu_{k,1}(y), \tag{18}$$

$$\mathcal{F}_k(f *_{\lambda_k} g_0)(y) = \mathcal{F}_k(f *_k g)(y) = \mathcal{F}_k(f)(y)\mathcal{F}_k(g)(y). \tag{19}$$

Доказательство. Применяя (7) и (14), получим

$$\begin{aligned}(f *_{\lambda_k} g_0)(x) &= \int_0^\infty T^t f(x) g_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|y|}) B_k(x,y)\mathcal{F}_{k,1}(f)(y)\, d\mu_{k,1}(y) g_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,y)\mathcal{F}_{k,1}(f)(y)\mathcal{F}_{k,1}(g)(y)\, d\mu_{k,1}(y),\end{aligned}$$

поэтому

$$\mathcal{F}_{k,1}(f *_{\lambda_k} g_0)(y) = \mathcal{F}_{k,1}(f)(y)\mathcal{F}_{k,1}(g)(y).$$

Второе равенство в (19) для свертки (15) доказано. Докажем равенство сверток (15) и (16) сначала для $g \in \mathcal{A}$. Действительно, в силу (11) и (7)

$$\begin{aligned}(f *_k g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x g(y)\, d\mu_{k,1}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} B_k(y,z) B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\, d\mu_{k,1}(z)\, d\mu_{k,1}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\, d\mu_{k,1}(z).\end{aligned}$$

Случай $g \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ получается предельным переходом.

Наконец, применяя (11), получим

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x) g(y)\, d\mu_{k,1}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \int_{\mathbb{R}^d} B_k(y,z) B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\, d\mu_{k,1}(z)\, d\mu_{k,1}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x,z)\mathcal{F}_{k,1}(f)(z)\mathcal{F}_{k,1}(g)(z)\, d\mu_{k,1}(z).\end{aligned}$$

Второе равенство в (18) и лемма 1 в целом доказаны.

Теорема 1. Если $1 \le p \le \infty$, то для всех $x \in \mathbb{R}^d$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$

$$\|T^t f(x)\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}} \le \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.$$

Доказательство. Для заданного $x \in \mathbb{R}^d$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ определим оператор

$$(B^x f)(t) = T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|y|}) B_k(x,y)\mathcal{F}_{k,1}(f)(y)\, d\mu_{k,1}(y).$$

Если $p = 2$, то

$$T^t f(x) = \int_0^\infty j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t\rho}) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x, \rho y') \mathcal{F}_{k,1}(f)(\rho y')\, d\sigma_{k,1}(y')\, d\nu_{\lambda_k,1}(\rho)$$

и

$$\mathcal{H}_{\lambda_k,1}(T^{(\cdot)} f(x))(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x, \rho y') \mathcal{F}_{k,1}(f)(\rho y')\, d\sigma_{k,1}(y').$$

Учитывая унитарность операторов $\mathcal{H}_{\lambda_k,1}$, $\mathcal{F}_{k,1}$, и применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}
\|T^t f(x)\|^2_{2,d\nu_{\lambda_k,1}} &= \|\mathcal{H}_{\lambda_k,1}(T^{(\cdot)} f(x))(\rho)\|^2_{2,d\nu_{\lambda_k,1}} \\
&= \int_0^\infty \Big| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x, \rho y') \mathcal{F}_{k,1}(f)(\rho y')\, d\sigma_{k,1}(y') \Big|^2 d\nu_{\lambda_k,1}(\rho) \\
&\le \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\mathcal{F}_{k,1}(f)(\rho y')|^2\, d\sigma_{k,1}(y')\, d\nu_{\lambda_k,1}(\rho) \\
&= \|\mathcal{F}_{k,1}(f)\|^2_{2,d\mu_{k,1}} = \|f\|^2_{2,d\mu_{k,1}}.
\end{aligned}$$

Неравенство (5) при $p = 2$ и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ доказано. В силу плотности $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ оно справедливо на всем пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$.

Пусть $p = 1$. Применяя оценку (13) при $p = \infty$, получим

$$\begin{aligned}
\|T^t f(x)\|_{1,d\nu_{\lambda_k,1}} &= \sup\Big\{ \int_0^\infty T^t f(x) g_0(t)\, d\nu_{2\lambda_k}(t) \colon g_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+),\ \|g_0\|_\infty \le 1 \Big\} \\
&= \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau^x g(y)\, d\mu_{k,1}(y) \colon g \in \mathcal{S}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_\infty \le 1 \Big\} \\
&\le \|f\|_{1,d\mu_{k,1}} \sup\big\{ \|\tau^x g(y)\|_\infty \colon g \in \mathcal{S}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_\infty \le 1 \big\} \le \|f\|_{1,d\mu_{k,1}}.
\end{aligned}$$

Неравенство (5) при $p = 1$ и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ доказано. Оно также может быть распространено на все пространство $L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$.

По интерполяционной теореме Рисса–Торина выведем (5) для $1 < p < 2$.

Если $2 < p < \infty$, то в силу (18) и (13) при $1 < p' < 2$

$$\begin{aligned}
\|T^t f(x)\|_{p,d\nu_{\lambda_k,1}} &= \sup\Big\{ \int_0^\infty T^t f(x) g_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) \colon g_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+),\ \|g_0\|_{p',d\nu_{\lambda_k,1}} \le 1 \Big\} \\
&= \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau^x g(y)\, d\mu_{k,1}(y) \colon g \in \mathcal{S}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_{p',d\mu_{k,1}} \le 1 \Big\} \\
&\le \|f\|_{p,d\mu_{k,1}} \sup\{ \|\tau^x g(y)\|_{p',d\mu_{k,1}} \colon g \in \mathcal{S}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d),\ \|g\|_{p',d\mu_{k,1}} \le 1 \} \\
&\le \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}.
\end{aligned}$$

Неравенство (5) при $2 < p < \infty$ и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ доказано. Оно также может быть распространено на все пространство $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$.

Для $p = \infty$ неравенство (5) вытекает из представления (3). Теорема 1 доказана.

Теперь мы можем доказать неравенство Юнга для сверток (15) and (16).

Теорема 2. Пусть $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$ и $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Если $f \in \mathcal{A}$ и $g(x) = g_0(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1}) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, то

$$\|(f *_{\lambda_k} g_0)\|_{r,d\nu_{2\lambda_k}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}} \|g_0\|_{q,d\nu_{2\lambda_k}}, \tag{20}$$

$$\|(f *_k g)\|_{r,d\mu_{k,1}} \le \|f\|_{p,d\mu_{k,1}} \|g\|_{q,d\mu_{k,1}}. \tag{21}$$

Доказательство. Согласно равенству (18) достаточно доказать неравенство (20). Пусть $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{p}-\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{\nu}=\frac{1}{q}-\frac{1}{r}$. Тогда $\frac{1}{\mu}\geq 0$, $\frac{1}{\nu}\geq 0$ и $\frac{1}{r}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=1$. Применяя неравенство Гельдера и (19), получим

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^\infty T^t f(x)g_0(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t)\Big| &\leq \Big(\int_0^\infty |T^t f(x)|^p|g_0(t)|^q\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\Big)^{1/r}\\ &\times\Big(\int_0^\infty |T^t f(x)|^p\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\Big)^{1/\mu}\Big(\int_0^\infty |g_0(t)|^q\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\Big)^{1/\nu}\\ &\leq \Big(\int_0^\infty |T^t f(x)|^p|g_0(t)|^q\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\Big)^{1/r}\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}^{p/\mu}\|g_0\|_{q,d\nu_{2\lambda_k}}^{q/\nu}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4)

$$\begin{aligned}\|(f*_{\lambda_k}g_0)\|_{r,d\nu_{2\lambda_k}} &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty |T^t f(x)|^p|g_0(t)|^q\,d\nu_{2\lambda_k}(t)\,d\mu_{k,1}(x)\Big)^{1/r}\\ &\times\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}^{p/\mu}\|g_0\|_{q,d\nu_{2\lambda_k}}^{q/\nu}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\|g_0\|_{q,d\nu_{2\lambda_k}}.\end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что неравенство (20) справедливо, если $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, а $g(x)=g_0(|x|)\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$ и ограничена, причем для всех таких функций свертки $(f*_{\lambda_k}g_0)(x)$ и $(f*_k g)(x)$ совпадают. В частности, при $r=p$, $q=1$ справедлив аналог неравенства (17)

$$\|(f*_{\lambda_k}g_0)\|_{p,d\nu_{2\lambda_k}}\leqslant\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\|g_0\|_{1,d\nu_{2\lambda_k}}. \tag{22}$$

Теорема 3. Если $1\leq p\leq\infty$, то для любого $y\in\mathbb{R}^d$ и любой радиальной функции $g(x)=g_0(|x|)\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$

$$\|\tau^y g\|_{p,d\mu_{k,1}}\leqslant\|g\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{23}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $2<p<\infty$ и $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Применяя неравенство Юнга (21) при $r=\infty$, $p=p'$, $q=p$, получим (23)

$$\begin{aligned}\|\tau^y g\|_{p,d\mu_{k,1}} &= \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d}\tau^y g(x)f(x)\,d\mu_{k,1}(x)\colon f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{p',d\mu_{k,1}}\leqslant 1\Big\}\\ &\leqslant\sup\{\|(f*_k g)(y)\|_{\infty,d\mu_{k,1}}\colon f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_{p',d\mu_{k,1}}\leq 1\}\leqslant\|g\|_{p,d\mu_{k,1}}.\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

В этом параграфе использованы методы работы [7].

4. Сходимость $(k,1)$-обобщенных средних

Пусть $\varepsilon>0$, $C_0(\mathbb{R}^d)$ — подпространство функций $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$, для которых $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, радиальные функции $\varphi,\widehat{\varphi}=\mathcal{F}_{k,1}(\varphi)\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})\cap C_b(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(x)=\varphi_0(r)$, $r=|x|$, $\widehat{\varphi}(y)=\widehat{\varphi}_0(\rho)$, $\rho=|y|$, $\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)=\mathcal{F}_{k,1}(\varphi(\varepsilon(\cdot)))(y)$. Тогда

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)=\varepsilon^{-d_{k,1}}\widehat{\varphi}\Big(\varepsilon^{-1}y\Big),\quad \widehat{\varphi}_\varepsilon\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})\cap C_0(\mathbb{R}^d),\quad \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\,d\mu_{k,1}=1.$$

В соответствии с замечанием 1 для $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, мы можем определить $(k,1)$-обобщенные средние

$$\Phi_\varepsilon f(x)=(f*_{\lambda_k}(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0)(x)=(f*_k\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)$$

$$= \int_0^\infty T^t f(x)(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x \widehat{\varphi}_\varepsilon(y)\, d\mu_{k,1}(y).$$

В силу (17), (22)

$$\|\Phi_\varepsilon f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0\|_{1,d\nu_{\lambda_{k,1}}} \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}. \tag{24}$$

Исследуем L^p-сходимость и сходимость почти всюду $(k,1)$-обобщенных средних. Пусть

$$\omega(\delta, f)_p = \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta} \|T^t f - f\|_{p,d\mu_{k,1}}$$

– модуль непрерывности функции $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В этом параграфе под $L^\infty(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ мы понимаем $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 2. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то $\omega(\delta, f)_p \leqslant 2\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}$,

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta, f)_p = 0. \tag{25}$$

Доказательство. Применяя (4), получим $\|T^t f - f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant 2\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}$, откуда $\omega(\delta, f)_p \leqslant 2\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}$. В силу (4) равенство (25) можно доказывать для функций из плотного множества $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Так как для нормированной функции Бесселя (6)

$$j_\alpha'(z) = -\frac{z}{2(\alpha+1)} j_{\alpha+1}(z) \tag{26}$$

[11, глава V], то $|j_\alpha(z) - 1| \leqslant \frac{|z|}{2(\alpha+1)}$ и из (14)

$$\begin{aligned} |T^t f(x) - f(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) - 1||\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)|\, d\mu_{k,1}(\xi) \\ &\leqslant \frac{\sqrt{t}}{d_{k,1}} \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{|\xi|}|\mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi)|\, d\mu_{k,1} = c_1(f)\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Равенство (25) при $p = \infty$ доказано.

Пусть $R \geqslant 1$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| \leqslant R\}$, $CB_R = \mathbb{R}^d \setminus B_R$. Напомним, что $d_{k,1} = 2\lambda_k + 1 = d + 2\langle k\rangle - 1$. Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $x \in CB_R$ в [10] доказана оценка $|T^t f(x)| \leqslant c_2(f)|x|^{-(d_{k,1}+1)}$. Равенство (25) при $p < \infty$ вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |T^t f(x) - f(x)|^p\, d\mu_{k,1} &\leqslant (c_1(f)\sqrt{t})^p \int_{B_R} d\mu_{k,1} \\ &\quad + (2c_2(f))^p \int_{CB_R} |x|^{-p(d_{k,1}+1)}\, d\mu_{k,1} + 2^p \int_{CB_R} |f(x)|^p\, d\mu_{k,1}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 4. Пусть радиальные функции $\varphi, \widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,1}(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1}) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(0) = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при $p = \infty$, то

$$\|f(x) - \Phi_\varepsilon f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} \to 0 \ (\varepsilon \to 0).$$

Доказательство. Учитывая (24) и теорему Банаха–Штейнгауза, теорему 4 достаточно доказывать на плотном множестве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то

$$\Phi_\varepsilon f(x) = \int_0^\infty T^t f(x)(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_0^\infty T^{\varepsilon t} f(x)\widehat{\varphi}_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t),$$

поэтому

$$\begin{aligned}\|f(x)-\Phi_\varepsilon f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} &= \Big\|\int_0^\infty (T^{\varepsilon t}f(x)-f(x))\widehat{\varphi}_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\Big\|_{p,d\mu_{k,1}}\\ &\leqslant \int_0^\infty \|T^{\varepsilon t}f(x)-f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}}|\widehat{\varphi}_0(t)|\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\ &\leqslant \int_0^\infty \omega(\varepsilon t,f)_p|\widehat{\varphi}_0(t)|\,d\nu_{\lambda_k,1}(t).\end{aligned}$$

Утверждение теоремы 4 вытекает из леммы 2 и оценки

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \omega(\varepsilon t,f)_p\widehat{\varphi}_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t) &\leqslant \omega(\varepsilon R,f)_p\int_0^\infty |\widehat{\varphi}_0(t)|\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\\ &\quad + 2\|f\|_{p,d\mu_{k,1}}\int_R^\infty |\widehat{\varphi}_0(t)|\,d\nu_{\lambda_k,1}(t).\end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Для исследования сходимости почти всюду нам понадобится максимальная функция Харди–Литтлвуда. Для $(k,1)$-обобщенного преобразования Фурье максимальная функция $\mathcal{M}_{k,1}f$ была определена в [8]. Если $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, то

$$\mathcal{M}_{k,1}f(x)=\sup_{r>0}\frac{\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x\chi_{B_r}(y)d\mu_{k,1}(y)\right|}{\int_{B_r}d\mu_{k,1}(y)},$$

По замечанию 1

$$\mathcal{M}_{k,1}f(x)=\sup_{r>0}\frac{\left|\int_0^r T^tf(x)d\nu_{\lambda_k,1}(t)\right|}{\int_0^r d\nu_{\lambda_k,1}(t)}=\sup_{r>0}\frac{\left|\int_0^r T^tf(x)t^{2\lambda_k}dt\right|}{\int_0^r t^{2\lambda_k}dt}.$$

Лемма 3. Если $|(\widehat{\varphi})_0(t)|\lesssim(1+t)^{-(d_{k,1}+1/2)}$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_{k,1})$, $1\leqslant p<\infty$, то

$$\sup_{\varepsilon>0}|(f*_{\lambda_k}(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0)(x)|=\sup_{\varepsilon>0}|(f*_k\widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)|\lesssim\mathcal{M}_{k,1}|f|(x).$$

Доказательство. Так как T^t — положительный оператор, то

$$|(f*_{\lambda_k}(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0)(x)|\leqslant|(|f|*_{\lambda_k}(|\widehat{\varphi}_\varepsilon|)_0)(x)|,\quad \mathcal{M}_{k,1}f(x)\leqslant\mathcal{M}_{k,1}|f|(x)$$

и мы можем считать, что $f(x),(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\geqslant 0$.

Используя разложение

$$(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\chi_{\varepsilon 2^j\leqslant t\leqslant\varepsilon 2^{j+1}}(t)$$

и равенство $(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)=\varepsilon^{-d_{k,1}}(\widehat{\varphi})_0(\varepsilon^{-1}t)$, получим

$$\int_0^\infty T^tf(x)(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty T^tf(x)(\widehat{\varphi}_\varepsilon)_0(t)\chi_{\varepsilon 2^j\leqslant t\leqslant\varepsilon 2^{j+1}}(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)$$

$$\lesssim\sum_{j=-\infty}^{\infty}(1+2^j)^{-1/2}\Big(\frac{2^j}{1+2^j}\Big)^{d_{k,1}}\frac{\int_0^\infty T^tf(x)\chi_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon 2^{j+1}}(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)}{\int_0^\infty\chi_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon 2^{j+1}}(t)\,d\nu_{\lambda_k,1}(t)}\lesssim\mathcal{M}_{k,1}f(x).$$

Лемма 3 доказана.

Для максимальной функции Харди–Литтлвуда $\mathcal{M}_{k,1}f$ справедливо слабое L^1-неравенство и сильное L^p-неравенство при $1 < p < \infty$ [8], поэтому в условиях леммы 3 для оператора $\sup_{\varepsilon>0}|(f *_k \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)|$ также справедливо слабое L^1-неравенство и сильное L^p-неравенство при $1 < p < \infty$. Кроме этого для средних $(f *_k \widehat{\varphi}_\varepsilon)(x)$ есть равномерная сходимость на $C_0(\mathbb{R})$, плотном в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p < \infty$. Следовательно по теореме 2.1.14 из [12] справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть радиальные функции $\varphi, \widehat{\varphi} = \mathcal{F}_{k,1}(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1}) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(0) = 1$, $|(\widehat{\varphi})_0(t)| \lesssim (1+t)^{-(d_{k,1}+1/2)}$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$, то $\Phi_\varepsilon f(x) \to f(x)$ $(\varepsilon \to 0)$ почти всюду.

5. Сходимость средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса

Применим результаты предыдущего параграфа для $(k,1)$-аналогов классических средних Гаусса–Вейерштрасса, Пуассона, Бохнера–Рисса.

Пусть $R, a > 0$. Определим (k,a)-обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса $W_{R,a}f(x)$ при помощи положительного обобщенного радиального мультипликатора Гаусса $w_a(x) = e^{-|x|^a/a}$

$$\mathcal{F}_{k,a}(W_{R,a}f)(y) = w_a\Big(\frac{y}{R}\Big)\mathcal{F}_{k,a}(f)(y).$$

Так как $|w_a(x)| \leqslant 1$, то $W_{R,a}f$ — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$:

$$\|W_{R,a}f\|_{2,d\mu_{k,a}} \leqslant \|f\|_{2,d\mu_{k,a}}.$$

Для мультипликатора $w_a(x) = (w_a)_0(r)$, $r = |x|$, $\rho = |y|$, вычислим (k,a)-обобщенное преобразование Фурье

$$\widehat{w}_a(y) = \mathcal{F}_{k,a}(w_a)(y) = \mathcal{H}_{\lambda_k,a}((w_a)_0)(\rho) = \int_0^\infty e^{-r^a/a} j_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho r)^{a/2}\Big)\, d\nu_{\lambda_k,a}(r).$$

Делая замену переменной $t = r^a$ и применяя (6), [13, стр.33, формула 10], получим

$$\widehat{w}_a(y) = \frac{2}{a\rho^{\lambda_k}} \int_0^\infty e^{-t^2/a} J_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}\rho^{a/2}t\Big) t^{2\lambda_k/a+1}\, dt = e^{-\rho^a/a} = w_{0,a}(\rho) = w_a(y).$$

Отметим, что

$$\widehat{w}_a \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a}) \cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{w}_a^R(y)\, d\mu_{k,a}(y) = 1,$$

$$\mathcal{F}_{k,a}\Big(w_a\Big(\frac{(\cdot)}{R}\Big)\Big)(y) = R^{d_{k,a}}\widehat{w}_a(Ry) = \widehat{w}_a^R(y). \tag{27}$$

Если $a = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то в силу замечания 1 $(k,1)$-обобщенные средние Гаусса–Вейерштрасса имеют вид

$$W_{R,1}f(x) = (f *_{\lambda_k} (\widehat{w}_1^R)_0)(x) = (f *_k \widehat{w}_1^R)(x)$$

$$= \int_0^\infty T^t f(x)(\widehat{w}_1^R)_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x \widehat{w}_1^R(y)\, d\mu_{k,1}(y).$$

Согласно (17), (22)

$$\|W_{R,1}f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Для $(k,1)$-обобщенных средних Гаусса–Вейерштрасса в силу (27) выполнены условия теорем 4, 5, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при $p = \infty$, то

$$\|f(x) - W_{R,1}f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} \to 0, \quad (R \to \infty).$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p < \infty$, то $W_{R,1}f(x) \to f(x)$ $(R \to \infty)$ почти всюду.

Определим (k,a)-обобщенные средние Пуассона $P_{R,a}f(x)$ при помощи положительного обобщенного радиального мультипликатора Гаусса $p_a(x) = e^{-|x|^{a/2}}$

$$\mathcal{F}_{k,a}(P_{R,a}f)(y) = p_a\Big(\frac{y}{R}\Big)\mathcal{F}_{k,a}(f)(y).$$

Так как $|p_a(x)| \leqslant 1$, то $P_{R,a}f$ — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$:

$$\|P_{R,a}f\|_{2,d\mu_{k,a}} \leqslant \|f\|_{2,d\mu_{k,a}}.$$

Для мультипликатора $p_a(x) = (p_a)_0(r)$, $r = |x|$, вычислим (k,a)-обобщенное преобразование Фурье

$$\widehat{p}_a(y) = \mathcal{F}_{k,a}(p_a)(y) = \mathcal{H}_{\lambda_k,a}((p_a)_0)(\rho) = \int_0^\infty e^{-r^{a/2}} j_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho r)^{a/2}\Big)\, d\nu_{\lambda_k,a}(r), \ \rho = |y|.$$

Делая замену переменной $t = r^{a/2}$ и применяя (6), [13, стр.32, формула 4], получим

$$\widehat{p}_a(y) = \frac{2}{a\rho^{\lambda_k}} \int_0^\infty e^{-t} J_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho)^{a/2}t\Big) t^{2\lambda_k/a+1}\, dt = \frac{(2\sqrt{\pi})^{-1}\Gamma\Big(\frac{2\lambda_k}{a} + \frac{3}{2}\Big)}{\Big(\frac{a^2}{4} + \rho^a\Big)^{\frac{2\lambda_k}{a}+\frac{3}{2}}}.$$

Отметим, что

$$\widehat{p}_a \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a}) \cap C_b(\mathbb{R}^d), \quad \mathcal{F}_{k,a}\Big(p_a\Big(\frac{(\cdot)}{R}\Big)\Big)(y) = R^{d_{k,a}}\widehat{p}_a(Ry) = \widehat{p}_a^R(y),$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{p}_a^R(y)\, d\mu_{k,a}(y) = 1, \quad (\widehat{p}_a)_0(\rho) \asymp \frac{1}{(1+\rho)^{d_{k,a}+a/2}}. \tag{28}$$

Если $a = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то в силу замечания 1 $(k,1)$-обобщенные средние Пуассона имеют вид

$$P_{R,1}f(x) = (f *_{\lambda_k} (\widehat{p}_1^R)_0)(x) = (f *_k \widehat{p}_1^R)(x)$$
$$= \int_0^\infty T^t f(x)(\widehat{p}_1^R)_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x\widehat{p}_1^R(y)\, d\mu_{k,1}(y).$$

Согласно (17), (22)

$$\|P_{R,1}f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leqslant \|f\|_{p,d\mu_{k,1}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Для $(k,1)$-обобщенных средних Пуассона в силу (28) выполнены условия теорем 4, 5, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при $p = \infty$, то

$$\|f(x) - P_{R,1}f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} \to 0, \quad (R \to \infty).$$

Если $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p < \infty$, то $P_{R,1}f(x) \to f(x)$ $(R \to \infty)$ почти всюду.

Пусть $\delta > 0$,

$$s_a(x) = \begin{cases} (1-|x|^a)^\delta, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Определим (k,a)-обобщенные средние Бохнера-Рисса $S^\delta_{R,a}f$ порядка δ при помощи мультипликатора $s_a(x)$:

$$\mathcal{F}_{k,a}(S^\delta_{R,a}f)(y) = s_a\Big(\frac{y}{R}\Big)\mathcal{F}_{k,a}(f)(y).$$

Так как $|s_a(x)| \leqslant 1$, то $S^\delta_{R,a}f$ — ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$:

$$\|S^\delta_{R,a}f\|_{2,d\mu_{k,a}} \leqslant \|f\|_{2,d\mu_{k,a}}.$$

Для мультипликатора $s_a(x) = (s_a)_0(r)$, $r = |x|$, вычислим (k,a)-обобщенное преобразование Фурье

$$\widehat{s}_a(y) = \mathcal{F}_{k,a}(s_a)(y) = \mathcal{H}_{\lambda_k,a}((s_a)_0)(\rho) = \int_0^1 (1-r^a)^\delta j_{2\lambda_k/a}\Big(\frac{2}{a}(\rho r)^{a/2}\Big)\, d\nu_{\lambda_k,a}(r),\ \rho = |y|.$$

Применяя разложение (6), получим

$$\begin{aligned}\widehat{s}_a(y) &= b_{\lambda_k,a}\sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma(2\lambda_k/a+1)(-1)^j(\rho^a/a^2)^j}{j!\Gamma(j+2\lambda_k/a+1)}\int_0^1 r^{aj+2\lambda_k+a-1}(1-r^a)^\delta\, dr \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{a^{2\lambda_k/a+1}}\sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j(2\rho^{a/2}/a)^{2j}}{2^{2j}j!\Gamma(2\lambda_k/a+\delta+j+2)} \\ &= \frac{\Gamma(\delta+1)}{a^{2\lambda_k/a+1}\Gamma(2\lambda_k/a+\delta+2)} j_{2\lambda_k/a+\delta+1}\Big(\frac{2}{a}\rho^{a/2}\Big).\end{aligned}$$

Так как при $\alpha \geqslant -1/2$, $\rho \to \infty$ (см. [11, глава V]):

$$\rho^{\alpha+1/2}j_\alpha(\rho) = A_\alpha\left(\cos(\rho - a_\alpha) + O(|\rho|^{-1})\right),$$

где

$$A_\alpha = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}}, \quad a_\alpha = \frac{\pi(\alpha+1/2)}{2},$$

то $\widehat{s}_a(y) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ тогда и только тогда, когда $\delta > \frac{2\lambda_k}{a} + \frac{1}{2} = \frac{d_{k,a}}{a} - \frac{1}{2}$. Число

$$\delta_{k,a} = \frac{d_{k,a}}{a} - \frac{1}{2}$$

назовем критическим показателем.

Отметим, что при $\delta > \delta_{k,a}$,

$$\widehat{s}_a(y) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a}) \cap C_b(\mathbb{R}^d),\ \widehat{s}^R_a(y) = R^{d_{k,a}}\mathcal{F}_{k,a}(s_a)(Ry),\ \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{s}^R_a(y)\, d\mu_{k,a}(y) = 1. \tag{29}$$

Если $a = 1$, $\delta > \delta_{k,1}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то в силу замечания 1 $(k,1)$-обобщенные средние Бохнера–Рисса имеют вид

$$\begin{aligned}S^\delta_{R,1}f(x) &= (f *_{\lambda_k} (\widehat{s}^R_1)_0)(x) = (f *_k \widehat{s}^R_1)(x) \\ &= \int_0^\infty T^t f(x)(\widehat{s}^R_1)_0(t)\, d\nu_{\lambda_k,1}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau^x\widehat{s}^R_1(y)\, d\mu_{k,1}(y).\end{aligned}$$

При $\delta \geqslant d_{k,1} + 1/2 = \delta_{k,1} + 1$ выполнена оценка

$$|(\widehat{s}_1)_0(t)| \lesssim (1+t)^{-(d_{k,1}+1/2)} \tag{30}$$

Из теорем 4, 5 и (29), (30) вытекает утверждение.

Теорема 8. Если $\delta > \delta_{k,1}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ при $p = \infty$, то

$$\|f(x) - S^{\delta}_{R,1} f(x)\|_{p,d\mu_{k,1}} \to 0, \quad (R \to \infty).$$

Если $\delta \geqslant \delta_{k,1} + 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leqslant p < \infty$, то $S^{\delta}_{R,1} f(x) \to f(x)$ $(R \to \infty)$ почти всюду.

При $a = 2$ аналоги результатов этого и предыдущего параграфов установлены в [14]. Мы, в частности, используем методы этой статьи.

6. Заключение

Сходимость почти всюду средних Бохнера–Рисса при $a = 1$ установлена только при условии $\delta \geqslant \delta_{k,1} + 1$, где $\delta_{k,1} = d_{k,1} - 1/2$ — критический показатель. Есть предположение, что правильное условие $\delta > \delta_{k,1}$. Критический показатель при $a = 2$ равен $\delta_{k,2} = (d_{k,2} - 1)/2$ и сходимость почти всюду средних Бохнера–Рисса при $a = 2$ установлена в [14] также с люфтом $\delta \geqslant \delta_{k,2} + 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

2. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.

3. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.

4. Kobayashi T., Mano G. The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p;q)$ // Memoirs of the American Mathematical Societies. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. Vol. 212, no. 1000.

5. Rösler M. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators // Comm. Math. Phys. 1998. Vol. 192. P. 519–542.

6. Rösler M. A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355. P. 2413–2438.

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.

8. Salem Ben Saïd, Deleaval L. Translation operator and maximal function for the $(k,1)$-generalized Fourier transform // Journal of Functional Analysis. 2020. Vol. 279, no. 8. Article 108706.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform // International Mathematics Research Notices. 2016. Vol. 2016, no. 23. P. 7179–7200.

10. Иванов В. И. Ограниченный оператор сдвига для (k, 1)-обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, № 4. С. 85–96.

11. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.

12. Grafacos L. Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2008.

13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Преобразования Бесселя. Интегралы. М.: Наука, 1970.

14. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // J. d'Analyse. Math. 2005. Vol. 97. P. 25–55.

REFERENCES

1. Dunkl C. F., 1992, "Hankel transforms associated to finite reflections groups" , *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.

2. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions" , Lecture Notes in Math., *Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.

3. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B., 2012, "Laguerre semigroup and Dunkl operators" , *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.

4. Kobayashi T., Mano G., 2011, "The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p; q)$" , *Memoirs of the American Mathematical Societies. Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, vol. 212, no. 1000.

5. Rösler M., 1998, "Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators" , *Comm. Math. Phys.*, vol. 192, pp. 519–542.

6. Rösler M., 2003, "A positive radial product formula for the Dunkl kernel" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 355, pp. 2413–2438.

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2019, "Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications" , *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.

8. Salem Ben Saïd, Deleaval L., 2020, "Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$-generalized Fourier transform" , *Journal of Functional Analysis*, vol. 279, no. 8, Article 108706.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2016, "Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform" , *International Mathematics Research Notices*, vol. 2016, no. 23, pp. 7179–7200.

10. Ivanov V. I., 2020, "Bounded translation operator for the (k,1)-generalized Fourier transform" ,*Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 85–96. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-85-96

11. Levitan B. M. , Sargsjan I. S., 1975, "Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators" , *Transl. Math. Monogr., 39, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.*, 525 p.

12. Grafacos L., 2008, "Classical Fourier Analysis. Graduate Texts in Mathematics 249" , *New York: Springer Science+Business Media, LLC*, 492 p.

13. Bateman H., Erdélyi A., 1954, "Tables of Integral Transforms. Vol.2", *New York, Toronto, London: MC GRAV-HILL Book COMPANY, INC*, 328 p.

14. Thangavelu S., Xu Y., 2005, "Convolution operator and maximal function for Dunkl transform", *J. d'Analyse. Math.*, vol. 97, pp. 25–55.

Получено 20.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-152-166

О динамических процессах в экономике многосторонних сетевых платформ[1]

А. Я. Канель-Белов, М. О. Коматовский, С. А. Тищенко

Канель-Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, Университет им. Бар-Илана (г. Рамат-Ган).
e-mail: kanelster@gmail.com
Коматовский Максим Олегович — Сколтех (г. Москва).
e-mail: maxim.komatovskiy@skoltech.ru
Тищенко Сергей Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: tichtch@mai.ru

Аннотация

В последнее время все чаще мы наблюдаем появление на экономических рынках цифровых и сетевых платформ. К примеру, рынок такси в Москве из классисеского оказания материальной услуги — сервиса по перевозве пассажиров, трансформировался в рынок предоставления информационных услуг, где основные игроки — цифровые платформы (Яндекс такси, Uber) оказывают информационные услуги по знакомству клиента-пассажира с поставщиком-водителем. В этой связи, видится естественным рассмотреть причины, по которым одни фирмы выигрывают рыночную борьбу в новых экономических условиях, а другие ее проигрывают. В основе исследования лежит информационный подход Фрэнка Басса, предполагающий, что основное влияние на распределение долей на рынке оказывает распространение информации о новом продукте в среде потребителей (в нашем случае среда потребителей будет моделироваться с помощью некоторой сети).

После изложения основных принципов модели Басса, модель существенно расширяется, что позволяет описать взаимодействие нескольких фирм, конкурирующих в рамках одного рынка недифференцированного информационного продукта. Необходимо выяснить, каким именно образом конкретные параметры моделей влияют на итоговое устойчивое положение равновесия, как фирмы могут и должны воздействовать на этот параметр, чтобы победить в борьбе за рыночную власть. Исследование предполагает построение общих теоретических выводов, основываясь на которые, в дальнейшем можно будет перейти к практической части исследования.

В работе используется математический аппарат из элементарной теории дифференциальных уравнений, теории катастроф, теории популяций. Прежде, чем мы начнем, заинтригуем читателя следующей мыслью: рыночную борьбу производителей на ограниченном рынке потребителей можно рассматривать как конкуренцию двух различных видов хищников за ограниченную популяцию жертв.

Ключевые слова: диффузия информации в сетях, сетевая платформа, модель Басса.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. Я. Канель-Белов, М. О. Коматовский, С. А. Тищенко. О динамических процессах в экономике многосторонних сетевых платформ // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 152–166.

[1]Работа была поддержана грантом ISF 1994/20

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-152-166

Dynamic processes in the economics of multilateral network platforms[2]

A. Y. Kanel-Belov, M. O. Komatovskiy, S. A. Tishchenko

Kanel-Belov Alexey Yakovlevich — doctor of physical and mathematical sciences, Bar-Ilan University (Ramat Gan).
e-mail: kanelster@gmail.com
Komatovskiy Maxim Olegovich — Skoltech (Moscow).
e-mail: maxim.komatovskiy@skoltech.ru
Tishchenko Sergey Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: tichtch@mai.ru

Abstract

Recently, we have seen the emergence of digital and network platforms in the economic markets more and more often. For example, the taxi market in Moscow has transformed from a classical provision of material services — a passenger transportation service — into a market for the provision of information services, where the main players — digital platforms (Yandex taxi, Uber) provide information services to introduce the client-passenger to the supplier-driver. In this regard, it seems natural to consider the reasons why some firms win the market struggle in the new economic environment, while others lose it. The research is based on Frank Bass's informational approach, which assumes that the distribution of information about a new product among consumers has the main influence on the distribution of market shares (in our case, the consumer environment will be modeled using a network).

After setting out the basic principles of the Bass model, the model expands significantly, which allows us to describe the interaction of several firms competing within the same market for an undifferentiated information product. It is necessary to find out exactly how the specific parameters of the models affect the final stable equilibrium position, how firms can and should influence this parameter in order to win the struggle for market power. The study involves the construction of general theoretical conclusions, based on which, in the future, it will be possible to move on to the practical part of the study.

The work uses the mathematical apparatus from the elementary theory of differential equations, the theory of catastrophes, the theory of populations. Before we begin, let us intrigue the reader with the following thought: the market struggle of producers in a limited consumer market can be seen as a competition between two different types of predators for a limited population of prey.

Keywords: information diffusion in networks, platform networks, Bass model.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
A. Y. Kanel-Belov, M. O. Komatovskiy, S. A. Tishchenko, 2021, "Dynamic processes in the economics of multilateral network platforms", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 152–166.

Авторы посвящают статью 80-летию проф. Михалёва Александра Васильевича и 70-летию проф. Семёнова Алексея Львовича

[2]The paper was supported by Israel science foundation, grant number ISF 1994/20

1. Введение

Пусть существует множество потребителей и некоторый инновационный товар или технология, например, агрегатор такси. Будем считать «приобретением» товара начало пользования услугами агрегатора (а не каждую конкретную поездку). Вопрос состоит в том, как информация о новой технологии распространится в среде потребителей, обладающей заранее заданными чертами.

Введем параметры информационной диффузии и опишем нашу систему дифференциальным уравнением:

$$\frac{dF(t)}{dt} = (p + qF(t))(m - F(t))$$

Здесь $m \in [0;1]$ — доля рынка, потенциально доступная для покрытия данной технологией (например, невозможно предложить новые кофейные зерна человеку, у которого на кофе аллергия).

$p \in [0;1]$ — доля тех потребителей из множества еще не воспользовавшихся технологией, которые узнают о ней самостоятельно.

$q \in [0;1]$ — доля тех потребителей из множества еще не воспользовавшихся технологией, которые узнают о ней от уже воспользовавшихся.

$F(t) \in [0;1]$ — доля потребителей, использующих услугу на момент времени t. Отсюда $m - F(t)$ — доля рынка, не занятая на момент времени t.

В дальнейшем мы будем обозначать функцию $F(t)$ как F, если не требуется иное.

2. Поиск равновесных положений системы

Отдельно необходимо обговорить начальные условия системы, т.е. величину $F(0)$. Покажем, что положение устойчивого равновесия не зависит от начального условия, а в дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать $F(0) = 0$.

Построим, для полного осознания происходящего, два графика: первый — в осях $(F; \frac{dF}{dt})$, второй — в осях $(t; F)$, причем в последнем случае нас будет скорее интересовать поле направлений, нежели конкретный вид изоклин (хотя к нему мы тоже обратимся).

Соответствующая задача Коши решается однозначно (в качестве начального условия положим $F(0) = A$). В частности, можно использовать метод разделения переменных.

Нас будет интересовать «центральная» часть решения, имеющая форму $S-$образной кривой. выбор конкретной кривой происходит под влиянием начального условия: ось $O_{F(t)}$ пересекается нужным решением в точке A. Интуиция $S-$образной кривой становится понятнее, если взглянуть на поле направлений.

Отдельно заметим, что в случае излишних начальных вложений в рекламную компанию $(A > m)$, развитие рынка будет происходить по нисходящей траектории, стабилизация произойдет на предельном уровне m. В дальнейшем мы увидим, что сумма долей рынка, занятые несколькими фирмами при $t \to +\infty$ в сумме дает ровно m. Интуитивно это можно объяснить следующим мысленным экспериментом: предположим, что две малые фирмы слились в одну большую, в силу отсутствия конкурентного фактора систему можно будет рассмотреть как единственное дифференциальное уравнение, описанное выше.

Модель не была бы столь популярна, если бы не выходила за рамки теоретических суждений. На текущий момент существуют десятки подходов к оценке параметров как классической модели Басса, так и ее усложнений. С тчоки зрения автора, наиболее удобен подход, описанный в работе [6], позволяющий оценить параметры модели на относительно простых данных (количество продаж в каждый момент времени).

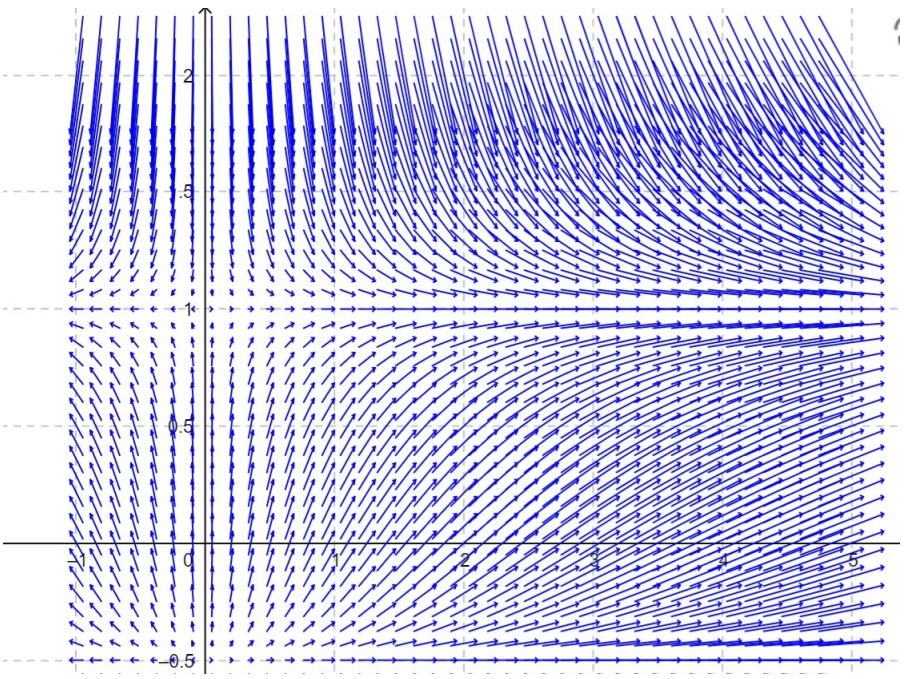


Рис. 1: Стационарные множества и предполагаемые траектории для $m = 1, p = 1, q = 2$, значения параметров выбраны исключительно для иллюстративных целей и не несут смысловой нагрузки

Разумеется, непрерывная модификация модели — это в некотором роде идеалистический подход, однако, чем более гранулированными данными по количеству продаж тоавра в момент времени будет обладать автор, тем точнее окажутся выводы и прогнозы, полученные из модели.

3. Конкуренция двух поставщиков в условиях фиксированного объема рынка

Рассмотрим следующую непрерывную конкурентную модель:

$$\begin{cases} \dfrac{dg_1(t)}{dt} = \Big(a + bg_1(t)\Big)\Big(m - g_1(t) - g_2(t)\Big) \\ \dfrac{dg_2(t)}{dt} = \Big(a + bg_2(t)\Big)\Big(m - g_1(t) - g_2(t)\Big) \end{cases}$$

В системе выше $g_1, g_2 \in [0; 1]$ — доли рынка, занятые в момент времени t, причем $G(t) = g_1(t) + g_2(t) \in [0; 1]$, т.е. фирмы в совокупности не могут занять большую доля рынка, чем 1. В дальнейшем, для удобства, обозначение $g_i(t)$ заменим на более компактное g_i.

$a, b \in (0; 1]$ — параметры диффузинной модели Басса.

Параметр a — коэффициент самостоятельной диффузии (мера распространения информации, происходящего самостоятельно, вне зависимости от g_i), параметр b — мера зависимости темпов роста предложения услуг, зависящих от предоставляемого на момент t объема. $m \in (0; 1]$ — максимально доступный объем рынка (доля потребителей, готовых приобрести данный товар).

Как было показано выше, устойчивым равновесием в данной системе является ситуация, в которой фирмы в совокупности занимают весь доступный рынок. Отличие от базовой модели

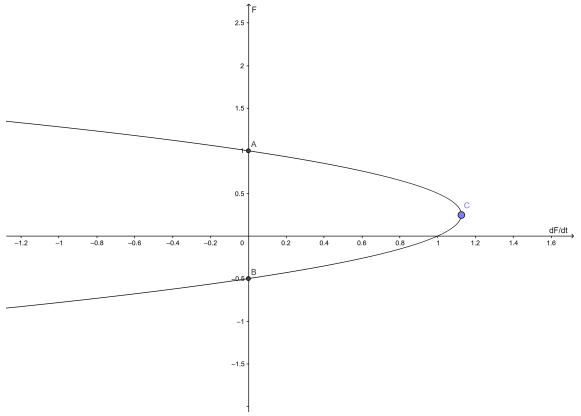


Рис. 2: Построение в осях $(\frac{dF}{dt}; F(t))$ выявляет одно устойчивое равновесие (верхнее) и одно неустойчивое (нижнее). При $F < -\frac{p}{q}$ производная $\frac{dF}{dt} < 0$, т.е. F убывает. Аналогично при $F > m$. В промежуточном положении $\frac{dF}{dt} > 0$, наибольшая скорость роста в вершине параболы.

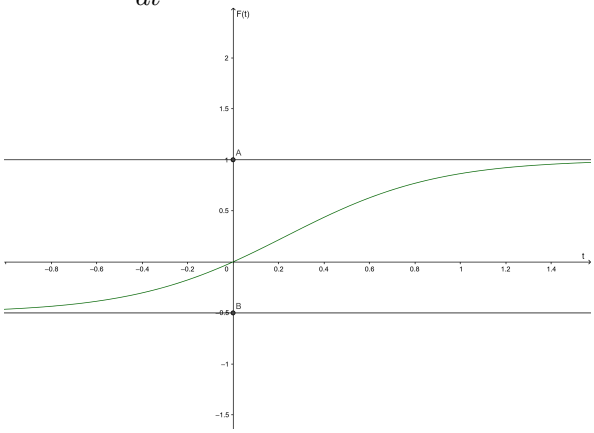


Рис. 3: График части решения задачи Коши с начальным условием $F(0) = 0$, параметры на обеих иллюстрациях: $p = 1$, $q = 2$, $m = 1$

состоит в наличии фактора конкуренции за потребителя. Заметим, что если установить темп роста одной из фирм раным нулю тождественно, мы окажемся в случае действия на рынке единственной фирмы и придем к результату, полученному ранее, устойчивому равновесию на уровне $g = m$.

Вопрос, на который мы пытаемся дать ответ с помощью этой модели: в какой пропорции фирмы поделят рынок в предельном устойчивом случае, т.е. при $t \longrightarrow \infty$.

Очевидно, в случае полной симметрии фирм, решение системы также будет симметричным, и фирмы поделят рынок в пропорции $1 : 1$. Нас, однако, будет интересовать случай различных начальных позиций. Установим следующие начальные условия:

$$g_1(0) = A < m$$

$$g_2(0) = B \in (0; A)$$

Вернемся к системе. Поделим первое уравнение на второе, исключая тем самым dt и скобку, отвечающую за долю незанятого рынка:

$$\frac{dg_1}{dg_2} = \frac{a + bg_1}{a + bg_2}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dg_1}{a + bg_1} = \frac{dg_2}{a + bg_2}$$

Домножаем обе части уравнения на $b > 0$, интегрируем:

$$\int \left(\frac{dg_1}{\frac{a}{b} + g_1} \right) = \int \left(\frac{dg_2}{\frac{a}{b} + g_2} \right)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b} + g_1\right) = \ln\left(\frac{a}{b} + g_2\right) + const$$

$$\frac{a}{b} + g_1 = e^{const} \cdot \left(\frac{a}{b} + g_2\right)$$

Переобозначив $e^{const} := \hat{c}$, имеем:

$$g_1 = \hat{c} \cdot \left(\frac{a}{b} + g_2\right) - \frac{a}{b} = (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \cdot g_2$$

Подставим $g_1 = g_1(g_2)$ во второе уравнение системы:

$$\frac{dg_2}{dt} = \Big(a + bg_2\Big)\Big(m - g_2 - (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} - \hat{c} \cdot g_2\Big)$$

Это дифференциальное уравнение может быть решено методом разделения переменных (делим обе части на многочлен справа, домножаем на dt, разбиваем дробь слева в сумму простейших с помощью метода непопределенных коэффициентов и интегрируем обе части). Решение выглядит следующим образом:

$$\hat{g_2} : \left(\{t\} \to \frac{ae^{2abc_1 + b^2c_1m} + a(-\hat{c})e^{2at+bmt} + ae^{2at+bmt} + bme^{2at+bmt}}{b\left(-e^{2abc_1+b^2c_1m} + \hat{c}e^{2at+bmt} + e^{2at+bmt}\right)} \right)$$

Преобразуем решение:

$$g_2 = \frac{a \cdot^{bc_1(2a+bm)} + e^{(2a+bm)t}\Big(bm + (1-\hat{c})a\Big)}{-b \cdot \Big(e^{bc_1(2a+bm)} - (1+\hat{c})e^{(2a+bm)t}\Big)}$$

Используем начальное условие $g_2(0) = B$:

$$\frac{a \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + 1 \cdot \Big(bm + (1-\hat{c})a\Big)}{-b \cdot \Big(e^{bc_1(2a+bm)} - (1+\hat{c}) \cdot 1\Big)} = B$$

Отсюда может быть найдена g_1:

$$\hat{g_1} = (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \cdot \hat{g_2}$$

Используем начальное условие $g_2(0) = B$:

$$\frac{a \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + 1 \cdot \Big(bm + (1-\hat{c})a\Big)}{-b \cdot \Big(e^{bc_1(2a+bm)} - (1+\hat{c}) \cdot 1\Big)} = B$$

Тогда начальное условие для $g_1(0) = (\hat{c}-1)\cdot\dfrac{a}{b} + \hat{c}\cdot B = A$.

Решим систему начальных условий:

$$\begin{cases} a\cdot e^{bc_1(2a+bm)} + \Big(bm + (1-\hat{c})a\Big) = -B\cdot b\cdot e^{bc_1(2a+bm)} + Bb(1+\hat{c}) \\ \hat{c}\cdot\Big(\dfrac{a}{b}+B\Big) = A + \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} \hat{c} = \dfrac{Ab+a}{Bb+a} \\ (a+bB)\cdot e^{bc_1(2a+bm)} = Bb(1+\hat{c}) - bm - (1-\hat{c})a \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение:

$$(a+Bb)\cdot e^{bc_1(2a+bm)} = Bb(1+\hat{c}) - (bm+2a) + (1+\hat{c})a$$

$$(a+Bb)\cdot e^{bc_1(2a+bm)} = Bb(1+\hat{c}) - (bm+2a) + (1+\hat{c})a$$

$$e^{bc_1(2a+bm)} = (1+\hat{c})\frac{Bb+a}{Bb+a} - \frac{bm+2a}{Bb+a} = (1+\hat{c}) - \frac{bm+2a}{Bb+a}$$

Остановимся на этом этапе преобразования и подставим выражения для $\hat{c}$ и $e^{bc_1(2a+bm)}$ в разность функций объемов, предел которой нас интересует:

$$\Delta(t) = g_1(t) - g_2(t)$$

$$\lim_{t\to\infty}\Delta(t) = \lim_{t\to\infty}((\hat{c}-1)\cdot\frac{a}{b} + \hat{c}\hat{g_2} = (\hat{c}-1)\cdot\frac{a}{b} + \hat{c}\cdot\lim_{t\to\infty}\hat{g_2}$$

Вычислим отдельно $\lim\limits_{t\to\infty}\hat{g_2}$:

$$\lim_{t\to\infty}\hat{g_2} = \lim_{t\to\infty}\frac{a\cdot\Big((1+\hat{c}) - \dfrac{bm+2a}{Bb+a}\Big) + \Big(bm+(1-\hat{c})a\Big)\cdot e^{t(2a+bm)}}{-b\cdot\Big((1+\hat{c}) - \dfrac{bm+2a}{Bb+a}) - (1+\hat{c})\cdot e^{t(2a+bm)}\Big)}$$

Поскольку $f(\alpha) = e^{k\alpha},\ \ k>0$ — монотонно возрастающая по α функция, можем отбросить постоянные величины, не зависящие от t в числителе и знаменателе:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{t(2a+bm)}\cdot\Big(bm+(1-\hat{c})a\Big)}{e^{t(2a+bm)}\cdot\Big(b(1+\hat{c})\Big)} = \frac{bm + a\cdot\dfrac{(B-A)b}{Bb+a}}{b\cdot\dfrac{(A+B)b+2a}{Bb+a}} =$$
$$= \frac{bm(Bb+a)+ab(B-A)}{(A+B)b^2+2ab} = \frac{m(Bb+a)+a(B-A)}{(A+B)b+2a}$$

4. Пример

Пусть $a = 0.01, b = 0.05, m = 0.8, A = 0.05, B = 0.01$. Поскольку мы смогли в общем виде выразить итоговый разрыв как функцию исходных параметров модели:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t) = \Big(\hat{c}(A,B,a,b) - 1\Big) \cdot \frac{a}{b} + \Big(\hat{c}(A,B,a,b) - 1\Big) \cdot \frac{m(Bb+a) + a(B-A)}{(A+B)b + 2a},$$

мы без труда сможем определить предельное разделение рынка, подставив параметры модели в функцию разрыва.

$$1 < \hat{c} = \frac{Ab + a}{Bb + a} = \frac{0.05 \cdot 0.05 + 0.01}{0.01 \cdot 0.05 + 0.01} \approx 1.19048$$

$$\lim(\Delta(0.01;\ 0.05;\ 0.8;\ 0.05;\ 0.01)) = \Big(0.19048\Big) \cdot \frac{1}{5} + \Big(0.19048\Big) \cdot \frac{0.8 \cdot (0.0105) + 0.01 \cdot (-0.04)}{0.06 \cdot 0.05 + 0.02} =$$

$$= 0.19048 \cdot \Big(0.2 + \frac{0.008}{0.023}\Big) \approx 0,10434$$

Правая дробь в вычислениях — предельная доля на *доступном* рынке второй фирмы $\overline{g_2} \approx 0.348$, соотвественно, доля первой фирмы составит долю второй фирмы с добавлением разрыва: $\overline{g_1} \approx 0.453$. Заметим, что доли фирм в сумме дают в точности $m = 0.8$, т.е. фирмы поделят весь доступный рынок.

Даже такой «наивный» анализ позволяет заметить, что, исходный разрыв в используемой доле рынка возрастает во времени. Происходит это по траекториям, сходным с $S-$образными кривыми в монополистическом случае, выбор конкретной траектории происходит в зависимости от разрыва.

5. Немного о функции разрыва

Динамика рыночного разрыва зависит от исходных параметров:

- группа переменных диффузии, которая задана экзогенна и зависит лишь от структуры сети, в которой происходит распространение
- величина исходного разрыва: $\delta = A - B$
- нижняя граница разрыва, в наших обозначениях это B (разрыв в 0.04 между 0.01 и 0.05 и точно такой же разрыв в 0.04 между 0.26 и 0.3 — совершенно разные исходные ситуации)
- экзогенный объем рынка m

Изучать функцию разрыва будет удобнее, глядя на фазовую диаграмму исходной системы дифференциальных уравнений, немного переименовав параметры (вернемся к классическим обозначениям Басса):

$$\begin{cases} \dfrac{dg_1(t)}{dt} = \Big(p + qg_1(t)\Big)\Big(m - g_1(t) - g_2(t)\Big) \\ \dfrac{dg_2(t)}{dt} = \Big(p + qg_2(t)\Big)\Big(m - g_1(t) - g_2(t)\Big) \end{cases}$$

Из решения очевидной системы условий стационарности

$$\frac{dg_1}{dt} = \frac{dg_2}{dt} = 0,$$

получаем три множества стационарных точек, каждое из которых представляет собой прямую на фазовой плоскости. Такая фазовая плоскость является проекцией $S-$образной поверхности на область своего определения, тем самым мы производим некоторое «исследование с высоты птичьего полета».

Нетрудно проверить, что все устойчивые состояния системы лежат на наклонной прямой, задаваемым уравнением $g_1 + g_2 = m$. Более того, в силу интерпретации исходной задачи, с точки зрения экономической интуиции нас интересует лишь положительная четверть плоскости (g_1, g_2) (хотя с точки зрения понимания сути процесса, это, конечно, не так). Пусть в момент времени $t = 0$ фирмы входят на рынок с объемами, отраженными в координатах точки $A_0 = (A, B), \quad A > B$.

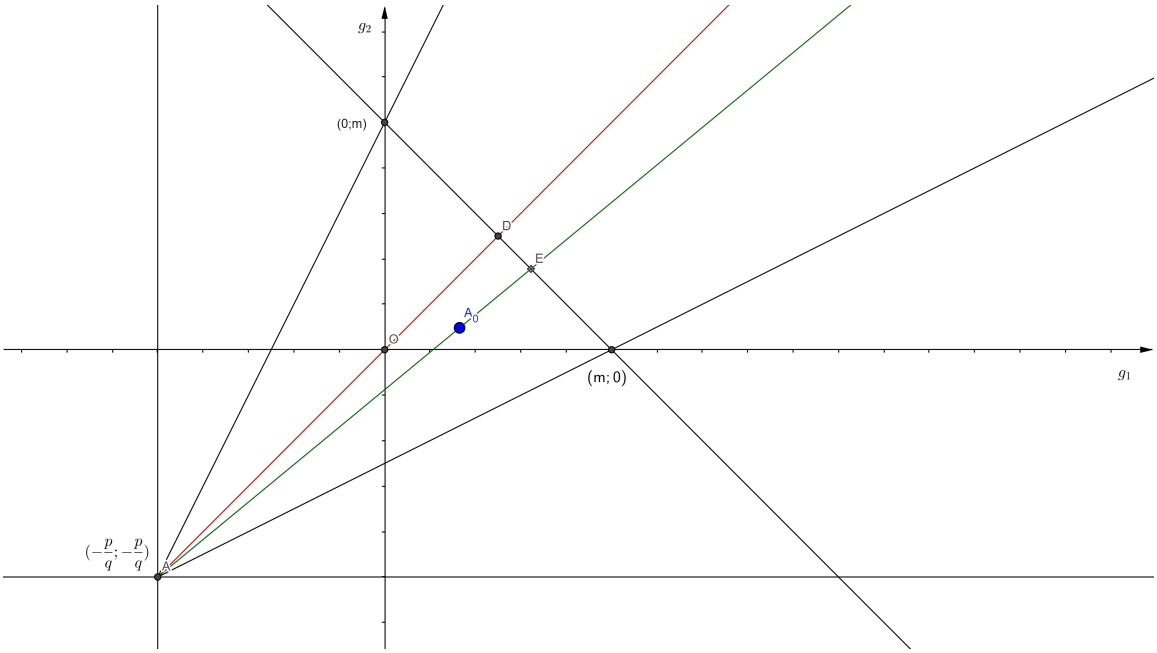


Рис. 4: Стационарные множества и предполагаемые траектории

Сформулируем следущее **утверждение**: точка, соответствующая предельному взаимодействию фирм на рынке есть точка пересечения прямой, задаваемой уравнением $g_1 + g_2 = m$ (стационарное множество) и прямой, проходящей через точку $A = (-\frac{p}{q}; -\frac{p}{q})$ и точку начального положения (в нашем случае, A_0).

Частный случай траектории отмечен на *рисунке 4* красным цветом. Поскольку до сих пор мы полагали параметры p, q одинаковыми для обеих фирм, что приводило к полной симметрии последних, в нашем частном случае этот луч содержит биссектрису прямого угла в первой координатной четверти. Обозначим луч, проходящий черех точку D, в которой рынок делится ровно пополам и точку $(-\frac{p_1}{q}; -\frac{p_2}{q})$ как l_*.

Для того, чтобы доказать этот факт, произведем следующую замену переменных, перемещая новое начало координат в точку A пересечения двух стационарных множеств:

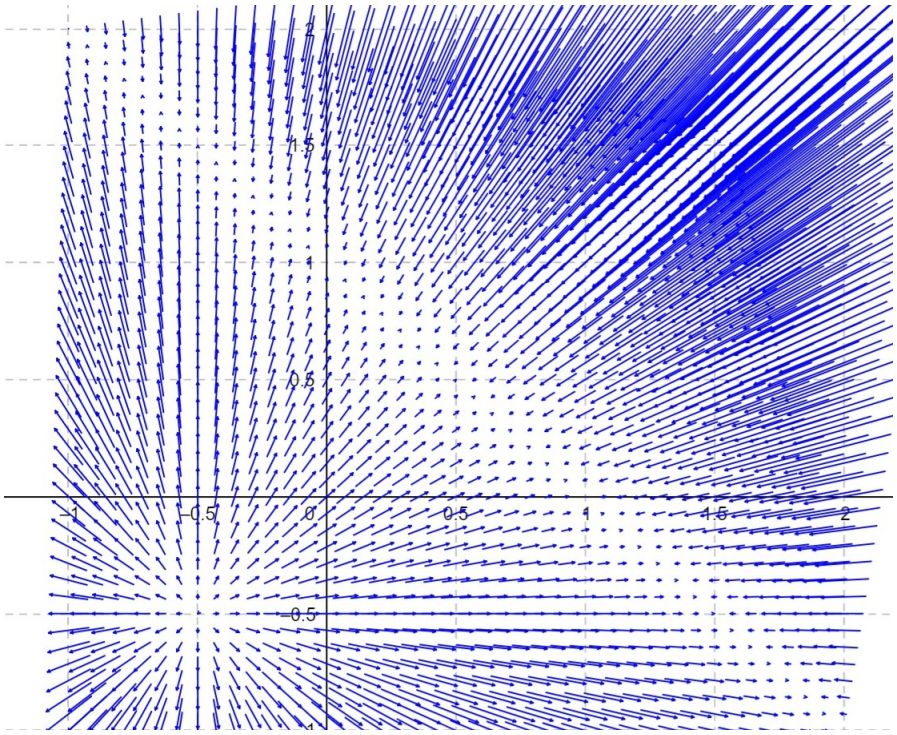


Рис. 5: Поле направлений рассматриваемой системы, по-прежнему, $p_1 = p_2 = 1,\ q = 2,\ m = 1$. Значения параметров вновь подобраны в иллюстративных целях.

$$\begin{cases} s_1 := p + q \cdot g_1 \\ s_2 := p + q \cdot g_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g_1 = \dfrac{s_1 - p}{q} \\ g_2 = \dfrac{s_2 - p}{q} \end{cases}$$

Производя подстановку, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{ds_1}{dt} = s_1 \cdot (mq - 2p - s_1 - s_2) \\ \dfrac{ds_2}{dt} = s_2 \cdot (mq - 2p - s_1 - s_2) \end{cases}$$

Поделив одно уравнение на другое, получим соотношение $\dfrac{ds_1}{s_1} = \dfrac{ds_2}{s_2}$, откуда после интегрирования мгновенно следует соотношение

$$s_2 = s_1 \cdot k, \quad k = \frac{1}{e^{const}} > 0$$

Это соотношение описывает множество лучей,с положительным наклоном, выходящих из начала координат $(s_1; s_2)$.

Заметим, что если рассмотреть сечение поверхности $\Big(g_1(t); g_2(t); t\Big)$ плоскостями, содержащими указанные лучи и ортагональными к плоскости $\Big(g_1(t); g_2(t)\Big)$, то в этом сечении останутся $S-$образные кривые, сходные с той, что мы видели на графике решения дифференциального уравнения Басса для одной фирмы. В частности, точно такую же $S-$образную кривую можно получить, взяв в случае $p_1 = p_2 = p$ сечение, содержащую бисссектриссу положительного ортанта.

Из этого множества лучей нас будут интересовать лишь те, что лежат *между* лучами, в координатах (g_1, g_2) проходящих через точки $(0; m)$, $(m; 0)$ (на рисунке отмечены черным), поскольку нас интересуют лишь траектории, проходящие через осмысленные начальные значения (а это точки внутри треугольника, образуемого наклонной стационарной прямой и осями). Отметим, что для любой точки внутри указанного треугольника найдется луч, лежащий в рассматриваемом конусе, проходящий через заданную точку, а значит, для любых начальных условий мы сможем определить итоговое положение равновесия.

Рыночный же разрыв можно пронаблюдать, вычислив максимум из разности координат итоговой точки на рассматриваемой траектории (нарпимер, E) и точки разделения рынка в пропорции 1:1, т.е. точки D. Рыночный разрыв в процессе, т.е. в некоторый момент времени между 0 и $+\infty$ можно увидеть так: проводим прямую с наклоном, аналогичным наклону стационарного множества через рассматриваемую точку, смотрим максимум из разницы координат рассматриаемой точки и точки на проведенной прямой с равными координатами (см. *рисунок 6*).

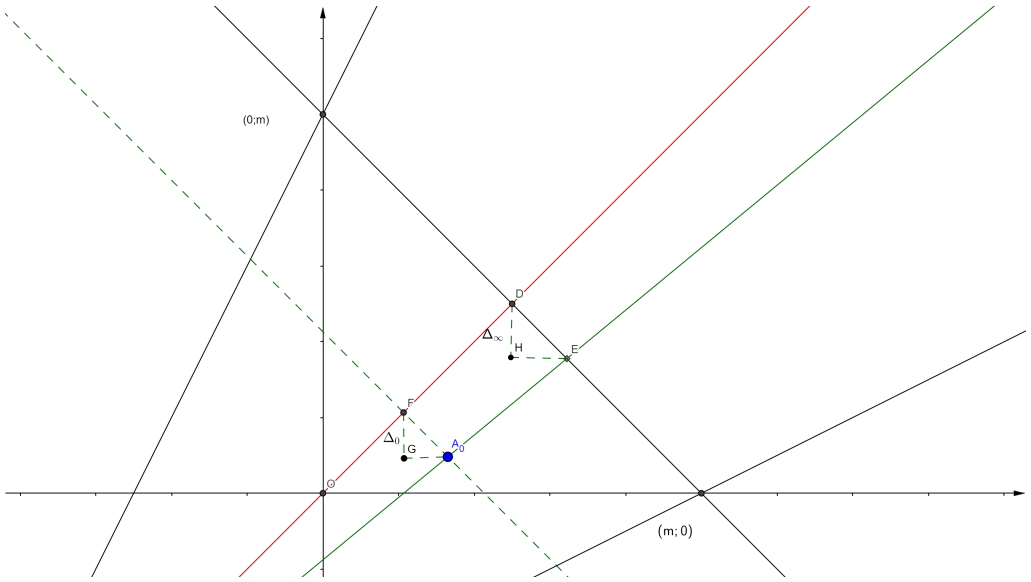


Рис. 6: Рыночные разрывы в модели

Нетрудно заметить, что с течением времени рыночный разрыв увеличивается, поскольку прямые не параллельны друг другу, а точка пересечения лежит левее рассматриваемой области.

5.1. Зависимость Δ_∞ от конкретных пареметров

В этом разделе мы откажемся от предпосылки о равенстве рекламных возможностей обеих фирм ($p_1 = p_2 = p$) и посмотрим как будетм меняться ситуация на рынке при изменении параметров p_1, p_2, q, m, а также начального положения (A, B).

- объем доступного рынка m.

  Геометрически, этот параметр определяет насколько высоко будет расположена наклонная прямая, являющаяся одним из трех стационарных множеств (именно на ней лежат все возможные итоговые равновесия). Интуитивно, увеличечение этого параметра (приближение к единице снизу) будет приводитьк росту величины итогового разрыва, поскольку стационарная прямая будет удаляться от вершины конуса, содержащего любую

из интересующих нас траекторий. Формально увеличение разрыва можно пронаблюдать в функции итогового разрыва (она линейна по m, коэффициент положителен в силу неравенства $\hat{c} > 1$):

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t) = \Big(\hat{c}(A,B,a,b) - 1\Big) \cdot \frac{a}{b} + \Big(\hat{c}(A,B,a,b) - 1\Big) \cdot \frac{m(Bb+a) + a(B-A)}{(A+B)b + 2a}$$

- Параметр q, отвечающий за скорость диффузии в сети.

  Геометрически, от q зависит положение вершины конуса, а на практике значение этого параметра определяется структурой сети, поэтому было бы странно полагать его различным для двух фирм, пытающихся войти на один и тот же рынок.

  С ростом q вершина приближается к началу координат, что можно проинтерпретировать так: происходит событие (например, появление мобильной связи, нового бесплатного мессенджера), по причине которого повышается плотность сети, что положительно сказывается на скорости распространения информации, а значит, усиливает сетевой эффект. Освоение товара обеих фирм потребителями ускоряется, переход к равновесию происходит быстрее (достаточно вспомнить интерпретацию этого параметра в модели Басса, где наиболее быстрорастущая часть $S-$образной кривой пределялась именно его значением). Изначальный разрыв успевает увеличиться на бОльшую величину, чем в исходной ситуации.

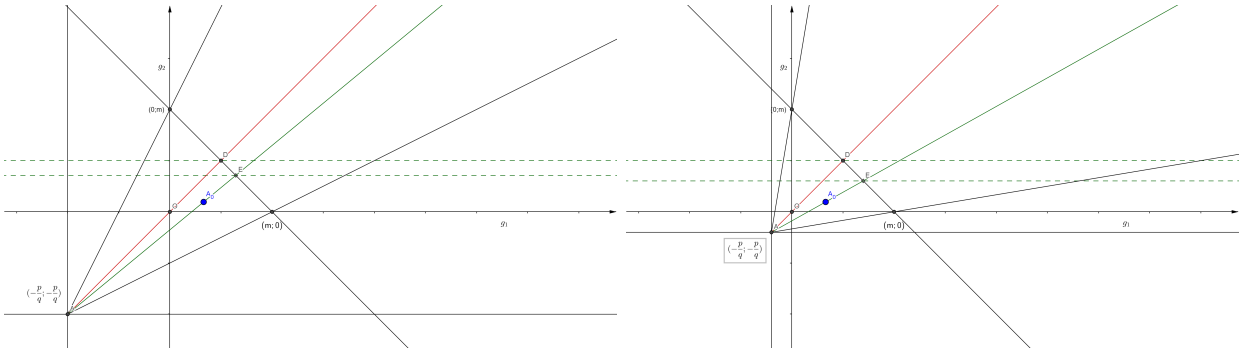


Рис. 7: Изменение q в большую сторону приводит к росту рыночного разрыва

- Параметры p_1, p_2, отражающие эффективность рекламы как способа распространения информации о товаре до вступления в силу сетевого эффекта.

  Без ограничения общности, будем исследовать влияние на итоговое равновесие параметра p_1. Предположим, что он увеличивается (например, первая фирма вложила некоторый существенный объем средств в рекламную кампанию),смотри *рисунок 8* (подразумевается, что $p_1 > p_2$).

  Интуитивно, это должно, при прочих равных, дать первой фирме некоторое преимущество по сравнению со второй фирмой. Так и происходит, геометрически увеличение параметра p_1 приводит к сдвигу влево вертикальной стационарной прямой (задается уравнением $g_1 = -\dfrac{p_1}{q}$), что в свою очередь приводит к смещению вершины конуса вниз по стационарной прямой. Чтобы увидеть то преимущество, которое получает первая фирма, введем понятие *исходного выигрышного множества* Ω_1:

$$\Omega_1 = \left\{(A,B)\middle|\lim_{t\to\infty}(g_1(t)) > \lim_{t\to\infty}(g_2(t))\right\}$$

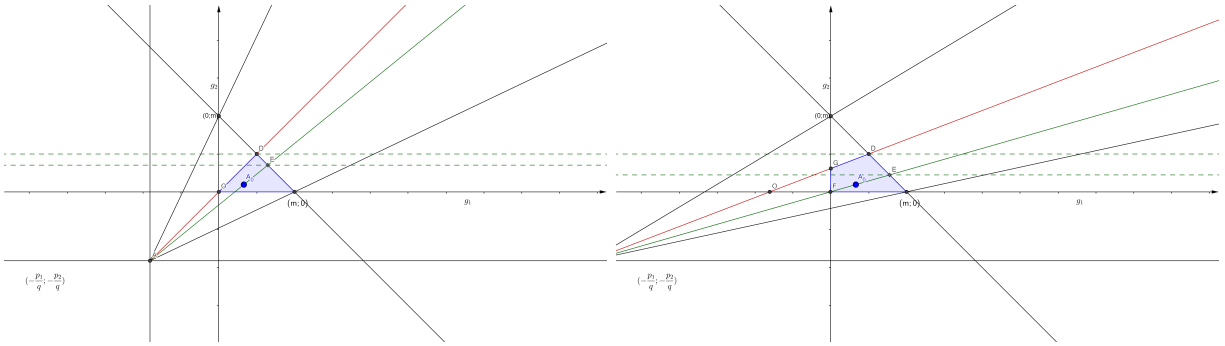


Рис. 8: Изменение p_1 в большую сторону приводит к росту рыночного разрыва и, при прочих равных, увеличению исходного выигрышного множества Ω_1

Содержательно, это множество всех исходных ситуаций (начальных условий), при которых первая фирма в итоге получает более 50% рынка. Такого рода требование в дальнейшем будем называть *исходным выигрышным критерием*. Критерий может основываться не только на занятой доле рынка, но и на величине разрыва, разнице в прибылях и т.д. В нашем случае это пространство под l_* внутри треугольника, отсекаемого наклонной стационарной прямой.

- Влияние исходного положения (A, B) на исход взаимодействия системы отражен в концепции исходного выигрышного множества. Стоит добавить, что внутри своего выигрышного множества фирма предпочитает ту точку, в которой исходный разрыв больше (в силу возрастания разрыва по времени)

6. Моделирование цикла победителя

До сих пор наличие и размер рыночного разрыва никак не интерпретировались, и на данном этапе мы знаем только то, что существующий разрыв имеет тенденцию к увеличению, скорость роста разрыва напрямую зависит от параметров модели. Однако, кто считается «победителем» в этой конкурентной борьбе?

Пусть типичный агент (вершина в сети, в которой происходит диффузия информации) обладает тривиальной функцией полезности:

$$u_i = \mu \cdot g_i$$

Под g_i в данном случае понимается численность группы, в которой состоит агент, $\mu \in \mathbb{R}_+ +$. Пусть издержки переключения с одной группы на другую постоянны и равны c.В таком случае, в любой момент времени агент сравнивает полезности от двух взаимоисключающих действий: остаться в действующей группе, или переключится на другую (в нашем случае для двух фирм — на единственного конкурента).

Полезность i-го агента от переключения:

$$u_i = \mu \cdot g_{-i} - c$$

Находим точку безразличия:

$$\mu \cdot g_{-i} - c = \mu \cdot g_i$$

$$\mu \cdot (g_{-i} - g_i) = c$$

Отсюда видно, что если разрыв Δ в какой-то момент превышает величину $\frac{c}{\mu}$, приверженцы проигрывающей фирмы, несмотря на издежки переключения, начинают пользоваться услугами (или работать на, зависит от интерпретации) выигрывающей борьбу фирмы. Отсюда, задача для фирмы, пытающейся занять весь рынок ставится так: добиться разрыва в $\frac{c}{\mu} + \varepsilon$ на конечном временном горизонте.

Заметим, что такое рассуждение можно обобщить для произвольной «хорошей» функции полезности

$$u_i = \phi(g_i), \;\; \phi(\cdot) \in C^2, \;\; \frac{df}{dg_i} > 0, \;\; \frac{d^2 f}{dg_i^2} < 0, \;\; \lim_{g_i \to 1} \phi(g_i) = +\infty, \;\; \lim_{g_i \to 0} \phi(g_i) = 0$$

В такой постановке для поиска целевой величины разрыва придется решить задачу $\phi(g_{-i}) - \phi(g_i) = c$.

Учитывая, что функция $\phi(\cdot)$ монотонно возрастает на $[0; 1]$ и принимает произвольные значения от 0 до $+\infty$, для любого $c > 0$ найдется разрыв между g_i и g_{-i} достаточно большой, чтобы при подстановке в уравнение краевых значений мы получили тождество. Единственное, что может предотвратить возникновение цикла победителя: удачные начальные условия. Требуемая величина разрыва может не достигаться, поскольку, например, препдполагает $|g_i - g_{-i}| = 0.9$, а начальные условия имеют вид $A = 0.1, \;\; B = 0.1$.

7. Заключение

Рассмотренная модель позволяет явно определить зависимость итогового равновесия от исходных параметров диффузии информации (в том числе, от параметров сети потребителей, их частных функций полезности, количества и конфигурации связей между агентами). Подобный подход позволяет также исследовать различные шоки, происходящие на рынке инновационного товара, выявить оптимальную реакцию на эти возмущения системы.

Естественным продолжением данного исследования станет проверка описанной модели на данных (как на реальных, так и на иммитированных различными методиками сетях, в т.ч. случаные графы Эрдёша-Реньи, small-world графы, k-регулярные графы). Из теоретических расширений можно выделить следующие:

1. Рекламный параметр p, который в модели вводился как заданный и постоянный можно определять в каждый момент времени *внутри* модели, например, с помощью рекламной модели Видаля-Вольфа.

2. Видится интересным рассмотрение и влияния непредусмотренных внешних шоков на параметры p_i, q, происходящих в некоторый момент времени t_* между началом взаимодействия и его завершением, как с закреплением на новом значении, так и с возвратом на исходную магистраль (в последнем случае хочется уметь оценивать влияние такого возмущения на итоговое равновесие).

3. Также естественным расширением может стать решение задачи в общем виде, для n фирм (хотя, если не вдаваться в детали, можно предположить, что существующие на рынке на момент входа фирмы представляют из себя единое целое и анализировать при помощи частного случая модели $n = 2$).

4. Отдельный интерес представляет определение критерия, относительно которого в каждом конкретном приложении стоит строить *исходное выигрышное множество*. Разумеется, они могут быть намного сложнее, чем тривиальная «половина доступного рынка».

5. Остается открытым вопрос оптимального решения задачи рыночной борьбы с учетом начальных условий и *издержек* фирм, теоретико-игровые и поведенческие аспекты взаимодействия фирм (комминтменты, теория сигналов).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование, — Успехи Физических Наук, том 8, с. 13-34. — 1928

2. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей популяций — Проблемы кибернетики, вып. 25 - М.: Наука, 1972, с. 101 - 106

3. Arnold V. I. Catastrophe Theory,— 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag. — 1992

4. F. M. Bass A New Product Growth for Model Consumer Durables, — Management Science, Vol. 15, No. 5, Theory Series, pp. 215-227, January 1969

5. Griliches Z. Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change, — Econometrica, Vol. 25, No. 4 , pp. 501-522, — October 1957

6. Satoh D. A Discrete Bass Model and Its Parameter Estimation, — Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.44, №1.— March 2001.

7. Vidale, M.L. An Operations Research Study of Sales Response to Advertising, — M.L. Vidale, H.B. Wolfe, — Operations Research – № 5 – pp. 370 – 381, 1957

REFERENCES

1. Volterra V. Mathematical theory of the struggle for existence, — Successes of Physical Sciences, volume 8, p. 13-34. — 1928

2. Kolmogorov A.N. Qualitative study of mathematical models of populations — Problems of cybernetics, no. 25 - M .: Nauka, 1972, p. 101 - 106

3. Arnold V. I. Catastrophe Theory,— 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag. — 1992

4. F. M. Bass A New Product Growth for Model Consumer Durables, — Management Science, Vol. 15, No. 5, Theory Series, pp. 215-227, January 1969

5. Griliches Z. Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change, — Econometrica, Vol. 25, No. 4 , pp. 501-522, — October 1957

6. Satoh D. A Discrete Bass Model and Its Parameter Estimation, — Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.44, №1.— March 2001.

7. Vidale, M.L. An Operations Research Study of Sales Response to Advertising, — M.L. Vidale, H.B. Wolfe, — Operations Research – № 5 – pp. 370 – 381, 1957

Получено 3.04.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-167-181

О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений[1]

А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Кормачева Антонина Николаевна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: juska789@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

Данная работа посвящена уточнению результатов В. А. Быковского об оценке погрешности приближенного интегрирования на классе Коробова E_s^α для двумерных параллелепипедальных сеток.

Приведены необходимые сведения из теории цепных дробей и скобок Эйлера. С помощью теории наилучших приближений второго рода описано множество Быковского, состоящие из локальных минимумов решётки приближений Дирихле для рационального числа.

В явном виде описано множество Быковского для двумерной решётки решений линейного сравнения. Получена формула, выражающая гиперболический параметр этой решётки через знаменатели подходящих дробей и скобки Эйлера и позволяющая вычислять его за $O(N)$ арифметических операций.

Получены оценки гиперболической дзета-функции двумерной решётки решений линейного сравнения через сумму Быковского, которая является частичной суммой дзета-ряда для гиперболической дзета-функции решётки. Частичная сумма берется по множеству Быковского.

Для суммы Быковского получены оценки сверху и снизу из которых следует, что главный член для этих сумм есть сумма α-ых степеней элементов цепной дроби для $\frac{a}{N}$ делённый на N^α.

В заключении отмечены актуальные направления исследований по этой тематике.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка, множество Быковского, сумма Быковского, локальные минимумы решётки, минимальные решения сравнения.

Библиография: 17 названий.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

Для цитирования:
А. Н. Кормачева, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. О гиперболическом параметре двумерной решётки сравнений // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 167–181.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-167-181

On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons[2]

A. N. Kormacheva

Kormacheva Antonina Nikolaevna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: juska789@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

This paper is devoted to the refinement of the results of V. A. Bykovsky on the estimation of the error of approximate integration on the Korobov class E_s^α for two-dimensional parallelepipedal grids.

The necessary information from the theory of continued fractions and Euler brackets is given. With the help of the theory of best approximations of the second kind, the Bykovsky set consisting of local minima of the lattice of Dirichlet approximations for a rational number is described.

The Bykovsky set for a two-dimensional lattice of linear comparison solutions is explicitly described. A formula is obtained expressing the hyperbolic parameter of this lattice in terms of denominators of suitable fractions and Euler brackets and allowing it to be calculated in $O(N)$ arithmetic operations.

Estimates of the hyperbolic zeta function of a two-dimensional lattice of linear comparison solutions are obtained in terms of the Bykovsky sum, which is a partial sum of the zeta series for the hyperbolic zeta function of the lattice. The partial sum is taken by the Bykovsky set.

For the Bykovsky sum, estimates are obtained from above and from below, from which it follows that the main term for these sums is the sum of the α-th degrees of the elements of the continued fraction for $\frac{a}{N}$ divided by N^α.

In conclusion, the current directions of research on this topic are noted.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid, Bykovsky set, Bykovsky sum, local lattice minima, minimal comparison solutions.

Bibliography: 17 titles.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

For citation:
A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 167–181.

1. Введение

В методе оптимальных коэффициентов профессора Н. М. Коробова [12, 13] большую роль играет гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки решений Λ линейного сравнения

$$m_1 + a_1 m_2 + \ldots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod N, \quad (a_j, N) = 1 \quad (j = 1, \ldots, s-1), \tag{1}$$

который задается равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{m} \in \Lambda,\, \vec{m} \neq \vec{0}} \overline{m_1} \ldots \overline{m_s}$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного числа m.

В общем случае вычисление гиперболического параметра решётки сравнений требует $O(N \ln^{s-1} N)$ арифметических операций (см. [8, 9]).

В работе [1] дано следующее определение.

Определение 1. *Назовем ненулевое решение сравнения (1) минимальным, если не существует другого ненулевого решения $(m'_1, \ldots, m'_s)$, для которого*

$$|m'_1| \leqslant |m_1|, \ldots, |m'_s| \leqslant |m_s|; \quad |m'_1| + \ldots + |m'_s| < |m_1| + \ldots + |m_s|.$$

Из теоремы Минковского о выпуклом теле непосредственно следует, что для таких решений справедливо неравенство

$$\overline{m_1} \ldots \overline{m_s} \leqslant N, \tag{2}$$

и они составляют конечное множество. Это множество будем называть минимальным множеством Быковского $B^{(0)}(\Lambda)$ решётки решений сравнения (1). Через $r^{(0)}(\Lambda)$ будем обозначать количество элементов в минимальном множестве Быковского $B^{(0)}(\Lambda)$. Так как множество $B^{(0)}(\Lambda)$ — центрально симметрично относительно нулевой точки, то ровно половина точек из $B^{(0)}(\Lambda)$ имеют первую ненулевую координату положительную. Следовательно, $r^{(0)}(\Lambda)$ — четное натуральное число.

Цель данной работы — построить в случае двумерной решётки $\Lambda(a, N)$ решений простейшего линейного сравнения $m_1 + a m_2 \equiv 0 \pmod N$ от двух переменных алгоритм вычисления гиперболического параметра $q(\Lambda(a, N))$ за $O(\ln N)$ арифметических операций и описать множество Быковского для этого случая.

Решётка $\Lambda(a, N)$ имеет простой вид:

$$\Lambda(a, N) = \{(m_1, m_2) = (xN - ay, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$$

и задается базисом $\vec{\lambda}_1 = (-a, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (N, 0)$. Детерминант решётки $\Lambda(a, N)$ равен N: $\det \Lambda(a, N) = N$.

2. Сведения из теории цепных дробей и о скобках Эйлера

В этой работе нас будет интересовать цепная дробь для рационального числа $\frac{a}{N}$, $(a, N) = 1$, которая в сокращённом виде имеет вид

$$\frac{a}{N} = \{q_0; q_1, \ldots, q_n\} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что произвольная подходящая дробь $\frac{P_m}{Q_m}$ к числу $\frac{a}{N}$ имеет вид

$$\frac{P_m}{Q_m} = \frac{[q_0, \ldots, q_m]_{(m+1)}}{[q_1, \ldots, q_m]_{(m)}}, \quad (0 \leqslant m \leqslant n),$$

где скобки Эйлера $[b_1, \ldots, b_n]_{(n)}$ порядка n, определены рекуррентно

$$[]_{(-1)} = 0, \quad []_{(0)} = 1, \quad [b_1, \ldots, b_n]_{(n)} = b_n[b_1, \ldots, b_{n-1}]_{(n-1)} + [b_1, \ldots, b_{n-2}]_{(n-2)} \quad (n \geqslant 1).$$

Известно (см. [10]), что $[b_1, \ldots, b_n]_{(n)} = [b_n, \ldots, b_1]_{(n)}$, и, следовательно,

$$[b_1, \ldots, b_n]_{(n)} = b_1[b_2, \ldots, b_n]_{(n-1)} + [b_3, \ldots, b_n]_{(n-2)}.$$

Нам потребуется следующее равенство для скобок Эйлера.

Лемма 1. *При $0 \leqslant m \leqslant n$ справедливо равенство*

$$[q_0, \ldots, q_n]_{(n+1)}[q_1, \ldots, q_m]_{(m)} - [q_0, \ldots, q_m]_{(m+1)}[q_1, \ldots, q_n]_{(n)} = (-1)^m[q_{m+2}, \ldots, q_n]_{(n-m-1)}.$$

Доказательство. Действительно, при $m = 0$ утверждение верно в силу определения:

$$[q_0, \ldots, q_n]_{(n+1)}[]_{(0)} - [q_0]_{(1)}[q_1, \ldots, q_n]_{(n)} = [q_2, \ldots, q_n]_{(n)}.$$

Пусть утверждение справедливо для всех порядков непревосходящих m. Тогда

$$\begin{gathered}
[q_0, \ldots, q_n]_{(n+1)}[q_1, \ldots, q_{m+1}]_{(m+1)} - [q_0, \ldots, q_{m+1}]_{(m+2)}[q_1, \ldots, q_n]_{(n)} = \\
= [q_0, \ldots, q_n]_{(n+1)}q_{m+1}[q_1, \ldots, q_m]_{(m)} + [q_0, \ldots, q_n]_{(n+1)}[q_1, \ldots, q_{m-1}]_{(m-1)} - \\
-[q_0, \ldots, q_m]_{(m+1)}q_{m+1}[q_1, \ldots, q_n]_{(n)} - [q_0, \ldots, q_{m-1}]_{(m)}[q_1, \ldots, q_n]_{(n)} = \\
= q_{m+1}(-1)^m[q_{m+2}, \ldots, q_n]_{(n-m-1)} + (-1)^{m-1}[q_{m+1}, \ldots, q_n]_{(n-m)} = (-1)^{m+1}[q_{m+3}, \ldots, q_n]_{(n-m)}
\end{gathered}$$

и тем самым утверждение леммы доказано. □

Хорошо известно (см. [16]) следующее тождество

$$[q_1, \ldots, q_n]_{(n)} = [q_1, \ldots, q_m]_{(m)}[q_{m+1}, \ldots, q_n]_{(n-m)} + [q_1, \ldots, q_{m-1}]_{(m-1)}[q_{m+2}, \ldots, q_n]_{(n-m-1)}. \tag{4}$$

3. Наилучшие приближения второго рода

Пусть β — произвольное действительное число отличное от нуля ($\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$). Через $\|\beta\|$ будем обозначать расстояние до ближайшего целого

$$\|\beta\| = \begin{cases} \{\beta\}, & \text{если } 0 \leqslant \{\beta\} \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - \{\beta\}, & \text{если } \frac{1}{2} < \{\beta\} < 1, \end{cases}$$

$\{\beta\} = \beta - [\beta]$— дробная часть β, $\quad [\beta] = n$, где $n \in \mathbb{N}, n \leqslant \beta < n+1$, — целая часть β.

Будем через $\Lambda(\beta)$ обозначать решётку приближений Дирихле

$$\Lambda(\beta) = \{(q, q\beta - p) | q, p \in \mathbb{Z}\} = \{(q, \{q\beta\} - p) | q, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Заметим, что если β — рациональное число, то решётка $\Lambda(\beta)$ — декартова, для любого иррационального β решётка $\Lambda(\beta)$ не является декартовой.

В 1842 году П. Г. Лежён-Дирихле доказал знаменитую теорему.

Теорема 1. *Для любого $\beta \in \mathbb{R}$ и $Q > 1$, $Q \in \mathbb{N}$ найдется натуральное $q \leqslant Q$ такое, что*

$$\|q\beta\| < \frac{1}{Q}.$$

Решётка $\Lambda(\beta)$ имеет базис $\vec{\lambda_1} = (1, \beta)$, $\vec{\lambda_2} = (0, -1)$ и базисную матрицу $M(\beta)$:

$$M(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(\beta) = \mathbb{Z}^2 \cdot M(\beta), \quad \det \Lambda(\beta) = 1.$$

Таким образом, всякая решётка приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ является унимодулярной решёткой.

Рассмотрим разложение рационального числа $\beta = \frac{a}{N}$ в цепную дробь (3).

Пусть $\frac{P_m}{Q_m}$ — m-ая подходящая дробь к рациональному числу β $(m = 0, 1, \ldots, n)$. Рассмотрим точки решётки $\vec{\lambda}_m = (Q_m, Q_m\beta - P_m)$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$. Так как $P_m = q_m P_{m-1} + P_{m-2}$, $Q_m = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$, если положить $Q_{-2} = 1$, $Q_{-1} = 0$, $P_{-2} = 0$, $P_{-1} = 1$, то справедливо рекуррентное соотношение для векторов $\vec{\lambda}_m$: $\vec{\lambda}_m = q_m \vec{\lambda}_{m-1} + \vec{\lambda}_{m-2}$. Рассмотрим матрицы $M_m(\beta)$, заданные равенствами

$$M_m(\beta) = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_m \\ \vec{\lambda}_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_m & Q_m\beta - P_m \\ Q_{m-1} & Q_{m-1}\beta - P_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{m-1} & Q_{m-1}\beta - P_{m-1} \\ Q_{m-2} & Q_{m-2}\beta - P_{m-2} \end{pmatrix},$$

$$M_m(\beta) = m_m(\beta) \cdot M_{m-1}(\beta) \quad (m = 0, 1, \ldots, n), \quad m_m(\beta) = \begin{pmatrix} q_m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} Q_0 & Q_0\beta - P_0 \\ Q_{-1} & Q_{-1}\beta - P_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \{\beta\} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(\{\beta\}), \quad M_{-1} = \begin{pmatrix} Q_{-1} & Q_{-1}\beta - P_{-1} \\ Q_{-2} & Q_{-2}\beta - P_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что все матрицы $M_m(\beta)$ являются базисными.

Напомним известное определение наилучшего приближения второго рода (См. [17], стр. 34).

Определение 2. *Рациональная дробь $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ называется наилучшим приближением второго рода числа β, если из $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $0 < d \leqslant b$ необходимо следует*

$$|d\beta - c| > |b\beta - a|.$$

Согласно теоремам 16 и 17 из [17] справедлива теорема

Теорема 2. *Всякое наилучшие приближение второго рода есть подходящая дробь. Всякая подходящая дробь есть наилучшее приближение второго рода; единственное (тривиальное) исключение представляет*

$$\beta = q_0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}.$$

Следуя за Г. Ф. Вороным [2], [5], [6] и работами [1] и [4], дадим следующее определение локального минимума для решётки $\Lambda(\beta)$.

Определение 3. *Точка $(q, q\beta - p)$ называется локальным минимумом решётки $\Lambda(\beta)$, если параллелепипед $\Pi(q, q\beta - p) = [-q, q] \times [-q\beta + p, q\beta - p]$ не содержит ненулевых точек решётки $\Lambda(\beta)$ кроме своих вершин.*

Согласно данному определению рассматриваются только локальные минимумы в правой полуплоскости. Очевидно, что каждому локальному минимуму $(q, q\beta - p)$ из правой полуплоскости соответствует в точности один симметричный локальный минимум $(-q, -q\beta + p)$ из левой полуплоскости.

Нетрудно видеть, что каждому наилучшему приближению второго рода $\frac{p}{q}$ для числа β соответствует локальный минимум $(q, q\beta - p)$ из решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ и наоборот, каждому локальному минимуму $(q, q\beta - p)$ из решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ соответствует наилучшее приближение второго рода $\frac{p}{q}$ для числа β.

Если ограничиться случаем только рациональных $\beta > 0$, то из теоремы 2 следует, что множество всех локальных минимумов решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$ состоит в точности из точек $\vec{\lambda}_m = (Q_m, Q_m\beta - P_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Зададим точки $\vec{\lambda}_{-1} = (0, -1)$, $\vec{\lambda}_{-2} = (1, \beta)$, которые образуют базис решётки приближений Дирихле $\Lambda(\beta)$.

Теорема 3. *Последовательность всех локальных минимумов $\{\vec{\lambda}_0, \vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_n\}$ задается рекуррентным равенством*

$$\vec{\lambda}_m = q_m\vec{\lambda}_{m-1} + \vec{\lambda}_{m-2} \quad (0 \leqslant m \leqslant n), \tag{5}$$

где целое число q_m определяется равенством

$$q_m = \left[\frac{|\lambda_{m-2,2}|}{|\lambda_{m-1,2}|}\right], \quad \vec{\lambda}_m = (\lambda_{m,1}, \lambda_{m,2}). \tag{6}$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции и покажем, что для точек $\vec{\lambda}_n$, заданных равенствами (5) и (6), выполняется соотношение $\vec{\lambda}_m = (Q_m, Q_m\beta - P_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Действительно, для $m = -2, -1$ это выполняется по определению. При этом $\lambda_{-2,2}\lambda_{-1,2} < 0$.

Далее, получим $q_0 = [\beta]$, $\vec{\lambda}_0 = q_0(0, -1) + (1, \beta) = (1, \{\beta\}) = (Q_0, Q_0\beta - P_0)$, $\lambda_{-1,2}\lambda_{0,2} < 0$ и утверждение справедливо при $m = 0$.

Пусть $m \geqslant 0$ и для любого k с $0 \leqslant k \leqslant m$ справедливо равенство $\vec{\lambda}_k = (Q_k, Q_k\beta - P_k)$. Так как по свойствам подходящих дробей имеем:

$$\lambda_{m-2,2}\lambda_{m-1,2} = (Q_{m-2}\beta - P_{m-2})(Q_{m-1}\beta - P_{m-1}) < 0,$$

то для $\lambda_{m,2} = \left[\frac{|\lambda_{m-2,2}|}{|\lambda_{m-1,2}|}\right]\lambda_{m-1,2} + \lambda_{m-2,2}$ будут выполнены неравенства $\lambda_{m,2}\lambda_{m-2,2} > 0$ и, следовательно, $\lambda_{m,2}\lambda_{m-1,2} < 0$, $|\lambda_{m,2}| < |\lambda_{m-1,2}|$.

Положим $\beta = q_0 + \frac{1}{\beta_1}$, $\beta_m = q_m + \frac{1}{\beta_{m+1}}$ $(m \geqslant 1)$, $q_m = [\beta_m]$. Тогда, как известно (см. [17]), справедливо равенство

$$\beta = \frac{P_{m-1}\beta_m + P_{m-2}}{Q_{m-1}\beta_m + Q_{m-2}} \quad (m \geqslant 1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\lambda_{m-2,2}}{\lambda_{m-1,2}} = \frac{Q_{m-2}\frac{P_{m-1}\beta_m + P_{m-2}}{Q_{m-1}\beta_m + Q_{m-2}} - P_{m-2}}{Q_{m-1}\frac{P_{m-1}\beta_m + P_{m-2}}{Q_{m-1}\beta_m + Q_{m-2}} - P_{m-1}} = \frac{(Q_{m-2}P_{m-1} - P_{m-2}Q_{m-1})\beta_m}{Q_{m-1}P_{m-2} - P_{m-1}Q_{m-2}} = -\beta_m, \ \left[\frac{|\lambda_{m-2,2}|}{|\lambda_{m-1,2}|}\right] = q_m.$$

Поэтому по индукции получаем, что утверждение относительно $\vec{\lambda}_m$ справедливо для любого m, что и доказывает утверждение теоремы. □

4. Множество Быковского для двумерной решётки линейного сравнения

Прежде всего установим взаимно-однозначное соответствие между точками решёток $\Lambda(a,N)$ и $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$:

$$\psi : \Lambda(a,N) \longleftrightarrow \Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$$

с помощью равенства

$$\psi((xN-ay,y)) = \left(y, y\cdot\frac{a}{N}-x\right), \quad \psi^{-1}\left(q, q\cdot\frac{a}{N}-p\right) = (pN-aq,q).$$

Таким образом, взаимно-однозначное соответствие ψ задаётся линейным преобразованием с матрицей Ψ:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} N & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{a}{N} \end{pmatrix},$$

$$(xN-ay,y)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(y, y\cdot\frac{a}{N}-x\right).$$

Для решётки $\Lambda(a,N)$ определение локального минимума несколько отличается от определения 3.

Определение 4. *Точка $(xN-ay,y)$ называется локальным минимумом решётки $\Lambda(a,N)$, если параллелепипед $\Pi^*(xN-ay,y) = [-\overline{xN-ay}, \overline{xN-ay}] \times [-\overline{y},\overline{y}]$ не содержит ненулевых точек решётки $\Lambda(a,N)$ кроме своих вершин.*

Заметим, что определение 1 содержит на два элемента больше минимальных решений чем определение 4 локальных минимумов. Действительно, точки $(0,N)$ и $(0,-N)$ являются минимальными решениями согласно определения 1, но не являются локальными минимумами согласно определению 4, так как если $ab \equiv 1 \pmod N$ и $|b| \leqslant \frac{N}{2}$, то решение $(-1,b) \in \Pi^*(0,N)$ и, значит, $(0,N)$ не является локальным минимумом решётки $\Lambda(a,N)$.

Будем множество локальных минимумов решётки $\Lambda(a,N)$ называть просто множеством Быковского и обозначать через $B(a,N)$, а количество элементов — через $r(a,N)$. Ясно, что $B(a,N) = B^{(0)}(\Lambda) \setminus \{(0,N),(0,-N)\}$ и $r(a,N) = r^{(0)}(\Lambda) - 2$.

Нетрудно видеть, что взаимно-однозначное соответствие ψ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством Быковского $B(a,N)$ и всеми локальными минимумами решётки Дирихле $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$, кроме точки $(N,0)$, которая является локальным минимумом в решётке $\Lambda\left(\frac{a}{N}\right)$, а соответствующая ей точка $(0,N)$ не является локальным минимумом в решётке $\Lambda(a,N)$. Если через $B^*(a,N)$ обозначим множество всех локальных минимумов решётки $\Lambda(a,N)$ вида $(xN-ay,y)$ с $0<y<N$, то будем иметь $B(a,N) = B^*(a,N) \cup -B^*(a,N)$. И из теории наилучших приближений второго рода следует следующая теорема.

Теорема 4. *Для множества Быковского $B(a,N)$ справедливо равенство*

$$B^*(a,N) = \{((-1)^m[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}, Q_m) | m = 0,\ldots,n\text{–}1\}, \quad B(a,N) = B^*(a,N) \cup -B^*(a,N).$$

Кроме этого, $r(a,N) = 2n$.

Следствие 1. *Для гиперболического параметра $q(\Lambda(a,N))$ двумерной решётки $\Lambda(a,N)$ решений линейного сравнения справедливо равенство*

$$q(\Lambda(a,N)) = \min_{0\leqslant m\leqslant n-1}[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}\cdot Q_m.$$

Кроме этого, всегда $q(\Lambda(a,N)) \geqslant a$ для $1 \leqslant a < N$, $(a,N) = 1$.

Доказательство. Действительно, очевидно, что

$$q(\Lambda(a,N)) = \min_{(x,y)\in B^*(a,N)} |x|\cdot y.$$

Отсюда и из теоремы 4 следует первое утверждение следствия.

Второе утверждение следствия очевидно. □

Следствие 2. *Равенство $q(\Lambda(a,N)) = a$ для $1 \leqslant a < N$, $(a,N)=1$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий*

1. $q_1 \geqslant \max\limits_{2\leqslant\nu\leqslant n-1} q_\nu + 2$;

2. $q_1 = \max\limits_{2\leqslant\nu\leqslant n-1} q_\nu + 1, \quad 1 + \frac{1}{q_2+1} > \frac{1}{q_{\nu+2}} + \frac{1}{q_\nu}$ *при* $q_\nu = q_1 - 1, \quad 2 \leqslant \nu \leqslant n-1$;

3. $$q_1 = \max_{2\leqslant\nu\leqslant n-1} q_\nu + 1,$$
$$1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} \geqslant \cfrac{1}{q_{\nu+2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1}}}}$$
при $q_\nu = q_1 - 1, \quad 2 \leqslant \nu \leqslant n-1$.

4. $$q_1 = \max_{2\leqslant\nu\leqslant n-1} q_\nu,$$
$$\cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} \geqslant \cfrac{1}{q_{\nu+2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} + \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1}}}}$$
при $q_{\nu+1} = q_1, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n-1$.

Доказательство. Действительно, равенство $q(\Lambda(a,N)) = a$ означает, что выполняется неравенство

$$a \leqslant [q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}\cdot Q_m \quad (1 \leqslant m \leqslant n-1),$$

которое эквивалентно неравенству

$$\frac{N}{a} = \frac{Q_n}{a} \geqslant \frac{Q_n}{[q_{m+2},\ldots,q_n]_{(n-m-1)}\cdot Q_m} \quad (1 \leqslant m \leqslant n-1).$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{Q_n}{a} = \frac{[q_1,\ldots,q_n]_{(n)}}{[q_2,\ldots,q_n]_{(n-1)}} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}.$$

С другой стороны, воспользуемся тождеством (4), получим

$$\frac{Q_n}{[q_{m+2},\dots,q_n]_{(n-m-1)}\cdot Q_m} =$$
$$= \frac{[q_1,\dots,q_m]_{(m)}[q_{m+1},\dots,q_n]_{(n-m)} + [q_1,\dots,q_{m-1}]_{(m-1)}[q_{m+2},\dots,q_n]_{(n-m-1)}}{[q_{m+2},\dots,q_n]_{(n-m-1)}\cdot Q_m} =$$
$$= q_{m+1} + \cfrac{1}{q_{m+2} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} + \cfrac{1}{q_m + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_1}}}} \quad (1 \leqslant m \leqslant n-1).$$

Учитывая неравенства

$$\frac{1}{q_\nu + 1} \leqslant \cfrac{1}{q_\nu + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} \leqslant \frac{1}{q_\nu},$$

получим утверждение следствия. □

5. Оценка гиперболической дзета-функции двумерной решётки сравнений

Как известно (см. [1, 4]), гиперболическая дзета-функция решётки $\Lambda(a, N)$ задаётся равенством

$$\zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_N(m_1 + am_2)}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\alpha}, \tag{7}$$

где

$$\delta_m(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod m, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod m, \end{cases}$$

— символ Коробова и $\overline{x} = \max(1, |x|)$ для любого вещественного x. С ней тесно связана функция $H(a; N)$, заданная формулой

$$H(a;N) = \frac{9}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(1 - 2\frac{k}{N}\right)^2\left(1 - 2\left\{\frac{ak}{N}\right\}\right)^2.$$

Функция $H(a; N)$, предложенная Н. М. Коробовым в работе [13], используется для определения качества оптимальных коэффициентов и для построения алгоритмов их вычисления (см. например, [14, 15]). В работе [7] дается конечная формула для $H(a; N)$, которая позволяет её точно вычислять за $O(\ln N)$ арифметических операций.

Так как периодическая функция $h(x) = 3(1 - 2\{x\})^2$ имеет разложение в ряд Фурье

$$h(x) = 3(1-2\{x\})^2 = 1 + \frac{6}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left(e^{2\pi imx} + e^{-2\pi imx}\right),$$

то справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha)=\frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha}+\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha),$$
$$H(a;N)=1+\frac{4}{N^2}+\frac{36}{\pi^4}\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|2),$$

где $\zeta(\alpha)$ *— дзета-функция Римана, а*

$$\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha)=\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha}.$$

Доказательство. Так как

$$\zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta_N(m)+\delta_N(-m)+\delta_N(am)+\delta_N(-am)}{m^\alpha}+$$
$$+\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(-m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)+\delta_N(-m_1-am_2)}{m_1^\alpha m_2^\alpha}=$$
$$=\frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha}+\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha)$$

и первое утверждение леммы доказано.

Аналогично доказывается второе утверждение с учетом, что $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$. □

Положим, как обычно, $N_1=\left[\frac{N}{2}\right]$, $N_2=\left[\frac{N-1}{2}\right]$, тогда множество чисел

$$M(N)=\{-N_2,\dots,-1,0,1,\dots,N_1\}$$

образуют абсолютно наименьшую полную систему вычетов по модулю N. Очевидно, что для множества Быковского $B(a,N)$ выполняется включение $B(a,N)\subset M(N)^2$.

Определим величины

$$\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha)=\sum_{m_1,m_2=1}^{N_1}\frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha},$$
$$\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha)=\sum_{\max(m_1,m_2)>N_1}\frac{2(\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))}{m_1^\alpha m_2^\alpha}.$$

Ясно, что $\zeta_H^*(\Lambda(a,N)|\alpha)=\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha)+\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha)$.

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha)\leqslant\frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^\alpha}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right).$$

Доказательство. Действительно, имеем:

$$\zeta_H^{***}(\Lambda(a,N)|\alpha)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\frac{2}{m_1^\alpha}\sum_{m_2\geqslant\frac{N}{2}}^{\infty}\frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)}{m_2^\alpha}+$$
$$+\sum_{m_2=1}^{\infty}\frac{2}{m_2^\alpha}\sum_{m_1\geqslant\frac{N}{2}}^{\infty}\frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)}{m_1^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{2}{m_1^{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{N}{2}+mN\right)^{\alpha}} \sum_{m_2=\frac{N}{2}+mN}^{\frac{N}{2}+mN+N-1} (\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2))+$$

$$+ \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{2}{m_2^{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{N}{2}+mN\right)^{\alpha}} \sum_{m_1=\frac{N}{2}+mN}^{\frac{N}{2}+mN+N-1} (\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)) \leqslant$$

$$\leqslant 8\zeta(\alpha)\frac{2^{\alpha}}{N^{\alpha}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2m)^{\alpha}} = \frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^{\alpha}} \left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right).$$

□

Так как $\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) = \zeta_H^{**}(\Lambda(N-a,N)|\alpha)$, то, без ограничения общности, считаем $1 \leqslant a < \frac{N}{2}$.

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant 4\zeta^2(\alpha) \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{Q_{\nu}^{\alpha}[q_{\nu+2},\ldots,q_n]_{(n-\nu-1)}^{\alpha}}.$$

Доказательство. Действительно, положим $b_\nu = [q_{\nu+2},\ldots,q_n]_{(n-\nu-1)}$, $c_\nu = \left[\frac{N}{2b_\nu}\right]$ ($\nu = 0,\ldots,n-1$), тогда

$$\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{m_2=Q_\nu}^{\min(Q_{\nu+1}-1,N_1)} \frac{2}{m_2^{\alpha}} \sum_{a=1}^{c_\nu} \sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1} \frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)}{m_1^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{b=1}^{q_{\nu+1}} \sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)} \frac{2}{m_2^{\alpha}} \sum_{a=1}^{c_\nu} \sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1} \frac{\delta_N(m_1+am_2)+\delta_N(m_1-am_2)}{m_1^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{2}{Q_\nu^{\alpha}b_\nu^{\alpha}} \sum_{b=1}^{q_{\nu+1}} \frac{1}{b^{\alpha}} \sum_{a=1}^{c_\nu} \frac{1}{a^{\alpha}} S_\nu(a,b),$$

где

$$S_\nu(a,b) = \sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)} \sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1} \delta_N(m_1+am_2)+$$

$$+ \sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)} \sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1} \delta_N(m_1-am_2).$$

Покажем,что

$$\sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)} \sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1} \delta_N(m_1+am_2) \leqslant 1.$$

Предположим противное, тогда найдутся две точки (m_1,m_2) и (m_1',m_2') из области суммирования такие, что

$$\delta_N(m_1+am_2) = \delta_N(m_1'+am_2') = 1.$$

Но тогда $\delta_N((m_1-m_1')+a(m_2-m_2')) = 1$ и $|m_1-m_1'| < Q_\nu$, $|m_2-m_2'| < b_\nu$, что противоречит определению множества Быковского и теореме 4. Аналогично доказывается, что

$$\sum_{m_2=bQ_\nu}^{\min(bQ_\nu+Q_\nu-1,Q_{\nu+1}-1,N_1)} \sum_{m_1=ab_\nu}^{ab_\nu+b_\nu-1} \delta_N(m_1-am_2) \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что $0 \leqslant S_\nu(a,b) \leqslant 2$ и

$$\zeta_H^{**}(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant 4\zeta^2(\alpha)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{Q_\nu^\alpha b_\nu^\alpha}.$$

□

Выражение

$$SB(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in B(\Lambda)}\frac{1}{(\overline{x}_1\dots\overline{x}_s)^\alpha}$$

будем называть суммой Быковского.

Теорема 5. *Для гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(a,N)$ справедливы неравенства*

$$SB(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \zeta_H(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{4\zeta(\alpha)}{N^\alpha} + \frac{2^{\alpha+3}\zeta^2(\alpha)}{N^\alpha}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right) + 2\zeta^2(\alpha)SB(\Lambda(a,N)|\alpha).$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Правое неравенство следует из лемм 2–4. □

Для суммы Быковского решётки $\Lambda(a,N)$ решений линейного сравнения несложно получить двусторонние оценки.

Теорема 6. *Для суммы Быковского справедливы неравенства*

$$\frac{c_1(\Lambda(a,N)|\alpha)}{N^\alpha} \leqslant SB(\Lambda(a,N)|\alpha) \leqslant \frac{c_2(\Lambda(a,N)|\alpha)}{N^\alpha},$$

где

$$c_1(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{\nu=0}^{n-1}(q_{\nu+1})^\alpha, \quad c_2(\Lambda(a,N)|\alpha) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(q_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+2}}+\frac{1}{q_\nu}\right)^\alpha.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения доказательства следствия 2, получим утверждение теоремы. □

Из доказанной теоремы следует, что главный член для этих сумм есть сумма α-ых степеней элементов цепной дроби для $\frac{a}{N}$ делённый на N^α.

6. Заключение

Пусть α — произвольная вещественная иррациональность и решётка $\Lambda(\alpha)$ задана равенством

$$\Lambda(\alpha) = \{(n+k\alpha, n-k\alpha)|n,k\in\mathbb{Z}\}.$$

Пусть $\frac{P_m}{Q_m}$ обозначает m-ю подходящая дробь к α. По аналогии с квадратичным случаем можно рассмотреть решётку $\Lambda_m(Q_m,P_m) = \{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m)|n,k\in\mathbb{Z}\}$ и сетку

$$M(\Lambda_m(\alpha)) = \left\{\left(\frac{n}{2Q_m}+\frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m}-\frac{k}{2P_m}\right)\middle| k\in B(n), 0\leqslant n\leqslant 2Q_m-1\right\},$$

$$B(n) = \left\{k\middle|\begin{array}{ll} k=0, & \text{при } n=0,\\ -\frac{P_m n}{Q_m}\leqslant k\leqslant\frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n=1,\dots Q_m-1,\\ -2P_m+\frac{P_m n}{Q_m}<k<2P_m-\frac{P_m n}{Q_m}, & \text{при } n=Q_m,\dots 2Q_m-1;\end{array}\right\}$$

Из результатов А. В. Михляевой [15] следует, что это всегда будет параллелепипедальная сетка. Качество этой сетки можно рассчитать с помощью быстрого алгоритма из работы [3].

Возникают следующие естественные вопросы:

1. Как множество Быковского для решётки $\Lambda_m(Q_m, P_m)$ связано с локальными минимумами решётки $\Lambda_m(\alpha)$?

2. Как суммы Быковского для решётки $\Lambda_m(Q_m, P_m)$ связаны с суммами Быковского для решётки $\Lambda_m(\alpha)$?

3. Можно ли получить для аналога функции H для решётки $\Lambda_m(\alpha)$ конечную формулу аналогичную результатам из работы [4]?

4. Можно ли результаты для размерности 2 перенести на размерность 3 или на любую размерность $s > 2$?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быковский В. А. О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул // Чебышевский сборник, 2002, т. 3, вып. 2(4), С. 27–33.

2. Г. Ф. Вороной Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей // В книге Г. Ф. Вороной. Собрание сочинений в трех томах. Т. 1, С. 197–391.

3. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.

4. О. А. Горкуша, Н. М. Добровольский. Об оценках гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник, 2005, т. 6, вып. 2(14), С. 130–138.

5. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. — М.–Л. Издательство Академии наук СССР. 1947 г., 422 с.

6. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев. Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 11, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, С. 3–340.

7. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.

8. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Теория приближений и гармонический анализ: Тез. докл. Междунар. конф. Тула, 1998.

9. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Реброва И. Ю. Об одном рекурсивном алгоритме для решёток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 3. Тула, 1999. С. 38–51.

10. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. — М.: Наука. 1965 г. — 176 с.

11. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.

12. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

13. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.

14. Михляева А. В. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241–256.

15. Михляева А. В. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 307–312.

16. Сушкевич А. К. Теория чисел.– Харьков: Из-во Харьковского гос. ун-та им. А. М. Горького. 1956. 204 с.

17. А. Я. Хинчин. Цепные дроби. — М.: Физматлит, 1960 — 112 с.

REFERENCES

1. Bykovskij, V.A 2002, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 27–33.

2. Voronoi, GF 1896, On Generalization of the Algorithm of Continued Fraction, Warsawa Üniversity.

3. Vronskaya, G. T., Dobrovol’skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph" , edited by N. M. Dobrovol’skii. Tula.

4. O. A. Gorkusha, N. M. Dobrovolsky, 2005, "On estimates of hyperbolic zeta function of lattices" // Chebyshevsky Collection, vol. 6, issue 2(14), pp. 130-138.

5. B. N. Delone., 1947, "St. Petersburg School of Number Theory" — *M.–L. Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR.* 422 p.

6. B. N. Delone, D. K. Faddeev., 1940, "The theory of irrationalities of the third degree" // *Tr. Math. V. A. Steklov Institute, 11, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, M.-L.*, pp. 3-340.

7. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R., Pikhtil’kov, S.A., Rodionova, O.V. & Ustyan, A.E. 1999, “On a single algorithm for finding optimal coefficients”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 51–71.

8. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, “On a recursive algorithm for lattices”, Teoriya priblizhenij i garmonicheskij analiz: Tezisy doklada Mezhdunarodnoj konferentsii (Approximation theory and harmonic analysis: proceedings of the International conference), Tula, Russia.

9. Dobrovol’skii, N. M., Esayan, A.R. & Rebrova, I. YU. 1998, “On a recursive algorithm for lattices”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 3, pp. 38–51.

10. Davenport, H., 1965, "The higher arithmetic" , *Moscow, Nauka* — pp. 176.

11. Kassels, D. 1965, Vvedenie v geometriyu chisel, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.

12. Korobov, N.M. 1959, “The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

13. Korobov, N.M. 1960, “Properties and calculation of optimal coefficients”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

14. Mikhlyaeva, A. V., 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.

15. Mikhlyaeva, A. V., 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 307–312.

16. Sushkevich A. K., 1956, "Number theory" – *Kharkiv: From the Kharkiv State University named after A.M. Gorky.* 204 p.

17. A. Y. Khinchin, 1960, "Chain fractions" — *M.: Fizmatlit*, — 112 p.

Получено 18.07.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 512.53 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198

Частичные порядки и идемпотенты моноидов

В. Б. Поплавский

Поплавский Владислав Брониславович — доктор физико-математических наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (г. Саратов).
e-mail: poplavskivb@mail.ru

Аннотация

Идемпотенты частично упорядоченного моноида играют разные роли в определении его свойств. В работе множество идемпотентов делится на три подмножества: несравнимых с единицей, не меньше и не больше единицы моноида. Идемпотенты первого подмножества названы первичными, а идемпотенты сравнимые с единицей названы вторичными. Исследуются свойства идемпотентов в терминах частичных порядков и эквивалентностей Грина Основное внимание в статье уделяется нахождению связей между различными классическими и неклассическими, стабильными и нестабильными частичными порядками и ролям, которые в этом играют идемпотенты. В частности, как результат, получен критерий стабильности частичного порядка Митча. Приводятся различные примеры упорядоченных моноидов в контексте построенной теории идемпотентов и частичных порядков.

Ключевые слова: идемпотенты, частично упорядоченный моноид, естественный порядок полугруппы, классы Грина.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
В. Б. Поплавский. Частичные порядки и идемпотенты моноидов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 182–198.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 512.53 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-182-198

Partial Orders and Idempotents of Monoids

V. B. Poplavski

Poplavski Vladislav Bronislavovich — doctor of physical and mathematical sciences, Saratov State University (Saratov).
e-mail: poplavskivb@mail.ru

Abstract

Idempotents of the monoid play different roles in the formation of its properties. A set of idempotents is divided into three parts: incomparable with a unit, less and equal to a unit, and more and equal to a unit. The idempotents of the first part are called primary and the idempotents comparable with a unit are called secondary. The properties of idempotents are investigated in terms of partial orders and Green's equivalences. In the article the main attention is given to finding connections among different classical and non-classical, stable and unstable partial orders and roles which the idempotents play in that. In particular, as a result, the criterion of stability of Mitsch's partial order is obtained. Different examples of ordered monoids are shown in the context of the constructed theory of idempotents and partial orders.

Keywords: idempotents, partial ordered monoid, natural order for semigroup, Green's classes.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. B. Poplavski, 2021, "Partial Orders and Idempotents of Monoids" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 182–198.

Введение

В настоящей статье рассматривается частично упорядоченный моноид $\mathbf{X}$, т. е. полугруппа с единицей 1, на которой задан стабильный относительно умножения частичный порядок $\leq$.

Хорошо известно, что идемпотенты полугруппы играют весьма важную роль в определении её свойств. Вместе с тем, эта роль у каждого идемпотента различна. Для частично упорядоченного моноида имеет смысл рассмотреть свойства идемпотентов, связав их с частичным порядком. В работе множество идемпотентов делится на три подмножества. Первое подмножество состоит из не сравнимых с единицей идемпотентов, названных далее первичными идемпотентами. Второе и третье подмножества состоят из идемпотентов, которые не превосходят или не меньше единицы моноида соответственно. Такие сравнимые с единицей идемпотенты мы называем вторичными. Очевидно, что такое деление множества идемпотентов зависит от частичного порядка $\leq$, заданного на моноиде $\mathbf{X}$.

В первых четырёх разделах этой работы изучаются свойства вторичных идемпотентов, порождённых элементами моноида. Приводятся примеры таких идемпотентов и их соответствующих свойств.

Важным инструментом при изучении свойств таких идемпотентов являются эквивалентности Грина. Так, например, теорема 3.3 даёт необходимый признак существования вторичных идемпотентов в терминах $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ эквивалентностей Грина. Четвёртый параграф полностью

посвящён вопросу расположения идемпотентов в $\mathcal{D}-$классах и такому важному свойству, как коммутативность идемпотентов.

Частичные порядки на полугруппе называются стабильными (или согласованными с умножением), если из неравенства $a \leq b$ для элементов $a, b \in \mathbf{X}$ следует $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$ для любого $c \in \mathbf{X}$. Порой идемпотенты и полугрупповая операция порождают частичные порядки на полугруппе. Такие порядки, если они стабильны, принято называть естественными. Первый такой естественный порядок был найден Вагнером [1] для инверсных полугрупп, перенося его с полугруппы взаимнооднозначных частичных преобразований множества, играющих важную роль в теории гладких многообразий. С этой же позиции он рассмотрел задачу нахождения представлений упорядоченной полугруппы частичными преобразованиями [2], для которых заданному в полугруппе отношению порядка соответствует отношение включения частичных преобразований. Для произвольной упорядоченной полугруппы такого представления может не существовать вовсе, как это показывает пример упорядоченной группы, если отношение порядка не сводится к тождественному. Поэтому в этой статье рассматриваются упорядоченные и не обязательно представимые частичными преобразованиями полугруппы. Обсуждая частичные порядки, порождённые полугрупповой операцией, Митч писал [3], что только спустя 30 лет естественный порядок Вагнера был распространён Хартвигом [4] и Намбурипадом [5] на класс регулярных полугрупп. Однако, даже для регулярных полугрупп такие порядки не всегда являются стабильными. Последовала серия работ, посвященных различным способам задания таких частичных порядков, эквивалентность которых была показана Митчем [3], что привело к появлению более универсального способа задания частичного порядка на полугруппе, вошедшего в литературу как "порядок Митча". Позже появились статьи, посвященные определению классов регулярных полугрупп со стабильным порядком Митча, стремлению распространить его на другие типы полугрупп. Несмотря на то, что исследования в этом направлении продолжаются, некий итог определённому этапу исследований в этом направлении подвела ещё одна статья Митча [6], посвященная 80-летию Стефана Шварца.

Известны [5] достаточно жёсткие условия стабильности естественного частичного порядка Митча: он стабилен на регулярной полугруппе тогда и только тогда, когда эта полугруппа локально инверсная (т.е. для каждого идемпотента e подмоноид $e\mathbf{X}e$ является инверсной полугруппой). В частности, для любой коммутативной полугруппы порядок Митча стабилен. В этой статье априори предполагается существование на моноиде $\mathbf{X}$ стабильного частичного порядка, возможно, отличного от естественного. Тогда вторичные идемпотенты, индуцированные этим порядком, позволяют построить так называемые вторичные порядки и провести сравнение всех этих порядков с порядком Митча (теорема 5.8), не связывая их с регулярностью элементов моноида. На сравнении частичных порядков получен критерий стабильности частичного порядка Митча (теорема 5.8).

В 6 параграфе проводится иллюстрация развитой здесь теории вторичных идемпотентов для случая, когда моноид $\mathbf{X}$ является инверсной полугруппой. Показано совпадение стабильных частичных порядков Вагнера, Митча и порождённых ими вторичных порядков (теорема 6.4).

1. Вторичные идемпотенты моноида

Определение 1.1. *Пусть $\langle \mathbf{X}, \leq \rangle$ – частично упорядоченный моноид $\mathbf{X}$ со стабильным относительно полугрупповой операции частичным порядком $\leq$. Для некоторого $a \in \mathbf{X}$, если существует наибольшее решение уравнения $xa = a$, то обозначим его через a^R. Если существует наименьшее решение уравнения $xa = a$, то обозначим его через a_R. Соответственно, если для уравнения $ax = a$ существует наибольшее решение, то обозначим его через a^L, и если среди решений уравнения $ax = a$ существует наименьшее, то обозначим его*

через a_L.

Теорема 1.1. *Если элементы* a^R, a_R, a^L, a_L *существуют, то они являются идемпотентами моноида* $\mathbf{X}$.

Доказательство. Из определения 1.1 следует, что $1 \leq a^R$. Умножая последнее неравенство на a^R, получаем $a^R \leq a^R a^R$.

С другой стороны, $(a^R a^R)a = a^R(a^R a) = a$ и, следовательно, из определения 1 следует, что $(a^R a^R) \leq a^R$. Получаем равенство $a^R = a^R a^R$.

Аналогичным образом можно доказать равенство $a^L = a^L a^L$, а учитывая, что $a_R \leq 1$ и $a_L \leq 1$, можно показать и идемпотентность элементов a_R и a_L. □

Теорема 1.2. *Если* a^R, a_R, a^L, a_L *существуют, то выполняются следующие равенства:*

$$(a^R)^R = (a^R)^L = a^R,$$

$$(a^L)^L = (a^L)^R = a^L,$$

$$(a_L)_L = (a_L)_R = a_L,$$

$$(a_R)_R = (a_R)_L = a_R.$$

Доказательство. Из неравенства $1 \leq a^R$ получаем

$$(a^R)^R \leq (a^R)^R a^R = a^R, \quad (a^R)^L \leq a^R (a^R)^L = a^R.$$

Это позволяет записать $(a^R)^R \leq a^R$, $(a^R)^L \leq a^R$.

С другой стороны, сравнивая равенства $a^R a^R = a^R$, $(a^R)^R a^R = a^R$, $a^R (a^R)^L = a^R$ и учитывая максимальность элементов $(a^R)^R$, $(a^R)^L$, имеем $a^R \leq (a^R)^R$, $a^R \leq (a^R)^L$, что доказывает равенство $(a^R)^R = (a^R)^L = a^R$.

Остальные равенства доказываются аналогично.□

Теорема 1.3. *Пусть* e *– идемпотент моноида* $\mathbf{X}$. *Тогда следующие условия равносильны:*

$$1 \leq e \Longleftrightarrow e = e^R \Longleftrightarrow e = e^L;$$

$$e \leq 1 \Longleftrightarrow e = e_R \Longleftrightarrow e = e_L.$$

Доказательство. Пусть $1 \leq e = ee$. Тогда существует решение уравнения $xe = e$. Из неравенства $1 \leq e = xe$ получаем $x \leq xe = xxe = e$, т.е. e является наибольшим решением уравнения $e = xe$. Следовательно, e^R существует и $e = e^R$. Таким же способом можно показать, что $e = e^L$.

Если выполняется равенство $e = e^R$, то из неравенства $1 \leq e^R$ получаем $1 \leq e$.

Аналогично доказывается эквивалентность

$$e \leq 1 \Longleftrightarrow e = e_R \Longleftrightarrow e = e_L.$$

□

Определение 1.2. *Идемпотент* e *назовем вторичным идемпотентом, порожденным заданным на моноиде порядком* $\leq$, *если он сравним с единицей моноида* $\mathbf{X}$, *т. е.* $e \leq 1$ *или* $1 \leq e$.

Идемпотент назовем первичным в противном случае, т. е. если он не сравним с единицей заданным на моноиде частичным порядком $\leq$.

Таким образом, если идемпотент e – вторичный, то выполняется либо $e = e^R = e^L$, либо $e = e_R = e_L$. В случае $e = e^R = e^L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом максимального типа*, в случае $e = e_R = e_L$ идемпотент e назовем *вторичным идемпотентом минимального типа.*

Из теорем 1.1 и 1.2 получаем, что, если существуют элементы a^R, a_R, a^L, a_L для некоторого $a \in \mathbf{X}$, то они являются вторичными идемпотентами. Будем называть их соответственно *R-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа или L-вторичными идемпотентами максимального, минимального типа, порожденными элементом a, относительно порядка $\leq$*. Будем в этом случае также говорить, что элемент *a обладает вторичным идемпотентом (или порождает вторичный идемпотент) соответствующего типа.*

Множества всех идемпотентов, первичных идемпотентов, вторичных идемпотентов максимального и минимального типов будем обозначать символами E, E_0, $E^{\uparrow}$ и $E_{\downarrow}$ соответственно. Заметим, что $E_0 \cap E^{\uparrow} = \emptyset$, $E_0 \cap E_{\downarrow} = \emptyset$, $E^{\uparrow} \cap E_{\downarrow} = \{1\}$, что следует из теоремы 1.3, и $E = E_0 \cup E^{\uparrow} \cup E_{\downarrow}$.

Теорема 1.4. *Пусть e – первичный идемпотент. Тогда e не порождает ни одного вторичного идемпотента или, если по крайней мере один из вторичных идемпотентов e^R, e^L, e_R, e_L существует, выполняются строгие неравенства:*

$$e \lneqq e^R, \quad e \lneqq e^L,$$

$$e \gneqq e_R, \quad e \gneqq e_L.$$

Доказательство. Если один из вторичных идемпотентов e^R существует, то $e \lneqq e^R$, так как из $ee = e^R e = e$ следует $e \leq e^R$ по определению идемпотента e^R. Кроме того, $e \neq e^R$, так как в противном случае по теореме 1.3 идемпотент e является вторичным.

Остальные пункты предложения доказываются аналогичным способом. □

Справедливость следующих утверждений очевидна в силу стабильности частичного порядка $\leq$ и определения 1.1.

Теорема 1.5. *Для любых элементов $a, b \in \mathbf{X}$ верны следующие импликации, если все указанные в них вторичные идемпотенты существуют:*

$$1 \leq a \leq b^R \to b^R = ab^R = b^R a \to ab = b \to a \leq b^R;$$

$$1 \leq a \leq b^L \to b^L = b^L a = ab^L \to ba = b \to a \leq b^L;$$

$$1 \geq a \geq b_R \to b_R = ab_R = b_R a \to ab = b \to a \geq b_R;$$

$$1 \geq a \geq b_L \to b_L = ab_L = b_L a \to ab = b \to a \geq b_L.$$

В частности, выполняются эквивалентности:

$$1 \leq a \leq a^R \leftrightarrow a = a^R; \quad 1 \leq a \leq a^L \leftrightarrow a = a^L;$$

$$a_R \leq a \leq 1 \leftrightarrow a = a_R; \quad a_L \leq a \leq 1 \leftrightarrow a = a_L.$$

Теорема 1.6. *Для любых $a, b \in \mathbf{X}$, для которых приведённые ниже вторичные идемпотенты существуют относительно стабильного порядка $\leq$, справедливы неравенства:*

$$a^R \leq (ab)^R; \quad b^L \leq (ab)^L;$$

$$(ab)_R \leq a_R; \quad (ab)_L \leq b_L.$$

2. Примеры моноидов и их идемпотентов

Пусть $(\mathbf{X}, \wedge, 1)$ – нижняя полурешетка с наибольшим элементом 1 в качестве единицы моноида, которым является эта полурешетка. Очевидно, что в этом случае все элементы моноида X являются вторичными идемпотентами минимального типа: $X = E_{\downarrow}$.

Аналогично, если $(\mathbf{X}, \vee, 0)$ – верхняя полурешетка с наименьшим элементом 0 в качестве единицы моноида, которым является эта полурешетка. В этом случае выполняется равенство $X = E^{\uparrow}$.

Приведем пример нетривиального строения множества идемпотентов. Пусть $B(M)$– множество всех бинарных отношений на множестве M ($|M| \geq 3$), которое определяется как множество всевозможных подмножеств декартова квадрата $M \times M$ с частичным порядком включения $\subseteq$. На множестве $B(M)$ определена стандартным образом структура моноида с операцией умножения бинарных отношений и единицей $\Delta = \{(x, x) | x \in M\}$. Заметим, что частичный порядок включения $\subseteq$ стабилен относительно умножения бинарных отношений. Для этого частично упорядоченного моноида $(B(M), \subseteq)$ вторичными идемпотентами минимального типа являются все бинарные отношения ρ, для которых выполняется $\rho = \rho^2 \subseteq \Delta$, например, $\rho = \{(x, x), (y, y)\}$ для любых $x, y \in M$. Очевидно также, что множество первичных идемпотентов E_0 непусто. Например,

$$\{(x, x), (x, y), (y, y), (y, x)\} \in E_0 \subset B(M).$$

Множество вторичных идемпотентов максимального типа $E^{\uparrow}$ содержит также элементы, отличные от Δ. Например, $\Delta \cup \{(x, y), (y, x)\} \in E^{\uparrow} \subset B(M)$.

Рассмотрим полугруппу квадратных матриц фиксированного порядка с элементами из произвольной булевой алгебры с операцией конъюнктного произведения (эта операция стабильна относительно булева порядка включения) и единичной матрицей в качестве единицы. Вторичными идемпотентами минимального типа являются матрицы у которых в некоторых местах диагонали стоят единицы, а на остальных местах – нули булевой алгебры. Вторичными идемпотентами максимального типа являются идемпотентные матрицы у которых на диагонали стоят единицы булевой алгебры.

Примеры построения вторичных идемпотентов максимального типа в частичных полугруппах матриц произвольных размеров с элементами из произвольной булевой алгебры, их свойства, применения, а также сравнения естественных порядков на полугруппах булевых матриц можно найти в [7], [8], [9].

3. Вторичные идемпотенты и классы Грина

Теорема 3.1. *Пусть вторичные идемпотенты a^R,b^R (или a_R,b_R), порожденные элементами $a, b \in \mathbf{X}$, существуют. Если существует решение уравнения $ax = b$, то $a^R \leq b^R$ (соответственно $a_R \geq b_R$).*

Если существуют вторичные идемпотенты a^L,b^L (или a_L,b_L), порожденные элементами $a, b \in \mathbf{X}$, то из разрешимости уравнения $xa = b$ следует $a^L \leq b^L$ (соответственно $a_L \geq b_L$).

Доказательство. Так как $a^R b = a^R(ax) = (a^R a)x = ax = b$, то $a^R b = b$. Тогда, если b^R существует, то $a^R \leq b^R$.

Таким же образом можно показать и остальные неравенства. □

Замечание 3.1. Теорему 3.1 можно переформулировать в контексте частичного порядка на множестве главных односторонних идеалов моноида $\mathbf{X}$ следующим образом:

$$a\mathbf{X} \subseteq b\mathbf{X} \to b^R \leq a^R;$$

$$a\mathbf{X} \subseteq b\mathbf{X} \to a_R \leq b_R;$$

$$\mathbf{X}a \subseteq \mathbf{X}b \to b^L \leq a^L;$$

$$\mathbf{X}a \subseteq \mathbf{X}b \to a_L \leq b_L.$$

Известно [10], [11], что отношения эквивалентностей Грина $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{J}, \mathcal{D}, \mathcal{H}$ на полугруппе $\mathbf{X}$ определяются формулами

$$a\mathbf{X} = b\mathbf{X} \leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{R},$$

$$\mathbf{X}a = \mathbf{X}b \leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{L},$$

$$\mathbf{X}a\mathbf{X} = \mathbf{X}b\mathbf{X} \leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{J},$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L},$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}.$$

Классы этих эквивалентностей элемента a далее обозначаются R_a, L_a, J_a, D_a, H_a соответственно.

Эквивалентность $\mathcal{D}$ разбивает моноид $\mathbf{X}$ на классы, каждый из которых в свою очередь разбивается отношениями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ так, что формируется "egg-box" строение каждого $\mathcal{D}-$класса.

Теорема, приведенная ниже, непосредственно следует из предыдущей теоремы 3.1 и определения $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ эквивалентностей Грина.

Теорема 3.2. *Пусть вторичные идемпотенты a^R,b^R (соответственно, a_R, b_R), порожденные элементами $a, b \in \mathbf{X}$, существуют. Тогда, если $(a,b) \in \mathcal{R}$, то $a^R = b^R$ (соответственно, $a_R = b_R$).*

Если существуют вторичные идемпотенты a^L,b^L (соответственно, a_L,b_L), порожденные элементами $a, b \in \mathbf{X}$, то условие $(a,b) \in \mathcal{L}$ влечет равенство $a^L = b^L$ (соответственно, $a_L = b_L$).

Следующая теорема даёт необходимый признак существования вторичных идемпотентов в терминах $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ эквивалентностей Грина.

Теорема 3.3. *Если некоторый элемент полугруппы $\mathbf{X}$ обладает R-вторичным (или L-вторичным) идемпотентом некоторого типа, то и любой элемент, порождающий тот же самый главный правый (соответственно левый) идеал, обладает R- вторичным (L-вторичным) идемпотентом такого же типа.* Доказательство. Пусть $(a,b) \in \mathcal{R}$, т.е. элементы $a, b \in \mathbf{X}$, порождают один и тот же главный правый идеал. Тогда существуют такие элементы $x, y \in \mathbf{X}$, что $ax = b$ и $by = a$. Пусть также a^R является наибольшим решением уравнения $za = a$. Покажем, что множество решений уравнения $zb = b$ обладает наибольшим решением b^R, причем $b^R = a^R$. Это следует из того, что множества решений уравнений $zb = b$ и $za = a$ одинаковы. Действительно, если z – решение уравнения $zb = b$, то

$$a = by = (zb)y = z(by) = za.$$

Наоборот, если z – решение уравнения $a = za$, то

$$b = ax = zax = zb.$$

Поэтому, если a^R является наибольшим решением уравнения $za = a$, то уравнение $zb = b$ также имеет наибольшее решение: $b^R = a^R$.

Аналогично доказываются остальные утверждения теоремы 3.3. □

4. Расположение идемпотентов в классах Грина

Из теорем 1.2 и 3.2 сразу следует

Теорема 4.1. *Два различных вторичных идемпотента одного (либо максимального, либо минимального) типа не могут порождать один и тот же односторонний идеал.*

Элемент частично упорядоченного моноида и соответствующий ему вторичный идемпотент могут порождать один и тот же $\mathcal{D}-$класс или различные $\mathcal{D}-$классы. Следующая теорема утверждает, что в случае периодических, в частности, конечных моноидов, если элемент

и соответствующий ему вторичный идемпотент порождают один и тот же $\mathcal{D}-$класс, то они порождают один и тот же односторонний идеал соответствующего правого или левого типа. Напомним, что для периодических моноидов эквивалентности $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$ совпадают.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— частично упорядоченная периодическая полугруппа с единицей, и указанные ниже вторичные идемпотенты существуют. Тогда верны следующие импликации:*

$(a, a^R) \in \mathcal{D} \to (a, a^R) \in \mathcal{R}$, $(a, a^L) \in \mathcal{D} \to (a, a^L) \in \mathcal{L}$,

$(a, a_R) \in \mathcal{D} \to (a, a_R) \in \mathcal{R}$, $(a, a_L) \in \mathcal{D} \to (a, a_L) \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Предположим, что элемент $(a, a^R) \in \mathcal{D}$, однако a и a^R порождают различные $\mathcal{R}-$ и $\mathcal{L}-$подклассы. Тогда для любого элемента $b \in R_a \cap L_{a^R}$ по теореме 3.2 получаем $b^R = a^R$. Так как $b \in L_{a^R}$, то существуют решения x,y системы уравнений

$$xb = a^R, \quad ya^R = b$$

и, следовательно, существуют решения системы уравнений

$$xb^n = a^R b^{n-1}, \quad ya^R b^{n-1} = b^n.$$

Из равенств $a^R b = b^R b = b$ получаем $xb^n = b^{n-1}$,$yb^{n-1} = b^n$ для любого натурального n. Следовательно, $b^n \in L_b$, и тогда $(b^n, a^R) \in \mathcal{L}$. Так как X является периодической полугруппой, то для некоторого $n = \tilde{n}$ степень $b^{\tilde{n}}$ является идемпотентом, причем $b^{\tilde{n}} \in L_{a^R}$, а множество $\{b, b^2, b^3, ...\}$ – конечной циклической полугруппой.

С другой стороны, из $b \in R_a \cap L_{a^R}$ следует $(a, b) \in \mathcal{R}$, и тогда $(b^{n-1}a, b^n) \in \mathcal{R}$ для любого натурального n. Получаем $b^{\tilde{n}} \in R_{b^{\tilde{n}-1}a}$.

Для дальнейших рассуждений понадобится теорема Миллера и Клиффорда [10], [11], [12]: для произвольных элементов s и t полугруппы включение $st \in R_s \cap L_t$ выполняется тогда и только тогда, когда $R_t \cap L_s$ содержит идемпотент.

Так как было показано, что $b^{\tilde{n}}$ – идемпотент и $b^{\tilde{n}} \in L_{a^R} \cap R_{b^{\tilde{n}-1}a}$, то $a^R(b^{\tilde{n}-1}a) \in R_{a^R} \cap L_{b^{\tilde{n}-1}a}$. Получили $a^R(b^{\tilde{n}-1}a) = b^{\tilde{n}-1}a \in R_{a^R}$, и, следовательно, $b^{\tilde{n}} \in R_{a^R}$. Таким образом, $(b^{\tilde{n}}, a^R) \in \mathcal{H}$. В силу единственности идемпотента, принадлежащего $\mathcal{H}-$классу, получаем $b^{\tilde{n}} = a^R$. Поэтому множество $\{b, b^2, b^3, ..., b^{\tilde{n}}\}$ является конечной циклической группой, которая является подгруппой максимальной группы $H_{a^R} = H_{b^{\tilde{n}}}$. В итоге получили $b \in H_{a^R} = R_{a^R} \cap L_{a^R}$, а так как $b \in R_a \cap L_{a^R}$, то это влечёт $(a, a^R) \in \mathcal{R}$.

Остальные импликации теоремы 4.2 доказываются аналогично. □

Как следствие теоремы 4.2. мы получаем, что если некоторый $\mathcal{R}$–подкласс (или $\mathcal{L}$-подкласс) частично упорядоченной периодической полугруппы с единицей содержит единственный идемпотент e, и если идемпотент e является первичным, а вторичный идемпотент e^R (или e^L) существует, то $D_e \neq D_{e^R}$ (соответственно $D_e \neq D_{e^L}$), то есть первичный и соответствующий ему вторичный идемпотенты порождают различные $\mathcal{D}$- классы. Аналогичное утверждение справедливо для вторичных идемпотентов минимального типа.

Лемма 4.3. *Пусть* e, f *и* g *– попарно различные идемпотенты. Допустим также, что* $(e, f) \in \mathcal{R}$ $(e, g) \in \mathcal{L}$. *Тогда любая пара из трёх идемпотентов* e, f, g *не коммутирует.*

Доказательство. Если два идемпотента порождают один и тот же односторонний идеал, то они не коммутируют. Это следует из того, что, порождая один и тот же односторонний идеал, идемпотенты становятся односторонними единицами для элементов этого идеала, которые, очевидно, не коммутируют. Таким образом, $ge \neq eg$, $ef \neq fe$.

Из того, что $(e, f) \in \mathcal{R}$ $(e, g) \in \mathcal{L}$, по теореме Миллера и Клиффорда следует $gf \in \mathcal{R}_{\}} \cap \mathcal{L}_{\{}$. Если предположить, что $gf = fg$, то произведение fg является идемпотентом. Тогда по той же теореме имеем $fg \in R_f \cap L_g$, то есть $fg = e$ в силу единственности идемпотента в таких пересечениях. Получаем $H_e = H_{fg} = R_f \cap L_g = H_{gf} = R_g \cap L_f$, что невозможно в силу неравенства идемпотентов e, f и g. □

Следующая теорема показывает, что некоммутативность первичных и порождённых ими вторичных идемпотентов зависит от их взаимного расположения в $\mathcal{D}$-классе.

Теорема 4.4. *Пусть X — частично упорядоченная периодическая полугруппа с единицей. Пусть e – первичный идемпотент и вторичные идемпотенты e_R, e_L, e^R, e^L существуют. Образуем из них тройки $\{e, e^R, e^L\}$, $\{e_R, e^R, e^L\}$, $\{e_L, e^R, e^L\}$, $\{e, e_R, e_L\}$, $\{e^R, e_R, e_L\}$, $\{e^L, e_R, e_L\}$. Тогда, если идемпотенты какой либо тройки порождают один и тот же $\mathcal{D}-$класс, то любая пара из них не коммутирует.*

Доказательство. Пусть идемпотенты тройки $\{e, e^R, e^L\}$ порождают один и тот же $\mathcal{D}-$класс. Напомним, что два различных вторичных идемпотента одного типа (оба максимальные или оба минимальные) не могут порождать один и тот же односторонний идеал (теорема 4.1). Поэтому и по теореме 4.2 имеем $e \in R_{e^R} \cap L_{e^L}$. Кроме того, идемпотенты e, e^R, e^L различны. Тогда утверждение теоремы следует из леммы 4.4. Доказательство утверждения для остальных троек аналогично. □

Пример 4.1. Ниже указан $\mathcal{D}-$класс полугруппы булевых (0,1)-матриц размера 2×2 в виде таблицы, столбцы которой представляют $\mathcal{R}-$классы, а строчки – $\mathcal{L}-$классы. Элементы, обозначенные как ${}_{\downarrow}s_t^k$ и ${}^{\uparrow}s_t^k$, являются вторичными идемпотентами минимального и максимального типа соответственно, так как эти идемпотенты сравнимы с единичной матрицей $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ булевым порядком $\subseteq$. Элементы, обозначенные как p_t^k, являются первичными идемпотентами. Элементы a_t^k – идемпотентами не являются.

${}_{\downarrow}s_1^1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$a_2^1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$p_3^1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
$a_1^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	${}_{\downarrow}s_2^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$p_3^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$p_1^3 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$p_2^3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	${}^{\uparrow}s_3^3 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Кроме пары идемпотентов коммутативных идемпотентов ${}_{\downarrow}s_1^1$ и ${}_{\downarrow}s_2^2$, остальные идемпотенты этого $\mathcal{D}-$класса попарно не коммутируют друг с другом, подтверждая справедливость леммы 4.3 и теоремы 4.4.

Следующий пример получен благодаря Ярошевичу [13], вычислившему все $\mathcal{D}-$классы полугруппы булевых (0,1)-матриц размера 4×4 и указавшему все особые, так называемые инверсные, $\mathcal{D}-$классы (см. также [14], [15]).

Пример 4.2. Обратные утверждения для леммы 4.4 и теоремы 4.5 не выполняются. Так матрицы $S_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и $S_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ являются вторичными идемпотентами полугруппы булевых (0,1)-матриц размера 4×4, порождающими $\mathcal{D}-$класс, в каждом $\mathcal{R}-$ и $\mathcal{L}-$подклассе которого находится только один, причём, вторичный идемпотент. Однако, $S_1S_2 \neq S_2S_1$ и пересечения $R_{S_1} \cap L_{S_2}$ и $L_{S_2} \cap R_{S_1}$ идемпотентов не содержат.

Пример 4.3. Рассмотрим два вторичных идемпотента минимального типа $S_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ и $S_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ порождающие, очевидно, один и тот же $\mathcal{D}-$класс полугруппы булевых (0,1)-матриц размера 3×3. Так как

$$S_1S_2 = S_1S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то пересечения $H_1 = R_{S_1} \cap L_{S_2}$ и $H_2 = R_{S_2} \cap L_{S_1}$ группами не являются, так как по теореме 4.4 они не содержат идемпотентов.

5. Частичные порядки и вторичные идемпотенты

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– моноид и* $\leq$ *– некоторый стабильный частичный порядок на нем. Тогда выполняются следующие эквивалентности, если входящие в них вторичные идемпотенты существуют:*

$$a^R \leq b^R \leftrightarrow a^R b = b \leftrightarrow a^R b^R = b^R a^R = b^R \leftrightarrow (\exists x) a^R x = b;$$

$$a^R \leq b^L \leftrightarrow b a^R = b \leftrightarrow a^R b^L = b^L a^R = b^L \leftrightarrow (\exists x) x a^R = b;$$

$$a^L \leq b^L \leftrightarrow b a^L = b \leftrightarrow a^L b^L = b^L a^L = b^L \leftrightarrow (\exists x) x a^L = b;$$

$$a^L \leq b^R \leftrightarrow a^L b = b \leftrightarrow a^L b^R = b^R a^L = b^R \leftrightarrow (\exists x) a^L x = b;$$

$$a_R \leq b_R \leftrightarrow b_R a = a \leftrightarrow a_R b_R = b_R a_R = a_R \leftrightarrow (\exists x) b_R x = a;$$

$$a_R \leq b_L \leftrightarrow b_L a = a \leftrightarrow a_R b_L = b_L a_R = a_R \leftrightarrow (\exists x) b_L x = a;$$

$$a_L \leq b_L \leftrightarrow a b_L = a \leftrightarrow a_L b_L = b_L a_L = a_L \leftrightarrow (\exists x) x b_L = a;$$

$$a_L \leq b_R \leftrightarrow a b_R = a \leftrightarrow a_L b_R = b_R a_L = a_L \leftrightarrow (\exists x) x b_R = a.$$

Доказательство. Так как $a^R \leq b^R \leftrightarrow 1 \leq a^R \leq b^R$, то эквивалентности

$$a^R \leq b^R \leftrightarrow a^R b = b \leftrightarrow a^R b^R = b^R a^R = b^R$$

выполняются по теореме 1.5. Из выражения $(\exists x) a^R x = b$ по теореме 3.1 следует $(a^R)^R \leq b^R$, что по теореме 1.2 даёт неравенство $1 \leq a^R \leq b^R$. Умножая последние неравенства справа на b, получаем $a^R b = b$, и, следовательно, опять получаем $(\exists x) a^R x = b$. Таким образом, $a^R b = b \leftrightarrow (\exists x) a^R x = b$.

Остальные эквивалентности проверяются аналогично. □

Множество идемпотентов $E \subseteq \mathbf{X}$ любой полугруппы всегда можно частично упорядочить ([10], §1.8), вводя так называемый *естественный порядок* $\preceq$, определяемый для любых элементов $a, b \in E$ следующим образом:

$$(a \preceq b) \leftrightarrow (a = ab = ba).$$

Следующее утверждение сразу следует из теоремы 5.1.

Теорема 5.2 *Какой бы стабильный порядок* $\leq$ *ни был на моноиде* $\mathbf{X}$ *всегда выполняется равенство* $\leq = \preceq$ *на множестве вторичных идемпотентов минимального типа* $E_\downarrow \subseteq \mathbf{X}$*, и равенство* $\leq = \succeq$ *на множестве вторичных идемпотентов максимального типа* $E^\uparrow$*, где* $\preceq$ *– естественный порядок на множестве идемпотентов* $E \subseteq \mathbf{X}$*, а частичный порядок* $\succeq = \preceq^{-1}$ *является обратным бинарным отношением для естественного порядка* $\preceq$ *.*

Теорема 5.3. *Если естественный частичный порядок* $\preceq$ *на множестве идемпотентов* $E \subseteq \mathbf{X}$ *можно продолжить до стабильного частичного порядка на всем моноиде* $\mathbf{X}$*, то*

множество вторичных идемпотентов минимального типа относительно этого частичного порядка состоит из всех идемпотентов моноида $E_{\downarrow} = E$, а множество вторичных идемпотентов максимального типа состоит из одного элемента: $E^{\uparrow} = \{1\}$.

Доказательство. Из определения естественного частичного порядка на множестве идемпотентов $a \preceq b \leftrightarrow a = a \cdot b = b \cdot a$ следует, что все идемпотенты моноида меньше либо равны единице моноида. □

Известно [3], что частичный порядок $\preceq$, определенный на множестве идемпотентов $E \subseteq \mathbf{X}$, можно продолжить до частичного порядка $\leq_M$ на всем моноиде $\mathbf{X}$ следующим образом: $a \leq_M b \leftrightarrow (\exists x, y) a = xb = by = xa$. Такой порядок Митч назвал *естественным полугрупповым порядком*. Несложно показать, что частичному порядку $\leq_M$ можно дать эквивалентное определение в форме Хиггинса [17], которое приводится ниже.

Определение 5.1. *Назовем частичный порядок $\leq_M$, определяемый как*

$$a \leq_M b \quad \longleftrightarrow \quad (\exists x, y) a = xb = by = xa = ay,$$

порядком Митча.

Заметим, что порядок Митча не является стабильным порядком относительно полугрупповой операции в общем случае. Однако, очевидно, любой идемпотент $e \in \mathbf{X}$ не превосходит единицы:$e \leq_M 1$.

Из определения 5.1 следует, что если $a \leq_M b$, то $a = xby \in \mathbf{X}b\mathbf{X}$, то есть если элементы полугруппы сравнимы, то один из них принадлежит двустороннему идеалу, порождённому другим элементом. Тем не менее, верно следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть $a, b \in \mathbf{X}$. Если $a \neq b$ и сравнимы порядком Митча, то они не могут порождать один и тот же односторонний идеал.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbf{X}$ и порождают один и тот же правый идеал. Если $b \in a\mathbf{X}$, то $b = az$ для некоторого $z \in \mathbf{X}$. Предположим, что $a \leq_M b$, то есть $(\exists x, y) a = xb = by = xa = ay$. Тогда

$$b = az = xaz = xb = a,$$

что противоречит условию $a \neq b$. Следовательно, возможно только обратное неравенство $b \leq_M a$. Однако, тогда это будет противоречить условиям $a \in b\mathbf{X}$ и $a \neq b$. □

Следующее утверждение показывает, насколько порядок Митча, даже если он стабилен, не удобен для определения границ множества решений уравнений $ax = a$ или $xa = a$, то есть множества левых и правых единиц элемента a.

Теорема 5.5. *Если для некоторых элементов a и b моноида $\mathbf{X}$ уравнения $ax = a$ (или $xa = a$) и $bx = b$ (или $xb = b$) относительно какого-то стабильного частичного порядка на $\mathbf{X}$ одно имеет максимальное решение, а другое минимальное решение, причём оба не равны единице, то этот частичный порядок не является продолжением естественного частичного порядка $\preceq$ либо его обращения $\preceq^{-1}{=}\succeq$, определенного на множестве идемпотентов $E \subseteq \mathbf{X}$ моноида $\mathbf{X}$.*

Доказательство. Заметим, что из условия теоремы следует, что a^L и b_L существуют и $a_L \lneqq 1 \lneqq b^L$, чего не может быть при порядке Митча в силу теоремы 5.3. Этого не может быть и в других случаях: $a_R \lneqq 1 \lneqq b^L$, $a_L \lneqq 1 \lneqq b^R$, $a_R \lneqq 1 \lneqq b^R$. □

Пример 5.1. Для моноида квадратных булевых матриц размера $n \times n, n \geq 2$, с операцией конъюнктного умножения стабильный булевый порядок $\subseteq$ не является продолжением естественного частичного порядка $\preceq$ на множестве идемпотентов (см. [9]).

Теорема 5.6. *Пусть $\leq$ и $\sqsubseteq$ – два стабильных порядка моноида $\mathbf{X}$ относительно которых все идемпотенты моноида не превосходят единицы. Пусть существуют вторичные идемпотенты минимального типа $a_{L_{\leq}}$, $a_{R_{\leq}}$, порожденные элементом $a \in \mathbf{X}$ относительно порядка $\leq$, и порожденные этим же элементом a вторичные идемпотенты минимального*

типа $a_{L_\sqsubseteq}$, $a_{R_\sqsubseteq}$ *относительно порядка* $\sqsubseteq$. *Тогда*

$$a_{L_\leq} = a_{L_\sqsubseteq}, \quad a_{R_\leq} = a_{R_\sqsubseteq}.$$

Доказательство. Из $a_{R_\leq} \cdot a = a = a_{R_\sqsubseteq} \cdot a$ и определения вторичных идемпотентов минимального типа получаем $a_{R_\leq} \leq a_{R_\sqsubseteq}$, $a_{R_\sqsubseteq} \sqsubseteq a_{R_\leq}$. Так как оба стабильных порядка $\leq$ и $\sqsubseteq$ моноида $\mathbf{X}$ таковы, что относительно них все идемпотенты моноида не превосходят единицы, то выполняется системы неравенств:

$$a_{R_\leq} \leq a_{R_\sqsubseteq} \leq 1,$$

$$a_{R_\sqsubseteq} \sqsubseteq a_{R_\leq} \sqsubseteq 1.$$

Умножим первое неравенство на $a_{R_\leq}$ слева, а второе неравенство на $a_{R_\sqsubseteq}$ справа. В силу стабильности отношений частичного порядка $\leq$ и $\sqsubseteq$ получаем

$$a_{R_\leq} a_{R_\leq} \leq a_{R_\leq} a_{R_\sqsubseteq} \leq a_{R_\leq},$$

$$a_{R_\sqsubseteq} a_{R_\sqsubseteq} \sqsubseteq a_{R_\leq} a_{R_\sqsubseteq} \sqsubseteq a_{R_\sqsubseteq}.$$

Тогда $a_{R_\leq} = a_{R_\leq} a_{R_\sqsubseteq} = a_{R_\sqsubseteq}$.

Равенство $a_{L_\leq} = a_{L_\sqsubseteq}$ доказывается аналогично. □

Теорема 5.7. *Бинарные отношения* $\leq_\downarrow$ *и* $\leq^\uparrow$, *определенные для элементов* $a, b \in \mathbf{X}$ *эквивалентностями*

$$a \leq_\downarrow b \leftrightarrow a = a_R b = b a_L,$$
$$a \leq^\uparrow b \leftrightarrow a = a^R b = b a^L,$$

являются частичными порядками на $\mathbf{X}$.

Доказательство. Справедливость $a \leq_\downarrow a$ очевидна.

Докажем транзитивность бинарного отношения $\leq_\downarrow$. Из $a = a_R b = b a_L$ по теореме 3.1 получаем неравенства $a_R \leq b_R$ и $a_L \leq b_L$. Из последних неравенств по теореме 5.1 имеем $a_R b_R = b_R a_R = a_R$ и $a_L b_L = b_L a_L = a_L$. Тогда, если предположить $a \leq_\downarrow b \leq_\downarrow c$, то

$$a = a_R b = b a_L = a_R b_R c = c b_L a_L,$$

что даёт $a = a_R c = c a_L$,то есть $a \leq_\downarrow c$.

Если $a \leq_\downarrow b$ и $b \leq_\downarrow a$, то, применяя предыдущие рассуждения. получаем $a_R = a_R \cdot b_R = b_R \cdot a_R = b_R$ и $a_L = a_L \cdot b_L = b_L \cdot a_L = b_L$. Тогда неравенство $a \leq_\downarrow b$ перепишется как $a = a_R \cdot b = b \cdot a_L = b_R \cdot b = b \cdot b_L = b$, что доказывает антисимметричность бинарного отношения $\leq_\downarrow$.

То, что бинарное отношение $\leq^\uparrow$ является частичным порядком, доказывается аналогичным образом. □

Определение 5.2. *Назовем определённые в теореме 5.7 частичные порядки* $\leq_\downarrow$ *и* $\leq^\uparrow$ *вторичными порядками минимального и максимального типа соответственно, определяемые некоторым стабильным порядком* $\leq$ *моноида* $\mathbf{X}$.

Заметим, что элемент $a \in \mathbf{X}$ является идемпотентом, причём вторичным идемпотентом минимального типа, тогда и только тогда, когда $a \leq_\downarrow 1$, и вторичным идемпотентом максимального типа тогда и только тогда, когда $a \leq^\uparrow 1$.

Теорема 5.8. *Предположим, что для всех сравнимых одновременно порядками* $\leq$ *и* $\leq_M$ *элементов моноида* $\mathbf{X}$ *существуют вторичные идемпотенты, соответствующие стабильному порядку* $\leq$ *этого моноида. Тогда выполняются равенства:*

$$\leq_\downarrow = (\leq \cap \leq_M),$$

$$\leq^{\uparrow} = (\geq \cap \leq_M),$$

где $\geq = \leq^{-1}$.

Доказательство. Из неравенств $a_R \leq 1$ и $a_L \leq 1$ получаем $a_R \cdot b \leq b$ и $ba_L \leq b$. Поэтому из $a \leq_{\downarrow} b$ следует $a = a_R b = ba_L \leq b$. Таким образом, $\leq_{\downarrow} \subseteq \leq$.

Так как

$$a \leq_{\downarrow} b \leftrightarrow a = a_R b = ba_L = a_R a = aa_L,$$

то из $a \leq_{\downarrow} b$, очевидно, следует $a \leq_M b$. Следовательно, $\leq_{\downarrow} \subseteq (\leq \cap \leq_M)$.

Пусть теперь $a \leq b$ и $a \leq_M b$. Так как для всех сравнимых одновременно порядками $\leq$ и $\leq_M$ элементов моноида $\mathbf{X}$ существуют вторичные идемпотенты, соответствующие стабильному порядку $\leq$, то из $a \leq b$ получаем $a = a_R a \leq a_R b$ и $a = aa_L \leq ba_L$. С другой стороны, неравенство $a \leq_M b$ даёт $a = xb = by = xa = ay$ для некоторых $x, y \in \mathbf{X}$. Тогда по определению вторичных идемпотентов получаем $a_R \leq x$ и $a_L \leq y$. Это даёт $a_R b \leq xb = a$ и $ba_L \leq by = a$. В итоге, из неравенств $a \leq b$ и $a \leq_M b$ получаем

$$a_R b = xb = ba_L = by = a$$

или $a \leq_{\downarrow} b$. Следовательно, выполняется обратное включение $\leq_{\downarrow} \supseteq (\leq \cap \leq_M)$.

Аналогично доказывается равенство $\leq^{\uparrow} = (\geq \cap \leq_M)$. □

Отметим, что стабильность порядка $\leq$ не влечёт стабильность вторичных порядков $\leq_{\downarrow}$ и $\leq^{\uparrow}$ относительно полугруппового умножения.

Теорема 5.9. *Ограничения частичных порядков* $\leq$, $\leq_{\downarrow}$ *и* $\leq_M$ *на множестве вторичных идемпотентов* $E_{\downarrow}$ *моноида* $\mathbf{X}$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть $a, b \in E_{\downarrow}$. По теореме 1.3 имеем $a = a_R = a_L$ и $b = b_R = b_L$. Тогда из теоремы 5.1 получаем:

$$a \leq b \leftrightarrow a = ab = ba \leftrightarrow (\exists x, y) a = by = xb,$$

что даёт равенства

$$\leq = \leq_{\downarrow} = \leq_M$$

на множестве вторичных идемпотентов $E_{\downarrow}$. □

Следующие примеры показывают, что частичные порядки $\leq$, $\leq_{\downarrow}$ и $\leq_M$ даже на множестве всех идемпотентов частичной полугруппы E могут не совпадать.

Пример 5.2. Матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ идемпотентны в полугруппе квадратных булевых $(0,1)-$матриц и $A \subseteq B$. Однако, $B \not\leq_M A$, так как $AB = A$ и $BA = B$.

Пример 5.3. Очевидно, что для любого первичного идемпотента a моноида выполняется $a \leq_M 1$, так как $a = x1 = 1y = a1 = 1a$ для некоторых x, y (в частности, при $x = y = a$). Однако, $a \not\leq_{\downarrow} 1$ по определению первичного идемпотента 1.2 и теореме 1.4.

Теорема 5.10. *Частичный порядок* $\leq_M$ *моноида* $\mathbf{X}$ *стабилен и все сравнимые этим порядком элементы порождают вторичные идемпотенты минимального типа тогда и только тогда, когда он содержится в некотором стабильном порядке* $\leq$*, для которого вторичный порядок* $\leq_{\downarrow}$ *также стабилен.*

Доказательство. Пусть частичный порядок $\leq_M$ стабилен и все сравнимые этим порядком элементы порождают вторичные идемпотенты. Тогда по теореме 5.8 имеем $\leq_{M\downarrow} = \leq_M \cap \leq_M = \leq_M$. Таким образом, существует стабильный порядок $\leq$, для которого порядок $\leq_{\downarrow}$ также стабилен.

Из стабильности некоторого порядка $\leq$ и стабильности $\leq_{\downarrow}$ следует стабильность порядка $\leq_M$. Действительно, условие включения порядков $\leq_M \subseteq \leq$ даёт равенство $\leq_{\downarrow} = \leq \cap \leq_M = \leq_M$ и, следовательно, стабильность порядка $\leq_M$ как пересечения стабильных порядков.

Осталось показать, что все сравнимые порядком $\leq_M$ элементы порождают вторичные идемпотенты минимального типа, соответствующие этому порядку. Так как каждый идемпотент e моноида $\mathbf{X}$ удовлетворяет неравенству $e \leq_M 1$ и выполняется равенство $\leq_\downarrow = \leq_M$, то выполняется неравенство $e \leq_\downarrow 1$ и, следовательно, неравенство $e \leq 1$ в силу теоремы 5.1 для вторичных идемпотентов минимального типа. Тогда выполняются условия теоремы 5.6 о совпадении вторичных идемпотентов, порожденных данным элементом и соответствующих различным стабильным порядкам. Получили, что так как каждый элемент, сравнимый с каким-то другим элементом порядком $\leq_\downarrow$, по определению порядка $\leq_\downarrow$ порождает вторичный идемпотент относительно порядка $\leq$, то и каждый элемент, сравнимый порядком $\leq_M$ также порождает вторичный идемпотент относительно того же порядка $\leq_M$. □

6. Случай регулярных и инверсных полугрупп

Пусть $\mathbf{X}$ – частично упорядоченная регулярная полугруппа с единицей, т.е. все элементы регулярны. Это означает, что для каждого элемента $a \in \mathbf{X}$ существует, и возможно не единственный, инверсный элемент $b \in \mathbf{X}$, т.е. такой элемент, что выполняются равенства: $aba = a$ и $bab = b$.

Теорема 6.1. *Пусть элементы a и b инверсны. Тогда существование вторичного $R-$идемпотента максимального типа a^R (или минимального типа a_R) для элемента $a \in \mathbf{X}$ равносильно существованию $R-$вторичного идемпотента соответствующего типа для ab, причём $a^R = (ab)^R$ (или $a_R = (ab)_R$).*

Аналогично, существует $L-$вторичный идемпотент максимального типа a^L (или минимального типа a_L) для элемента $a \in \mathbf{X}$ тогда и только тогда, когда существует вторичный $L-$идемпотент соответствующего типа для ba, причём $a^L = (ba)^L$ (или $a_L = (ba)_L$).

Доказательство. Так как система уравнений

$$ax = ab,$$

$$aby = a$$

в регулярной полугруппе имеет решение, то a и ab порождают один и тот же главный правый идеал. Аналогично, a и ba порождают один и тот же главный левый идеал. Тогда утверждение теоремы 6.1 сразу следует из теорем 3.2 и 3.3.□

Так как произведения инверсных элементов ab и ba являются идемпотентами, то в случае, когда они сравнимы с 1, из теоремы 1.3 получаем либо $a^R = b^L = ab \geq 1$, либо $a^L = b^R = ba \geq 1$, либо $a_R = b_L = ab \leq 1$, либо $a_L = b_R = ba \leq 1$.

Пусть теперь $\mathbf{X}$ является инверсной полугруппой с единицей, т. е. такой регулярной полугруппой, для каждого элемента $a \in \mathbf{X}$ которой существует ровно один инверсный элемент, обозначаемый a^{-1}. Известно ([16],§7.1), что на любой инверсной полугруппе $\mathbf{X}$ можно задать стабильный частичный порядок Вагнера $\leq_W$ эквивалентностью

$$a \leq_W b \quad \leftrightarrow \quad ab^{-1} = aa^{-1},$$

что делает её упорядоченным моноидом. Частичный порядок Вагнера $\leq_W$ называют также *естественным порядком инверсной полугруппы.*

Следующие две теоремы указывают на то, что в любой инверсной полугруппе $\mathbf{X}$ множества решений уравнений $ax = a$ и $xa = a$, где $a \in \mathbf{X}$ обладают наименьшими решениями, а наибольшим решением относительно естественного частичного $\leq_W$ порядка является единица 1.

Теорема 6.2. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– инверсная полугруппа с единицей 1 и естественным порядком* $\leq_W$. *Тогда для любого элемента* a *существуют вторичные идемпотенты минимального типа, которыми являются* $a_R = aa^{-1}$ *и* $a_L = a^{-1}a$, *и не существуют вторичные идемпотенты максимального типа кроме 1.*

Доказательство. Так как для любого идемпотента $e \in \mathbf{X}$ справедливо равенство $e = e^{-1}$, то выполняется неравенство $e \leq_W 1$, т.е. любой идемпотент в инверсной полугруппе с естественным частичным порядком является вторичным минимального типа. Тогда утверждение теоремы 6.2 следует из теоремы 6.1. □

Следующее утверждение является следствием теоремы 6.2 и теоремы 5.6.

Теорема 6.3. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– инверсная полугруппа с единицей 1 и каким-то частичным стабильным порядком* $\leq$, *относительно которого все идемпотенты не превосходят единицы, т.е.* $E_{\downarrow} = E$. *Тогда для любого элемента* a *существуют вторичные идемпотенты минимального типа, которыми являются* $a_R = aa^{-1}$ *и* $a_L = a^{-1}a$, *и не существуют вторичные идемпотенты максимального типа кроме 1.*

Следующая теорема усиливает утверждение теоремы 3.2.

Теорема 6.4. *Пусть* $\mathbf{X}$ *– инверсная полугруппа с единицей 1, естественным частичным порядком* $\leq_W$. *Тогда для любых* $a, b \in \mathbf{X}$ *выполняются следующие эквивалентности:*

$$aa^{-1} = bb^{-1} \quad \leftrightarrow \quad a_R = b_R \quad \leftrightarrow \quad (a,b) \in \mathcal{R},$$

$$a^{-1}a = b^{-1}b \quad \leftrightarrow \quad a_L = b_L \quad \leftrightarrow \quad (a,b) \in \mathcal{L}.$$

Доказательство. Действительно, так как $a_R b = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b_R b = b$, то $aa^{-1}b = b$. Аналогично получаем $bb^{-1}a = a$. Поэтому $(a,b) \in \mathcal{R}$.

Обратно. Из $(a,b) \in \mathcal{R}$ по теореме 3.2 следует равенство $a_R = b_R$.

Эквивалентность $a_L = b_L \leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{L}$ доказывается аналогично. □

Отметим, что $(a, a_R) \in \mathcal{R}$ и $(a, a_L) \in \mathcal{L}$ для каждого элемента $a \in \mathbf{X}$, т.е. $(a, aa^{-1}) \in \mathcal{R}$ и $(a, a^{-1}a) \in \mathcal{L}$, так как

$$a_R a = aa^{-1}a = a, \quad aa^{-1} = a_R,$$

и

$$aa_L = aa^{-1}a = a, \quad a^{-1}a = a_L.$$

Из этого и теоремы 3.4 получаем известный факт: каждый $\mathcal{R}-$ и $\mathcal{L}-$класс инверсной полугруппы порождается одним идемпотентом, а именно вторичными идемпотентами минимального типа aa^{-1} и $a^{-1}a$ соответственно для каждого элемента $a \in \mathbf{X}$, порождающего те же самые $\mathcal{R}-$ или $\mathcal{L}-$классы.

Теорема 6.5. *Естественные частичные порядки* $\leq_W$, $\leq_M$ *и их вторичные частичные порядки минимального типа на инверсной полугруппе с единицей* $\mathbf{X}$ *совпадают:*

$$\leq_W = \leq_{W\downarrow} = \leq_{M\downarrow} = \leq_M .$$

Доказательство. Так как включение бинарных отношений $\leq_{W\downarrow} \subseteq \leq_W$ выполняется, то достаточно показать обратное включение. Пусть $a \leq_W b$, тогда $a_R = aa^{-1} = ba^{-1}$ и $a_L = a^{-1}a = a^{-1}b$ (см. [16], лемма 7.1). Получаем

$$a = (aa^{-1})a = (ba^{-1})a = b(a^{-1}a) = ba_L$$

и

$$a = aa^{-1}a = a(a^{-1}a) = a(a^{-1}b) = a_R b.$$

Таким образом, из неравенства $a \leq_W b$ следует неравенство $a \leq_{W\downarrow} b$.

Так как частичный порядок Митча на инверсной полугруппе стабилен, то по теореме 5.8 имеем $\leq_{M\downarrow}=\leq_M \cap \leq_M=\leq_M$. Остаётся заметить, что из теорем 6.2 и 6.3 имеем также равенство

$$\leq_{W\downarrow}=\leq_{M\downarrow} .$$

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагнер В. В. Обобщенные группы // ДАН СССР. 1952. № 84. С. 1119—1122.
2. Вагнер В. В. Представление упорядоченных полугрупп // Матем. сб. 1956. Т. 38(80), № 2, С. 203—240.
3. Mitsch H. A Natural Partial Order for Semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 97, № 3. P. 384—388.
4. Hartwig R. How to partially order regular elements // Math. Japonica. 1980. Vol. 25, № 1. P. 1—13.
5. Nambooripad K. The natural partial order on a regular semigroup // Proc. Edin. Math. Soc. 1980. Vol. 23. P. 249—260.
6. Mitsch H. Semigroups and their natural order // Math. Slovaca. 1994. Vol. 44, № 4. P. 445—462.
7. Поплавский В. Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц. // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 2. С. 26—33.
8. Поплавский В. Б. Делимость идемпотентов полугруппы булевых матриц // Математика, механика: сб. науч. тр., Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2016. Вып. 18. С. 57—60.
9. Поплавский В. Б. О частичных порядках на множестве булевых матриц // Электронные информационные системы. 2017. №3 (14) С.105-113.
10. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2т. М.: МИР. 1972. Т. 1. 288 с.
11. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир. 1985. 440 с.
12. Miller D. D., Clifford A. H. Regular $\mathcal{D}-$classes in semigroups. // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. 82. P. 1—15.
13. Щекатурова О. О., Ярошевич В. А. О свойствах булевых матриц // Изв. Сарат. ун-та Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, №4(2), С. 137—142.
14. Поплавский В. Б., Явкаев Д. Г. Об инверсных D-классах полугруппы булевых матриц // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф. – Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого. 2019. С.112—114.
15. Поплавский В. Б., Явкаев Д. Г. Вычисление инверсных D-классов булевых матриц. // Математика, механика: сб. науч. тр. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2019. Вып. 21. С.50—52.
16. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2т. – М.: МИР. 1972. Т. 2. 422 с.
17. Higgins P.M. The Mitsch order on a semigroup // Semigroup Forum.1994. Vol.49. P. 261—266.

REFERENCES

1. Vagner V. V.1952, "Generalized groups," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* , no. 84, pp. 1119—1122.
2. Vagner V. V.1956, "Representation of ordered semigroups," *Math. Sbornik* , vol. 38(80), no. 2, pp. 203—240.
3. Mitsch H. 1986, "A Natural Partial Order for Semigroups," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 97, no. 3, pp. 384—388.
4. Hartwig R. 1980, "How to partially order regular elements," *Math. Japonica*, vol. 25, no. 1 , pp. 1—13.
5. Nambooripad K. 1980, "The natural partial order on a regular semigroup," *Proc. Edin. Math. Soc.*, vol. 23, pp. 249—260.
6. Mitsch H. 1994, "Semigroups and their natural order," *Math. Slovaca* , vol. 44, no. 4 , pp. 445—462.
7. Poplavski V. B. 2012, "On idempotents of algebra of Boolean matrices ," *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 12, no. 2, pp. 26—33.
8. Poplavski V. B. 2016, "Divisibility for idempotents of semigroup of Boolean matrices," *Math. Mech. Saratov Univ.*, no. 18, pp. 57-60.
9. Poplavski V. B. 2017, "On partial orders for the set of Boolean matrices," *Electronic Information Systems,* no. 3 (14), pp. 105—113.
10. Klifford A. H., Preston G. B. 1972 *The Algebraic Theory of Semigroups.* MIR, Moscow, vol. 1. 288 p.
11. Lallement G. 1985. *Semigroups and Combinatorial Applications.* MIR, Moscow. 440 p.
12. Miller D. D., Clifford A. H. 1956. "Regular $\mathcal{D}-$classes in semigroups," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 82, pp. 1—15.
13. Shchekaturova O. O. , VA Yaroshevich V. A.2013. "On the properties of Boolean matrices," *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, no 4(2), pp. 137-142.
14. Poplavski V. B., Javkaev D. G. "On Inverse D-classes of a Semigroup of Boolean Matrices," *Proc. XVIth Int. Conf."Algebra, Number Theory and Discreet Geometry."* Tula, 2019, pp.112-114. http://poivs.tsput.ru/conf/international/XVI/files/Conference2019M.pdf
15. Poplavski V. B., Javkaev D. G. 2019. "Calculation of Inverse D-classes of Boolean Matrices," *Math. Mech. Saratov Univ.*, no. 21, pp. 50-52.
16. Klifford A. H., Preston G. B. 1972. *The Algebraic Theory of Semigroups.* MIR, Moscow, vol. 2. 422 p.
17. Higgins P.M. 1994. "The Mitsch order on a semigroup," *Semigroup Forum,* vol.49, pp. 261—266.

Получено 18.02.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-199-223

Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах

З. Х. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Таджикистана, Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru

Аннотация

При решении ряда аддитивных задач с почти равными слагаемыми наряду с оценкой коротких тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

в малых дугах, также нужны оценки этих сумм в больших дугах за исключением малой окрестности их центров, и асимптотическая формула в малой окрестности центра больших дуг.

В работе, воспользовавшись вторым моментом L-функций Дирихле на критической прямой для $S_k(\alpha; x, y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, $\tau = y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-b_1}$, $\mathscr{L} = \ln xq$ за исключением малой окрестности их центров $|\alpha - \frac{a}{q}| > \left(2\pi k^2 x^{k-2} y^2\right)^{-1}$, при $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathscr{L}^{c_k}$,

$$\eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}, \qquad c_k = \frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}}-1\right) b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}-(2k-3)},$$

получена нетривиальная оценка вида

$$S_k(\alpha; x, y) \ll y \mathscr{L}^{-A},$$

где A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, а в малой окрестности центров больших дуг доказана асимптотическая формула.

Ключевые слова: короткая тригонометрическая сумма с простыми числами, большие дуги, плотностная теорема, L-функция Дирихле

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
З. Х. Рахмонов. Оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами в длинных дугах // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 199–223.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-199-223

Estimates of short exponential sums with primes in major arcs

Z. Kh. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Academician of the National Academy of Sciences of Tajikistan, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru

Abstract

For a number of additive problems with almost equal summands, in addition to the estimates for short exponential sums with primes of the form

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

in minor arcs, we need to have an estimate of these sums in major arcs, except for a small neighborhood of their centers. We also need to have an asymptotic formula on a small neighborhood of the centers of major arcs.

In this paper, using the second moment of Dirichlet L-functions on the critical line, we obtained a nontrivial estimate of the form

$$S_k(\alpha; x, y) \ll y\mathscr{L}^{-A},$$

for $S_k(\alpha; x, y)$ in major arcs $M(\mathscr{L}^b)$, $\tau = y^5 x^{-2}\mathscr{L}^{-b_1}$, $\mathscr{L} = \ln xq$, except for a small neighborhood of their centers $|\alpha - \frac{a}{q}| > \left(2\pi k^2 x^{k-2} y^2\right)^{-1}$, when $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{c_k}$, where

$$\eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}, \qquad c_k = \frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}}-1\right)b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}-(2k-3)},$$

and A, b_1, b are arbitrary fixed positive numbers. Furthermore, and we also proved an asymptotic formula on a small neighborhood of the centers of major arcs.

Keywords: Short exponential sum with primes, major arcs, density theorem, Dirichlet L-function

Bibliography: 22 titles.

For citation:
Z. Kh. Rakhmonov 2021, "Estimates of short exponential sums with primes in major arcs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 199–223.

1. Введение

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leqslant P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Виноградов И.М. [1, 2] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n) e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ при $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, основу которой, наряду с «решетом Виноградова», при $k = 1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{U<n\leqslant 2N \\ x-y<mn\leqslant x}} b_n e(\alpha(mn)^k$$

где a_m и b_n – произвольные вещественные функции, $|a_m| \leqslant \tau^c(m)$, $|b_n| \leqslant \tau^c(n)$, M, N, $U \geqslant N$ – натуральные, $x > x_0$, y – вещественные числа, c – абсолютная постоянная, не всё время одна и та же.

Затем Хейзелгроув С.Б. [3], Статулявычус В. [4], Пан Ч.Д и Пан Ч.Б. [5], Тао Ж. [6] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geqslant x^\theta$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \leqslant H$, $H = N^\theta$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Лю Дж. и Тао Ж. [7] как в малых дугах, так и в больших дугах получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ при $y \geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ доказали теорему, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \qquad \left|p_j - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{27}{32}+\varepsilon},$$

и в работе [8, 9] решили задачу Хуа [10] о представимости достаточно большого натурального числа в виде суммы пяти квадратов почти равных простых чисел и показали, что достаточно большое натуральное число N, $N \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 24)$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \leqslant H, \quad H \geqslant N^{\frac{9}{20}+\varepsilon}.$$

Лю Дж. и Тао Ж. [11] воспользовавшись теоремой М. Ютилы [12] о четвёртом моменте L - функций Дирихле в критической прямой, получили нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$, $k \geqslant 3$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^{c_1})$, $\tau = y^{2k-1}x^{-k+1}\mathscr{L}^{-c_3}$ при $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1}+\varepsilon}$, где $\mathscr{L} = \ln xq$. Кумчев А.В. [13] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}}P^{-1}$ при $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k+3}+\varepsilon}$. Яо Я. [14], воспользовавшись этими оценками, обобщил теорему Хуа [10] в проблеме Варинга – Гольдбаха для кубов, то есть доказал, что всякое достаточно большое нечетное натуральное число N можно представить в виде

$$p_1^3 + p_2^3 + \ldots + p_9^3 = N, \qquad \left|p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}}\right| \leqslant N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{51}+\varepsilon}.$$

В 2016 г. З.Х. Рахмонов и Ф.З. Рахмонов [15, 16], воспользовавшись методом оценки тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова, получили нетривиальную оценку вида

$$S_3(\alpha;x,y)\ll\frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

на малых дугах $\mathfrak{m}\left(\mathscr{L}^{32(B+20)}\right)$, $\tau=y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+20)}$ при $y\geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+151}$, где B — абсолютная постоянная (см. также [17, 18, 19, 20].

Основным результатом этой работы является теорема о поведении суммы $S_k(\alpha;x,y)$ в больших дугах $\mathfrak{M}(\mathscr{L}^b)$, $\tau=y^{2k-1}x^{-k+1}\mathscr{L}^{-b_1}$, где b, b_1 — произвольные фиксированные положительные числа.

Теорема 1. *Пусть $x\geqslant x_0$, $k\geqslant 3$ — фиксированное целое число, A, b_1, b — произвольные фиксированные положительные числа, $1\leqslant q\leqslant\mathscr{L}^b$,*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad (a,q)=1,\quad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau},\quad \tau=\frac{y^{2k-1}}{x^{k-1}}\mathscr{L}^{-b_1}.$$

Тогда при $\lambda\leqslant\left(2\pi k^2x^{k-2}y^2\right)^{-1}$ и $y\geqslant x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$ справедливо равенство

$$S_k(\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n=1\\(a,q)=1}}^{q}e\left(\frac{an^k}{q}\right)\int_{x-y}^{x}e(\lambda u^k)du+O\left(y\mathscr{L}^{-A}\right),$$

а при $\lambda>\left(2\pi k^2x^{k-2}y^2\right)^{-1}$ и $y\geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{c_k}$, где

$$\eta_k=\frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}},\qquad c_k=\frac{2A+22+\left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}}-1\right)b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}-(2k-3)},$$

имеет место оценка

$$S_k(\alpha;x,y)\ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Явные значения параметра η_k при k равным 3, 4, 5 и 6 имеют вид:

$$\eta_3=\frac{2}{7+4\sqrt{3}}\approx 0,1435935394,\qquad \eta_4=\frac{2}{11+2\sqrt{30}}\approx 0,0910976998,$$
$$\eta_5=\frac{2}{15+4\sqrt{14}}\approx 0,0667409058,\qquad \eta_6=\frac{2}{19+2\sqrt{90}}\approx 0,052668078.$$

Эта теорема чуть слабее, чем вышеуказанная теорема Лю Дж. и Тао Ж. [11], и в её доказательстве используется теорема о втором моменте L - функций Дирихле на критической прямой [21, 22] (см. также [23, 24]).

2. Известные леммы

Лемма 1. *Пусть действительная функция – $f(u)$, и монотонная функция – $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)|\geqslant m_1>0$ и $|g(u)|\leqslant M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du\ll\frac{M}{m_1}.$$

Доказательство см. [25]

Лемма 2. *Пусть действительная функция – $f(u)$, и монотонная функция – $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f''(u)| \geqslant m_2 > 0$ и $|g(u)| \leqslant M$. Тогда справедлива оценка:*

$$\int_a^b g(u)e(f(u))du \ll \frac{M}{\sqrt{m_2}}.$$

Доказательство см. [25]

Лемма 3. *Пусть $2 \leqslant T_0 \leqslant x$, $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули функции $L(s,\chi)$. Тогда*

$$\psi(x,\chi) = E_0 x - \sum_{|\gamma|\leqslant T_0} \frac{x^\rho}{\rho} + R(x,T_0), \quad R(x,T_0) \ll \frac{x\mathscr{L}^2}{T_0},$$

где $E_0 = 1$, если $\chi = \chi_0$; $E_0 = 0$, если $\chi \neq \chi_0$.

Доказательство см. [26]

Лемма 4. *При подходящем $c > 0$ функция $L(s,\chi)$, $s = \sigma + it$ не имеет нулей в области*

$$\sigma \geqslant 1 - \delta(q,t), \quad \delta(q,t) = \frac{c}{\max(\ln q, \ln^{3/4}(|t|+3)\ln^{3/4}\ln(|t|+3))},$$

для всех характеров χ по $\bmod q$, за исключением, быть может простого действительного нуля β_1 у L–функции, определенной исключительным характером χ_1.

Доказательство см. [27]

Лемма 5. *Число нулей ρ функции $L(s,\chi)$, $\chi \pmod q$, для которых $T \leqslant |\gamma| \leqslant T+1$, не превосходит $c\ln qT$.*

Доказательство см. [28].

Лемма 6. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $c = c(\varepsilon)$ такое, что если χ_1 — действительный характер по модулю q и β_1 — действительный нуль $L(s,\chi_1)$, то*

$$\beta_1 \leqslant 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^\varepsilon}.$$

Доказательство см. [28].

Лемма 7. *Пусть ε сколь угодно малая положительная постоянная, и $T^{\frac{35}{108}+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$, тогда справедливы оценки*

$$\sum_{\chi \bmod q} (N(u,T+H,\chi) - N(u,T,\chi)) \ll \begin{cases} (qH)^{\frac{4}{3-2u}(1-u)}(\ln qH)^9, & \text{для } \frac{1}{2} \leqslant u \leqslant \frac{3}{4} \\ (qH)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}, & \text{для } \frac{3}{4} \leqslant u \leqslant 1, \end{cases}$$

Доказательство см. [22].

Лемма 8. *Пусть a, k и q — натуральные числа, $(a,q) = 1$, $\nu_k(q)$ — число вычетов степени k по модулю q,*

$$\tau(\chi,a,k) = \sum_{h=1}^{q} \chi(h)e\left(\frac{ah^k}{q}\right),$$

Тогда имеет место неравенство

$$|\tau(\chi,a,k)| \leqslant 2(\tau(q))^{\frac{\ln k}{\ln 2}}\sqrt{q}.$$

Доказательство Утверждение леммы следует из задач 8.α) и 8.β), стр. 103 учебника [29].

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы разобьём на несколько этапов.

3.1. Сведение доказательства теоремы к оценке суммы $W(\alpha;x,y)$

Из условия $1\leqslant q\leqslant \mathscr{L}^b$, $k\geqslant 3$ — фиксированное целое число, следует, что

$$\frac{q\,(\tau(q))^{\frac{\ln k}{\ln 2}}}{\varphi(q)}\ll\mathscr{L}.$$

Применяя к сумме $\tau(\chi,a,k)$ лемму 8, а затем последнюю оценку, найдем

$$|\tau(\chi,a,k)|=\left|\sum_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\frac{ah^k}{q}\right)\right|\leqslant 2\sqrt{q}\,(\tau(q))^{\frac{\ln k}{\ln 2}}\ll\frac{\varphi(q)\mathscr{L}}{\sqrt{q}}. \tag{1}$$

Пользуясь свойством ортогональности характеров, находим

$$S_k(\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\bmod q}\tau(\bar{\chi},a,k)\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^k)+O(\mathscr{L}^2). \tag{2}$$

Далее применяя преобразование Абеля в интегральной форме, имеем

$$\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^k)=-\int_{x-y}^{x}\psi(u,\chi)de(\lambda u^k)+e(\lambda x^k)\psi(x,\chi)-e(\lambda(x-y)^k)\psi(x-y,\chi).$$

Пользуясь леммой 3 при $T_0=\left(xy^{-1}+|\lambda|x^k\right)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{A+3}$, найдем

$$\begin{aligned}\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^k)=&-\int_{x-y}^{x}\left(E_0u-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{u^\rho}{\rho}\right)de(\lambda u^k)+e(\lambda x^k)\left(E_0x-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{x^\rho}{\rho}\right)-\\&-e(\lambda(x-y)^k)\left(E_0(x-y)-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}\frac{(x-y)^\rho}{\rho}\right)-\\&-\int_{x-y}^{x}R(u,T_0)2\pi ik\lambda u^{k-1}e(\lambda u^k)du+e(\lambda x^k)R(x,T_0)-e(\lambda(x-y)^k)R(x-y,T_0).\end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу формулу интегрирования по частям, а также пользуясь оценкой для $R(u;T_0,\chi)$ из леммы 3 и значением параметра T_0, найдем

$$\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n^k)=E_0\int_{x-y}^{x}e(\lambda u^k)du-\sum_{|\gamma|\leqslant T_0}I(\rho,\lambda)+O\left(\frac{y}{q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{A+1}}\right),$$

$$I(\rho,\lambda)=\int_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(\lambda u^k+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u\right)du.$$

Подставляя найденную формулу в (2) и воспользовавшись оценкой (1), находим

$$S_k(\alpha;x,y)=\frac{\tau(\chi_0,a,k)}{\varphi(q)}\int_{x-y}^{x}e(\lambda u^k)du-W(\alpha;x,y)-E_1W_1(\alpha;x,y)+O(y\mathscr{L}^{-A}), \tag{3}$$

$$W(\alpha;x,y)=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\bmod q}\tau(\bar{\chi},a,k)\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0\\ \rho\neq\beta_1}}I(\rho,\lambda),$$

$$W_1(\alpha;x,y)=\frac{\tau(\chi_1,a,k)}{\varphi(q)}I(\beta_1,\lambda),$$

где $E_1=1$, если по модулю q существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет действительный нуль β_1, $\beta_1\geqslant 1-c/\ln q$ и $E_1=0$ в противном случае.

Оценка $|W_1(\alpha;x,y)|$. Пользуясь тривиальными оценками суммы $\tau(\chi_1,a,k)$ и интеграла $I(\beta_1,\lambda)$, найдем

$$|W_1(\alpha;x,y)|=\left|\frac{\tau(\chi_1,a,k)}{\varphi(q)}\int_{x-y}^{x}\frac{u^{\beta_1-1}}{\beta_1}e(\lambda u^k)du\right|\ll yx^{\beta_1-1}.$$

Согласно лемме 6, имея в виду, что $q\leqslant\mathscr{L}^b$, при $\varepsilon=(2b)^{-1}$ имеем

$$x^{\beta_1-1}=\exp\left((\beta_1-1)\mathscr{L}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}}{q^{\varepsilon}}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{c(\varepsilon)\mathscr{L}}{\mathscr{L}^{b\varepsilon}}\right)=\exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}}).$$

Следовательно,

$$|W_1(\alpha;x,y)|\ll y\exp(-c(\varepsilon)\sqrt{\mathscr{L}})\ll y\mathscr{L}^{-A}. \tag{4}$$

Преобразование $|W(\alpha;x,y)|$. Переходя к оценкам, имеем

$$|W(\alpha;x,y)|\leqslant\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\chi\bmod q}|\tau(\bar{\chi},a,k)|W(\lambda,\chi),\qquad W(\lambda,\chi)=\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0\\ \rho\neq\beta_1}}|I(\rho,\lambda)|\,, \tag{5}$$

где β_1 — действительный нуль, если по модулю q существует действительный характер χ_1 такой, что $L(s,\chi_1)$ имеет действительный нуль $\beta_1\geqslant 1-c/\ln q$. Сумму $|W(\alpha;x,y)|$ будем оценивать только в случае $\lambda\geqslant 0$. Случай $\lambda\leqslant 0$, сводится к случаю $\lambda\geqslant 0$ с помощью соотношения

$$\begin{aligned}W(\lambda,\chi)&=\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0\\ \rho\neq\beta_1}}\left|\overline{I(\rho,\lambda)}\right|=\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0\\ \rho\neq\beta_1}}\left|\int_{x-y}^{x}u^{\beta-1}e\left(-\lambda u^k-\frac{1}{2\pi}\gamma\ln u\right)du\right|=\\&=\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0\\ \rho\neq\beta_1}}|I(\bar{\rho},-\lambda)|=\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant T_0\\ \rho\neq\beta_1}}|I(\rho,-\lambda)|=W(\chi,-\lambda),\end{aligned}$$

Оценивая интеграл $I(\rho,\lambda)$, воспользовавшись леммой 1, при $M=x^{\beta-1}$, $f(u)=\lambda u^k+\frac{\gamma}{2\pi}\ln u$ и $m_1=\min f'(u)$, найдем

$$|I(\rho,\lambda)|\leqslant\frac{x^{\beta-1}}{\min|f'(u)|}=\frac{x^{\beta}}{\min|xf'(u)|},\qquad f'(u)=k\lambda u^{k-1}+\frac{\gamma}{2\pi u}=\frac{\gamma+2\pi k\lambda u^k}{2\pi u}.$$

Интеграл $I(\rho,\lambda)$ оценим также и при помощи леммы 2, полагая $M=x^{\beta-1}$, $m_2=\min f''(u)$. Имеем

$$|I(\rho,\lambda)|\leqslant\frac{x^{\beta-1}}{\sqrt{\min|f''(u)|}}=\frac{x^{\beta}}{\sqrt{\min|x^2f''(u)|}},\qquad f''(u)=\frac{2\pi k(k-1)\lambda u^k-\gamma}{2\pi u^2}.$$

Следовательно, с учётом следующей тривиальной оценки

$$|I(\rho,\lambda)|\leqslant\int_{x-y}^{x}u^{\beta-1}du\leqslant yx^{\beta-1},$$

имеем

$$|I(\rho,\lambda)|\leqslant x^{\beta}\min\left(\frac{y}{x},\frac{1}{\min|xf'(u)|},\frac{1}{\sqrt{\min|x^2f''(u)|}}\right).$$

Эту оценку, пользуясь соотношениями

$$|xf'(u)| = |\gamma + 2\pi k\lambda u^k|\frac{x}{2\pi u} \geqslant |\gamma + 2\pi k\lambda u^k|\frac{x}{2\pi x} \geqslant \frac{1}{2\pi}|\gamma + 2\pi k\lambda u^k|,$$
$$|x^2 f''(u)| = \frac{|2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma|x^2}{2\pi u^2} \geqslant \frac{|2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma|}{2\pi},$$

представим в виде

$$|I(\rho,\lambda)| \ll x^\beta \min\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{\min|\gamma + 2\pi k\lambda u^k|}, \frac{1}{\sqrt{|2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma|}}\right). \tag{6}$$

Подставляя эту оценку и (1) в (5), получим

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{q}} \sum_{\chi \bmod q} W(\lambda,\chi). \tag{7}$$

3.2. Доказательство теоремы в случае $\lambda \leqslant \left(2\pi k^2 x^{k-2} y^2\right)^{-1}$

В этом пункте будем считать, что для параметра y выполняется условие

$$x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18} \leqslant y \leqslant x\mathscr{L}^{-A-0,5b-3}. \tag{8}$$

Все нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ с условием $|\gamma| \leqslant T_0$ разобьём на множества D_1, D_2 и D_3 следующим образом:

$$D_1 = \left\{\rho:\ -T_0 \leqslant \gamma < -2\pi k\lambda x^k - \frac{x}{y}\right\},$$
$$D_2 = \left\{\rho:\ -2\pi k\lambda x^k - \frac{x}{y} \leqslant \gamma \leqslant -2\pi k\lambda(x-y)^k + \frac{x}{y}\right\},$$
$$D_3 = \left\{\rho:\ -2\pi k\lambda(x-y)^k + \frac{x}{y} < \gamma \leqslant T_0\right\}.$$

Обозначая через $W_j(\lambda,\chi)$, $j = 1,\ 2,\ 3$ сумму модулей интеграла $I(\rho,\lambda)$ по нулям ρ, принадлежащим множеству D_j, представим сумму $W(\lambda,\chi)$ в (5) в виде:

$$W(\lambda,\chi) = W_1(\lambda,\chi) + W_2(\lambda,\chi) + W_3(\chi,\lambda). \tag{9}$$

Оценка $W_1(\lambda,\chi)$**.** Прибавляя слагаемое $2\pi k\lambda u^k$, $x - y \leq u \leqslant x$ ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1, получим

$$D_1 = \left\{\rho:\ -T_0 + 2\pi k\lambda u^k \leqslant \gamma + 2\pi k\lambda u^k < -2\pi k\lambda x^k + 2\pi k\lambda u^k - \frac{x}{y}\right\},$$

В отрезке $x - y \leq u \leqslant x$ функция $2\pi k\lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множество D_1, имеем

$$-2\pi k\lambda x^k + 2\pi k\lambda u^k - \frac{x}{y} \leqslant -\frac{x}{y}.$$

Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_1, то выполняется неравенство $\gamma + 2\pi k\lambda u^k < -\frac{x}{y}$, поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + 2\pi k\lambda u^k$ в отрезке $x - y \leqslant u \leqslant x$ справедливо соотношение

$$\min|\gamma + 2\pi k\lambda u^k| = -\max(\gamma + 2\pi k\lambda u^k) = -\gamma - 2\pi k\lambda x^k \geqslant \frac{x}{y}, \quad \text{если} \quad \rho \in D_1.$$

Отсюда с учетом второй оценки (6), находим

$$W_1(\lambda,\chi) \ll \sum_{\rho\in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi k\lambda x^k}.$$

Все нули в множестве

$$D_1 = \left\{\rho:\ \frac{x}{y} \leqslant -\gamma - 2\pi k\lambda x^k < T_0 - 2\pi k\lambda x^k\right\},$$

разобьем на классы $D_{11},\ \ldots,\ D_{1r}$, $r \ll T_0 x^{-1} y$ следующим образом: в класс D_{1n} отнесем те нули ρ, для которых выполняются условия:

$$\frac{nx}{y} < -\gamma - 2\pi k\lambda x^k \leqslant \frac{(n+1)x}{y}.$$

Поэтому

$$W_1(\lambda,\chi) \ll \sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi k\lambda x^k} \leqslant \frac{y}{x}\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{1n}} \frac{x^\beta}{n} \leqslant \frac{y\mathscr{L}}{x}\max_{1\leqslant n\leqslant r}\sum_{\rho\in D_{1n}} x^\beta \leqslant \frac{y\mathscr{L}}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}<\gamma\leqslant T} x^\beta.$$

Оценка $W_3(\chi,\lambda)$. Прибавляя слагаемое $2\pi k\lambda u^k$, $x - y \leq u \leqslant x$ ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_3, получим

$$D_3 = \left\{\rho:\ 2\pi k\lambda u^k - 2\pi k\lambda(x-y)^k + \frac{x}{y} < \gamma + 2\pi k\lambda u^k \leqslant T_0 + 2\pi k\lambda u^k\right\}.$$

В отрезке $x - y \leq u \leqslant x$ функция $2\pi k\lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для левой границы множество D_3, имеем

$$2\pi k\lambda u^k - 2\pi k\lambda(x-y)^k + \frac{x}{y} \geqslant \frac{x}{y}.$$

Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_3, то выполняется неравенство $\gamma + 2\pi k\lambda u^k > \frac{x}{y}$, поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + 2\pi k\lambda u^k$ в отрезке $x - y \leqslant u \leqslant x$ справедливо соотношение

$$\min|\gamma + 2\pi k\lambda u^k| = \min(\gamma + 2\pi k\lambda u^k) = \gamma + 2\pi k\lambda(x-y)^k \geqslant \frac{x}{y}, \quad \text{если} \quad \rho\in D_3.$$

Отсюда с учетом второй оценки (6), находим

$$W_3(\chi,\lambda) \ll \sum_{\rho\in D_3} \frac{x^\beta}{\gamma + 2\pi k\lambda(x-y)^k}.$$

Все нули в множестве

$$D_3 = \left\{\rho:\ \frac{x}{y} \leqslant \gamma + 2\pi k\lambda(x-y)^k < T_0 + 2\pi k\lambda(x-y)^k\right\},$$

разобьем на классы $D_{31},\ \ldots,\ D_{3r}$, $r \ll T_0 x^{-1} y$ следующим образом: в класс D_{3n} отнесем те нули ρ, для которых выполняются условия:

$$\frac{nx}{y} < \gamma + 2\pi k\lambda(x-y)^k \leqslant \frac{(n+1)x}{y}, \qquad \text{если} \qquad 1 \leqslant n \leqslant r.$$

Поэтому

$$W_3(\chi,\lambda)\ll\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{3n}}\frac{x^\beta}{\gamma+2\pi k\lambda(x-y)^k}\leqslant\frac{y}{x}\sum_{n=1}^{r}\sum_{\rho\in D_{3n}}\frac{x^\beta}{n}\leqslant\frac{y\mathscr{L}}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}<\gamma\leqslant T}x^\beta.$$

Оценка $W_2(\lambda,\chi)$. Представляя множество D_2 в виде

$$D_2=\left\{\rho:\ T_1-2\pi k\lambda(x^k-(x-y)^k)+\frac{2x}{y}\leqslant-\gamma\leqslant T_1\right\},\qquad T_1=2\pi k\lambda x^k+\frac{x}{y}\leqslant T_0,$$

имея в виду, что при $\lambda\leqslant\left(2\pi k^2x^{k-2}y^2\right)^{-1}$ для длины множество D_2 выполняется неравенство

$$2\pi k\lambda(x^k-(x-y)^k)+\frac{2x}{y}\leqslant2\pi k^2\lambda x^{k-1}y+\frac{2x}{y}\leqslant\frac{(2k+2)x}{y},$$

и воспользовавшись тривиальной оценкой интеграла $I(\rho,\lambda)$, то есть первой оценкой (6), имеем

$$W_2(\lambda,\chi)\leqslant\sum_{\rho\in D_2}|I(\rho,\lambda)|\ll\frac{y}{x}\sum_{\rho\in D_2}x^\beta\leqslant\frac{(2k+2)y}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}\leqslant-\gamma\leqslant T}x^\beta\ll\frac{y}{x}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-\frac{x}{y}\leqslant\gamma\leqslant T}x^\beta.$$

Подставляя полученные оценки для $W_1(\lambda,\chi)$, $W_3(\chi,\lambda)$ и $W_3(\chi,\lambda)$ в (9), а затем (7), найдем

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y\mathscr{L}^2}{\sqrt{q}\,x}\max_{|T|\leqslant T_0}V_q\left(T,\frac{x}{y}\right),\tag{10}$$
$$V_q(T,U)=\sum_{\chi\bmod q}\sum_{T-U<\gamma\leqslant T}x^\beta,\qquad U\leqslant T.$$

Для оценки $V_q(T,U)$ воспользуемся плотностной теоремой в узких прямоугольниках критической полосы для нулей L-рядов Дирихле по модулю q и теоремой о границе этих нулей . Имеем

$$\begin{aligned}V_q(T,U)=&\mathscr{L}\int_0^1x^u\sum_{\chi\bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right)du+\sum_{\chi\bmod q}\left(N(T,\chi)-N(T-H,\chi)\right)\leqslant\\&\leqslant2\mathscr{L}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant1}x^u\sum_{\chi\bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right).\end{aligned}$$

Согласно лемме 4 функция $L(u+it,\chi)$ не имеет нулей в области

$$u\geqslant1-\delta(q,t),\qquad\delta(q,t)=\frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ (\ln(t+3)\ln\ln(t+3))^{\frac{3}{4}}\right)},$$

для всех характеров $\chi\mod q$, за исключением, быть может, простого действительного нуля β_1 у L-функции, определенной исключительным характером χ_1. Поэтому имея в виду, что $\delta(q,T)\geqslant\delta(q,T_0)$, найдем

$$V_q\left(T,U\right)\leqslant2\mathscr{L}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant1-\delta}x^u\sum_{\chi\bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N(u,T-U,\chi)\right),\qquad\delta=\delta(q,T_0).\tag{11}$$

Подставляя правую часть этого неравенства при $U=\frac{x}{y}$ в (10), найдем

$$|W(\alpha;x,y)|\ll\frac{y\mathscr{L}^3}{\sqrt{q}\,x}\max_{|T|\leqslant T_0}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant1-\delta}x^u\sum_{\chi\bmod q}\left(N(u,T,\chi)-N\left(u,T-\frac{x}{y},\chi\right)\right).\tag{12}$$

Из соотношения $|T| \leqslant T_0 = \left(xy^{-1} + |\lambda| x^k\right) q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{A+3}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \left(2\pi k^2 x^{k-2} y^2\right)^{-1}$ и условия (8), имеем

$$\frac{T}{(xy^{-1})^3} \leqslant \left(\frac{y^2}{x^2} + \lambda x^{k-3} y^3\right) q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{A+3} \leqslant \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{2\pi k^2 x}\right) q^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{A+3} \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что в сумме по $\chi \bmod q$ в (12) выполняется условие $\frac{x}{y} \geqslant T^{\frac{1}{3}}$, то есть к этой сумме можно применить лемму 7. Полагая в этой лемме $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2, \tag{13}$$

$$\mathscr{A}_1 = \frac{y\mathscr{L}^{12}}{\sqrt{q}\, x} \max_{0{,}5 \leqslant u \leqslant 0{,}75} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{4-4u}{3-2u}},$$

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y\mathscr{L}^{3}}{\sqrt{q}\, x} \max_{0{,}75 \leqslant u \leqslant 1-\delta} x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.$$

Оценка $\mathscr{A}_1$. Имеем

$$\mathscr{A}_1 = \frac{q^{1,5} x \mathscr{L}^{12}}{y} \max_{0{,}5 \leqslant u \leqslant 0{,}75} f_1(u), \qquad f_1(u) = x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{1}{u-1,5}} > 0,$$

$$f_1'(u) = f_1(u) \left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{qx}\right)}{(u-1,5)^2}\right) = \frac{f_1(u)}{(u-1,5)^2} \ln \frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}}.$$

Из условий $y \geqslant x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$ и $q \leqslant \mathscr{L}^b$, а также из соотношения

$$\max_{0{,}5 \leqslant u \leqslant 0{,}75} \left(-u^2 + 3u - 1,25\right) = \left(-u^2 + 3u - 1,25\right)\big|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

следует, что

$$\ln \frac{y}{qx^{-u^2+3u-1,25}} \geqslant \ln \frac{yx^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}}{\mathscr{L}^b x^{\frac{7}{16}}} \geqslant \ln x^{\frac{3}{16}} \mathscr{L}^{1,5A+18-0,75b} > \ln x^{\frac{1}{8}} > 0,$$

то есть $f_1'(u) > 0$ и $f_1(u)$ возрастающая функция. Воспользовавшись этим свойством, а затем соотношением $y \geqslant x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$, имеем

$$\mathscr{A}_1 = \frac{xq^{1,5}\mathscr{L}^{12}}{y} x^{\frac{3}{4}} \left(\frac{qx}{y}\right)^{-\frac{4}{3}} = y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}} q^{\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{18}}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \leqslant y \cdot \left(\frac{x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{0,25b+18}}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Оценка $\mathscr{A}_2$. Имеем

$$\mathscr{A}_2 = \frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}^3}{q^{2,5-\varepsilon} x^{3-\varepsilon}} \max_{0{,}75 \leqslant u \leqslant 1-\delta} f_2(u), \qquad f_2(u) = x^u \left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{u}} > 0, \qquad \delta = \delta(q, T_0).$$

$$f_2'(u) = f_2(u) \left(\ln x + \frac{\ln\left(\frac{y}{qx}\right)}{u^2}\right) = \frac{f_2(u)}{u^2} \ln \frac{y}{qx^{1-u^2}}.$$

Из условий $y \geqslant x^{\frac{5}{8}} \mathscr{L}^{1,5A+025b+18}$ и $q \leqslant \mathscr{L}^b$, а также из соотношения

$$\max_{0{,}75 \leqslant u \leqslant 1-\delta} \left(-u^2 + 1\right) = \left(-u^2 + 1\right)\big|_{u=0,75} = \frac{7}{16},$$

следует, что

$$\ln\frac{y}{qx^{1-u^2}}\geqslant\ln\frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}}{\mathscr{L}^b x^{\frac{7}{16}}}\geqslant\ln\left(x^{\frac{3}{16}}\mathscr{L}^{1,5A+18-0,75b}\right)>0,$$

то есть $f_2'(u)>0$ и $f_2(u)$ возрастающая функция. Воспользовавшись этим свойством, имеем

$$\mathscr{A}_2=\frac{y^{3-\varepsilon}\mathscr{L}^3}{q^{2,5-\varepsilon}x^{3-\varepsilon}}x^{1-\delta}\left(\frac{qx}{y}\right)^{\frac{2}{1-\delta}}=y\cdot\frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon}\mathscr{L}^3}{q^{0,5+\frac{2\delta}{1-\delta}-\varepsilon}y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}}\leqslant y\cdot\frac{x^{\frac{2\delta}{1-\delta}-\delta+\varepsilon}\mathscr{L}^3}{y^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}}=$$

$$=y\mathscr{L}^3\left(\frac{x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}}{y}x^{f(\delta,\varepsilon)}\mathscr{L}^{-1,5A-0,25b-18}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon},$$

$$f(\delta,\varepsilon)=\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}-\frac{5}{8}.$$

Отсюда имея в виду, что $y\geqslant x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$, получим

$$\mathscr{A}_2\ll y\cdot x^{f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}}\mathscr{L}^3.$$

Далее при $\varepsilon=\frac{\delta}{3}$, воспользовавшись соотношением

$$f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}=-\frac{\delta}{8}+\frac{3}{8}\left(\varepsilon-\frac{\delta}{3}-\frac{\delta^2}{3(1-\delta)}\right)\leqslant-\frac{\delta}{8},$$

находим

$$\mathscr{A}_2\ll yx^{-0,125\delta}\mathscr{L}^3\ll y\mathscr{L}^3\exp\left(-0,125\delta\mathscr{L}\right).$$

Пользуясь условиями $\lambda\leqslant\left(2\pi k^2x^{k-2}y^2\right)^{-1}$ и $y\geqslant x^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}^{1,5A+0,25b+18}$, имеем

$$T_0=\left(\frac{x}{y}+\lambda x^k\right)q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{A+3}\leqslant\left(\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2\pi k^2y^2}\right)\mathscr{L}^{A+0,5b+3}\leqslant\frac{x^2}{y^2}\mathscr{L}^{A+0,5b+3}<x,$$

Воспользовавшись этим неравенством, оценим снизу параметр $\delta=\delta(q,T_0)$:

$$\delta(q,T_0)=\frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ \left(\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3)\right)^{\frac{3}{4}}\right)}\geqslant\frac{c_1}{\max\left(b\ln\mathscr{L},\ \left(\mathscr{L}\ln\mathscr{L}\right)^{\frac{3}{4}}\right)}\geqslant c_1\mathscr{L}^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathscr{A}_2\ll y\mathscr{L}^3\exp\left(-0,125c_1\mathscr{L}^{0,24}\right)\ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Подставляя эту оценку и оценку полученной для суммы $\mathscr{A}_1$ в (13), получим

$$|W(\alpha;x,y)|\ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Из этой оценки и (4) ввиду (3) получим первое утверждение теоремы.

3.3. Доказательство теоремы в случае $\lambda > \left(2\pi k^2 x^{k-2} y^2\right)^{-1}$

Вводим параметр $H = 2\pi k^2 \lambda x^{k-1} y$, который при $\lambda > \left(2\pi k^2 x^{k-2} y^2\right)^{-1}$ удовлетворяет условию

$$H \geqslant \frac{x}{y}. \tag{14}$$

Все нули $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s,\chi)$ с условием $|\gamma| \leqslant T_0$ разобьём на множества D_1, D_2 и D_3 следующим образом:

$$D_1 = \left\{\rho:\ -T_0 \leqslant \gamma < -2\pi k\lambda x^k - H\right\},$$
$$D_2 = \left\{\rho:\ -2\pi k\lambda x^k - H \leqslant \gamma \leqslant -2\pi k\lambda (x-y)^k + H\right\},$$
$$D_3 = \left\{\rho:\ -2\pi k\lambda (x-y)^k + H < \gamma \leqslant T_0\right\}.$$

Обозначая через $W_j(\lambda,\chi)$, $j = 1,\ 2,\ 3$ сумму модулей интеграла $I(\rho,\lambda)$ по нулям ρ, принадлежащим множеству D_j, представим сумму $W(\lambda,\chi)$ в виде

$$W(\lambda,\chi) = W_1(\lambda,\chi) + W_2(\lambda,\chi) + W_3(\chi,\lambda). \tag{15}$$

Оценка $W_1(\lambda,\chi)$. Прибавляя слагаемое $2\pi k\lambda u^k$, $x - y \leq u \leqslant x$ ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_1, получим

$$D_1 = \left\{\rho:\ -T_0 + 2\pi k\lambda u^k \leqslant \gamma + 2\pi k\lambda u^k < -2\pi k\lambda x^k + 2\pi k\lambda u^k - H\right\},$$

В отрезке $x - y \leq u \leqslant x$ функция $2\pi k\lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для правой границы множества D_1, имеем

$$-2\pi k\lambda x^k + 2\pi k\lambda u^k - H \leqslant -H.$$

Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_1, то выполняется неравенство

$$\gamma + 2\pi k\lambda u^k < -H,$$

поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma + 2\pi k\lambda u^k$ в отрезке $x - y \leqslant u \leqslant x$ справедливо соотношение

$$\min|\gamma + 2\pi k\lambda u^k| = -\max(\gamma + 2\pi k\lambda u^k) = -\gamma - 2\pi k\lambda x^k \geqslant H, \quad \text{если} \quad \rho \in D_1,$$

Отсюда с учетом оценки (6), находим

$$W_1(\lambda,\chi) \ll \sum_{\rho\in D_1} \frac{x^\beta}{-\gamma - 2\pi k\lambda x^k}.$$

Все нули в множестве

$$D_1 = \left\{\rho:\ H \leqslant -\gamma - 2\pi k\lambda x^k < T_0 - 2\pi k\lambda x^k\right\},$$

разобьем на классы $D_{11},\ \ldots,\ D_{1t}$, $t \ll T_0 H^{-1}$ следующим образом: в класс D_{1n} отнесем те нули ρ, для которых выполняются условия:

$$nH < -\gamma - 2\pi k\lambda x^k \leqslant (n+1)H, \qquad \text{если} \quad 1 \leqslant n \leqslant t.$$

Поэтому имеем

$$W_1(\lambda,\chi) \ll \sum_{n=1}^{t}\sum_{\rho\in D_{1n}} \frac{x^\beta}{-\gamma-2\pi k\lambda x^k} \leqslant \sum_{n=1}^{t}\sum_{\rho\in D_{1n}} \frac{x^\beta}{nH} \leqslant \frac{\mathscr{L}}{H}\max_{1\leqslant n\leqslant t}\sum_{\rho\in D_{1n}} x^\beta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\mathscr{L}}{H}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T} x^\beta \ll \frac{\mathscr{L}}{\lambda x^{k-1}y}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-\lambda x^{k-1}y<\gamma\leqslant T} x^\beta.$$

Оценка $W_3(\lambda,\chi)$. Прибавляя слагаемое $2\pi k\lambda u^k$, $x-y\leq u\leqslant x$ ко всем трем членам неравенства, с помощью которых определяется множество D_3, получим

$$D_3=\left\{\rho:\ 2\pi k\lambda u^k-2\pi k\lambda(x-y)^k+H<\gamma+2\pi k\lambda u^k\leqslant T_0+2\pi k\lambda u^k\right\}.$$

В отрезке $x-y\leq u\leqslant x$ функция $2\pi k\lambda u^k$ монотонно возрастает, поэтому для левой границы множества D_3 имеем

$$2\pi k\lambda u^k-2\pi k\lambda(x-y)^k+H\geqslant H.$$

Следовательно, если ρ принадлежит множеству D_3, то выполняется неравенство

$$\gamma+2\pi k\lambda u^k>H,$$

поэтому для монотонной возрастающей функции $\gamma+2\pi k\lambda u^k$ в отрезке $x-y\leqslant u\leqslant x$ справедливо соотношение

$$\min|\gamma+2\pi k\lambda u^k|=\min(\gamma+2\pi k\lambda u^k)=\gamma+2\pi k\lambda(x-y)^k\geqslant H,\quad \text{если}\quad \rho\in D_3.$$

Все нули в множестве

$$D_3=\left\{\rho:\ H<\gamma+2\pi k\lambda(x-y)^k\leqslant T_0+2\pi k\lambda(x-y)^k\right\},$$

разобьем на классы D_{31}, …, D_{3t}, $t\ll T_0H^{-1}$ следующим образом: в класс D_{3n} отнесем те нули ρ, для которых выполняются условия

$$nH<\gamma+2\pi k\lambda(x-y)^k\leqslant(n+1)H,\qquad \text{если}\quad 1\leqslant n\leqslant t.$$

Поэтому имеем

$$W_3(\lambda,\chi) \ll \sum_{n=1}^{t}\sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{\gamma+2\pi k\lambda(x-y)^k} \leqslant \sum_{n=1}^{t}\sum_{\rho\in D_{3n}} \frac{x^\beta}{nH} \leqslant \frac{\mathscr{L}}{H}\max_{1\leqslant n\leqslant t}\sum_{\rho\in D_{3n}} x^\beta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\mathscr{L}}{H}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-H<\gamma\leqslant T} x^\beta \ll \frac{\mathscr{L}}{\lambda x^{k-1}y}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-\lambda x^{k-1}y<\gamma\leqslant T} x^\beta.$$

Оценка $W_2(\lambda,\chi)$. Вводя обозначения

$$T_1=2\pi k\lambda x^k+H,\qquad H_1=2\pi k\lambda(x^k-(x-y)^k)+2H,\qquad T_2=T_1+2\pi k(k-1)\lambda u^k,$$

где $x-y<u\leqslant x$, представим множество D_2 в следующих видах:

$$D_2=\{\rho:\ T_1-H_1\leqslant-\gamma\leqslant T_1\}=\left\{\rho:\ T_2-H_1\leqslant 2\pi k(k-1)\lambda u^k-\gamma\leqslant T_2\right\}. \tag{16}$$

Воспользовавшись неравенством

$$(x-y)^k\geqslant x^k-kx^{k-1}y, \tag{17}$$

являющиеся следствием теоремы Лагранжа о конечных разностях, а затем значением параметра $H = 2\pi k^2\lambda x^{k-1}y$, имеем

$$T_2 - H_1 = 2\pi k(k-1)\lambda u^k + 2\pi k\lambda(x-y)^k - H \geqslant 2\pi k^2\lambda(x-y)^k - H \geqslant$$
$$\geqslant 2\pi k^2\lambda\left(x^k - kx^{k-1}y\right) - H = 2\left(1 - \frac{(k+1)y}{x}\right)\pi k^2\lambda x^k > \pi k^2\lambda x^k,$$

Поэтому, если $\rho \in D_2$, то пользуясь третьей оценкой (6), найдем

$$|I(\rho,\lambda)| \ll \frac{x^\beta}{\sqrt{2\pi k(k-1)\lambda u^k - \gamma}} \leqslant \frac{x^\beta}{\sqrt{T_2 - H_1}} \leqslant \frac{x^\beta}{\sqrt{\pi k^2\lambda x^k}}.$$

Отсюда, затем из представления множества D_2 в виде (16), получим

$$W_2(\lambda,\chi) = \sum_{\rho\in D_2}|I(\rho,\lambda)| \ll \sum_{T_2-H_1\leqslant 2\pi k(k-1)\lambda u^k-\gamma\leqslant T_2}\frac{x^\beta}{\sqrt{\pi k^2\lambda x^k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k^2\lambda x^k}}\sum_{T_1-H_1\leqslant-\gamma\leqslant T_1}x^\beta. \quad (18)$$

Пользуясь неравенством (17), оценим сверху H_1 — длину множества D_2 и снизу её нижнюю границу $T_1 - H_1$:

$$H_1 = 2\pi k\lambda(x^k - (x-y)^k) + 4\pi k^2\lambda x^{k-1}y \leqslant 6\pi k^2\lambda x^{k-1}y,$$
$$T_1 - H_1 = 2\pi k\lambda(x-y)^k - 2\pi k^2\lambda x^{k-1}y \geqslant 2\pi k\lambda x^k\left(1 - \frac{2ky}{x}\right).$$

Отсюда и из $T_1 = 2\pi k\lambda x^k\left(1 + \frac{ky}{x}\right)$ следует, что в (18) границы суммы по γ, то есть $T_1 - H_1$ и T_1 являются величинами порядка λx^k, а её длина H_1 является величиной порядка $\lambda x^{k-1}y$. Разобьём интервал суммирования $T_1 - H_1 \leqslant \gamma \leqslant T_1$ на не более $6\pi k^2$ интервалов вида

$$æ\lambda x^k - \lambda x^{k-1}y < \gamma \leqslant æ\lambda x^k,$$

где постоянная æ принимает значение из интервала $2\pi k\left(1 - \frac{2ky}{x}\right) < æ \leqslant 2\pi k\left(1 + \frac{ky}{x}\right)$, и правую часть (18) представим в виде

$$W_2(\lambda,\chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda x^k}}\sum_{æ\lambda x^k-\lambda x^{k-1}y<\gamma\leqslant æ\lambda x^k}x^\beta.$$

Для удобства не ограничивая общности будем считать, что æ = 1. Подставляя эту оценку, оценки $W_1(\lambda,\chi)$ и $W_3(\lambda,\chi)$ в (15) и имея в виду, что $\lambda x^k < T_0$, а затем и $\lambda > \left(2\pi k^2x^{k-2}y^2\right)^{-1}$, имеем

$$W(\lambda,\chi) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda q x^k}}\left(1 + \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\lambda x^{k-2}}y}\right)\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-\lambda x^{k-1}y<\gamma\leqslant T}x^\beta \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\lambda q x^k}}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{T-\lambda x^{k-1}y<\gamma\leqslant T}x^\beta.$$

Подставляя эту оценку в (7), получим

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{\mathscr{L}^2}{\sqrt{\lambda q x^k}}\max_{|T|\leqslant T_0}\sum_{\chi \bmod q}\sum_{T-\lambda x^{k-1}y<\gamma\leqslant T}x^\beta = \frac{\mathscr{L}^2}{\sqrt{\lambda q x^k}}\max_{|T|\leqslant T_0}V_q(T,\lambda x^{k-1}y),$$

где сумма $V_q(T,U)$ определена в (10), и в формуле (11) полагая $U = \lambda x^{k-1}y$, найдем

$$|W(\alpha;x,y)| \ll \frac{\mathscr{L}^3}{\sqrt{\lambda q x^k}}\max_{|T|\leqslant T_0}\max_{0{,}5\leqslant u\leqslant 1-\delta}x^u\sum_{\chi \bmod q}\Big(N(u,T,\chi) - N(u,T-\lambda x^{k-1}y,\chi)\Big), \quad (19)$$

где $\delta = \delta(q, T_0)$. Далее будем считать, что для параметра y выполняется условие

$$x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathscr{L}^{c_k} \leqslant y \leqslant x\mathscr{L}^{-A-0,5b-10}. \tag{20}$$

Из определения параметра T_0, условия $\lambda > \left(2\pi k^2 x^{k-2} y^2\right)^{-1}$ и (20), имеем

$$\frac{T}{(\lambda x^{k-1}y)^3} \leqslant \frac{T_0}{(\lambda x^{k-1}y)^3} = \frac{\sqrt{q}\mathscr{L}^{A+3}}{\lambda^3 x^{3k-4} y^4} + \frac{\sqrt{q}\mathscr{L}^{A+3}}{\lambda^2 x^{2k-3} y^3} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\left(2\pi k^2\right)^3 y^2 \mathscr{L}^{A+0,5b+3}}{x^2} + \frac{\left(2\pi k^2\right)^2 y \mathscr{L}^{A+0,5b+3}}{x} \ll \mathscr{L}^{-7},$$

следует, что в сумме по $\chi \bmod q$ в (19) выполняется условие $\lambda x^{k-1} y \geqslant T^{\frac{1}{3}}$, то есть можно применить лемму 7. Полагая в этой лемме

$$\varepsilon = \min\left(\frac{\eta_k}{8(k-1)},\ \frac{2k-5+\eta_k}{2}\delta\right), \tag{21}$$

имеем

$$|W(\alpha; x, y)| \ll \mathscr{B}_1 + \mathscr{B}_2, \tag{22}$$
$$\mathscr{B}_1 = \frac{\mathscr{L}^{12}}{\sqrt{\lambda q x^k}} \max_{0,5\leqslant u\leqslant 0,75} x^u \left(q\lambda x^{k-1} y\right)^{\frac{4-4u}{3-2u}},$$
$$\mathscr{B}_2 = \frac{\mathscr{L}^3}{\sqrt{q\lambda x^k}} \max_{0,75\leqslant u\leqslant 1-\delta(q,T_0)} x^u \left(q\lambda x^{k-1} y\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}.$$

Оценка $\mathscr{B}_1$. Имеем

$$\mathscr{B}_1 = \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}} \max_{0,5\leqslant u\leqslant 0,75} \exp\left(f_1(u)\right), \qquad f_1(u) = u\ln x + \left(\frac{1}{u-1,5} + \frac{3}{2}\right)\ln\left(q\lambda x^{k-1} y\right),$$
$$f_1'(u) = \ln x - \frac{\ln\left(q\lambda x^{k-1} y\right)}{(u-1,5)^2}, \qquad f_1''(u) = \frac{2\ln\left(q\lambda x^{k-1} y\right)}{(u-1,5)^3} < 0.$$

Покажем, что $f_1'(0,5) > 0$. Действительно воспользовавшись условиями $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1}\mathscr{L}^{b_1}}$ и $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{c_k}$, имеем

$$-f_1'(0,5) = \ln\left(q\lambda x^{k-2} y\right) \leqslant \ln\left(\frac{x^{k-2} y}{\tau}\right) = \ln\left(\frac{x^{2k-3}\mathscr{L}^{b_1}}{y^{2k-2}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{x^{2k-3}\mathscr{L}^{b_1}}{x^{2k-2-\frac{2k-2}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{(2k-2)c_k}}\right) =$$
$$= \ln\left(x^{-\frac{1+\eta_k}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{b_1-(2k-2)c_k}\right) = -\frac{1+\eta_k}{2k-1+\eta_k}\mathscr{L} + (b_1-(2k-2)c_k)\ln\mathscr{L} < 0.$$

Далее для оценки $\mathscr{B}_1$ рассмотрим два случая: $q\lambda x^{k-1} y < x^{\frac{9}{16}}$ и $q\lambda x^{k-1} y \geqslant x^{\frac{9}{16}}$.

Случай $q\lambda x^{k-1} y < x^{\frac{9}{16}}$. Имеем

$$f_1'(u) \geqslant f_1'(0,75) = \ln x - \frac{16}{9}\ln(q\lambda x^{k-1} y) > \ln x - \frac{16}{9}\ln x^{\frac{9}{16}} = 0,$$

то есть $f_1'(u)$ положительна и $f_1(u)$ возрастающая функция в интервале $0,5 \leqslant u \leqslant 0,75$. Воспользовавшись этим свойством, а затем соотношением (20), имеем

$$\mathscr{B}_1 = \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}}\exp\left(f_1(0,75)\right) = \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{6}\ln(q\lambda x^{k-1} y)\right) = \left(q\lambda x^{k-1} y\right)^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{12} <$$

$$< x^{\frac{11}{32}} y^{\frac12} \mathscr{L}^{12} = y \left(\frac{x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathscr{L}^{c_k}}{y} \right)^{\frac12} x^{-\frac{10k+5\eta_k-21}{32(2k-1+\eta_k)}} \mathscr{L}^{12-0{,}5c_k} \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Случай $q\lambda x^{k-1} y \geqslant x^{\frac{9}{16}}$. Ради удобства вводя обозначение

$$y = x^{1-\mu^2} \mathscr{L}^{c}, \tag{23}$$

будем искать наибольшее значение параметра μ и наименьшее значение параметра c, для которого выполняется оценка

$$\mathscr{B}_1 \ll y\mathscr{L}^{-A}. \tag{24}$$

Воспользовавшись условиями $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{q\tau}$, $\tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1}\mathscr{L}^{b_1}}$ и $y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathscr{L}^{c_k}$, имеем

$$q\lambda x^{k-1} y \leqslant \frac{x^{k-1} y}{\tau} = \left(\frac{x}{y}\right)^{2k-2} \mathscr{L}^{b_1} \leqslant \left(x^{\frac{1}{2k-1+\eta_k}} \mathscr{L}^{-c_k} \right)^{2k-2} \mathscr{L}^{b_1} = x^{1-\frac{1+\eta_k}{2k-1+\eta_k}} \mathscr{L}^{b_1-(2k-2)c_k}.$$

Следовательно,

$$f_1'(0{,}5) = \ln x - \ln(q\lambda x^{k-1} y) > 0, \qquad f_1'(0{,}75) = \ln x - \frac{16}{9} \ln(q\lambda x^{k-1} y) \leqslant 0,$$

и точка $u_0 = \dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{\ln(q\lambda x^{k-1} y)}{\ln x} \right)^{\frac12}$, где $f_1'(u_0) = 0$ принадлежит интервалу интегрирования, также в этом интервале выполняется условие $f''(u) < 0$. Следовательно, в интервале $0{,}5 \leqslant u \leqslant 0{,}75$ график функции $f(u)$ является выпуклым вверх, поэтому

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_1 &= \frac{y^{\frac12}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac12}} \exp\left(f_1(u_0)\right) = \frac{y^{\frac12}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac12}} \exp\left(u_0 \ln x + \left(\frac{1}{u_0 - 1{,}5} + \frac{3}{2} \right) \ln\left(q\lambda x^{k-1} y \right) \right) = \\
&= \frac{y^{\frac12}\mathscr{L}^{12}}{x^{\frac12}} \exp\left(\left(\frac{3}{2} - \left(\frac{\ln(q\lambda x^{k-1} y)}{\ln x} \right)^{\frac12} \right) \ln x + \left(- \left(\frac{\ln x}{\ln(q\lambda x^{k-1} y)} \right)^{\frac12} + \frac{3}{2} \right) \ln\left(q\lambda x^{k-1} y \right) \right) = \\
&= xy^{\frac12}\mathscr{L}^{12} \exp\left(\frac{3}{2} \ln\left(q\lambda x^{k-1} y \right) - 2 \left(\ln(q\lambda x^{k-1} y) \ln x \right)^{\frac12} \right) = xy^{\frac12}\mathscr{L}^{12} \exp\left(g\left(q\lambda x^{k-1} y \right) \right),
\end{aligned} \tag{25}$$

где $g(t) = \frac{3}{2} \ln t - 2 \left(\ln t \ln x \right)^{\frac12}$. Из условий

$$q\lambda x^{k-1} y \geqslant x^{\frac{9}{16}}, \qquad \lambda \leqslant \frac{1}{q\tau}, \qquad \tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1}\mathscr{L}^{b_1}},$$

и формулы (23) следует, что

$$x^{\frac{9}{16}} \leqslant q\lambda x^{k-1} y \leqslant \frac{x^{k-1} y}{\tau} = \frac{x^{2k-2}\mathscr{L}^{b_1}}{y^{2k-2}} = x^u \mathscr{L}^v, \qquad u = (2k-2)\mu^2, \quad v = b_1 - (2k-2)c. \tag{26}$$

Поэтому имея в виду, что $t = q\lambda x^{k-1} y \geqslant x^{\frac{9}{16}}$, получим

$$g'(t) = \frac{3}{2t} - \frac{(\ln x)^{\frac12}}{t(\ln t)^{\frac12}} = \frac{9 \ln t - 4 \ln x}{2t(\ln t)^{\frac12}(3(\ln t)^{\frac12} + 2(\ln x)^{\frac12})} > 0,$$

то есть $g(t)$ в интервале своего изменения возрастающая функция, поэтому

$$g\left(q\lambda x^{k-1} y \right) \leqslant g\left(x^u \mathscr{L}^v \right).$$

Отсюда с учётом соотношения

$$y^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}+\frac{u}{4k-4}} \mathscr{L}^{-\frac{b_1-v}{4k-4}},$$

правую часть (25) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_1 &\leqslant xy^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{12} \exp\left(g\left(x^u \mathscr{L}^v\right)\right) = yx^{\frac{1}{2}+\frac{u}{4k-4}} \mathscr{L}^{12-\frac{b_1-v}{4k-4}} \exp\left(g\left(x^u \mathscr{L}^v\right)\right) = \\
&= yx^{\frac{1}{2}+\frac{u}{4k-4}} \mathscr{L}^{12-\frac{b_1-v}{4k-4}} \exp\left(\frac{3}{2}\ln\left(x^u \mathscr{L}^v\right) - 2\left(\ln\left(x^u \mathscr{L}^v\right)\mathscr{L}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \\
&= y\mathscr{L}^{12-\frac{b_1-v}{4k-4}+\frac{3v}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}+\frac{u}{4k-4}+\frac{3u}{2}} \exp\left(-2\left(u\mathscr{L}^2 + v\mathscr{L}\ln\mathscr{L}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \\
&= y\mathscr{L}^{12-\frac{b_1}{4k-4}+\frac{v}{4k-4}+\frac{3v}{2}} x^{\frac{3u}{2}+\frac{u}{4k-4}+\frac{1}{2}} \exp\left(-2\sqrt{u}\mathscr{L}\left(1+\frac{v\ln\mathscr{L}}{u\mathscr{L}}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (27)
\end{aligned}$$

Воспользуемся при $|t| \leqslant 0,1$ формулой

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + R(t), \qquad R(t,\theta) = -\frac{(1-\theta)t^2}{8(1+\theta t)^{\frac{3}{2}}},$$

которая получается разложением функции $f(t) = (1+t)^{\frac{1}{2}}$ в ряд Маклорена с остаточным членом в форме Коши вида

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} t^n + R_m(t,\theta), \qquad R_m(t,\theta) = \frac{f^{(m+1)}(\theta t)}{(m+1)!}(1-\theta)^m t^{m+1},$$
$$0 < \theta < 1, \qquad f'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \qquad f''(t) = -\frac{1}{4}(1+t)^{-\frac{3}{2}},$$

при $m = 1$. Остаточный член $R_1(t,\theta) = -\dfrac{t^2(1-\theta)}{8(1+\theta t T)^{\frac{3}{2}}}$ будем рассматривать как функцию от θ. Имеем

$$\frac{\partial R_1(t,\theta)}{\partial\theta} = \frac{((3-\theta)t+2)t^2}{16(1+\theta t)^{\frac{5}{2}}} > 0.$$

Следовательно,

$$\min R(t,\theta) = R(t,0) = -\frac{t^2}{8}, \qquad (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} + R(t) \geqslant 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&-2\sqrt{u}\mathscr{L}\left(1+\frac{v\ln\mathscr{L}}{u\mathscr{L}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant -2\sqrt{u}\mathscr{L}\left(1+\frac{v\ln\mathscr{L}}{2u\mathscr{L}} - \frac{v^2\ln^2\mathscr{L}}{8u^2\mathscr{L}^2}\right) = \\
&= \ln x^{-2\sqrt{u}} + \ln\mathscr{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} + \frac{v^2\ln^2\mathscr{L}}{4u^{\frac{3}{2}}\mathscr{L}} \leqslant \ln x^{-2\sqrt{u}} + \ln\mathscr{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} + 1.
\end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (27), получим

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_1 &\ll y\mathscr{L}^{12-\frac{b_1}{4k-4}+\frac{v}{4k-4}+\frac{3v}{2}} x^{\frac{3u}{2}+\frac{u}{4k-4}+\frac{1}{2}} \cdot x^{-2\sqrt{u}} \mathscr{L}^{-\frac{v}{\sqrt{u}}} = \\
&= yx^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4k-4}\right)u-2\sqrt{u}+\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{12-\frac{b_1}{4k-4}+\left(\frac{1}{4k-4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)v}. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением (26) показатели x и $\mathscr{L}$ в правой части последнего неравенства выражаем через μ и c. Обозначая эти показатели через $\text{æ}(\mu)$ и $\omega(\mu, c)$, имеем

$$\begin{aligned}\text{æ}(\mu) =& \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4k-4}\right)(2k-2)\mu^2 - 2\sqrt{(2k-2)}\,\mu + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left((6k-5)\mu^2 - 4\sqrt{2k-2}\,\mu + 1\right),\\ \omega(\mu, c) =& 12 - \frac{b_1}{4k-4} + \left(\frac{1}{4k-4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{\mu\sqrt{2k-2}}\right)(b_1 - (2k-2)c) =\\ &= 12 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\mu\sqrt{2k-2}}\right)b_1 - \left(\frac{6k-5}{2} - \frac{\sqrt{2k-2}}{\mu}\right)c.\end{aligned}$$

Величина $\text{æ} = \text{æ}(\mu)$ является квадратичным многочленом относительно μ, с двумя положительными корнями, большим из них является число

$$\mu_k = \frac{2\sqrt{2k-2} + \sqrt{2k-3}}{6k-5} = \frac{1}{2\sqrt{2k-2} - \sqrt{2k-3}},$$

квадрат которого имеет вид

$$\mu_k^2 = \frac{1}{2k-1+\eta_k}, \qquad \eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}. \tag{29}$$

Следовательно, наибольшее значение параметра μ, при котором $\text{æ} = \text{æ}(\mu)$ — показатель x в оценке (28) равен, нулю является число μ_k, а $\omega(\mu, c)$ — показатель $\mathscr{L}$ при $\mu = \mu_k$ принимает вид

$$\omega(\mu_k, c) = 12 + \left(\frac{\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}} - \frac{1}{2}\right)b_1 - \left(\sqrt{(2k-2)(2k-3)} - \frac{2k-3}{2}\right)c,$$

и при $c = c_k$, где

$$c_k = \frac{2A + 24 + \left(\frac{2\sqrt{2k-3}}{\sqrt{2k-2}} - 1\right)b_1}{2\sqrt{(2k-2)(2k-3)} - (2k-3)},$$

имеет место равенство $\omega(\mu_k, c_k) = -A$, то есть оценка (28) превращается в оценку (24). Отсюда, из представлений параметра y в виде (23) и параметра μ_k^2 в виде (29) следует, что оценка (24) имеет место при

$$y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{c_k}, \qquad \eta_k = \frac{2}{4k-5+2\sqrt{(2k-2)(2k-3)}}.$$

Оценка $\mathscr{B}_2$. Имеем

$$\mathscr{B}_2 = \frac{y^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^3}{x^{\frac{1}{2}}}\left(q\lambda x^{k-1}y\right)^{-\frac{1}{2}} \max_{0{,}75\leqslant u\leqslant 1-\delta} f_2(u), \qquad f_2(u) = x^u\left(q\lambda x^{k-1}y\right)^{\frac{2}{u}(1-u)+\varepsilon}, \qquad \delta = \delta(q, T_0).$$

В $\mathscr{B}_2$ функция $f_2(u)$ и её производная второго порядка положительны:

$$\begin{aligned}f_2'(u) =& f_2(u)\left(\ln x - \frac{2}{u^2}\ln\left(q\lambda x^{k-1}y\right)\right), \quad f_2''(u) = f_2(u)\left(\left(\ln x - \frac{2}{u^2}\ln\left(q\lambda x^{k-1}y\right)\right)^2 +\right.\\ &\left. + \frac{4}{u^3}\ln\left(q\lambda x^{k-1}y\right)\right) \geqslant \frac{4f_2(u)}{u^3}\ln\left(q\lambda x^{k-1}y\right) \geqslant \frac{4f_2(u)}{u^3}\ln\left(\frac{qx}{2\pi k^2 y}\right) > 0,\end{aligned}$$

то есть график функции $f_2(u)$ является выпуклым вниз, поэтому

$$\mathscr{B}_2 \leqslant \frac{y^{\frac12}\mathscr{L}^2}{x^{\frac12}}\left(q\lambda x^{k-1}y\right)^{-\frac12}\left(f_2(0,75)+f_2(1-\delta)\right)= \\ = \frac{y^{\frac12}\mathscr{L}^2}{x^{\frac12}}\cdot\left(x^{\frac34}\left(q\lambda x^{k-1}y\right)^{\frac16+\varepsilon}+x^{1-\delta}\left(q\lambda x^{k-1}y\right)^{-\frac12+\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right).$$

Воспользовавшись условием рассматриваемого случая

$$\frac{1}{2\pi k^2x^{k-2}y^2}<\lambda\leqslant\frac{1}{q\tau}=\frac{x^{k-1}\mathscr{L}^{b_1}}{qy^{2k-1}},$$

имеем

$$\mathscr{B}_2 \ll \frac{y^{\frac12}\mathscr{L}^2}{x^{\frac12}}\left(x^{\frac34}\left(\frac{x^{2k-2}\mathscr{L}^{b_1}}{y^{2k-2}}\right)^{\frac16+\varepsilon}+x^{1-\delta}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac12+\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}\right)=y\mathscr{L}^2\cdot\Delta(k,\varepsilon)$$

$$\Delta(k,\varepsilon)=\left(\frac{x^{2k-2+\frac{3}{2(1+6\varepsilon)}}\mathscr{L}^{b_1}}{y^{2k-2+\frac{3}{1+6\varepsilon}}}\right)^{\frac16+\varepsilon}+\left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}= \\ =\left(\frac{x^{1-\frac{3}{4k+2+24(k-1)\varepsilon}}\mathscr{L}^{\frac{b_1+6\varepsilon}{2k+1+12(k-1)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2k+1}{6}+2(k-1)\varepsilon}+\left(\frac{x^{\frac{\delta+\delta^2+(1-\delta)\varepsilon}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}}}{y}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon}= \\ =\left(\frac{x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{c_k}}{y}x^{g(k,\varepsilon)}\mathscr{L}^{h(k,\varepsilon)}\right)^{\frac{2k+1}{6}+2(k-1)\varepsilon}+\left(\frac{x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{c_k}}{y}x^{f(\delta,\varepsilon)}\mathscr{L}^{-c_k}\right)^{\frac{2\delta}{1-\delta}+\varepsilon},$$

где

$$g(k,\varepsilon)=-\frac{2k-5+3\eta_k-24(k-1)\varepsilon}{2(2k-1+\eta_k)(2k+1+12(k-1)\varepsilon)},$$
$$h(k,\varepsilon)=\frac{b_1+6\varepsilon}{2k+1+12(k-1)\varepsilon}-c_k,$$
$$f(\delta,\varepsilon)=\frac{\delta(1-\delta)}{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}+\frac{1}{2k-1+\eta_3}.$$

Отсюда имея в виду, что $y\geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{c_k}$ и $c_k>0$, получим

$$\Delta(k,\varepsilon)\ll\left(x^{g(k,\varepsilon)}\mathscr{L}^{h(k,\varepsilon)}\right)^{\frac{2k+1+12(k-1)\varepsilon}{6}}+x^{f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}}. \tag{30}$$

Воспользовавшись явным значением параметра ε, то есть формулой (21), условиями $\eta_k>0$, и $k\geqslant 3$, находим

$$g(k,\varepsilon)\frac{2k+1+12(k-1)\varepsilon}{6}=-\frac{2k-5}{12(2k-1+\eta_k)}+\left(\varepsilon-\frac{\eta_k}{8(k-1)}\right)\frac{2k-2}{2k-1+\eta_k}\leqslant \\ \leqslant-\frac{2k-5}{12(2k-1+\eta_k)}<-\frac{2k-5}{12(2k-1)}=-\frac{1}{12}+\frac{1}{6k-3}\leqslant-\frac{1}{60},$$
$$f(\delta,\varepsilon)\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{1-\delta}=-\delta+\frac{2\delta+(1-\delta)\varepsilon}{(1-\delta)(2k-1+\eta_k)}\leqslant-\delta+\frac{2\delta+\varepsilon}{\frac56(2k-1+\eta_k)}=$$

$$= -\frac{2}{5}\delta + \frac{6}{5(2k-1+\eta_k)}\left(\varepsilon - \frac{2k-5+\eta_k}{2}\delta\right) \leqslant -\frac{2}{5}\delta.$$

С помощью этих двух неравенств и соотношения

$$h(k,\varepsilon)\left(\frac{2k+1}{6} + 2(k-1)\varepsilon\right) = \frac{b_1 - (2k+1)c_k + (6 - 12(k-1)c_k)\varepsilon}{6}$$

оценку (30) представим в виде

$$\Delta(k,\varepsilon) \ll x^{-\frac{1}{60}}\mathscr{L}^{\frac{b_1-(2k+1)c_k+(6-2(k-1)c_k)\varepsilon}{6}} + x^{-0,4\delta} \ll \mathscr{L}^{-A-2} + \exp\left(-0,4\delta\mathscr{L}\right).$$

Пользуясь условиями

$$\lambda \leqslant \frac{1}{q\tau}, \qquad \tau = \frac{y^{2k-1}}{x^{k-1}\mathscr{L}^{b_1}}, \qquad y \geqslant x^{1-\frac{1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{c_k},$$

имеем

$$T_0 \leqslant \left(\frac{x\sqrt{q}}{y} + \frac{x^{2k-1}\mathscr{L}^{b_1}}{y^{2k-1}}\right)\mathscr{L}^{A+3} \ll \frac{x^{2k-1}}{y^{2k-1}}\mathscr{L}^{A+b_1+3} \leqslant x^{\frac{2k-1}{2k-1+\eta_k}}\mathscr{L}^{A+b_1+3-(2k-1)c_k} < 0,1x,$$

Воспользовавшись этим неравенством, оценим снизу параметр $\delta = \delta(q,T_0)$:

$$\delta(q,T_0) = \frac{c_1}{\max\left(\ln q,\ (\ln(T_0+3)\ln\ln(T_0+3))^{\frac{3}{4}}\right)} \geqslant \frac{c_1}{\max\left(b\ln\mathscr{L},\ (\mathscr{L}\ln\mathscr{L})^{\frac{3}{4}}\right)} \geqslant c_1\mathscr{L}^{-0,76}.$$

Поэтому

$$\mathscr{B}_2 \ll y\mathscr{L}^2\cdot\Delta(k,\varepsilon) \ll y\mathscr{L}^2\left(\mathscr{L}^{-A-2} + \exp\left(-0,4c_1\mathscr{L}^{0,24}\right)\right) \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Подставляя эту оценку и оценку для $\mathscr{B}_1$ в (22), получим

$$|W(\alpha;x,y)| \ll y\mathscr{L}^{-A}. \tag{31}$$

Воспользовавшись оценкой (1), леммой 1 об оценке интеграла по величине первой производной, условиями $\lambda > \left(2\pi k^2x^{k-2}y^2\right)^{-1}$ и (20), имеем

$$\left|\frac{\tau(\chi_0,a,k)}{\varphi(q)}\int_{x-y}^{x} e(\lambda u^k)du\right| \ll \frac{\mathscr{L}}{\sqrt{q}}\cdot\frac{1}{\lambda x^{k-1}} \ll \frac{y^2\mathscr{L}}{\sqrt{q}x} \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Подставляя эту оценку, также оценки (31) и (4) в (3), получим второе утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Избранные труды — М.: изд-во АН СССР. 1952.
2. Виноградов И. М., Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77. С. 4 – 30.
3. Haselgrove C. B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math.Soc. 1951. V. 26. P. 273 – 277.
4. Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс. Ученые труды университета. Сер. мат., физ. и хим. н. 1955. № 2. С. 5 – 23.

5. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. V. 2. P. 138 – 147.

6. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. 1991. V. 7, No 3. P. 135 – 170.

7. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals // I. Mh Math, 1999, 127: 27 – 41. doi.org/10.1007/s006050050020

8. Liu J, Zhan T. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals // Acta Mathematica Sinica. English Series. Oct., 2000. V. 16, No 4. P. 669–690.

9. Liu J., Lu G., Zhan T. Exponential sums over primes in short intervals // Science in China: Series A Mathematics. 2006. V. 49, No 5. P. 611 – 619. DOI:10.1007/s11425-006-0611-x

10. Hua L. K. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. 1938. V. 9, No 1. P. 68 — 80.

11. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals II // In Analytic Number Theory: Proceedings of a Conference in Honor of Heini Halberstam. 1996. Birkhauser. P. 571 – 606.

12. Jutila M. Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions // Acta Arithmetica. 1991. V. 57. Is. 2. P. 93-114.

13. Kumchev A. V. On Weyl sums over primes in short intervals // "Arithmetic in Shangrila"— Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. V. 9. Singapore: World Scientific. P. 116–131.

14. Yao Y. Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October 2014. V. 9. Is. 5. P. 1131 – 1140. DOI:10.1007/s11464-014-0384-4.

15. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2016. Т. 59. № 7-8. С. 273 – 277.

16. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды МИАН. 2016. Т. 296. С. 220 – 242.

17. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56, № 11. С. 853 – 860.

18. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.

19. Рахмонов З. Х., Замонов Б. М. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, с «длинным» сплошным суммированием // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 4(157). С. 7 – 23.

20. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З, Замонов Б. М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 1. С. 217 – 231.

21. Rane, V. V., On the mean square value of Dirichlet L-series // J. London Math. Soc., (2) 21 (1980), 203-215.

22. Zhan T. On the Mean Square of Dirichlet L-Functions // Acta Mathematica Sinica. New Series. 1992. Vol. 8, No 2. pp. 204-224.

23. Рахмонов З. Х., Собиров А. А., Фозилова П. М. Поведение коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в малой окрестности центра больших дуг // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020. Т. 63. № 5-6. С. 279-288.

24. Рахмонов З. Х., Собиров А. А., Фозилова П. М. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в большие дуги // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2020. Т. 63. № 7-8. С.

25. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — Москва. Наука, 1987.

26. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел — М.: Наука, 1981.

27. Прахар К. Распределение простых чисел — М.: Мир, 1967.

28. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983, 2-ое изд.

29. Виноградов И. М. Основы теории чисел — М.: Наука, 1981. 9-ое изд.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M., 1952, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow.

2. Vinogradov, I. M., & Karatsuba, A. A., 1986, “The method of trigonometric sums in number theory”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 168, pp. 3-30.

3. Haselgrove C. B., 1951, “Some theorems in the analitic theory of number”, *J. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 273-277.

4. Statulevicius, V., 1955, "On the representation of odd numbers as the sum of three almost equal prime numbers *Univ. Mokslo Darbai. Mat. Fiz. Chem. Mokslu Ser*, vol. 3, pp. 5-23.

5. Pan Chengdong, Pan Chengbiao, 1990, “On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III)”, *Chinese Ann. of Math.*, vol. 2. pp. 138-147.

6. Zhan, T., 1991, “On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes”, *Acta Math Sinica. New ser.*, vol. 7, Is. 3. pp. 135 – 170.

7. Liu, J., & Zhan, T., 1999, “Estimation of exponential sums over primes in short intervals I”, *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 127, Is. 1, pp. 27-41.

8. Liu, J., & Zhan, T., 2000, “Hua’s Theorem on Prime Squares in Short Intervals”, *Acta Mathematica Sinica. English Series*, vol. 16, Is. 4. pp. 669-690.

9. Liu J., & Lu, G., Zhan, T., 2006, “Exponential sums over primes in short intervals”, *Science in China: Series A Mathematics*, vol. 49, Is. 5, pp. 611-619. doi:10.1007/s11425-006-0611-x

10. Hua, L. K., 1938, “Some results in the additive prime number theory”, *Quart. J. Math.*, vol. 9, Is. 1, pp. 68-80.

11. Liu J., & Zhan T., 1996, "Estimation of exponential sums over primes in short intervals II", *In Analytic Number Theory: Proceedings of a Conference in Honor of Heini Halberstam*, Birkhauser, pp. 571 – 606.

12. Jutila, M., 1991, "Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions", *Acta Arithmetica*, vol. 57, Is. 2. pp. 93-114.

13. Kumchev, A. V., 2012, "On Weyl sums over primes in short intervals", *"Arithmetic in Shangrila"—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications*, vol. 9, Singapore: World Scientific, pp. 116–131.

14. Yao, Y., 2014, "Sums of nine almost equal prime cubes", *Frontiers of Mathematics in China*, vol. 9, Is. 5. pp. 1131-1140. doi:10.1007/s11464-014-0384-4.

15. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2016, "Estimation of short cubic exponential sums with prime numbers in minor arcs", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 59, no 7-8, pp. 273-277, (in Russian).

16. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2017, "Short Cubic Exponential Sums over Primes", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211–233. doi.org/10.1134/S0081543817010175

17. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2013, "The sum of short double trigonometric sums", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no 11, pp. 853-860, (in Russian).

18. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2014, "Sum of short exponential sums over prime numbers", *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700. doi.org/10.1134/S1064562414070138.

19. Rakhmonov, Z. Kh., & Zamonov, B. M., 2014, "Short cubic double exponential sums, with a long continuous summation", *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 4(157), pp. 7-23, (in Russian).

20. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., Zamonov, B.M., 2016, "Estimates of short cubic double exponential sums with a long continuous summation", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, Is. 1, pp. 217–231.

21. Rane, V. V., 1980, "On the mean square value of Dirichlet L-series", *J. London Math. Soc.*, vol. s2-21, Is. 2, pp. 203-215, doi-org.eres.qnl.qa/10.1112/jlms/s2-21.2.203.

22. Zhan T., 1992, "On the Mean Square of Dirichlet L-Functions", *Acta Mathematica Sinica. New Series*, vol. 8, No 2, pp. 204-224.

23. Rakhmonov, Z. Kh., & Sobirov A. A., Fozilova P. M., 2020, "Behavior of short cubic exponential sums with primes in a small neighborhood of the center of major arcs", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 63, no 5-6, pp. 279-288, (in Russian).

24. Rakhmonov, Z. Kh., & Sobirov A. A., Fozilova P. M., 2020, "Estimate of short cubic exponential sums with primes in major arcs", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 63, no 7-8, pp.405-415, (in Russian).

25. Arkhipov G. I. & Chubarikov V. N. & Karatsuba A. A. 2004. *Trigonometric sums in number theory and analysis*, Berlin–New-York: Walter de Gruyter, 554 p.

26. Davenport H., 1967, *Multiplicative Number Theory*, Markham Publishing Company, Chigago.

27. Prachar K., 1957, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag.

28. Karatsuba A. A., 1993, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, xiv+222 pp.

29. Vinogradov I. M., 2003 *Elements of Number Theory*, Mineola, NY: Dover Publications, ISBN 0-486-49530-2.

Получено 17.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-224-239

Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным внешним слоем вблизи плоскости[1]

С. А. Скобельцын, Н. Ю. Пешков

Скобельцын Сергей Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: skbl@rambler.ru
Пешков Никита Юрьевич — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: nikita.peshkoff@yandex.ru

Аннотация

Рассматривается задача дифракции плоской монохроматической звуковой волны на упругом цилиндре со слоисто неоднородным трансверсально-изотропным внешним слоем. Предполагается, что цилиндр располагается вблизи плоскости с идеальной поверхностью (абсолютно жесткой или акустически мягкой). Для того, чтобы избавиться от граничных условий на плоскости, в соответствии с так называемым методом мнимых рассеивателей вводится в рассмотрение дополнительное препятствие в виде второго упругого цилиндра, расположенного зеркально по отношению к исходному по другую сторону плоскости. Сама плоскость исключается из рассмотрения, а выполнение граничных условий на ней обеспечивается введением второй падающей плоской волны с такой же амплитудой, что и у первой. Направление распространения второй волны зеркально направлению исходной волны относительно плоскости. Фазовый сдвиг во второй волне равен фазовому сдвигу в первой в случае, если плоскость является абсолютно жесткой. В случае, если плоскость является абсолютно мягкой, фазовый сдвиг во второй волне смещен относительно фазового сдвига в первой на π. Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух плоских волн двумя одинаковыми упругими цилиндрами с параллельными осями. В предположении, что падающая волна распространяется по нормали к оси цилиндра, решается двумерная задача. Решение задачи в модифицированной постановке проводится с использованием метода конечных элементов. Проведено численное моделирование решения в ближней зоне рассеянного акустического поля. Результаты расчетов показывают, что в ряде случаев сочетания параметров цилиндра и падающей волны анизотропия и неоднородность свойств материала внешнего слоя цилиндра оказывают существенное влияние на рассеянное поле.

Ключевые слова: дифракция, плоская звуковая волна, упругий цилиндр, неоднородный анизотропный слой, подстилающая поверхность, метод мнимого рассеивателя, метод конечных элементов.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
С. А. Скобельцын, Н. Ю. Пешков. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным анизотропным внешним слоем вблизи плоскости // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 224–239.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-224-239

Sound waves diffraction by an elastic cylinder with inhomogeneous anisotropic outer layer near the plane[2]

S. A. Skobel'tsyn, N. Y. Peshkov

Skobel'tsyn Sergey Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).
e-mail: skbl@rambler.ru
Peshkov Nikita Yurievich — postgraduate TSU, Tula State University (Tula).
e-mail: nikita.peshkoff@yandex.ru

Abstract

The problem of diffraction of a plane monochromatic sound wave by an elastic cylinder with a layered inhomogeneous transversely isotropic outer layer is considered. It is assumed that the cylinder is located near a plane with an ideal surface (absolutely hard or acoustically soft). In order to get rid of the boundary conditions in the plane, in accordance with the so-called imaginary scatterer method, an additional obstacle is introduced in the form of a second elastic cylinder, which is mirror-like with respect to the initial one on the other side of the plane. The plane itself is excluded from consideration, and the fulfillment of the boundary conditions on it is ensured by introducing a second incident plane wave with the same amplitude as that of the first. The direction of propagation of the second wave is mirrored to the direction of the original wave relative to the plane. The phase shift in the second wave is equal to the phase shift in the first if the plane is absolutely rigid. If the plane is absolutely soft, the phase shift in the second wave is shifted relative to the phase shift in the first one by π. Thus, the problem is reduced to the problem of scattering of two plane waves by two identical elastic cylinders with parallel axes. Assuming that the incident wave propagates along the normal to the cylinder axis, a two-dimensional problem is solved. The solution of the problem in a modified formulation is carried out using the finite element method. Numerical simulation of the solution in the near zone of a scattered acoustic field is carried out. The calculation results show that in a number of cases of combinations of the parameters of the cylinder and the incident wave, the anisotropy and inhomogeneity of the material properties of the outer layer of the cylinder have a significant effect on the scattered field.

Keywords: diffraction, plane sound wave, elastic cylinder, inhomogeneous anisotropic layer, underlying surface, imaginary scatterer method, finite element method.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
S. A. Skobel'tsyn, N. Y. Peshkov, 2021, "Sound waves diffraction by an elastic cylinder with inhomogeneous anisotropic outer layer near the plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 224–239.

[2]The study was carried out at the expense of grant from the Russian Science Foundation № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/.

1. Введение

Активное внедрение композитных материалов в конструкциях различного назначения существенно влияет на их акустические свойства. Современные композитные материалы часто характеризуются не только анизотропией, но и неоднородностью. Значительное влияние на эффекты рассеяния звука оказывают также ограничивающие поверхности вблизи рассеивателей. В данной работе показан подход к оценке влияния анизотропии и неоднородности внешнего слоя упругого кругового цилиндра на рассеяние звука в случае, когда цилиндр располагается вблизи плоской поверхности с идеальными акустическими свойствами.

2. Постановка задачи

Рассматривается бесконечный упругий круговой цилиндр радиуса a с неоднородным анизотропным покрытием, который располагается в идеальной жидкости вблизи плоской поверхности Π с идеальными акустическими свойствами (она является абсолютно жесткой или абсолютно мягкой). Пусть на цилиндр из внешнего полупространства падает плоская гармоническая звуковая волна с круговой частотой ω (см. рис. 1).

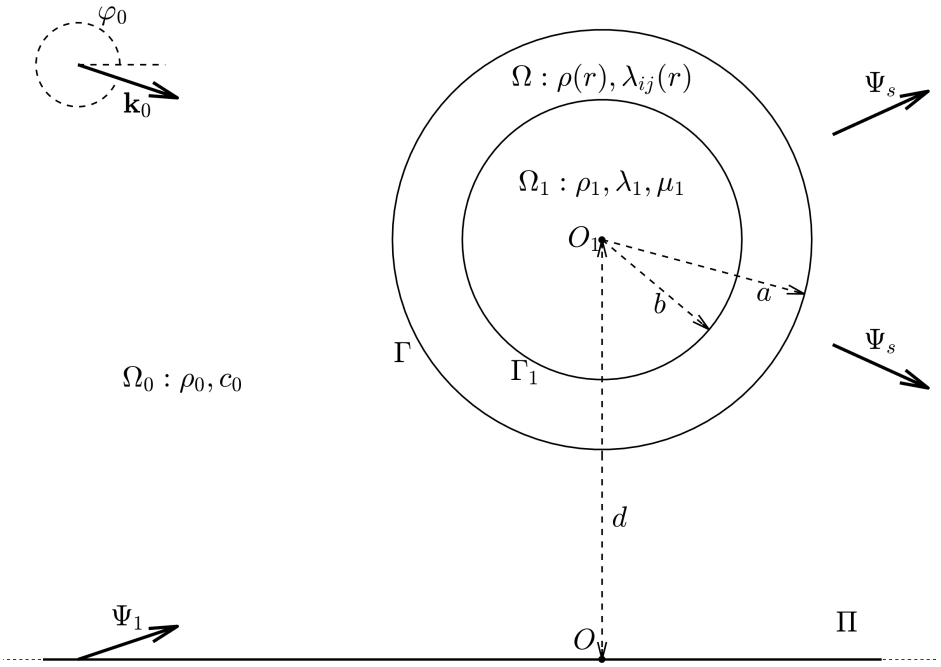


Рис. 1: Геометрическая постановка задачи

На рис. 1, построенном в сечении нормальном к оси цилиндра, Ω_0 – полупространство содержащей идеальной жидкости с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0; волновой вектор $\mathbf{k}_0$ падающей плоской звуковой волны ($|\mathbf{k}_0|{=}k_0{=}\omega/c_0$ – волновое число падающей волны); внутренняя часть препятствия Ω_1 – круговой цилиндр радиуса b, материал которого – однородный изотропный с плотностью ρ_1 и модулями упругости Ламе – λ_1, μ_1; внешняя часть цилиндра – неоднородный анизотропный слой Ω толщины $h = a - b$, материал которого характеризуется плотностью ρ и модулями упругости λ_{ij}. Как показано на рисунке, предполагается, что направление распространения падающей волны перпендикулярно оси цилиндра и его образующей. Расстояние оси цилиндра от плоскости Π обозначено d. Через Γ и Γ_1 обозначены внешние поверхности всего цилиндра и его однородной части соответственно.

Введем две декартовы системы координат. Локальная система координат x_1, y_1, z_1, связанная с цилиндром, такова, что ось O_1z_1 совпадает с осью цилиндра, ось O_1x_1 параллельна плоскости Π, а ось O_1y_1 направлена от плоскости Π. Глобальная система координат (система отсчета) x, y, z с началом O на плоскости Π вводится так, чтобы координаты x и z совпадали с x_1, z_1. Тогда O оказывается проекцией O_1 на подстилающую поверхность, а связь координат y и y_1 выражается соотношением $y = y_1 + d$. При этом поверхность Π задается уравнением $y = 0$ или $y_1 = -d$.

На рис. показано, что направление распространения падающей волны задается углом φ_0 между осью Ox (или O_1x_1) и вектором $\mathbf{k}_0$. Тогда проекции волнового вектора на оси координат имееют вид: $k_{0x} = k_0\cos\varphi_0$, $k_{0y} = k_0\sin\varphi_0$, $k_{0z} = 0$.

Далее будем также использовать цилиндрические система координат r, φ, z и r_1, φ_1, z_1 такие, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и $x_1 = r_1\cos\varphi_1$, $y_1 = r_1\sin\varphi_1$. В локальной цилиндрической системе координат поверхность Γ задается уравнением $r_1 = a$, а Γ_1 – уравнением $r_1 = b$.

Предполагается, что механические свойства материала покрытия Ω зависят только от расстояния от оси цилиндра, то есть являются функциями

$$\rho = \rho(r_1), \qquad \lambda_{ij} = \lambda_{ij}(r_1). \tag{1}$$

Потенциал смещения в падающей волне представим в виде [1]

$$\Psi_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x + k_{0y}y - \omega t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 r\cos(\varphi-\varphi_0) - \omega t)}, \tag{2}$$

где i – мнимая единица; t – время. Без ограничения общности полагается, что амплитуда Ψ_p равна единице.

Заметим, что все величины задачи, зависящие от времени, будут иметь зависимость от t такую же, что и в падающей волне. Поэтому для таких величин множитель вида $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ будем опускать.

В соответствии с (2) смещение в падающей волне имеет вид

$$\mathbf{u}_p = \operatorname{grad}\Psi_p = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x + k_{0y}y)}(k_{0x}\mathbf{i}_x + k_{0y}\mathbf{i}_y) \qquad (\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y \text{ – орты осей } Ox, Oy),$$

а его физические компоненты в декартовой и цилиндрической системах координат

$$u_{px} = \mathrm{i}k_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x + k_{0y}y)}, u_{py} = \mathrm{i}k_{0y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x + k_{0y}y)}, u_{pz} = 0;$$
$$u_{pr} = \mathrm{i}k_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r\cos(\varphi-\varphi_0)}\cos(\varphi-\varphi_0), u_{p\varphi} = -\mathrm{i}k_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r\cos(\varphi-\varphi_0)}\sin(\varphi-\varphi_0).$$

Акустическое давление в волне (2) представляется выражением

$$p_p = \rho_0\omega^2\Psi_p.$$

В результате дифракции падающей волны на упругом цилиндре и отражения от плоскости Π (см. составляющую поля Ψ_1 на рис.) формируется рассеянное акустическое поле, которое будем характеризовать потенциалом смещений Ψ_s. Потенциал Ψ_s должен удовлетворять уравнению Гельмгольца [1]

$$\Delta\Psi_s + k_0^2\Psi_s = 0, \tag{3}$$

где Δ – оператор Лапласа. Кроме того, потенциал смещений Ψ_s должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности [2]

$$\Psi_s = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r\left(\frac{\partial\Psi_s}{\partial r} - \mathrm{i}k_0\Psi_s\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{при } r\to\infty. \tag{4}$$

Движение частиц упругого цилиндра будем описывать общими уравнениями движения сплошной среды [3]

$$\operatorname{Div}\sigma = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u}, \tag{5}$$

где $\operatorname{Div}\sigma$ – первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений σ; $\mathbf{u}$ – вектор смещений частиц упругой среды.

Уравнения (5) имеют одинаковую форму для сред в Ω и в Ω_1, но в них отличаются выражения связи компонентов тензора напряжений и компонентов вектора смещений через закон Гука. Будем обозначать тензор напряжений, вектор смещений и их компоненты в области Ω_1 индексом 1 – σ_1 (σ_{1ij}), $\mathbf{u}_1$ (u_{1i}). В области Ω для соответствующих величин не будем использовать дополнительный индекс помимо индекса координаты – σ (σ_{ij}), $\mathbf{u}$ (u_i).

Закон Гука в анизотропном внешнем слое цилиндра Ω зададим в форме [4]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{r_1r_1} \\ \sigma_{\varphi_1\varphi_1} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\varphi_1 z} \\ \sigma_{r_1 z} \\ \sigma_{r_1\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{22}-\lambda_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{r_1r_1} \\ \varepsilon_{\varphi_1\varphi_1} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\varphi_1 z} \\ \varepsilon_{r_1 z} \\ \varepsilon_{r_1\varphi_1} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где σ_{ij} – физические компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат; ε_{ij} – компоненты тензора малых деформаций.

Такой тип анизотропии относится к так называемой криволинейной анизотропии [5], которая часто называется цилиндрической трансверсальной анизотропией. В этом случае тензор модулей упругости определяется 5 модулями: λ_{11}, λ_{12}, λ_{22}, λ_{23}, λ_{55}, а поверхности вида $r_1 = \text{const}$ являются поверхностями изотропии.

Закон Гука в однородной части цилиндра Ω_1 определяется связью [3]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1r_1r_1} \\ \sigma_{1\varphi_1\varphi_1} \\ \sigma_{1zz} \\ \sigma_{1\varphi_1 z} \\ \sigma_{1r_1 z} \\ \sigma_{1r_1\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1+2\mu_1 & \lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1+2\mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1+2\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{1r_1r_1} \\ \varepsilon_{1\varphi_1\varphi_1} \\ \varepsilon_{1zz} \\ \varepsilon_{1\varphi_1 z} \\ \varepsilon_{1r_1 z} \\ \varepsilon_{1r_1\varphi_1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В соответствии с общей теорией взаимодействия идеальной жидкости и линейного упругого тела при малых деформациях [6] на внешней поверхности цилиндра Γ должны выполняться граничные условия равенства нормальных смещений и напряжений и отсутствия касательных напряжений

$$r_1 = a: \quad u_{r_1} = \frac{\partial\Psi_0}{\partial r_1}; \qquad \sigma_{r_1r_1} = \rho_0\omega^2\Psi_0; \qquad \sigma_{r_1\varphi_1} = 0. \tag{8}$$

Здесь ρ_0 – плотность жидкости; Ψ_0 – полное звуковое давление в ней; u_{r_1}, $\sigma_{r_1r_1}$, $\sigma_{r_1\varphi_1}$ – компоненты вектора смещений $\mathbf{u}$ и тензора напряжений σ в неоднородном покрытии. При этом

$$\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_s, \tag{9}$$

где Ψ_s – потенциал смещения в рассеянной волне.

На внутренней поверхности покрытия Γ_1 должны выполняться граничные условия непрерывности смещения и напряжения

$$r_1 = b: \quad u_{r_1} = u_{1r_1}; \qquad u_{\varphi_1} = u_{1\varphi_1}; \qquad \sigma_{r_1r_1} = \sigma_{1r_1r_1}; \qquad \sigma_{r_1\varphi_1} = \sigma_{1r_1\varphi_1}. \tag{10}$$

На плоскости П в зависимости от типа ее поверхности должно выполняться одно из условий:

$$\partial\Psi_0/\partial y = 0 - \text{ для абсолютно жесткой поверхности;} \tag{11}$$

$$\Psi_0 = 0 - \text{ для абсолютно мягкой поверхности.} \tag{12}$$

Физически условие (11) обозначает условие отсутствия смещения частиц жидкости в направлении оси y – нормальном к поверхности П. Механический смысл условия (12) состоит в требовании обращения акустического давления на поверхности П в ноль. Это условие приближенно моделирует реальную ситуацию, когда с другой стороны поверхности находится сильно разреженная среда.

Заметим, основной целью при решении задачи о дифракции звука неоднородным анизотропным цилиндром является нахождение потенциала смещения в рассеянной волне Ψ_s. Но для его нахождения нужно определить поля смещений и напряжений в упругом цилиндре. Таким образом, требуется найти решения уравнений (3) в Ω_0, (5) в Ω и Ω_1. Решения должны удовлетворять граничным условиям (8), (10), (11) (или (12)) и условиям излучения на бесконечности (4).

3. Решение задачи с использованием метода мнимого рассеивателя и метода конечных элементов

Эффективным методом решения задач дифракции волн различной природы отдельным объектом T, находящимся вблизи идеальной плоскости П, является метод мнимого рассеивателя [7]. Согласно этому подходу из задачи дифракции в полупространстве исключается идеальная плоскость П (граница полупространства), а вместо нее вводится второй рассеивающий объект T', являющийся зеркальным отражением объекта T относительно плоскости П. Кроме того, в задачу включается вторая падающая волна, которая имеет амплитуду равную амплитуде первичной волны, а распространяется «зеркально» первичной относительно плоскости П. Выбором фазы второй падающей волны добиваются выполнения «идеальных» граничных условий в плоскости, в которой в начальной задаче располагалась плоскость П. Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух волн одинаковой природы двумя симметричными объектами в полном пространстве. Этот подход не раз использовался в работах автора (см. [8, 9, 10, 11, 12, 13]).

В рассматриваемом случае для того, чтобы избавиться от граничных условий на плоскости, в соответствии с методом мнимого рассеивателя введем в рассмотрение дополнительное препятствие в виде второго упругого цилиндра, расположенного зеркально по отношению к исходному по другую сторону плоскости. Ось нового цилиндра будет иметь координаты $x = 0$, $y = -d$ (см. рис. 2). Саму плоскость исключаем из рассмотрения, а выполнение граничных условий (11) (или (12)) на ней обеспечим введением второй падающей плоской волны с такой же амплитудой, что и у первой. Направление распространения второй волны зеркально направлению исходной волны относительно плоскости $y = 0$. Будем характеризовать его волновым вектором $\mathbf{k}_1 = k_{0x}\mathbf{i}_x - k_{0y}\mathbf{i}_y$. По аналогии с (2) вторую падающую волну представим потенциалом смещений Ψ'_p

$$\Psi'_p = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x - k_{0y}y - \omega t)} = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 r\cos(\varphi+\varphi_0) - \omega t)}, \tag{13}$$

где $|B| = 1$.

Легко видеть, что в отсутствии препятствий условие (11) будет выполнено, если положить $B = 1$. Действительно, на П (при $y = 0$) получаем $\partial\Psi_p/\partial y = k_{0y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x-\omega t)}$, $\partial\Psi'_p/\partial y = -k_{0y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x-\omega t)}$. Тогда

$$\partial\Psi_0/\partial y = \partial(\Psi_p + \Psi'_p)/\partial y = \partial\Psi_p/\partial y + \partial\Psi'_p/\partial y \equiv 0. \tag{14}$$

Из соображений симметрии можно показать, что внесение в поле волн Ψ_p, Ψ'_p двух одинаковых цилиндров с осесимметричными свойствами не нарушит тождества вида (14) для $\partial\Psi_0/\partial y$ на плоскости $y = 0$. Следовательно, такая конфигурация двух падающих волн и двух рассеивателей обеспечивает выполнение условия (11). Заметим, в этом случае фазовый сдвиг во второй волне Ψ'_p равен фазовому сдвигу в первой волне Ψ_p.

Аналогично можно проверить, что в отсутствии препятствий условие (12) будет выполнено, если положить $B = -1$. Действительно, в этом случае при $y = 0$ получаем $\Psi_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x-\omega t)}$, $\Psi'_p = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x-\omega t)}$. Тогда

$$\Psi_0 = \Psi_p + \Psi'_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x-\omega t)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x-\omega t)} \equiv 0. \tag{15}$$

Также из соображений симметрии можно показать, что внесение в поле волн Ψ_p и такой Ψ'_p двух одинаковых цилиндров с осесимметричными свойствами не нарушит тождества вида (15) для Ψ_0 на плоскости $y = 0$. Следовательно, такая конфигурация двух падающих волн и двух рассеивателей обеспечивает выполнение условия (12). Заметим, коэффициент $B = -1$ можно рассматривать как то, что фазовый сдвиг в волне Ψ'_p смещен относительно фазового сдвига в первой волне Ψ_p на π.

Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух плоских волн двумя одинаковыми упругими цилиндрами с параллельными осями. Измененная конфигурация геометрической схемы задачи представлена на рис. 2.

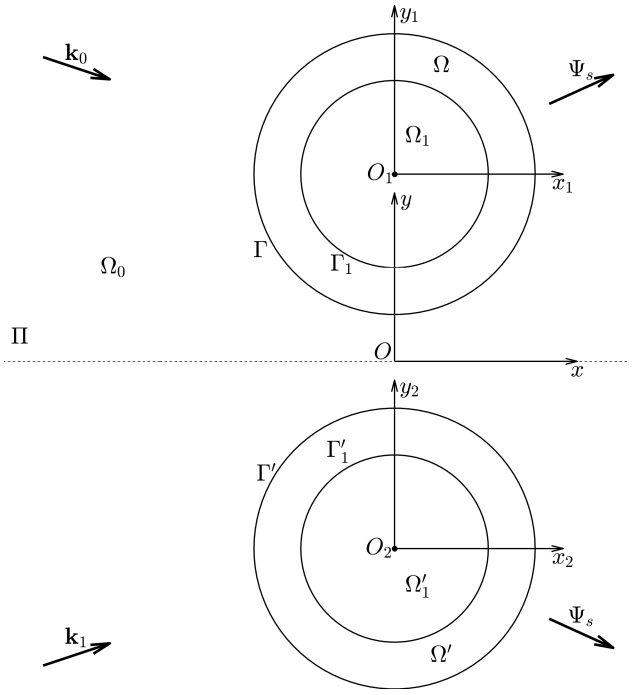


Рис. 2: Модификация постановки задачи

На схеме 2 показано, что для второго цилиндра вводится новая локальная система координат x_2, y_2, z_2, которая связывается с цилиндром аналогично тому, как x_1, y_1, z_1 связана с исходным цилиндром. Так же выполняются соотношения $x_2 = x$, $z_2 = z$, а вот $y_1 = y + d$.

Также вводится локальная цилиндрическая система координат r_2, φ_2, z_2 такая, что $x_2 = r_2\cos\varphi_2$, $y_2 = r_2\sin\varphi_2$.

Для обозначения элементов геометрии и полей смещения и напряжения во втором рассеивателе будем использовать соответствующие символы, использованные для исходного цилиндра. Например, внутренняя однородная часть второго цилиндра обозначается Ω'_1, область

внешнего неоднородного анизотропного слоя – Ω'. Соответственно их поверхности обозначаются Γ'_1, Γ'. Во второй локальной цилиндрической системе координат поверхность Γ' задается уравнением $r_2 = a$, а Γ'_1 – уравнением $r_2 = b$.

Поля смещений и тензоры напряжений в Ω'_1, Ω' обозначаются $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'$, σ'_1, σ'. Компоненты векторов смещений и напряжений в Ω'_1, Ω' в системе r_2, φ_2, z_2 – u'_{1i}, u'_i, σ'_{1ij}, σ'_{ij}. Поля $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'$, σ'_1, σ', как и для первого цилиндра удовлетворяют уравнениям вида (5) и связям вида (6), (7).

Вместо падающей волны (2) далее будем использовать первичное поле с суммарным потенциалом смещения

$$\Psi_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x+k_{0y}y)} + \Psi'_p = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x+k_{0y}y)} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{0x}x-k_{0y}y)}. \tag{16}$$

Подбор варианта второй составляющей первичного поля обеспечивает автоматическое выполнение граничных условий (11) (или (12)), однако в связи со вторым рассеивателем требуется введение дополнительных условий вида (8), (10).

На внешней поверхности второго цилиндра Γ' должны выполняться граничные условия равенства нормальных смещений и напряжений и отсутствия касательных напряжений

$$r_2 = a: \quad u'_{r_2} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r_2}; \qquad \sigma'_{r_2r_2} = \rho_0\omega^2\Psi_0; \qquad \sigma'_{r_2\varphi_2} = 0. \tag{17}$$

На внутренней поверхности покрытия второго цилиндра Γ'_1 должны выполняться граничные условия непрерывности смещения и напряжения

$$r_2 = b: \quad u'_{r_2} = u'_{1r_2}; \qquad u'_{\varphi_2} = u'_{1\varphi_2}; \qquad \sigma'_{r_2r_2} = \sigma'_{1r_2r_2}; \qquad \sigma'_{r_2\varphi_2} = \sigma'_{1r_2\varphi_2}. \tag{18}$$

Поле рассеянной волны Ψ_s в новой постановке остается таким же, но область его определения расширяется до полного пространства (за исключением областей занятых цилиндрами).

Далее решение задачи дифракции выполняется с использованием метода конечных элементов (МКЭ) [14]. Используем подход, который предложен в работах [15, 16]. В соответствии с ним в задаче о рассеянии звуковых волн в неограниченном пространстве область упругих препятствий и некоторая часть прилегающей жидкости заключается в круговую область D. Вне этой области потенциал смещения Ψ_s в рассеянной волне ищется в виде разложения по цилиндрическим гармоникам, удовлетворяющим уравнению Гельмгольца (3) и образующим полную систему функций. Внутри области D и потенциал смещения в жидкости – Ψ и поля смещений $\mathbf{u}$ в упругих препятствий ищутся методом конечных элементов. На первом этапе решения из одного граничного условия коэффициенты разложения Ψ_s выражаются через узловые значения Ψ на границе D и подставляются в другое граничное условие. После этого получается внутренняя краевая задача для неизвестных полей в области D. Она решается стандартными средствами МКЭ для ограниченных областей. После решения краевой задачи в области D находятся значения коэффициентов разложения Ψ_s по цилиндрическим гармоникам. Потенциал Ψ_s используется для анализа внешней части рассеянного акустического поля.

В рассматриваемой задаче в качестве круга D выберем круг с центром в точке O радиусом $R = d+1.5a$, который обеспечивает расстояние от внешней границы $D - \Gamma_0$ до точек цилиндра не меньше $0.5a$. Тогда уравнение границы Γ_0 примет вид $r = R$. Соответственно множество точек круга D можно представить так $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$.

Область жидкости, попавшую в D, обозначим Ω'_0. Суммарный потенциал смещения (вместе с составляющими падающей волны) в Ω'_0 обозначим Ψ. Как и Ψ_s потенциал Ψ должен удовлетворять уравнению Гельмгольца вида (3)

$$\Delta\Psi + k_0^2\Psi = 0. \tag{19}$$

В связи с этим немного изменяются условия (8), (17) на внешних поверхностях цилиндров Γ и Γ': в них вместо Ψ_0 надо использовать Ψ.

На внешней границе D должны выполнятся условия непрерывности давления и нормального смещения

$$r = R: \quad \Psi = \Psi_0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}. \tag{20}$$

Решим уравнение (3) в глобальной цилиндрической системе координат r, φ, z методом разделения переменных. Получим ряд [17]

$$\Psi_s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m(k_0 r) \exp(\mathrm{i}m\varphi) \tag{21}$$

где A_m – пока неизвестные коэффициенты; $H_m(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля первого рода порядка m, которая обеспечивает выполнение условий излучения на бесконечности (4) для Ψ_s.

Разложим по функциям Бесселя в форме (21) и сумму плоских волн Ψ_p

$$\Psi_p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m J_m(k_0 r) \exp(\mathrm{i}m\varphi), \tag{22}$$

где $J_m(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка m; γ_m – известные коэффициенты, которые определяются по (2), (13).

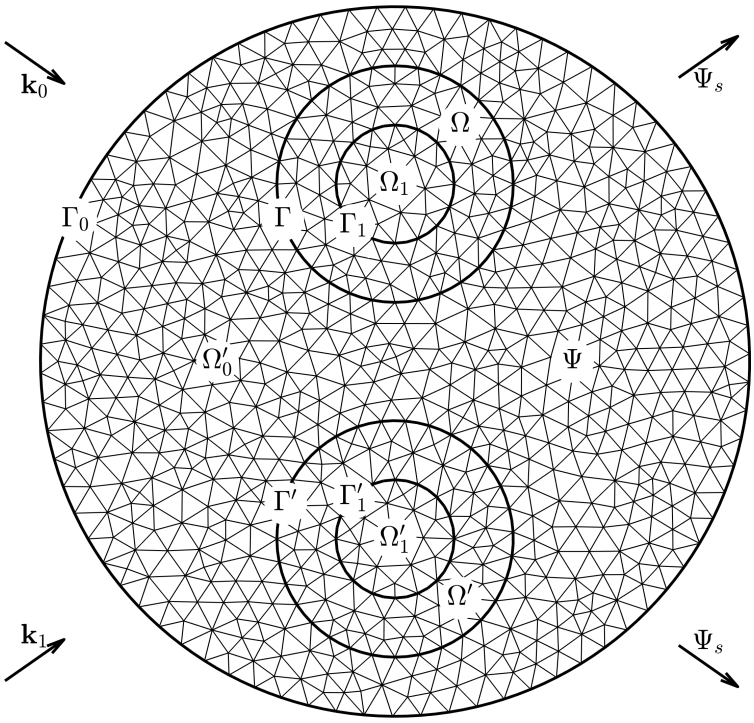


Рис. 3: Схема разбиения области решения задачи конечными элементами

В соответствии с методом МКЭ область D разбивается на конечные элементы (пример разбиения см. на рис. 3) и неизвестные функции в ней представляются в виде линейных комбинаций

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^{K} \Psi_k f_k(x, y), \tag{23}$$

$$\mathbf{u}(x,y) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{U}_k f_k(x,y). \tag{24}$$

где K – число узлов конечно-элементной сетки; k – номер узла; $f_k(x,y)$ – координатная функция узла k; Ψ_k, $\mathbf{U}_k$ значения искомых функций в узле k. Здесь $\mathbf{u}$ рассматривается как общее обозначение для смещений $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{u}'_1$, введенных выше.

Подставим (9), (21), (22) и выражение Ψ из (23) в первое из граничных условий (20) и воспользуемся ортогональностью функций $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ при различных m на отрезке $[0,\ 2\pi]$. Получим выражение коэффициентов A_m через узловые значения потенциала Ψ на окружности Γ_0

$$A_m = \frac{1}{H_m(k_0R)} \left[-\gamma_m J_m(k_0R) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \Psi_k \left\langle f_k, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \right\rangle \right], \tag{25}$$

где $\left\langle f_k, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \right\rangle$ — скалярное произведение координатной функции $f_k(x,y)$ и функции $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ на поверхности Γ_0.

Используя (25) во втором граничном условии (20), получим уравнение, которое содержит только узловые значения Ψ_k.

После решения МКЭ внутренней краевой задачи для уравнений (5) в областях Ω_1, Ω, Ω'_1, Ω' и (19) в Ω'_0 с граничными условиями (8), (10), (17), (18) и второго из (20) коэффициенты A_m определим по (25) через узловые значения Ψ_k на поверхности Γ_0.

Таким образом, задача дифракции оказывается полностью решенной и для анализа полей колебаний внутри D используются ряды (23), (24), а для анализа рассеянного акустического поля вне D – ряд (21).

4. Численные исследования

Полученное решение использовано для анализа влияния неоднородности анизотропного покрытия упругого покрытия цилиндра на рассеяние звука для частных значений параметров падающей волны, геометрических и материальных параметров сред.

Переменные параметры неоднородного слоя (1) представлялись в виде

$$\rho = \rho^* \cdot f(r_1); \qquad \lambda_{ij} = \lambda^*_{ij} \cdot g(r_1) \tag{26}$$

где ρ^*, λ^*_{ij} -– среднее значение соответствующей величины по толщине слоя. Для слоя Ω' в зависимостях (26) координата r_1 меняется на r_2.

Функции $f(r_1)$, $g(r_1)$ принимала одну из трех линейных зависимостей

$$f_0(r_1) = 1; \quad f_1(r_1) = 1.5 - (r_1 - b)/h; \quad f_2(r_1) = 0.5 + (r_1 - b)/h, \tag{27}$$

первая из которых представляет вариант неизменного значения параметра по толщине слоя; вторая представляет зависимость, в которой значение параметра убывает с ростом r_1 на отрезке $[a,\ b]$ от 1.5 до 0.5; третья – зависимость, в которой значение параметра возрастает с ростом r_1 на отрезке $[a,\ b]$ от 1.5 до 0.5.

При расчетах использовались следующие геометрические соотношения и параметры падающей волны: $a/b = 1.5$; $d/a = 2$; $k_0a = 5$; $\varphi_0 = -\pi/4$. Плотность и скорость звука содержащей среды – $\rho_0 = 1000$ кг/м^3; $c_0 = 1485$ м/с. Плотность и модули упругости Ламе внутренней части цилиндра – $\rho_1 = 2700$ кг/м^3; $\lambda_1 = 5.3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{10}$ Н/м^2. Для внешнего слоя цилиндра рассматривались два типа анизотропного материала с плотностью, совпадающей с плотностью изотропной части цилиндра ($\rho = \rho_1$), а модули упругости задавались значениями:

1-й тип – $\lambda_{11} = 5.74 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\lambda_{12} = 3.28 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\lambda_{22} = 16.40 \cdot 10^{10}$ Н/м^2;
$\lambda_{55} = 2.54 \cdot 10^{10}$ Н/м^2;
2-й тип – $\lambda_{11} = 16.40 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\lambda_{12} = 8.19 \cdot 10^{9}$ Н/м^2; $\lambda_{22} = 5.74 \cdot 10^{10}$ Н/м^2;
$\lambda_{55} = 2.95 \cdot 10^{10}$ Н/м^2.

Для обоих типов анизотропного материала скорость распространения квазипоперечных волн приближенно равна скорости поперечных волн в однородной (внутренней) части цилиндра Ω_1 и почти не зависит от направления распространения. Диаграммы распределения скоростей квазипродольных волн по углу между направлением распространения и осью упругой симметрии имеют форму эллипсов с отношением полуосей около 2. При этом большая ось эллипса для материала типа 1 направлена по оси упругой симметрии, а для материала типа 2 – ортогональна оси упругой симметрии.

В качестве исследуемой величины рассматривалась амплитуда нормированного давления $p(\varphi) = \Psi_0$ в точках окружности $r_1 = 1.1a$ (вблизи поверхности первого цилиндра)

На рис. 4, 5 зависимости $|p(\varphi)|$ представлены в виде полярных диаграмм, в которых ось $\varphi = 0$ соответствует направлению оси O_1x_1. Для интерпретации геометрических соотношений в цилиндре и контуре наблюдения на рисунках пунктирной линией изображены три окружности. Внешняя окружность единичного радиуса соответствует амплитуде нормированного давления в падающей волне (2). Соотношение между внешней окружностью и второй окружностью соответствует соотношению между контуром наблюдения давления и радиусом цилиндра a. Наконец соотношение между второй и внутренней окружностями соответствует соотношению между внешним радиусом цилиндра a и радиусом однородной его части b.

На каждом из рисунков изображены две зависимости $|p(\varphi)|$, одна сплошной линией, другая (для сравнения) – штриховой. Направление распространения первичной волны (2) показано тремя стрелками с подписью "Ψ_p".

На рис. 4 сплошной линией диаграмма распределения давления в случае наличия жесткой поверхности П для однородного изотропного цилиндра, а пунктирной – аналогичная диаграмма для того же цилиндра в свободном пространстве.

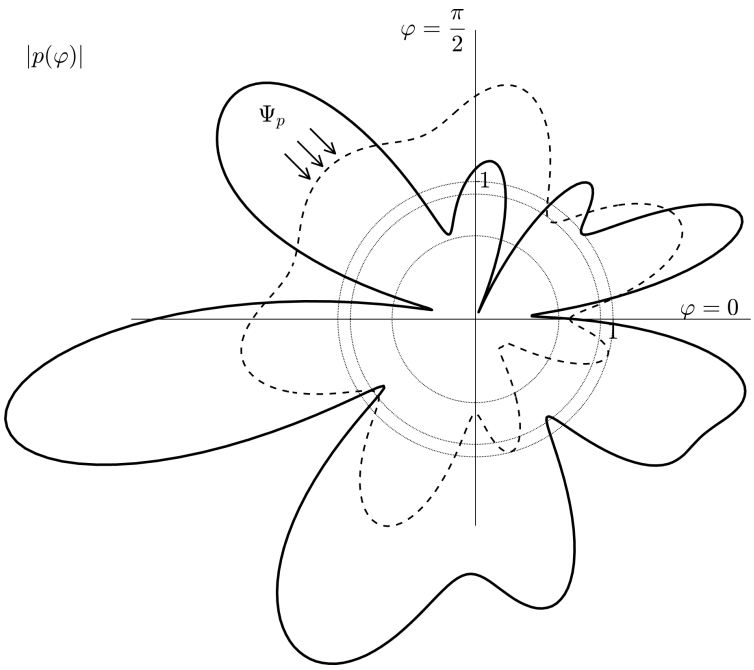
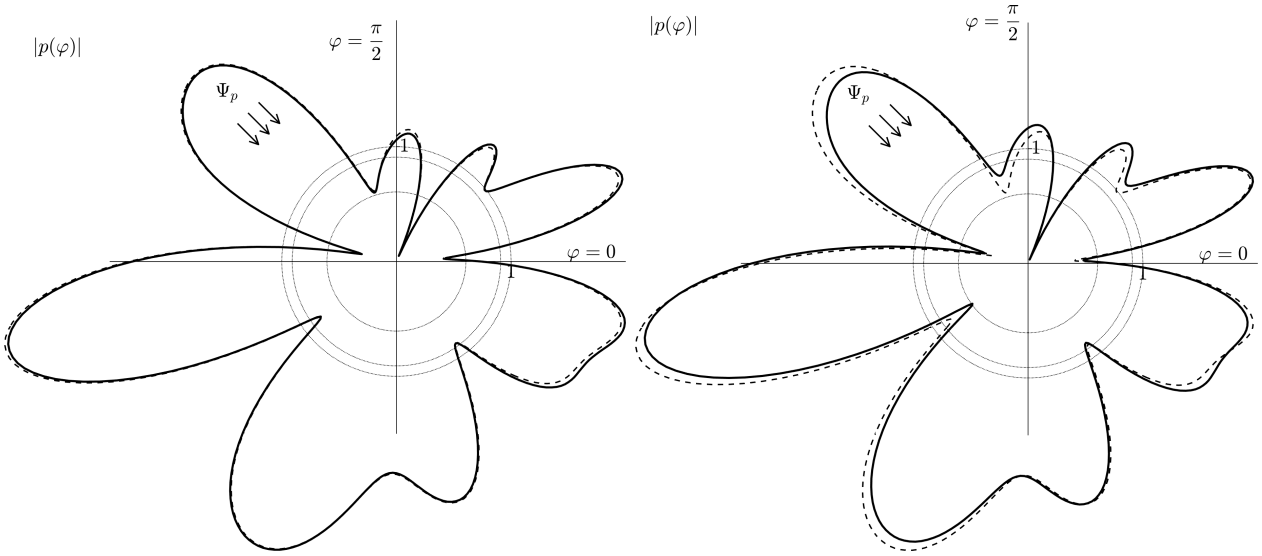


Рис. 4: Диаграмма распределения давления в случае наличия жесткой поверхности

Видно, что наличие поверхности радикально изменяет картину распределения амплитуды

давления.

На рис. 5 показаны диаграммы распределения давления в случае когда внешний слой цилиндра является анизотропным (но однородным). Пунктирная линия соответствует случаю однородного изотропного цилиндра.

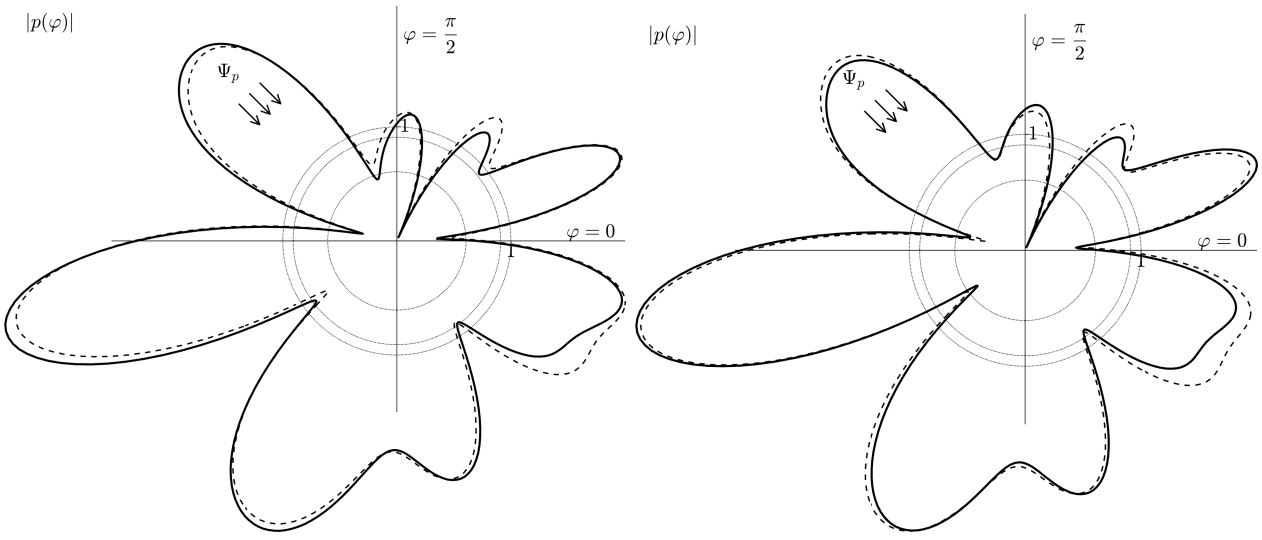


тип 1 тип 2

Рис. 5: Влияние анизотропии

Видно, что анизотропия слоя типа 2 влияет на рассеянное давление заметнее чем анизотропия типа 1.

На рис. 6 показано влияние переменной плотности материала внешнего слоя цилиндра. Сплошная линия соответствует зависимости $\rho(r_1)$ по закону $f_2(r_1)$, а пунктирная линия – по закону $f_1(r_1)$.



тип 1 тип 2

Рис. 6: Влияние переменной плотности

Результаты показывают, что изменяя закон зависимости $\rho^* \cdot f(r_1)$ можно добиться изменения давления в теневой области на 5-7%. Анализ влияния изменения отдельно вида зависи-

мостей $g(r_1)$ для модулей упругости и одновременно изменения законов $f(r_1)$ и $g(r_1)$ показал, что при выбранных параметрах падающей волны эффект изменения давления в ближней зоне не превышает 10-15%.

На последнем рисунке (рис. 7) показано влияние на рассеянное поле типа поверхности П для случая цилиндра с однородным анизотропным слоем типа 1.

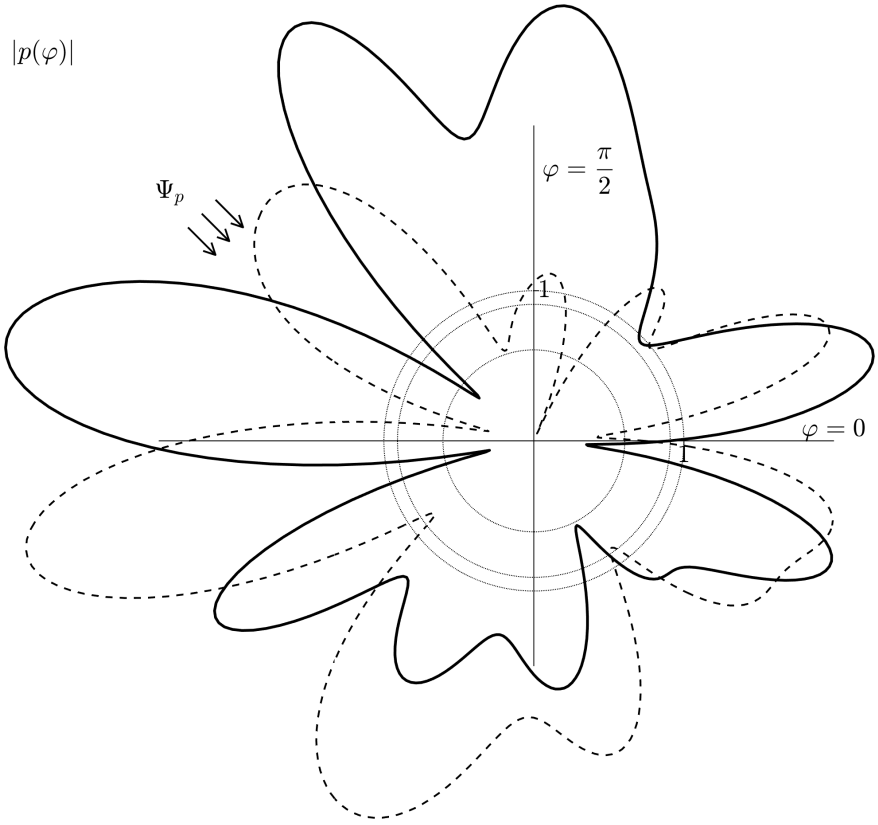


Рис. 7: Сравнение эффекта смены типа поверхности П

Сплошная линия соответствует варианту, когда П является идеально мягкой, а пунктирная линия – идеально жесткой. Видно, что изменение типа подстилающей поверхности имеет тот же порядок влияния на рассеянное поле, что и само введение подстилающей поверхности (см. рис. 4).

5. Заключение

Полученное решение позволяет оценить влияние на рассеяние звуковых волн типа подстилающей поверхности П, анизотропии и неоднородности материала внешнего слоя упругого цилиндра.

Расчеты показали, что при рассмотренных параметров падающей волны, геометрических и материальных параметров упругого цилиндра наиболее существенное влияние на рассеяние звука оказывает тип подстилающей поверхности, смена которого приводит к изменению давления на порядок, а выбором типа анизотропии и вида неоднородности можно изменить давление в ближнем поле на 5-10%.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скучик Е. Основы акустики. Т. 1. М.: Мир, 1976. 520 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах М.: Наука, 1965. 388 с.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
6. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
7. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
8. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64–75.
9. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Определение геометрических параметров конечного цилиндра, расположенного у границы полупространства, по рассеянному звуку // Сб. трудов Междунар. научно-технической конф. “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики” Воронеж: "Научно-исследовательские публикации". 2018. С. 1263–1269.
10. Скобельцын С.А. Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 220–237.
11. Скобельцын С.А., Федотов И.С., Титова А.С. Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4. С. 177–193.
12. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Рассеяние звука неоднородным упругим эллиптическим цилиндром в акустическом полупространстве // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 7. С. 183–200.
13. Skobelt'syn S.A., Peshkov N.Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1203. 012023. P. 1–10
14. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company, Inc., 2013. 226 p.
15. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Изв. ТулГУ. Естественные науки. Вып. 2. Тула: ТулГУ, 2008. С. 132–145.
16. Скобельцын С.А. О порядке решения задачи дифракции звука упругим телом с полостью с использованием МКЭ // Вестн. ТулГУ. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2012. Вып. 1. С. 51–58.
17. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

REFERENCES

1. E. Skudrzyk, 1976, *Basics of acoustics, [Osnovy akustiki]*, vol. 1. Moscow, Mir.

2. N. S. Koshliakov, E. B. Gliner, M. M. Smirnov, 1970. *Partial differential equations of mathematical physics, [Uravneniia v chastny'kh proizvodny'kh matematicheskoi' fiziki]*, Moscow, Vysshaia shkola.

3. V. Novatckii, 1975, *Elasticity theory [Teoriia uprugosti]*, Moscow, Mir.

4. F. I. Fedorov, 1965, *The theory of elastic waves in crystals, [Teoriya uprugikh voln v kristallakh]*, Moscow, Vysshaia shkola.

5. S. G. Lekhnitckii, 1977, *[Teorija uprugosti anizotropnogo tela]*, Moscow, Nauka.

6. M. A. Isakovich, 1973, *General acoustics [Obshchaia akustika]*, Moscow, Nauka.

7. E. A. Ivanov, 1968, *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies, [Difrakciya elektromagnitnyh voln na dvuh telah]*, Minsk, Science and Technology.

8. S. A. Skobeltsyn and L. A. Tolokonnikov, 2015, "Difraktciia ploskoi zvukovoi volny na uprugom sferoide s neodnorodnym pokrytiem v prisutstvii podstilaiushchei poverkhnosti", *Izv. TulGU. Estestvennye nauki*, issue 2. pp. 64–75.

9. S. A. Skobeltsyn and N. Y. Peshkov, 2018, "Opredelenie geometricheskikh parametrov konechnogo tcilindra, raspolozhennogo u granitcy poluprostranstva, po rasseiannomu zvuku", *Sb. trudov Mezhdunar. nauchno-tekhnicheskoi konf. "Aktualnye problemy pricladnoi matematiki, informatiki i mehaniki"*, Voronezh, Nauchno-issledovatelskie publikatcii.

10. S. A. Skobeltsyn, 2018, "Rasseianie zvukovykh voln uprugim ellipsoidom s neodnorodnym pokrytiem v poluprostranstve s idealnoi poverkhnostiu", *Chebyshevskii sbornik*, vol 19, no 1, pp. 220–237.

11. S. A. Skobeltsyn, I. S. Fedotov and A. S. Titova, 2018, "Difraktciia zvuka na uprugom share s neodnorodnym pokrytiem i polostiu v poluprostranstve", *Chebyshevskii sbornik*, vol 19, no 4, pp. 177–193.

12. S. A. Skobeltsyn and N. Y. Peshkov, 2018, "Rasseianie zvuka neodnorodnym uprugim ellipticheskim tcilindrom v akusticheskom poluprostranstve", *Izv. TulGU. Tekhnicheskie nauki*, issue 7, pp. 183–200.

13. S. A. Skobelt'syn and N. Y. Peshkov, 2019, "Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border", *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol 1203. 012023, pp. 1–10

14. F. Ihlenburg, 2013, *Finite element analysis of acoustic scattering*, New York: Springer Publishing Company, Inc.

15. В.И.Иванов and S. A. Skobeltsyn, 2008, "Modelirovanie reshenii zadach akustiki s ispolzovaniem MKE", *Izv. TulGU. Estestvennye nauki*, issue 2. pp. 132–145.

16. S. A. Skobeltsyn, 2012, "O poriadke resheniia zadachi difraktcii zvuka uprugim telom s polostiu s ispolzovaniem MKE", *Vestn. TulGU. Seriia: Differentcialnye uravneniia i pricladnye zadachi*, issue 1, pp. 51–58.

17. E. L. Shenderov, 1972, *Wave problems of hydroacoustics, [Volnovye zadachi gidroakustiki]*, Leningrad, Shipbuilding.

Получено 16.07.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 512.622 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-240-251

Об одном классе множителей многочленов Чебышева

С. Ю. Соловьев

Соловьев Сергей Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: soloviev@glossary.ru

Аннотация

В статье посредством специально сконструированных узлов определяется класс многочленов $D_n(x)$, каждый из которых является множителем многочлена Чебышева первого рода $T_{2n}(x)$. Сформулирована задача исследования многочленов $D_n(x)$ на отрезке $[0,1]$, в рамках которой получены точные выражения и оценки значений на границах и в специальных узлах.

Ключевые слова: многочлены Чебышева, функция Лобачевского, оценки.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
С. Ю. Соловьев. Об одном классе множителей многочленов Чебышева // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 240–251.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 512.622 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-240-251

On a class of factors of the Chebyshev polynomials

S. Y. Soloviev

Soloviev Sergey Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: soloviev@glossary.ru

Abstract

The article defines a class of $D_n(x)$ polynomials by specially designed nodes. Each of $D_n(x)$ is the factor of the Chebyshev polynomial of the first kind $T_{2n}(x)$. The research task for polynomials $D_n(x)$ on the interval [0,1] is reduced to find values $D_n(x)$. The article contains exact expressions and estimates of values $D_n(x)$ in special nodes.

Keywords: Chebyshev polynomials, Lobachevsky function, estimations.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
S. Y. Soloviev, 2021, “On a class of factors of the Chebyshev polynomials”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 240–251.

1. Введение

Пусть n – некоторое натуральное число. Введем в рассмотрение положительные числа (узлы)

$$x_k = \sin \frac{(2k+1)\pi}{4n}, \quad k=0\ldots,n-1\,,$$

и определим многочлен D_n следующим образом:

$$D_n(x) = (x+x_0)(x+x_1)\cdots(x+x_{n-1})\,.$$

Многочлены D_n представляют интерес как множители [1] многочленов Чебышева [2]; равенство

$$T_{2n}(x) = (-1)^n\, 2^{2n-1}\, D_n(x)\, D_n(-x)\,. \tag{1}$$

где $T_{2n}(x)$ – многочлен Чебышева первого рода степени $2n$, сомнений не вызывает.

На отрезке $[0,1]$ многочлен $D_n(x)$ монотонно возрастает (рис.1). Вместе с тем, поведение многочлена на "самом интересном" участке $[-1,0]$, содержащем все нули и локальные экстремумы, лимитируется (рис.2) его поведением на упомянутом отрезке $[0,1]$:

$$|D_n(x)| \;=\; \frac{2}{2^{2n}}\,\frac{|T_{2n}(x)|}{D_n(-x)} \;\leqslant\; \frac{2}{2^{2n}}\,\frac{1}{D_n(-x)} \qquad \forall x\in[-1,0]\,. \tag{2}$$

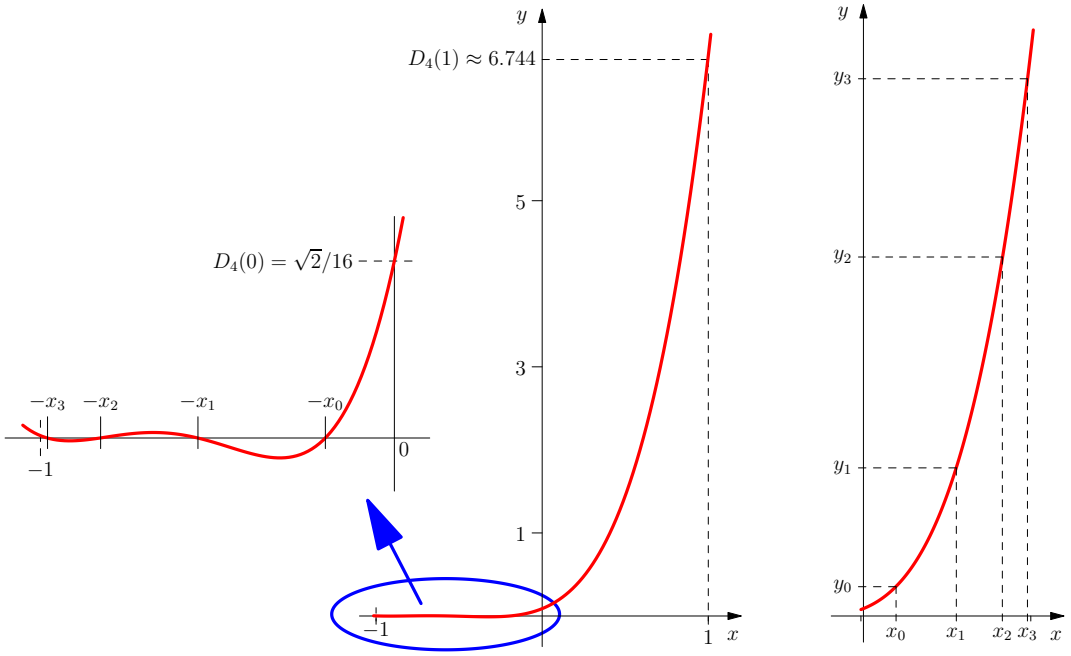


Рис. 1. График функции $D_4(x)$.

Последнее обстоятельство заставляет внимательнее присмотреться к особенностям монотонного возрастания D_n на отрезке $[0,1]$. Как вариант исследования особенностей $D_n(x)$ в настоящей работе ставится задача выразить значения $D_n(x)$ в узлах x_k – суть числа $y_k = D_n(x_k)$. Кроме того, рассматривается вопрос о значениях $D_n(x)$ в граничных точках отрезка – числа $D_n(0)$ и $D_n(1)$.

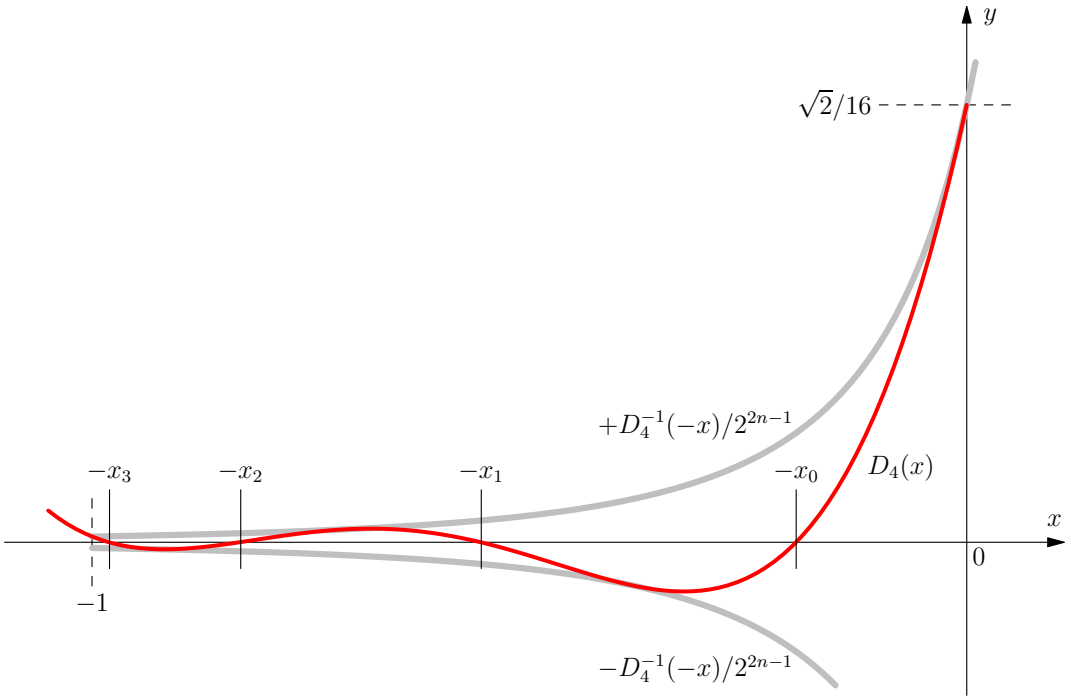


Рис. 2. Многочлен $D_4(x)$ на отрезке $[-1, 0]$.

2. Примеры и соглашения

Многочлены $D_n(x)$ выглядят буквально антиподами многочленов Чебышева. Узлы x_k (равно корни $-x_k$), значения y_k и даже коэффициенты $D_n(x)$ выражаются посредством иррациональных выражений. Приведем первые четыре многочлена.

$$n=1,\quad x_0=\sqrt{2}/2\,,\qquad D_1(x)=x+\sqrt{2}/2\,;$$

$$n=2,\quad x_{0,1}=\sqrt{2\pm\sqrt{2}}\Big/2\,,\qquad D_2(x)=x^2+d_{21}\,x+\sqrt{2}/4\,,\qquad d_{21}\approx 1.3066\,;$$

$$n=3,\quad x_{0,2}=\frac{\sqrt{3}\pm1}{2\sqrt{2}}\,,\quad x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\qquad D_3(x)=x^3+d_{32}\,x^2+d_{31}\,x+\sqrt{2}/8\,,$$
$$d_{32}\approx 1.9319,\ d_{31}\approx 1.1160;$$

$$n=4,\quad x_k=\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}\Big/2\,,\qquad D_4(x)=x^4+d_{43}\,x^3+d_{42}\,x^2+d_{41}\,x+\sqrt{2}/16\,,$$
$$d_{43}\approx 2.5629,\ d_{42}\approx 2.2843,\ d_{41}\approx 0.8086;$$

соответственно

для $n=1$, $y_0\approx 1.4142$,

для $n=2$, $y_0=1.0000$, $y_1\approx 2.4142$,

для $n=3$, $y_0\approx 0.6124$, $y_1\approx 2.2854$, $y_2\approx 3.9584$,

для $n=4$, $y_0\approx 0.3536$, $y_1\approx 1.7774$, $y_2\approx 4.2911$, $y_3\approx 6.4221$.

В большинстве случаев точные выражения для значений $D_n(x)$ выглядят весьма громоздко, поэтому переход от точных значений к оценкам диапазонов их варьирования выглядит вполне уместным.

Далее для задания оценок используются двойные неравенства $V_1 < V < V_2$, в которых V_1 и V_2 именуются соответственно нижней и верхней оценками величины V. Кроме того, во всех последующих рассуждениях полагаем $n \geqslant 4$.

В оценках для значений $D_n(x)$ существенно используется константа $E \stackrel{def}{=} 0.5\,\exp(4G/\pi)$, где G – постоянная Каталана, $G = 0.915965\ldots$.

$$E = 1.604956\ldots .$$

3. Основное утверждение

Элементарные преобразования выражения $D_n(x_k)$ с использованием формул приведения и формулы для суммы синусов позволят получить общее выражение для значений y_k.

$$y_k = 2^n \prod_{i=1}^{k} \cos\frac{\pi i}{4n} \prod_{j=k+1}^{2n-1} \sin\frac{\pi j}{4n}\,, \qquad k = 0,\ldots,n{-}1\,, \tag{3}$$

откуда

$$y_k = y_{k-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{4n}\,, \qquad k = 1,\ldots,n{-}1\,. \tag{4}$$

Утверждение 1. *Для любого $n \geqslant 4$ имеют место следующие соотношения:*

$$D_n(0) = \sqrt{2}/2^n, \tag{5}$$

$$y_0 = \sqrt{2n}/2^{n-1}, \tag{6}$$

$$E^n\, e^{-0.158/n} \;<\; y_{n-1} \;<\; E^n\, e^{0.072/n}. \tag{7}$$

Доказательство. Значение $D_n(0)$ выводится из равенств (1) и $T_{2n}(0) = (-1)^n$. Для случая $k = 0$ формула (3) превращается в

$$y_0 = 2^n \prod_{j=1}^{2n-1} \sin\frac{\pi j}{4n}\,.$$

Выражение для y_0 следует из формулы Эйлера, которая [3] (для $4\,n$ штук слагаемых и $x > 0$) может быть представлена в виде

$$\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{4n}} = 2^{4n-1} \prod_{k=1}^{4n-1} \sin\frac{x + k\pi}{4n}$$

и при $x \to 0$

$$4n = 2^{4n-1} \prod_{k=1}^{4n-1} \sin\frac{k\pi}{4n} = 2^{2n-1} \left(2^n \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{4n}\right)^2 \sin\frac{2n\pi}{4n} = 2^{2n-1} y_0^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y_0 = \frac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}.$$

Доказательство оценки (7) приводится в секции 5. □

4. Вспомогательные оценки

Пусть $n \geqslant 4$ – целое число. Обозначим:

$$R_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tg}^2\frac{(2i{-}1)\pi}{8n}\,, \qquad\qquad S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} \ln\cos\frac{\pi i}{4n}.$$

Для вывода оценки (7) необходимо иметь оценку суммы S_n (секция 4.4),
для вывода которой необходимо получить оценку суммы R_n (секция 4.3),
для вывода которой требуется получить оценку функции $\operatorname{ctg} x$ (секция 4.2).

4.1. Инструментальная подготовка

Приведем известные, но рассредоточенные по разным работам утверждения, составляющие "инструментальную" основу последующих рассуждений.

Функция Лобачевского $L(x)$ в современной специальной литературе [4, 5, 6] опредяется различными, хотя и взаимно сводимыми способами. Для наших целей интерес представляет определение функции Лобачевского на множестве $[0, \pi/4]$ вида

$$L(x) = -\int\limits_0^x \ln(\cos t)\, dt\,.$$

Известно [7], что $L(\pi/4) \;=\; (\pi\,\ln 2)/4 - G/2 \;\equiv\; G/2 - (\pi \ln E)/4$.

Тригамма-функция $\psi'(x)$ [8, §6.4] для $x > 0$ задается рядом

$$\psi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \qquad [9, \S II.4]$$

Установлено [10, теорема 4], что для $x > 0$ имеет место оценка

$$\widehat{B}(x) \;<\; \psi'(x) \;<\; B(x)\,, \quad \text{где} \quad B(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3}\,, \quad \widehat{B}(x) = B(x) - \frac{1}{30x^6}\,.$$

Следствие 1.

$$\frac{197}{198}\,\frac{1}{n} \;<\; \psi'(n+\tfrac{1}{2}) \;<\; \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \geqslant 4\,. \tag{8}$$

В самом деле

$$B(n+\tfrac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{n}\, n\, B(n+\tfrac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{3\,(2n+1)^2} - \frac{2}{3\,(2n+1)^3}\right) \;<\; \frac{1}{n}\,,$$

а поскольку функция $\beta(x) = x\widehat{B}(x+\frac{1}{2})$ монотонно возрастает при $x \geqslant 4$, то

$$\widehat{B}(n+\tfrac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{n}\, n\, \widehat{B}(n+\tfrac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{n}\,\beta(n) \;>\; \frac{1}{n}\,\beta(4) \;>\; \frac{197}{198}\,\frac{1}{n}\,. \qquad \square$$

Квадратурные формулы [11, 12] разрабатывались для вычисления интегралов. Вместе с тем, в квадратурных формулах фигурируют величины, для которых известны лишь диапазоны варьирования, что позволяет использовать эти формулы для построения оценок. Конкретно, для функций из $C^{(2)}[a,b]$ квадратурные формулы левых, средних и правых прямоугольников выглядят так:

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b f(x)\,dx \;&=\; (b-a)\,f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\,f'(\nu) \;=\; (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}\,f''(\xi) \;= \\ &=\; (b-a)\,f(b) - \frac{(b-a)^2}{2}\,f'(\zeta) \qquad \textit{для нек. } \nu,\, \xi,\, \zeta \textit{ из } (a,b). \end{aligned} \tag{9}$$

Если дополнительно на отрезке $[a,b]$ задана сетка равноотстоящих узлов

$$a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b, \qquad u_i = (b-a)\,i/n\,,$$

то для нахождения интеграла можно воспользоваться обобщенной формулой прямоугольников [11, 12]

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{u_{i-1}+u_i}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^2}\,f''(\eta) \qquad \textit{для нек. } \eta \in (a,b).$$

Следствие 2. *Если область интегрирования есть отрезок* $[0,\pi/4]$, *а* $f(x) = -ln\cos x$, *то обобщенная формула прямоугольников принимает вид*

$$-\int_0^{\pi/4} \ln\cos x\,dx \;=\; -\frac{\pi}{4n}\sum_{i=1}^{n} \ln\cos\frac{(2\,i{-}1)\pi}{8n} + \frac{\pi^3}{4^3}\,\frac{1}{24n^2}\,(1+\mathrm{tg}^2\,\eta) \qquad \textit{для нек. } \eta\in(0,\pi/4).$$

То есть

$$\frac{4n}{\pi}\,L(\pi/4) \;=\; -\sum_{i=1}^{n} \ln\cos\frac{(2\,i{-}1)\pi}{8n} + \frac{\pi^2}{384\,n}\,(1+\mathrm{tg}^2\,\eta)\,.$$

Положим $F = \sqrt{E/2} = \exp(-4\,L(\pi/4)/\pi) \equiv 0.5\,\exp(2G/\pi) = 0.89581\ldots,$ и тогда

$$\prod_{i=1}^{n} \cos\frac{(2\,i{-}1)\pi}{8n} \;=\; F^n\,\exp\left(\frac{\pi^2\,\mu}{384}\,\frac{1}{n}\right) \qquad \text{для нек. } \mu\in(1,2). \tag{10}$$

4.2. Оценка котангенса

Докажем оценку

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{5}\,x \;\leqslant\; \mathrm{ctg}\;x \;\leqslant\; \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\,x \qquad \forall x\in(0,\pi/4]\,. \tag{11}$$

Вывод оценки (11) состоит из двух этапов.

Этап 1/2. Зафиксируем грубую оценку котангенса:

$$1/x - x \;<\; \mathrm{ctg}\;x \;<\; 1/x \qquad\qquad \forall x\in(0,\pi/4]\,. \tag{12}$$

В самом деле, верхняя оценка следует из того факта, что ряд Маклорена для тангенса состоит только из положительных членов: $\mathrm{tg}(x) = x + x^3/3 + \cdots$, то есть $x < \mathrm{tg}\;x$. Нижняя оценка неравенства (12) устанавливается [13] так:

$$\mathrm{ctg}\;x \;=\; \frac{\cos x}{\sin x} \;>\; \frac{\cos x}{x} \;>\; \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \;>\; \frac{1-x^2}{x} \;=\; \frac{1}{x} - x\,.$$

Этап 2/2. Уточним оценку (12). С целью уточнения нижней оценки рассмотрим последовательность чисел $b_0, b_1, b_2, \ldots$, в которой $b_0 = 1,\ b_{n+1} = b_n/4 + 3/10$. Для этой последовательности справедливы три свойства:

1. $0 < b_n \leqslant 1 \quad \forall\, n \geqslant 0$;
2. $b_n \to 2/5$ при $n\to\infty$;
3. $\mathrm{ctg}(x) > 1/x - b_n x \quad \forall\, n \geqslant 0$;

Второе свойство вытекает из представления $b_n = 2/5 + b'_n$, а третье свойство доказывается по индукции и при этом существенно используются отношения:

$$\mathrm{ctg}\;x \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{ctg}(x/2) - \frac{1}{\mathrm{ctg}(x/2)}\right) \qquad \text{и} \qquad -\frac{1}{4-b_n x^2} \;>\; -\frac{3}{10} \;\text{ при }\; b_n x^2 \;\leqslant\; 2/3\,.$$

Свойства 2 и 3 фактически устанавливают нижнюю оценку из (11). Верхняя оценка устанавливается аналогично.

Следствие 3. *Если* $x = \pi/(4n)$, *то*

$$\frac{4n}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{40}\,\frac{1}{n^2}\right) \;<\; \mathrm{ctg}\;x \;<\; \frac{4n}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{48}\,\frac{1}{n^2}\right). \tag{13}$$

4.3. Оценка суммы R_n

Докажем, что для $n \geqslant 4$ имеет место оценка

$$0.256\,n \;\leqslant\; R_n \;\leqslant\; 0.389\,n\,. \tag{14}$$

Вывод оценки (14) состоит из четырех этапов.

Этап 1/4. Применение известной формулы [14, §4.4.7] для суммы $\sum \mathrm{tg}^2(\cdot)$ сводит задачу оценки R_n к оценке величины C_n:

$$R_n \;=\; \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{tg}^2\,\frac{(2i{-}1)\pi}{8n} - C_n = 8n^2 - 2n - C_n\,, \quad \text{где} \quad C_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ctg}^2\,\frac{(2i{-}1)\pi}{8n}\,.$$

Этап 2/4. Неравенство (11) позволяет оценить числа C_n:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8n}{(2i{-}1)\pi} - \frac{2}{5}\,\frac{(2i{-}1)\pi}{8n}\right)^2 \;\leqslant\; C_n \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8n}{(2i{-}1)\pi} - \frac{1}{3}\,\frac{(2i{-}1)\pi}{8n}\right)^2\,.$$

Откуда

$$\begin{aligned} C_n \;&\leqslant\; \left(\frac{8n}{\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i{-}1)^2} - \frac{2}{3}\,n + \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{8n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} (2i{-}1)^2 \\ C_n \;&\geqslant\; \left(\frac{8n}{\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i{-}1)^2} - \frac{4}{5}\,n + \frac{4}{25}\left(\frac{\pi}{8n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} (2i{-}1)^2 \end{aligned}$$

подставляя известные выражения [14, §4.1.3], [4, §0.12] для сумм нечетных чисел, имеем:

$$\begin{aligned} C_n \;&\leqslant\; \frac{64\,n^2}{\pi^2}\,\frac{1}{8}\left(\pi^2 - 2\psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right)\right) - \frac{2}{3}\,n + \frac{1}{9}\,\frac{\pi^2}{64\,n^2}\,\frac{1}{3}\,(4n^3{-}n) \\ C_n \;&\geqslant\; \frac{64\,n^2}{\pi^2}\,\frac{1}{8}\left(\pi^2 - 2\psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right)\right) - \frac{4}{5}\,n + \frac{4}{25}\,\frac{\pi^2}{64\,n^2}\,\frac{1}{3}\,(4n^3{-}n) \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} C_n \;&\leqslant\; 8\,n^2 - \frac{16\,n^2}{\pi^2}\,\psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\,n + \frac{\pi^2}{432}\,n - \frac{\pi^2}{1728}\,\frac{1}{n} \\ C_n \;&\geqslant\; 8\,n^2 - \frac{16\,n^2}{\pi^2}\,\psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right) - \frac{4}{5}\,n + \frac{\pi^2}{300}\,n - \frac{\pi^2}{1200}\,\frac{1}{n} \end{aligned}$$

Этап 3/4. Комбинируя результаты этапов 1/4 и 2/4, а также избавляясь от одного несущественного слагаемого в левой части двойного неравенства, имеем:

$$\frac{16\,n^2}{\pi^2}\,\psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{3}{+}\frac{\pi^2}{432}\right)n \;\leqslant\; R_n \;\leqslant\; \frac{16\,n^2}{\pi^2}\,\psi'\left(n{+}\tfrac{1}{2}\right) - \left(\frac{6}{5}{+}\frac{\pi^2}{300}\right)n + \frac{\pi^2}{1200}\,\frac{1}{n}\,.$$

Этап 4/4. Комбинируя результат этапа 3/4 и оценку (8), имеем:

$$\left(\frac{16}{\pi^2}\,\frac{197}{198} - \frac{4}{3}{-}\frac{\pi^2}{432}\right)n \;\leqslant\; R_n \;\leqslant\; \left(\frac{16}{\pi^2} - \frac{6}{5}{-}\frac{\pi^2}{300}\right)n + \frac{\pi^2}{1200}\,\frac{1}{n}\,.$$

Избавляясь за счет разумных округлений от слагаемого с n^{-1}, окончательно получаем оценку (14).

4.4. Оценка суммы S_n

Докажем, что для $n \geqslant 4$ имеет место оценка

$$\frac{\ln E - \ln 2}{2}\, n + \frac{\ln 2}{4} - 0.079\,\frac{1}{n} \;<\; S_n \;<\; \frac{\ln E - \ln 2}{2}\, n + \frac{\ln 2}{4} + 0.036\,\frac{1}{n}\,. \tag{15}$$

Вывод оценки (15) состоит из пяти этапов.

Этап 1/5. Положим $\Delta = \pi/(8n)$ и определим интегралы

$$L_0 \;=\; -\int\limits_0^{\Delta} \ln\cos x\,dx\,, \qquad L_1 \;=\; -\int\limits_{\Delta}^{\pi/4-\Delta} \ln\cos x\,dx\,, \qquad L_2 \;=\; -\int\limits_{\pi/4-\Delta}^{\pi/4} \ln\cos x\,dx\,.$$

В результате применения к интегралам L_0 и L_2 квадратурных формул соответственно левых и правых прямоугольников (9) получим:

$$0 \;<\; L_0 \;<\; \frac{\pi^2}{256n^3}\,, \qquad\qquad \frac{\pi\ln 2}{16n} \;-\; \frac{\pi^2}{128n^2} \;<\; L_2 \;<\; \frac{\pi\ln 2}{16n} \;-\; \frac{\pi^3}{1024n^3}\,,$$

то есть

$$\frac{\pi\ln 2}{16n} \;-\; \frac{\pi^2}{128n^2} \;<\; L_0 + L_2 \;<\; \frac{\pi\ln 2}{16n} \;+\; \frac{\pi^2\,(4-\pi)}{1024n^3}\,. \tag{16}$$

Этап 2/5. Разобьем область интегрирования интеграла L_1 на $n{-}1$ штук отрезков

$$\left[\frac{\pi i}{4n} - \Delta\,,\; \frac{\pi i}{4n} + \Delta\right] \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

Применяя для каждого отрезка квадратурную формулу средних прямоугольников (9) и суммируя полученные выражения, имеем:

$$L_1 \;=\; -\frac{\pi}{4n}S_n \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n-1}(1+\operatorname{tg}^2\xi_i) \;=\; -\frac{\pi}{4n}S_n \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^3 \left(n{-}1 + \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{tg}^2\xi_i\right), \tag{17}$$

где $1+\operatorname{tg}^2\xi_i$ – значение $(-\ln\cos x)''$ в некоторой точке ξ_i $i{-}$го отрезка разбиения.

Этап 3/5. Учет монотонности функции $\operatorname{tg}(x)$ и диапазонов варьирования величин ξ_i позволяет выписать следующие ограничения

$$R_n - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\Delta\right) \;<\; \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{tg}^2\xi_i \;<\; R_n - \operatorname{tg}^2\Delta \qquad\Longrightarrow\qquad R_n - 1 \;<\; \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{tg}^2\xi_i \;<\; R_n\,. \tag{18}$$

Этап 4/5. Очевидное равенство $L(\pi/4) = L_0 + L_1 + L_2$ для функции Лобачевского $L(x)$ позволяет преобразовать равенство (17) к виду:

$$S_n \;=\; \frac{4n}{\pi}\,(L_0 + L_2 - L(\pi/4)) \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2 \left(n{-}1 + \sum_{i=1}^{n-1}\operatorname{tg}^2\xi_i\right) \tag{19}$$

Этап 5/5. Подставляя в (19) оценки (16) и (18), имеем:

$$S_n \;<\; \frac{4n}{\pi}\left(\frac{\pi\ln 2}{16n} \;+\; \frac{\pi^2\,(4-\pi)}{1024n^3} - L(\pi/4)\right) \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2 (n{-}1 + R_n)$$

$$S_n \;>\; \frac{4n}{\pi}\left(\frac{\pi\ln 2}{16n} \;-\; \frac{\pi^2}{128n^2} - L(\pi/4)\right) \;+\; \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4n}\right)^2 (n{-}1 + R_n - 1)\,.$$

В результате эквивалентных преобразований (с учетом равенства $4L(\pi/4)/\pi = (\ln 2 - \ln E)/2$) последние неравенства трансформируются в

$$S_n < \frac{\ln E - \ln 2}{2}\, n + \frac{\ln 2}{4} + \left(\frac{\pi^2}{384} + \frac{\pi^2}{384}\,\frac{R_n}{n}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{\pi(4-\pi)}{256} - \frac{\pi^2}{384}\right)\frac{1}{n^2}$$
$$S_n > \frac{\ln E - \ln 2}{2}\, n + \frac{\ln 2}{4} + \left(\frac{\pi^2}{384} + \frac{\pi^2}{384}\,\frac{R_n}{n} - \frac{\pi}{32} - \frac{\pi^2}{192}\,\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

Отбрасывание отрицательного слагаемого с n^{-2}, учет ограничения $n \geqslant 4$ и выполнение арифметических операций с разумными округлениями приводит к оценке (15).

5. Заключительная часть доказательства основного утверждения

Для доказательства оценки (7) заметим, что

$$y_{n-1} = \frac{2^n}{\sqrt{2}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\cos\frac{\pi i}{4n}\right)^2 \quad\Longrightarrow\quad y_{n-1} = \frac{2^n}{\sqrt{2}}\, e^{2S_n}\,.$$

Оценка (15) суммы S_n позволяет вывести ограничения для y_{n-1}:

$$\frac{2^n}{\sqrt{2}}\exp\left(n\,\ln(E/2) + \frac{\ln 2}{2} - 0.158\,\frac{1}{n}\right) < y_{n-1} < \frac{2^n}{\sqrt{2}}\exp\left(n\,\ln(E/2) + \frac{\ln 2}{2} + 0.072\,\frac{1}{n}\right),$$

которые после эквивалентных преобразований трансформируются в оценку (7).

Следствие 4. *Для любого $n \geqslant 4$ имеют место оценки:*

$$\frac{2^{3/2}}{\pi}\frac{n^{3/2}}{2^{n-2}}\left(1 - \frac{\pi^2}{40}\,\frac{1}{n^2}\right) < \quad y_1 \quad < \frac{2^{3/2}}{\pi}\frac{n^{3/2}}{2^{n-2}}\left(1 - \frac{\pi^2}{48}\,\frac{1}{n^2}\right), \tag{20}$$
$$E^n\, e^{0.051/n} < D_n(+1) < E^n\, e^{0.103/n}, \tag{21}$$
$$2\left(\frac{1}{4\,E}\right)^n e^{-0.103/n} < |D_n(-1)| < 2\left(\frac{1}{4\,E}\right)^n e^{-0.051/n}; \tag{22}$$

для справки: $(4\,E)^{-1} = 0.23820\ldots$.

Доказательство. Неравенство (20) следует из оценки (13):

$$y_1 = y_0\,\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}\,\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}\frac{4n}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{40}\,\frac{1}{n^2}\right) < y_1 < \frac{\sqrt{2n}}{2^{n-1}}\frac{4n}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{48}\,\frac{1}{n^2}\right)$$

Для доказательства оценки (21) достаточно выполнить очевидные тригонометрические преобразования и воспользоваться равенством (10), в котором $1 < \mu < 2$:

$$D_n(1) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 + x_k) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) = 2^n\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)\pi}{8n}\right)^2 = E^n\exp\left(\frac{\pi^2\mu}{192}\,\frac{1}{n}\right)$$

Оценка (22) вытекает из неравенства (2) при $x = -1$. □

6. Заключение

Положим $\widetilde{D}_n(x) = 2^{n-1/2} D_n(x)$, тогда основные результаты, зафиксированные в соотношениях (1), (4)– (7) и (20)– (22), несколько упрощаются:

$$T_{2n}(x) = (-1)^n \, \widetilde{D}_n(x) \, \widetilde{D}_n(-x)\,, \tag{1'}$$

$$\widetilde{D}_n(x_k) = \widetilde{D}_n(x_{k-1}) \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{4n}\,, \qquad k = 1, \ldots, n-1\,, \tag{4'}$$

$$\widetilde{D}_n(0) = 1\,, \tag{5'}$$

$$\widetilde{D}_n(x_0) = 2\sqrt{n}, \tag{6'}$$

$$(2E)^n \, e^{-0.158/n} \Big/ \sqrt{2} \;<\; \widetilde{D}_n(x_{n-1}) \;<\; (2E)^n \, e^{0.072/n} \Big/ \sqrt{2} \qquad (2E = 3.20991\ldots), \tag{7'}$$

$$\frac{8\,n^{3/2}}{\pi} \left(1 - \frac{\pi^2}{40}\,\frac{1}{n^2}\right) \;<\; \widetilde{D}_n(x_1) \;<\; \frac{8\,n^{3/2}}{\pi} \left(1 - \frac{\pi^2}{48}\,\frac{1}{n^2}\right), \tag{20'}$$

$$(2E)^n \, e^{0.051/n} \Big/ \sqrt{2} \;<\; \widetilde{D}_n(+1) \;<\; (2E)^n \, e^{0.103/n} \Big/ \sqrt{2}, \tag{21'}$$

$$\sqrt{2}\,(2E)^{-n} e^{-0.103/n} \;<\; |\widetilde{D}_n(-1)| \;<\; \sqrt{2}\,(2E)^{-n} e^{-0.051/n}. \tag{22'}$$

В терминах асимптотических оценок [15] неравенства (7′), (20′) и (21′) можно представить так:

$$\widetilde{D}_n(x_1) \;\sim\; 8\,n^{3/2} \Big/ \pi \qquad (n \to \infty),$$

$$\widetilde{D}_n(1) \;\sim \widetilde{D}_n(x_{n-1}) \;\sim\; (2E)^n \Big/ \sqrt{2} \qquad (n \to \infty).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прасолов В. В. Многочлены. – М : МЦНМО, 2003. – 336 с.
2. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М. : Наука, 1983. – 384 с.
3. Чубариков В. Н. Арифметические суммы и гауссова теорема умножения, Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 2, с. 231-253.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
5. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 6, № 1, p. 9–24.
6. Краснов В. А. Об интегральных формулах объема гиперболических тетраэдров, Совр. математика. Фундам. направления. 2013. Т. 49, с. 89-98
7. Дунаев А. С., Шлычков В. И. Специальные функции. – Екатеринбург: УрФУ, 2015. – 1321 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Ред. М. Абрамовиц, И. Стиган – М.: Наука, 1979. – 832 с.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. – М. : Физматлит, 2003. – 688 с.

10. Gordon L. A stochastic approach to the gamma function // Amer. Math. Monthly. 1994. Vol. 101, № 9, p. 858-864.

11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Том 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.

12. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Бином, Лаборатория знаний, 2021. – 636 с.

13. Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. – М.: МЦНМО, 2008. - 199 с.

14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции. – М. : Физматлит, 2002. – 632 с.

15. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1978. – 375 с.

REFERENCES

1. Prasolov, V. V. 2004, *Polynomials*, Springer-Verlag, Berlin, 316 p.

2. Pashkovskij, S. 1983, *Computational applications of Chebyshev polynomials and series*, Nauka, Moscow, 384 p. (in Russian)

3. Chubarikov, V. N. 2015, "The arithmetic sum and gaussian multiplication theorem", *Chebyshevskij Sbornik*, v. 16, no. 2, pp. 231-253. (in Russian)

4. Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. 1966, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York, 1086 p.

5. Milnor, J. 1982, "Hyperbolic geometry: the first 150 years", *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 6, no. 1, pp. 9–24.

6. Krasnov, V. A. 2013, "On integral expressions for volumes of hyperbolic tetrahedra", *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, v. 49, pp. 89-98 (in Russian)

7. Dunaev, A. S. & Schlychkov, V. I. 2015, *Special Functions*, UrFU, Ekaterinburg, 1321 p. (in Russian)

8. Abramowitz, M. & Stegun I. A. (eds.) 1964, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, NBS Applied Mathematics Series 55, National Bureau of Standards, Washington, 1046 p.

9. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. & Marichev O. I. 1986, *Integrals and Series, Volume 3: More Special Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 800 p.

10. Gordon, L. 1994, "A stochastic approach to the gamma function", *Amer. Math. Monthly*, vol. 101, no. 9, pp. 858-864.

11. Berezin, I. S. & Zhidkov, N. P. 1966, *Computing Methods, Volume 1.*, Nauka, Moscow, 632 p. (in Russian).

12. Bahvalov, N. S., Zhidkov, N. P. & Kobelkov, G. M. 2021, *Numerical methods*, Binom, Knowledge Laboratory, Moscow, 636 p. (in Russian)

13. Gelfand, I. M., Lvovsky, S. M. & Toom, A. L. 2008, *Trigonometry*, MCCME, Moscow, 199 p. (in Russia)

14. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. & Marichev, O. I. 1986, *Integrals and Series, Volume 1: Elementary Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 808 p.

15. Olver, F. W. J. 1974, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York, 572 p.

Получено 3.09.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 514.172.45 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-252-263

О существовании RR-многогранников, связанных с икосаэдром

В. И. Субботин

Субботин Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент, Донской государственный аграрный университет (г. Новочеркасск).
e-mail: geometry@mail.ru

Аннотация

Работа относится к тому направлению в теории многогранников в E^3, в котором изучаются классы выпуклых многогранников, расширяющих класс правильных (платоновых): многогранники таких классов сохраняют лишь некоторые свойства правильных многогранников.

Ранее автором были найдены новые классы многогранников, объединённых такими условиями симметрии на элементы многогранника, при которых условия правильности граней не предполагались заранее. При этом была доказана полнота списков рассмотренных классов.

Далее автором был рассмотрен класс так называемых RR-многогранников.

RR-многогранником (от слов rombic и regular) называется выпуклый многогранник, у которого существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин; причём все грани, не входящие в звезду ромбической вершины, являются правильными многоугольниками.

Если гранная звезда $Star(V)$ вершины V многогранника состоит из n равных и одинаково расположенных ромбов (не квадратов), имеющих общей вершиной V, то V называется ромбической. Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами.

Примером RR-многогранника является удлинённый ромбододекаэдр.

Ранее автором были найдены все RR-многогранники с двумя симметричными ромбическими вершинами.

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании замкнутых выпуклых RR-многогранников в E^3 с одной симметричной тупоугольной ромбической вершиной и правильными гранями одного типа. Доказывается теорема о том, что существует только два таких многогранника: 13-гранник и 19-гранник. Оба этих многогранника получены из правильного: икосаэдра. Доказательство существования 19-гранника основано, в частности, на теореме А.Д.Александрова о существовании выпуклого многогранника с данной развёрткой.

Ключевые слова: симметричные ромбические вершины, RR-многогранник, звезда ромбической вершины, развёртка

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:
В. И. Субботин. О существовании RR-многогранников, связанных с икосаэдром // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 252–263.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 514.172.45 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-252-263

On the existence of RR-polyhedra associated with the icosahedron

V. I. Subbotin

Subbotin Vladimir Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Don State Agrarian University (Novocherkassk).
e-mail: geometry@mail.ru

Abstract

The work refers to the direction in the theory of polyhedra in E^3, in which classes of convex polytopes are studied that extend the class of regular (Platonic) polyhedra: polyhedra of such classes retain only some properties of regular polyhedra.

Earlier, the author found new classes of polyhedra united by such symmetry conditions under which the conditions for the regularity of the faces were not assumed in advance. At the same time, the completeness of the lists of the considered classes was proved.

Further, the author considered the class of so-called RR -polyhedra. A RR-polyhedron (from the words rombic and regular) is a convex polyhedron that has symmetric rhombic vertices and there are faces that do not belong to any star of these vertices; moreover, all faces that are not included in the star of the rhombic vertex are regular polygons.

If a faceted star $Star(V)$ of a vertex V of a polyhedron consists of n equal and equally spaced rhombuses (not squares) with a common vertex V, then V is called rhombic. If the vertex V belongs to the axis of rotation of the order n of the star $Star(V)$, then V is called symmetric. A symmetric rhombic vertex V is called obtuse if the rhombuses of the star $Star(V)$ at the vertex V converge at their obtuse angles.

An example of an RR-polyhedron is an elongated rhombododecahedron.

Previously, the author found all RR-polyhedra with two symmetric rhombic vertices.

In this paper, we consider the question of the existence of closed convex RR-polyhedra in E^3 with one symmetric obtuse rhombic vertex and regular faces of the same type. A theorem is proved that there are only two such polyhedra, a 13-faced and a 19-faced. Both of these polyhedra are obtained from the regular — icosahedron. The proof of the existence of a 19-hedron is based, in particular, on A.D. Aleksandrov's theorem on the existence of a convex polyhedron with a given unfolding.

Keywords: symmetric rhombic vertices, RR-polyhedron, rhombic vertex star, unfolding.

Bibliography: 28 titles.

For citation:
V. I. Subbotin, 2021, "On the existence of RR-polyhedra associated with the icosahedron", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 252–263.

1. Введение

Известно много работ, в которых понятие правильных (платоновых) многогранников в E^3, а также исторически первое расширение этого класса — класс равноугольно-полуправильных (архимедовых) многогранников — переносятся на многомерное пространство, на пространства постоянной кривизны, на многогранники другой эйлеровой характеристики (см., например, [1] — [21]). В частности, найдены также все выпуклые многогранники, которые разделяют с

правильными только свойство правильности граней: не предполагая заранее других условий симметрии помимо выпуклости многогранника и правильности граней, в работе [18] было доказано, что эмпирически найденные многогранники работы [19] исчерпывают класс всех замкнутых выпуклых многогранников в E^3 с правильными гранями.

В работе автора [22] найден класс многогранников ("сильно симметричные" многогранники) с условиями симметрии на элементы многогранника, причём условий правильности граней не требуется. Оказалось, что класс сильно симметричных многогранников допускает полное перечисление. Некоторые обобщения результатов работы [22] имеются в [23].

Продолжением изучения влияния симметрии на геометрию многогранника является работа [24], в которой, в частности, был определён класс симметричных многогранников с правильными гранями и ромбическими вершинами — так называемых RR-многогранников. В той же работе было дано доказательство существования двух RR-многогранников с двумя ромбическими вершинами: 24-гранника и 20-гранника. У обоих этих многогранников имеются зеркальные оси симметрии.

Напомним определение класса RR-многогранников.

Определение 1. *Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется RR-многогранником (от слов rombic и regular), если у него существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин; причём все грани, не входящие в звезду симметричной ромбической вершины, являются правильными многоугольниками.*

При этом под ромбической вершиной понимается такая вершина V, звезда $Star(V)$ граней которой состоит из n равных и одинаково расположенных ромбов (не квадратов), имеющих общей вершиной V. Если вершина V принадлежит оси вращения порядка n звезды $Star(V)$, то V называется симметричной. Симметричная ромбическая вершина V называется тупоугольной, если ромбы звезды $Star(V)$ в вершине V сходятся своими тупыми углами.

Таким образом, RR-многогранники наследуют свойство правильности граней правильных многогранников с появлением в них остроугольных или тупоугольных ромбических вершин. Примером RR-многогранника с остроугольной ромбической вершиной является известный в кристаллографии удлинённый ромбододекаэдр.

В [25]-[27] доказана полнота списка RR-многогранников с двумя симметричными, изолированными — как остроугольными, так и тупоугольными — ромбическими вершинами. Кроме того, в [27] найдены многогранники с одной остроугольной ромбической вершиной и анонсировано существование двух RR-многогранников с тупоугольными ромбическими вершинами.

Настоящая работа посвящена доказательству существования двух RR-многогранников с одной тупоугольной ромбической вершиной и однотипными правильными гранями. Доказано также, что других таких RR-многогранников не существует.

2. Теорема о существовании

Следующая теорема показывает, что дополняя список RR-многогранников с одной остроугольной вершиной из [27] двумя возможными RR-многогранниками с тупоугольной ромбической вершиной, мы получаем полный список всех RR-многогранников с одной ромбической вершиной.

Теорема 1. *Существуют только два RR-многогранника с одной тупоугольной ромбической вершиной и правильными гранями одного типа — 13-гранник и 19-гранник; их правильные грани являются треугольными.*

Доказательство.

1. Удалим одну из треугольных граней икосаэдра, а также три грани, соседние с ней по ребру икосаэдра. Получим многогранник M с треугольными гранями, ограниченный замкнутой ломаной $ABCDEFA$ (Рис.1, a)). Обозначим эту ломаную Γ. Плоский угол между звеньями BA и BC ломаной, а также углы, эквивалентные ему относительно оси вращения третьего порядка многогранника M, перпендикулярной грани RTK, обозначим α. Углы между звеньями CB и CD и им эквивалентные, обозначим β.

Многогранник M допускает непрерывные изометрические деформации (изгибания). Для доказательства этого воспользуемся теоремой А.Д. Александрова о реализации развёртки с неотрицательной кривизной, заданной на сфер, [28].

Развернём удалённую часть икосаэдра на плоскость. Получим треугольник ACE, составленный из четырёх правильных треугольников (Рис.1, c)). Обозначим этот треугольник Δ. Будем изометрически деформировать граничную плоскую ломаную треугольника Δ, составленную из шести звеньев (Рис.3, d)). Деформацию будем проводить так, чтобы не только длины рёбер сохранялись, но и сохранялась симметрия Δ. Получим переменный симметричный 6-угольник $\overline{\Delta}$.

Склеим развёртку многогранника M с переменным 6-угольником $\overline{\Delta}$. По теореме А.Д.Александрова, полученная развёртка реализуется замкнутым выпуклым многогранником M', единственным для каждого $\overline{\Delta}$. Для каждого $\overline{\Delta}$ частью многогранника M' является единственный многогранник M.

Таким образом, изгибание многогранника M можно рассматривать как полученное непрерывным изменением угла α и сохранением симметрии многогранника M. Для каждого α дополняя многогранник M "крышкой" $\tilde{M}$ до замкнутого выпуклого многогранника, вырезая образовавшуюся фигуру $\tilde{M}$ из четырёх треугольников и разворачивая эту фигуру на плоскость, мы будем получать переменный симметричный 6-угольник $\overline{\Delta}$. Изометрической деформации 6-угольника $\overline{\Delta}$ соответствует изгибание многогранника M.

Покажем, что геометрический смысл имеет только следующий интервал изменения угла: $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{2\pi}{3}$.

Действительно, неравенство $\alpha \geq \dfrac{2\pi}{3}$ невозможно, так как уже при $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ грани ABL и BLC лежат в одной плоскости и и они образуют один ромб. А при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ четырёхугольная пирамида $ACRKL$ будет правильной, и пары граней (BCL, LCR) и (ABL, AKL) вырождаются в ромбы.

Для того, чтобы путём присоединения ромбов к граничной ломаной Γ достроить многогранник M до RR-многогранника с трёхгранной ромбической вершиной, должно выполняться условие: $\alpha = \beta$.

Найдём теперь связь величины углов α с углами β граничной ломаной Γ.

Рассмотрим трёхгранный угол $CBDR$. Обозначим через θ его равные плоские углы $\widehat{BCR}$ и $\widehat{DCR}$. Тогда получим:

$$\cos\beta = \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\Phi, \tag{1}$$

где Φ — двугранный угол с ребром RC.

Сразу заметим, что четырёхугольник $KRAC$, в силу симметрии многогранника M является равнобедренной трапецией: $KR \parallel AC, AK = CR$; равные тупые углы $\widehat{KRC}$ и $\widehat{AKR}$ через γ.

Так как $\widehat{ABC} = \widehat{ALC} = \alpha$, то, считая рёбра икосаэдра единичными, получаем, что длина отрезка $AC = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Поэтому,

$$\cos\gamma = \frac{1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Покажем теперь, что угол θ связан с углом α соотношением:

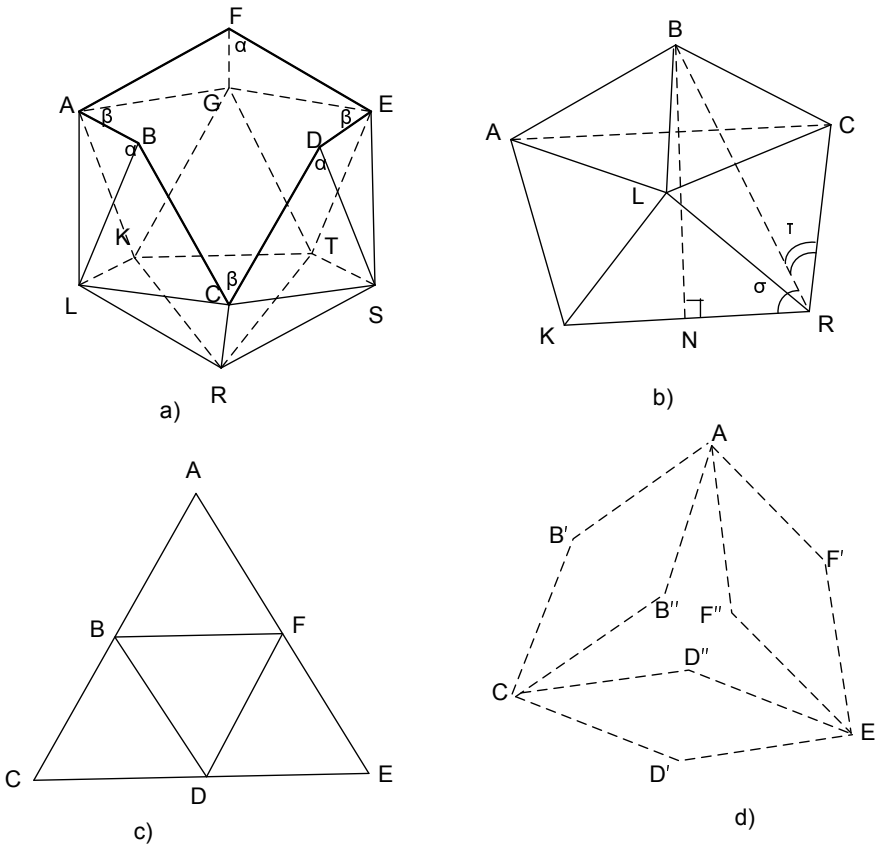


Рис. 1: К доказательству теоремы 1

$$\cos\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}} + \arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{2}$$

Двугранный угол λ с ребром LC представим как сумму двух углов: угла между плоскостями ALC и LBC и угла между плоскостями ALC и LCR. Обозначим эти углы соответственно λ' и λ''.

Рассматривая трёхгранный угол $CBKL$, получим:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\cos\lambda'.$$

Отсюда находим:

$$\cos\lambda' = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}. \tag{3}$$

Аналогично, из трёгранного угла $CALR$ получим:

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}-1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\lambda'', \quad \cos\lambda'' = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{4}$$

Из трёхгранного угла $CBLR$ находим:

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}\cos\lambda, \quad \cos\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\lambda.$$

Учитывая, что $\lambda = \lambda' + \lambda''$, и принимая во внимание равенства (3) и (4), последнее равенство можно записать в виде (2), что и требовалось.

Пусть угол φ — двугранный угол при ребре RC трёхгранного угла $RKTC$. Тогда для φ имеем соотношение:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos\varphi,\ \ \frac{1}{2} = \left(\frac{1-2\sin\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1-2\sin\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2\right)\cos\varphi.$$

Отсюда находим:

$$\cos\varphi = \frac{1+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{5}$$

Очевидно, что угол $\Phi = \varphi \pm 2\varkappa$, где $\varkappa$ — двугранный угол между плоскостью RCB и плоскостью $CRKA$. Причём, знак "+"выбирается при $\dfrac{\pi}{3} < \alpha \le \dfrac{3\pi}{5}$.

При $\dfrac{3\pi}{5} < \alpha < \dfrac{2\pi}{3}$ выбирается знак "−". Это связано с тем, что при $\alpha = \dfrac{3\pi}{5}$ 5-угольная пирамида $ABCKRL$ становится правильной и при дальнейшем увеличении угла α угол $\varkappa$ следует вычитать из угла φ.

Выразим угол $\varkappa$ через угол α.

Рассмотрим трёхгранный угол $RKBC$. Его плоские углы $\widehat{BRK}$ и $\widehat{BRC}$ обозначим σ и τ соответственно.

В трёхгранном угле $RKBC$ косинус двугранного угла $\varkappa$ найдём из соотношения:

$$\cos\sigma = \cos\tau\cos\gamma + \sin\tau\sin\gamma\cos\varkappa. \tag{6}$$

Проведём $BN \perp KR$; в силу симметрии многогранника M отрезок $KN = NR$. Из треугольника BLR найдём длину отрезка BR : $|BR| = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}$. Теперь можно найти косинусы углов σ и τ :

$$\cos\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}};\ \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\theta}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6) и учитывая, что

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{1-2\sin\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

найдём:

$$\cos\varkappa = \frac{1+(1-\cos\theta)\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\sin\theta\,\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}. \tag{8}$$

Теперь можем найти $\cos\Phi$:

$$\cos\Phi = \cos\left(2\mathrm{sign}\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\varkappa + \varphi\right) =$$

$$= \cos\left(2\mathrm{sign}\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\arccos\frac{1+(1-\cos\theta)\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\sin\theta\,\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}} + \arccos\frac{1+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right). \tag{9}$$

С учётом (9) равенство (1) принимает вид:

$$\cos\beta = \cos^2\theta +$$

$$+\sin^2\theta\, cos\left(2\text{sign}\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)\arccos\frac{1+(1-\cos\theta)\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\sin\theta\sqrt{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}+\arccos\frac{1+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right), \quad (10)$$

где:

$$\cos\theta = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\left(\arccos\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-1}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}}+\arccos\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Формула (10) даёт необходимую связь величин углов α и β.

Положив в формуле (10) $\beta = \alpha$ и решая полученное уравнение относительно α, получим приближённое значение тупого угла ромба в градусах: $\alpha \approx 91,4397°$.

На Рис.2 представлены графики левой и правой части уравнения (10) при $\beta = \alpha$.

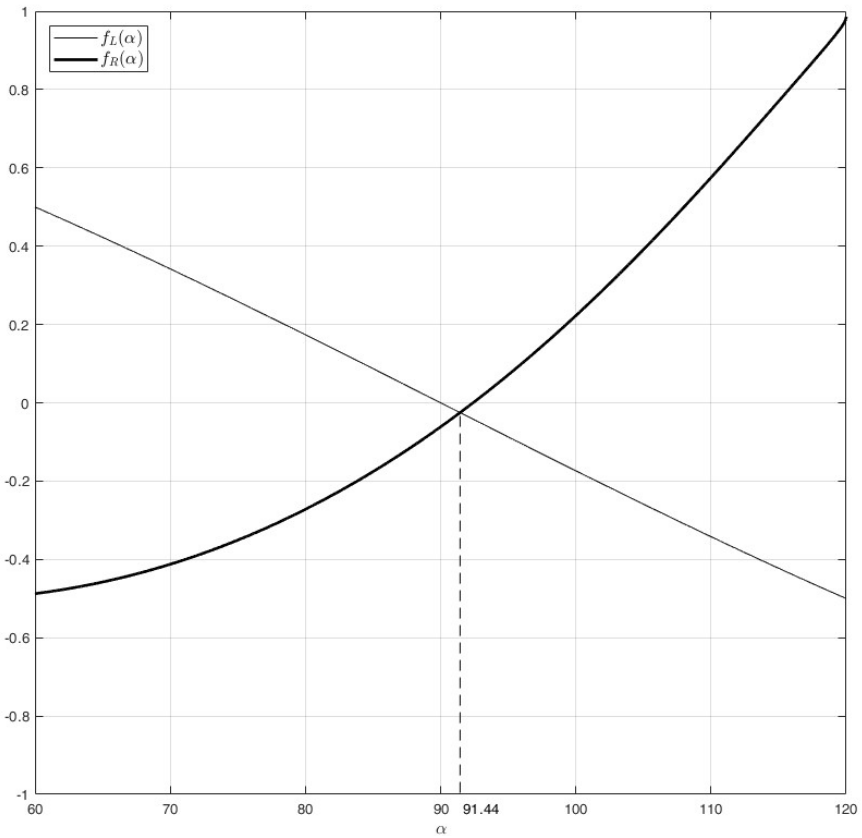


Рис. 2: Графическое решение уравнения

Существование такого многогранника с тупоугольной ромбической вершиной доказано. Соответствующий 19-гранник показан на Рис.3,а).

2. Покажем теперь,что существует ещё только один многогранник с тупоугольной ромбической вершиной и правильными треугольными гранями.

Удалим из икосаэдра 10 граней: четыре грани как в предыдущем случае, а также шесть граней, соседних по рёбрам с удалёнными. Получим многогранник P с граничной ломаной L. Очевидно, все углы между соседними звеньями ломаной L равны $\dfrac{2\pi}{3}$. Поэтому возможно,

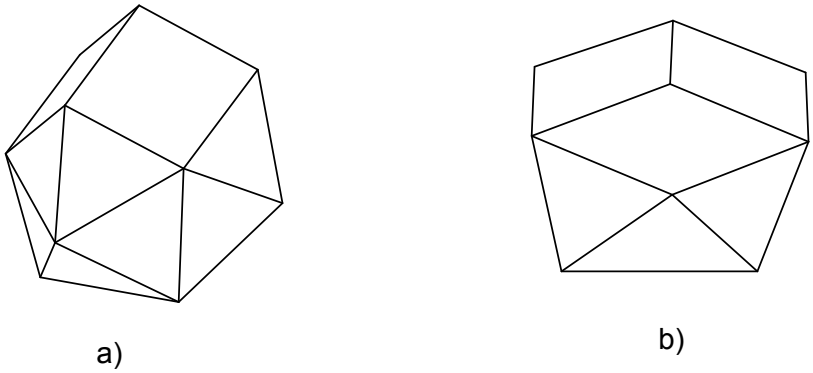


Рис. 3: RR-многогранники с тупоугольной ромбической вершиной

присоединение к границе ломаной L трёх ромбов с тупыми углами $\frac{2\pi}{3}$. В результате получим 13-гранник с тупоугольной ромбической вершиной (Рис.3, b)).

Докажем, что других RR-многогранников с одной тупоугольной ромбической вершиной и правильными гранями одного типа не существует.

В многограннике пункта 1 в вершинах граничной ломаной попеременно сходятся по две и по четыре треугольных грани: в вершине B — две, в вершине C — четыре, и т.д.

В многограннике пункта 2 в вершинах граничной ломаной попеременно сходятся по две и по три треугольных грани.

Очевидно, что возможен ещё только один случай: в вершинах граничной ломаной попеременно сходятся по три и по четыре треугольных грани. Покажем, что в этом случае RR-многогранник с одной ромбической вершиной невозможен.

Развёртка пояса граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с ромбами ромбической звезды, представлена на Рис.4, a); на нём отождествляемые концы двух рёбер отмечены одинаковыми буквами.

Присоединим, далее, к поясу равносторонних граней грани с вершинами, C, C, C, D, D, D, E, E, E (Рис.4, b)). Легко видеть, что единственный способ дальнейшего присоединения правильных треугольных граней состоит именно в отождествлении вершин, обозначенных одинаковыми буквами C, D, E. После этого отождествления, получим граничную ломаную многогранника в виде пространственного 6-угольника B, C, B', D, B'', E (Рис.4, c)).

Так как вершины C, D, E имеют степени 3, то они могут быть инцидентны ещё только двум треугольным граням. Вершины B, B', B'' имеют степени 4, поэтому могут быть инцидентны одной треугольной грани.

Из этого следует, что дальнейшее присоединение треугольных граней невозможно, и RR-многогранник с одной ромбической вершиной в этом случае не существует.

Пусть связное множество M граней, не входящих в звезду ромбической вершины, состоит из квадратов. Тогда M таково, что вершины граней, не инцидентные ромбическим граням, должны иметь степени 3. Поэтому множество M представляет собой часть поверхности куба, и RR-многогранник в этом случае не существует.

Аналогично, RR-многогранник не существует, если множество M состоит из правильных 5-угольников; в этом случае M является частью додекаэдра. □

Теорема доказана.

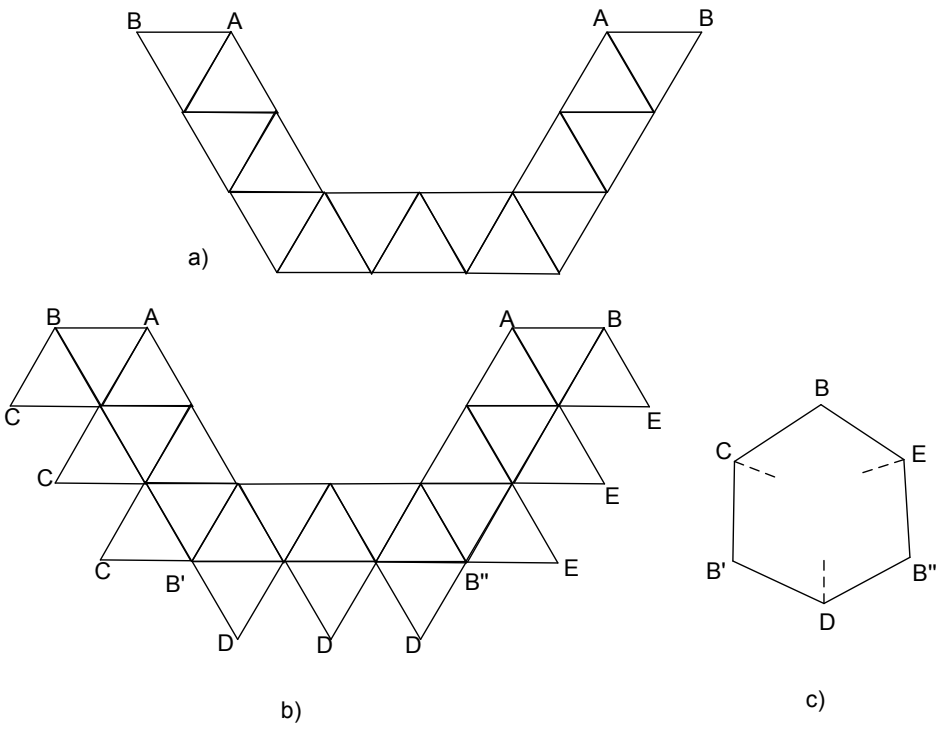


Рис. 4: К доказательству теоремы 1

3. Заключение

Итак, в E^3 существует только два RR-многогранника с тупоугольной ромбической вершиной и однотипными правильными гранями: 19-гранник и 13-гранник. В обоих многогранниках ромбическая вершина инцидентна оси вращения 3-го порядка многогранника и правильные грани являются треугольными. Учитывая доказанную теорему 1, можно найти все RR-многогранники с однотипными правильными гранями, как с остроугольными, так и с тупоугольными ромбическими вершинами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grunbaum B. Regular polyhedra — old and new.// Aequationes mathematicae. 1977. Vol. 16, №1-2. P.1-20.

2. Coxeter H. S. Regular and semi-regular polytopes. II, // Mathematische Zeitschrift. 1985. Vol. 188, №4. P.559–591.

3. Coxeter H. S. Regular and Semi-Regular Polytopes. III. // Mathematische Zeitschrift, 1988/89. Vol. 200. P.3-46.

4. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.

5. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. М.: МЦНМО, 2007.

6. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.

7. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge: Cambridge University Press. 1999.

8. Makarov P. V. On the derivation of four-dimensional semi-regular polytopes// Voprosy Diskret. Geom. Mat. Issled. Akad. Nauk. Mold.1988. Vol. 103. P.139–150.

9. Макаров В. С. Правильные многогранники и многогранники с правильными гранями трехмерного пространства Лобачевского // Материалы X Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения".М.: МГУ. 2010. С.58-66.

10. Смирнов Е. Ю. Группы отражений и правильные многогранники. М.: МЦНМО, 2009.

11. Farris S. L. Completely classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra.// Geometriae Dedicata. 1988. Vol. 26, №1. P.111-124.

12. Wills J. M. On polyhedra with transitivity properties // Discrete and Computational Geometry. 1986. Vol. 1, №3. P.195-199.

13. Berman M. Regular-faced Convex Polyhedra, // Journal of The Franklin Institute. 1971. Vol. 291, №5. P.329-352.

14. McMullen P. Geometric Regular Polytopes. Cambridge University Press. 2020.

15. Schulte E., Wills J. M. On Coxeter's regular skew polyhedra // Discrete Mathematics. 1986. Vol. 60. P. 253-262.

16. McMullen P., Schulte E. Higher Toroidal Regular Polytopes // Advances in Mathematics. 1996. Vol. 117, №1. P. 17-51.

17. Cunningham E., Pellicer D. Classification of tight regular polyhedra // Journal of Algebraic Combinatorics. 2016. Vol. 43. P. 665–691.

18. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. Vol. 18, №1. P. 169—200.

19. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями //Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т.2. С.1-220.

20. Милка А. Д. Почти правильные многогранники. //Труды Ин-та мат. СО АН СССР. 1987. Т.9. С.136-141.

21. Blind, G.; Blind, R. The semiregular polytopes // Commentarii Mathematici Helvetici. 1991. v.66, №1. P.150–154.

22. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сборник. 2016. №4. С. 132-140.

23. Субботин В. И. Some classes of polyhedra with rhombic and deltoidal vertices //Труды Международной конференции «Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin – 100». Санкт-Петербург. 2019. С.86.

24. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2018. – Т. 476.. – С. 153–164.

25. Субботин В. И. Об одном классе многогранников с симметричными звездами вершин //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т.169. С. 86-95.

26. Субботин В. И. О полноте списка выпуклых RR-многогранников //Чебышевский сборник. 2020. Т.21, №1. С. 297-309.

27. Субботин В. И. *RR*-многогранники: существование, полнота списка// Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII Международной конференции, посвященной столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. Тула, 23–26 сентября 2020 года. С.271-272.

28. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. Новосибирск: Наука, 2007.

REFERENCES

1. Grunbaum B. 1977, "Polyhedra — old and new", *Aequationes mathematicae*, vol. 16, no. 1-2, pp.1-20.

2. Coxeter H. S. 1985, "Regular and semi-regular polytopes. II", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 188, no.4, pp.559–591.

3. Coxeter H. S. 1988/89, "Regular and Semi-Regular Polytopes. III", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 200, pp.3-46.

4. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.

5. Deza M, Grishukhin V. P., Shtogrin M. I. 2008, *Isometricheskie poliedralnye podgrafy v gipercubach i cubicheskich reshetkach* [*Scale-Isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices*], MCNMO, Moskow.

6. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, *Mnogogranniki. Grafi. Optimizacija.* [*Polyhedra. Graph. Optimization*], Nauka, Moskow.

7. Cromwel P. R. 1997, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge.

8. Makarov, P. V. 1988, "The derivation of four-dimensional semi-regular polytopes", *Voprosy Diskret. Geom. Mat. Issled. Akad. Nauk. Mold.*, vol. 103, pp.139–150.

9. Макаров В. С. 2010, "Regular polytopes and polyhedra with regular faces of the three-dimensional Lobachevsky space", *Materialy X Mezhdunarodnogo seminara " matematika i yeye prilozheniya", (Proc. Int. Seminar "Discrete Mathematics and Its Applications")*, Moskow, pp.58-66.

10. Smirnov E. Yu. 2009, *Gruppy otrazheniy i pravil'nyye mnogogranniki* [*Reflection groups and regular polyhedra*], MCNMO, Moskow.

11. Farris, S. L. 1988, "Classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra", *Geometriae Dedicata*, vol. 26, no. 1, pp.111-124.

12. Wills J. M. 1986, "On polyhedra with transitivity properties", *Discrete and Computational Geometry*, vol. 1, no.3, pp.195-199.

13. Berman M. 1971, "Regular-faced Convex Polyhedra", *Journal of The Franklin Institute* , vol. 291, no.5, pp.329-352.

14. McMullen P. 2020, *Geometric Regular Polytopes*, Cambridge University Press.

15. Schulte E., Wills J. M. 1986, "Coxeter's regular skew polyhedra", *Discrete Mathematics*, vol. 60, pp. 253-262.

16. McMullen P., Schulte E. 1996, "Higher Toroidal Regular Polytopes", *Advances in Mathematics*, vol. 117, no.1, pp. 17-51.

17. Cunningham E., Pellicer D. 2016, "Classification of tight regular polyhedra", *Journal of Algebraic Combinatorics*, vol. 43, pp. 665–691.

18. Johnson N. W. 1966, "Convex polyhedra with regular faces", *Can. J. Math.*, vol. 18, №1, pp. 169—200.

19. Zalgaller V. A. 1967, "Convex polyhedra with regular faces", *Zapiski nauchnych seminarov LOMI*, vol. 2, pp.1-220.

20. Milka A. D. 1987, "Almost regular polyhedra", *Trudy In-ta mat. SO AN SSSR*, vol.9, pp. 136-141.

21. Blind, G.; Blind, R. 1991 "The semiregular polytopes", *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol.66, no.1, pp.150–154.

22. Subbotin V. I. 2016, "On a class of strongly symmetric polytopes", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 132-140.

23. Subbotin V. I. 2019, "Some classes of polyhedra with rhombic and deltoidal vertices" *Trudy Mezhdunarodnoy konferentsii " Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin – 100" (Proc. of the Int. Conf. " Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin - 100")*, St.Petersburg, p.86.

24. Subbotin V. I. 2018, "On two classes of polyhedra with rhombic vertices", *Zapiski nauchnych seminarov POMI*, vol.476, pp.153-164.

25. Subbotin V. I. 2019, "On one class of polyhedra with symmetric vertex stars", *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory*, vol. 169. pp. 86-95.

26. Subbotin V. I. 2020, "On the completeness of the list of convex RR -polytopes", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 21, no.1, pp. 297-309.

27. Subbotin V. I. 2020, "RR-polyhedra: existence, completeness of the list", *Materialy XVIII Mezhdunarodnoy konferentsii " Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennyye problemy, prilozheniya i problemy istorii", posvyashchennoy stoletiyu so dnya rozhdeniya professorov B. M. Bredikhina, V. I. Nechayeva i S. B. Stechkina (Proc. Int. Conf. "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history")*, Tula, pp.271-272.

28. Alexandrov A. D. 2007, *Vypuklyye mnogogranniki* [*Convex polyhedra*], Nauka, Novosibirsk.

Получено 22.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-264-287

О бифуркации решения задачи Ферма — Штейнера при 1-параметрической вариации границы в $H(\mathbb{R}^2)$

А. М. Тропин

Тропин Александр Михайлович — аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: amtropin@gmail.com

Аннотация

В данной работе рассматривается задача Ферма — Штейнера в гиперпространствах с метрикой Хаусдорфа. Если X — метрическое пространство, и фиксировано непустое конечное подмножество $\mathcal{A}$ в пространстве непустых замкнутых и ограниченных подмножеств $H(X)$, то элемент $K \in H(X)$, на котором достигается минимум суммы расстояний до элементов $\mathcal{A}$, будем называть астровершиной Штейнера, сеть, соединяющую $\mathcal{A}$ с K, — минимальной астросетью, а само $\mathcal{A}$ — границей. В случае ограниченно компактного X все его элементы являются компактами, а множество астровершин Штейнера непусто. В настоящей статье доказывается критерий того, когда астровершина Штейнера для одноточечных граничных компактов в $H(X)$ является одноточечной. Кроме того, получена нижняя оценка длины минимальной параметрической сети через длину астросети с одноточечными вершинами, содержащимися в граничных компактах, и изучены свойства границ, для которых достигается точная оценка. Также изучены бифуркации астровершин Штейнера при 1-параметрической деформации трехэлементных границ в $H(\mathbb{R}^2)$, которые иллюстрируют геометрические феномены, отсутствующие в классической задаче Штейнера для точек в $\mathbb{R}^2$.

Ключевые слова: задача Ферма — Штейнера, минимальное дерево Штейнера, минимальная параметрическая сеть, минимальная астросеть, астровершина Штейнера, астрокомпакт Штейнера, гиперпространство, ограниченно компактное пространство, расстояние Хаусдорфа.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. М. Тропин. О бифуркации решения задачи Ферма — Штейнера при 1-параметрической вариации границы в $H(\mathbb{R}^2)$ // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 264–287.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-264-287

On the bifurcation of the solution of the Fermat–Steiner problem under 1-parameter variation of the boundary in $H(\mathbb{R}^2)$

A. M. Tropin

Tropin Alexander Mikhailovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: amtropin@gmail.com

Abstract

In this paper, we consider the Fermat–Steiner problem in hyperspaces with the Hausdorff metric. If X is a metric space, and a non-empty finite subset $\mathcal{A}$ is fixed in the space of non-empty closed and bounded subsets $H(X)$, then we will call the element $K \in H(X)$, at which the minimum of the sum of the distances to the elements of $\mathcal{A}$ is achieved, the Steiner astrovertex, the network connecting $\mathcal{A}$ with K — the minimal astronet, and $\mathcal{A}$ itself — the border. In the case of proper X, all its elements are compact, and the set of Steiner astrovertices is nonempty. In this article, we prove a criterion for when the Steiner astrovertex for one-point boundary compact sets in $H(X)$ is one-point. In addition, a lower estimate for the length of the minimal parametric network is obtained in terms of the length of an astronet with one-point vertices contained in the boundary compact sets, and the properties of the boundaries for which an exact estimate is achieved are studied. Also bifurcations of Steiner astrovertices under 1-parameter deformation of three-element boundaries in $H(\mathbb{R}^2)$, which illustrate geometric phenomena that are absent in the classical Steiner problem for points in $\mathbb{R}^2$, are studied.

Keywords: Fermat–Steiner problem, Steiner minimal tree, minimal parametric network, minimal astronet, Steiner astrovertex, Steiner astrocompact, hyperspace, proper space, Hausdorff distance.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. M. Tropin, 2021, "On the bifurcation of the solution of the Fermat–Steiner problem under 1-parameter variation of the boundary in $H(\mathbb{R}^2)$", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 264–287.

1. Введение

Хорошо известна оптимизационная задача, которую принято сейчас называть *задачей Штейнера*. Пусть на евклидовой плоскости даны n фиксированных точек, называющихся *граничными*. Требуется построить связный граф с вершинами в граничных и, если необходимо, дополнительных точках плоскости такой, что сумма длин его ребер минимальна. Исходная постановка этой задачи предполагала добавление одной дополнительной точки к граничным и рассматривалась Якобом Штейнером. Формальная постановка задачи, разрешающая добавлять сколько угодно дополнительных точек, была опубликована только в 1934 году Войтехом Ярник и Милошом Кёсслером [1]. Если при этом фиксировать топологию сети, соединяющей граничные точки, т.е. заранее определить как вершины сети соединяются между собой, то получаются *минимальные параметрические сети*. Дитмар Цислик предложил рассматривать [2] *минимальные k-деревья Штейнера*, ограничив число дополнительных точек числом

k. Позже задачу Штейнера стали рассматриварить не только на плоскости, но и в других пространствах [3].

В рамках задачи Штейнера не только ищется решение, но и изучаются его изменения при деформации границы. В этом случае могут возникнуть *бифуркации* — скачкообразные перестраивания решения при сколь угодно малой деформации границы. Классическим примером является граница, состоящая из четырех точек, расположенных в вершинах квадрата, на евклидовой плоскости. Подобные явления возникают и в минимальных поверхностях при вариации контура [4]. Теория бифуркации очень сложна даже для случая четырехэлементной границы на плоскости (см. [5], [6]). Разнообразное применение теории бифуркаций можно посмотреть в [7]. В данной статье бифуркации будут изучаться для границы в гиперпространстве над евклидовой плоскостью.

Рассмотрим *задачу Ферма — Штейнера* в гиперпространстве $H(X)$ — пространстве непустых замкнутых и ограниченных подмножеств метрического пространства X. В качестве метрики в $H(X)$ выберем стандартное расстояние Хаусдорфа (см. [8], [9], [10]). Геометрия пространства $H(X)$ используется в таких важных приложениях как распознавание образов, сравнение двумерных и трехмерных геометричских объектов, построение непрерывных деформаций одного объекта в другой. О геометрии пространства $H(\mathbb{R}^n)$ см., например, [11].

Для фиксированного конечного подмножества $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset H(X)$, называемого *границей*, необходимо найти все компакты $K \in H(X)$, минимизирующие значение функции $S_{\mathcal{A}}(K) = \Sigma_{i=1}^n d_H(A_i, K)$. Минимальное значение функции $S_{\mathcal{A}}(K)$ назовем *длиной минимальной астросети* и обозначим через $S_{\mathcal{A}}$. Элементы $H(X)$, являющиеся решением задачи Ферма — Штейнера, будем называть *астровершинами Штейнера*, а их множество обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Если к тому же X — ограниченно компактное пространство, то элементы $H(X)$ являются компактами, а $\Sigma(\mathcal{A})$ непусто для любой границы $\mathcal{A}$; в этом случае астровершины Штейнера мы также будем называть *астрокомпактами Штейнера*.

Множество $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на *классы одинаковой взвешенности* $\Sigma_d(\mathcal{A})$, где $d = (d_1, \dots, d_n)$, то есть $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $d_H(A_i, K) = d_i$ для каждого i. Пусть $\Omega(\mathcal{A})$ — это множество всех таких d. Заметим, что класс одинаковой взвешенности может состоять более чем из одного элемента. В каждом классе определим *минимальные* и *максимальные по включению астровершины Штейнера*. Для любого вектора $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_i \geq 0$, определим множество $B_s(\mathcal{A}) := \bigcap_{i=1}^n B_{s_i}(A_i)$. В предыдущих работах показано, что при $s \in \Omega(\mathcal{A})$ множество $B_s(\mathcal{A})$ является максимальным астрокомпактом Штейнера, который содержит все остальные элементы из $\Sigma_s(\mathcal{A})$.

Постановка задачи Ферма — Штейнера в гиперпространствах и структура ее решений была описана в работе [14]. Задача для конечных граничных компактов в $\mathbb{R}^n$ рассматривалась также в [15].

В данной статье получены результаты для границ в ограниченно компактном гиперпространстве $H(X)$, а также построены примеры границ в гиперпространстве над $\mathbb{R}^2$, иллюстрирующие разнообразие геометрических эффектов решений задачи Ферма — Штейнера. Приведем основные результаты статьи.

1. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном гиперпространстве $H(X)$. Расстояние между a и b в X будем обозначать через $|ab|$. Для $a_1, \dots, a_n \in X$ определим число $\sigma_{a_1 \cdots a_n} := \min_{x \in X} \sum_{i=1}^n |a_i x|$, и пусть

$$\sigma_{\mathcal{A}} := \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \cdots a_n}.$$

Так как A_i — компакты, существует *реализующий набор* $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ такой, что $\sigma_{a_1 \cdots a_n} = \sigma_{\mathcal{A}}$.

- Имеет место неравенство $S_{\mathcal{A}} \geq \sigma_{\mathcal{A}}$;

- Если существует $K \in H(X)$, для которого $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$, то K — астрокомпакт Штейнера и существует реализующий набор $(a_1, \ldots, a_n)$ такой, что $|a_i k| = d_H(A_i, K)$ для некоторой точки Ферма — Штейнера k для границы $(a_1, \ldots, a_n)$, причем k можно выбрать из K;

- Границу $\mathcal{A}$ назовем *точечно реализуемой*, если существует $K \in H(X)$, для которого $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$. Доказан критерий: граница $\mathcal{A}$ точечно реализуема тогда и только тогда, когда некоторый реализующий набор $(a_1, \ldots, a_n)$ и его точка Ферма — Штейнера k таковы, что для $d_i = |a_i k|$ и $d = (d_1, \ldots, d_n)$ выполняется $S_{\mathcal{A}}\Big(B_d(\mathcal{A})\Big) = \sigma_{\mathcal{A}}$.

2. Напомним, что пространство X изометрично вкладывается в свое гиперпространство $H(X)$ следующим естественным образом: каждой точке x из X сопоставляется одноточечное подмножество $\{x\}$ в $H(X)$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем отождествлять $x \in X$ и $\{x\} \in H(X)$. Оказывается, каждое решение задачи Ферма — Штейнера для границы в X сохранится и в $H(X)$, однако могут появиться и другие решения. В данной работе доказан критерий одноточечности астровершины Штейнера для одноточечной границы в $H(X)$ в случае ограниченно компактного пространства X. Этот критерий позволяет определить, когда множество решений задачи Ферма — Штейнера для границы $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ в X исчерпывает множество решений для соответствующей одноточечной границы $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\big\}$ в $H(X)$.

3. Так как норма является выпуклой функцией, то множество всех решений задачи Ферма — Штейнера в нормированном пространстве представляет собой выпуклый компакт, состоящий либо из одной, либо из континуума точек. Однако в случае $H(\mathbb{R}^2)$ возможно конечное (большее 1) число решений. В $H(\mathbb{R}^2)$ построено непрерывное 1-параметрическое семейство трехэлементных границ с переменным конечным числом классов (1, 2, 3), причем каждый из классов является непрерывным продолжением других при меньших значениях параметра.

4. Тогда как в случае трехэлементной границы в $\mathbb{R}^2$ решение задачи Ферма — Штейнера единственно и непрерывно зависит от границы, в $H(\mathbb{R}^2)$ может меняться и число решений, и мощность каждого из них. В статье это продемонстрировано на примере непрерывного 1-параметрического семейства трехэлементных границ в $H(\mathbb{R}^2)$, для которого существуют значения параметра, в любой сколь угодно малой окрестности которого содержатся значения, соответствующие границам с различными характеристиками пространства решений (один или континуум минимальных астрокомпактов Штейнера, произвольная конечная или континуальная мощность минимального астрокомпакта Штейнера).

Автор благодарит своих научных руководителей профессоров А.А. Тужилина и Э.Э. Гасанова, а также профессора А.О. Иванова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

2. Основные определения и предварительные результаты

В данном разделе приведены необходимые сведения из теории сетей (подраздел 2.1) и геометрии пространства компактов с расстоянием по Хаусдорфу (подраздел 2.2).

2.1. Графы и сети. Проблема Штейнера. Теоремы существования

Мы будем рассматривать простые графы, подробные сведения по теории которых можно найти, например, в [12].

Выберем некоторое подмножество вершин графа G и назовем его *границей ∂G графа G*, а сам G — *графом с границей*. Вершины из ∂G будем называть *граничными*, а все остальные вершины G — *внутренними*. Мы предполагаем, что граница (возможно, пустая) есть у любого

графа. Если граф является деревом с вершинами степеней 1 или 3, а все граничные вершины имеют степень 1, то такой граф назовем *бинарным деревом*.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное множество, и G — связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* $\mathcal{A}$, если $\partial G = \mathcal{A}$. Если $G = (V, E)$, и X — некоторое множество, то отображение $\Gamma : V \to X$ называем *сетью* Γ *типа* G, а G называется *параметризующим графом* сети или ее *топологией*. Ограничения Γ на ребра, вершины (граничные, внутренние), границу графа G называются соответственно *ребрами*, *вершинами* (*граничными, внутренними*), *границей* сети Γ. Если $\Gamma(v_i) = \Gamma(v_j)$, то ребро $\Gamma : \{v_i, v_j\} \to X$ называется *вырожденным*, в противном случае — *невырожденным*. Если все ребра сети невырождены, то такая сеть называется *невырожденной*. Обозначим через $\partial\Gamma$ границу сети Γ. Если множество $\mathcal{A} \subset X$ является образом $\partial\Gamma$, то будем говорить, что Γ *соединяет* $\mathcal{A}$ *по отображению* $\partial\Gamma$, и обозначим через $\mathcal{A} \subset \Gamma$.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, и Γ — сеть типа $G = (V, E)$ в X. Тогда длина ребра $\Gamma : \{v_i, v_j\} \to X$ сети Γ определяется как расстояние $\rho\big(\Gamma(v_i), \Gamma(v_j)\big)$, а длина сети Γ — как сумма длин всех ее ребер:

$$\rho(\Gamma) := \sum_{v_i v_j \in E} \rho\big(\Gamma(v_i), \Gamma(v_j)\big).$$

Пусть граф G соединяет $\mathcal{A} \subset X$. Тогда **будем считать, что все сети Γ типа $G = (V, E)$ в X удовлетворяют следующему условию: ограничение Γ на $\mathcal{A}$ — тождественное отображение**, то есть $\Gamma|_{\partial G} = \mathrm{id}$. Таким образом, если $v_1, \ldots, v_k$ — внутренние вершины графа G, то сеть Γ типа G, соединяющая $\mathcal{A} \subset X$, однозначно определяется положением своих внутренних вершин $\big(\Gamma(v_1), \ldots, \Gamma(v_k)\big)$.

Пусть графы G_1 и G_2 соединяют $\mathcal{A} \subset X$. Назовем сети Γ_i типа G_i, $i = 1, 2$, *равными*, если существует изоморфизм $\nu : V_1 \to V_2$ графов G_i, тождественный на $\mathcal{A}$ и такой, что $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \nu$. Отождествляя Γ_1 и Γ_2 с помощью этого изоморфизма ν, будем считать, что равные сети — это сети одного и того же типа, например, $G_1 = (V, E)$. Если к тому же для каждого ребра $e \in E$ его длина в каждой из сетей Γ_i одинакова, то такие сети назовем *одинаково взвешенными*.

Пусть связный граф $G = (V, E)$ соединяет фиксированную границу $\mathcal{A}$ в метрическом пространстве (X, ρ). Обозначим через $[G, \mathcal{A}]$ множество всех сетей Γ типа G. Точную нижнюю грань величин $\rho(\Gamma)$ по всем сетям из $\Gamma \in [G, \mathcal{A}]$ назовем *длиной минимальной параметрической сети* и обозначим через $\mathrm{mpn}[G, \mathcal{A}]$. Если в $[G, \mathcal{A}]$ существует сеть с длиной, равной длине минимальной параметрической сети, то назовем такую сеть *минимальной параметрической сетью типа G, соединяющей $\mathcal{A}$*.

Точную нижнюю грань величин $\rho(\Gamma)$ по всем сетям всевозможным сетям, соединяющим $\mathcal{A}$, назовем *длиной минимального дерева Штейнера на $\mathcal{A}$*. Кроме того, ее можно определить и как инфимум $\rho(\Gamma)$ по всем связным графам с границей $\mathcal{A}$:

$$\mathrm{smt}(\mathcal{A}) = \inf_{\Gamma : \mathcal{A} \subset \Gamma} \rho(\Gamma) = \inf_{G : \partial G = \mathcal{A}} \mathrm{mpn}[G, \mathcal{A}].$$

Если первый инфимум достигается на некоторой сети, то, как показано в [3], он достигается также и на невырожденной сети, которая является деревом не более чем с $n-2$ внутренними вершинами и называется *минимальным деревом Штейнера на $\mathcal{A}$*. Ее внутренние вершины называются *точками Штейнера*, а изучение минимальных деревьев Штейнера — *проблемой Штейнера*.

Следующий результат доказывается точно так же, как теоремы существования минимальных сетей для полных римановых многообразий, см. [3].

Теорема 1. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство. Тогда для любого его конечного подмножества $\mathcal{A}$ в пространстве X существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее $\mathcal{A}$, и для любого связного графа G с границей $\mathcal{A}$ существует соединяющая $\mathcal{A}$ минимальная параметрическая сеть типа G в X.*

Утверждение 1. *Если метрическое пространство X ограниченно компактно, то пространство $H(X)$ его компактных подмножеств с метрикой Хаусдорфа также ограниченно компактно.*

В дальнейшем нам будет нужна следующая теорема существования минимальных сетей в пространстве компактов с метрикой Хаусдорфа. Необходимые определения приведены в разделе 2.2.

Следствие 1. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, и $H(X)$ — пространство его компактных подмножеств с метрикой Хаусдорфа. Тогда для любого конечного семейства компактов $\mathcal{A} \subset H(X)$ в пространстве $H(X)$ существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее $\mathcal{A}$, и для любого связного графа G с границей $\mathcal{A}$ существует соединяющая $\mathcal{A}$ минимальная параметрическая сеть типа G в $H(X)$.*

Теперь пусть G — дерево с n граничными вершинами степени 1 и единственной внутренней вершиной, которая смежна с каждой из граничных, и G соединяет границу $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$, тогда параметрическую сеть Γ из $[G, \mathcal{A}]$ назовем сетью типа *звезда*, или *астросетью*. Внутреннюю вершину такой астросети, соединяющей $\mathcal{A}$, назовем *астровершиной для границы $\mathcal{A}$*. По аналогии с минимальными параметрическими сетями, точную нижнюю грань величин $\rho(\Gamma)$ по всем астросетям назовем *длиной минимальной астросети* и обозначим через $S_{\mathcal{A}}$. Длину параметрической астросети, соединяющей границу $\mathcal{A}$ с компактом K, будем обозначать через $S_{\mathcal{A}}(K)$. Если существует астросеть с длиной, равной длине минимальной астросети, то назовем такую сеть *минимальной астросетью, соединяющей $\mathcal{A}$*, а ее внутреннюю вершину — *астровершиной Штейнера*. Множество всех астровершин Штейнера для границы $\mathcal{A}$ мы обозначим через $\Sigma(\mathcal{A})$. Изучение минимальных астросетей называется *проблемой Ферма — Штейнера*.

Следующий результат следует из следствия 1 и утверждения 1.

Следствие 2. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство, и $\mathcal{A}$ — непустое конечное подмножество $H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ непусто.*

2.2. Определение и некоторые свойства метрики Хаусдорфа

Напомним, что *замкнутой окрестностью радиуса r* множества A в метрическом пространстве (X, ρ) называется множество $B_r(A) := \{x \in X \ \rho(x, A) \le r\}$, где $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. *Расстоянием Хаусдорфа* между множествами A, B из (X, ρ) называется величина

$$d_H(A, B) := \inf\{r : B_r(A) \supset B, B_r(B) \supset A\},$$

или, что эквивалентно,

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\}.$$

Как известно, расстояние Хаусдорфа является метрикой на пространстве $H(X)$, см. [13].

Далее для удобства будем обозначать $\rho(a, b)$ через $|ab|$ для любых точек $a, b \in X$.

Утверждение 2. *Для одноточечного компакта $\{a\}$, компакта B и компакта $\widetilde{B} \subset B$ из $H(X)$ имеет место неравенство: $d_H(\{a\}, \widetilde{B}) \le d_H(\{a\}, B)$.*

Доказательство.

По определению расстояния Хаусдорфа,

$$d_H(\{a\}, B) = \max\{\sup_{b \in B} |ba|, \inf_{b \in B} |ba|\} = \sup_{b \in B} |ba|.$$

Поскольку $\widetilde{B} \subset B$, то для любой точки a верно неравенство:

$$d_H\big(\{a\}, B\big) = \sup_{b\in B} |ba| \geq \sup_{b\in \widetilde{B}} |ba| = d_H\big(\{a\}, \widetilde{B}\big).$$

□

Следующие утверждения, которые нам потребуются, доказаны в [14].

Утверждение 3. *Пусть A и B — компакты в метрическом пространстве X. Тогда для любой точки $a \in A$ существует точка $b \in B$ такая, что $|ab| \leq d_H(A, B)$.*

Утверждение 4. *Пусть A — компакт в ограниченно компактном пространстве X. Тогда для любого $d > 0$ множество $B_d(A)$ также является компактом.*

2.3. Структура астрокомпактов Штейнера в ограниченно компактных пространствах

Мы будем изучать минимальные астросети, соединяющие конечные границы $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ в $\Big(H(X), d_H\Big)$. Длина ребра $e = BC$ сети определяется как расстояние Хаусдорфа $d_H(B, C)$.

Пусть сначала X — произвольное метрическое пространство. Напомним, что множество всех астровершин Штейнера для границы $\mathcal{A} \subset X$ мы обозначаем через $\Sigma(\mathcal{A})$. Положим $d(x, \mathcal{A}) = \Big(\rho(x, a_1), \ldots, \rho(x, a_n)\Big)$ и $\Omega(\mathcal{A}) = \big\{d(y, \mathcal{A}) : y \in \Sigma(\mathcal{A})\big\}$. Для каждого $d \in \Omega$ мы определим *класс астровершин Штейнера одинаковой взвешенности* $\Sigma_d(\mathcal{A}) = \big\{y \in \Sigma(\mathcal{A}), d(y, \mathcal{A}) = d\big\}$. Таким образом, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на классы $\Sigma_d(\mathcal{A})$, $d \in \Omega$. Заметим, что, в общем случае, множество $\Sigma(\mathcal{A})$ может быть пустым, однако в случае ограниченной компактности X это множество непусто.

При этом астровершины Штейнера не всегда определяются однозначно. *Минимальным* и *максимальным астровершинами Штейнера* в классе одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A})$ назовем соответственно минимальный и максимальный элементы в $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в смысле естественного порядка по включению.

Для произвольного набора $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $d_i \geq 0$, и семейства $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ определим множество $B_d(\mathcal{A}) := \cap_{i=1}^n B_{d_i}(A_i)$. Если $d_i = d_H(K, A_i)$, $i = 1, \ldots, n$, то $B_d(\mathcal{A})$ назовем *каноническим расширением элемента K относительно семейства $\mathcal{A}$* и будем обозначать через $K_d(\mathcal{A})$.

Пусть теперь X — ограниченно компактное метрическое пространство с метрикой ρ, в нем все замкнутые и ограниченные множества являются компактами. Астровершины Штейнера в этом случае будем называть *астрокомпактами Штейнера*. В работе [14] описана структура класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в случае ограниченно компактного X, мы напомним здесь основной результат.

Теорема 2 (структура $\Sigma_d(\mathcal{A})$ в ограниченно компактном пространстве). *Пусть X — ограниченно компактное пространство, $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset H(X)$. Тогда $\Sigma(\mathcal{A})$ и $\Omega(\mathcal{A})$ непусты, и для любого $d \in \Omega(\mathcal{A})$ компакт K лежит в классе $\Sigma_d(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда $K_\lambda \subset K \subset K_d(\mathcal{A})$ для некоторого минимального астрокомпакта Штейнера $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ и единственного максимального астрокомпакта Штейнера $K_d(\mathcal{A}) \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.*

3. Связь минимальных параметрических сетей с точечными сетями

Определим отображение $\nu X \to H(X)$, которое каждой точке пространства X с метрикой ρ сопоставляет одноточечный компакт из пространства $H(X)$ с метрикой d_H: $\nu(x) = \{x\}$. Назовем граф $\bar{G}$ в $H(X)$ *точечным*, если все его вершины являются одноточечными компактами.

Множество ребер дерева $\bar{G}$ обозначим через $\bar{E}$. Поскольку для любых точек $x, y \in X$ верно $\rho(x,y) = d_H\big(\{x\},\{y\}\big)$, то ν — изометричное вложение (X,ρ) в $\big(H(X), d_H\big)$, поэтому в дальнейшем будем отождествлять точечный граф $\bar{G}$ в $H(X)$ и соответствующий ему граф $\nu^{-1}(\bar{G})$ в X.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — деревья в $H(X)$. Дерево G_1 назовем *подчиненным дереву* G_2, если существует $\varphi : V_1 \to V_2$ — изоморфизм деревьев G_1 и G_2 такой, что для любой вершины $v \in V_1$ выполняется $v \subset \varphi(v)$ и для любого ребра $vw \in E_1$ выполняется $d_H(v,w) \le d_H\Big(\varphi(v), \varphi(w)\Big)$. Подчинение будем обозначать через $G_1 \prec G_2$.

Далее считаем, что пространство X — ограниченно компактное.

3.1. Нижняя оценка длины сети в гиперпространстве с помощью точечных сетей

Теорема 3. *Для любого дерева G в $H(X)$ и для любой точки a любой его вершины существует подчиненное G точечное дерево $\bar{G} \prec G$, в котором a является вершиной.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$. Выберем вершину $B \in V$. По утверждению 3, для любой точки $b \in B$ и для любой смежной с B вершины B' существует точка $b' \in B'$ такая, что $\rho(b,b') \le d_H(B,B')$. Продолжим процесс следующим образом: для любой вершины B', в которой уже выбрана точка b', рассмотрим все смежные с ней вершины B'', в которых еще не была выбрана точка. По утверждению 3, существует точка $b'' \in B''$ такая, что $\rho(b',b'') \le d_H(B',B'')$. Из связности дерева G получаем, что за конечное число шагов мы выберем по точке в каждой вершине из V. Дерево с вершинами в выбранных точках и ребрами, соединяющими вершины если и только если соответствующие им вершины из V были смежны, является искомым. Теорема доказана. □

Следствие 3. *Если подчиненное дереву G в $H(X)$ точечное дерево $\bar{G} \prec G$ выбрано как в теореме 3, то $d_H(\bar{G}) \le d_H(G)$.*

Доказательство. Из неравенства для каждого ребра следует:

$$d_H(G) = \sum_{B_iB_j \in E, i>j} d_H(B_i, B_j) \ge \sum_{\{b_i\}\{b_j\} \in \bar{E}, i>j} d_H\big(\{b_i\},\{b_j\}\big) = d_H(\bar{G}).$$

□

Введем функцию $\sigma_{a_1 \cdots a_n}(k) := \sum_{i=1}^{n} |a_i k|$, минимальное значение которой будем обозначать через $\sigma_{a_1 \cdots a_n}$ (в ограниченно компактном пространстве X оно достигается в некоторой точке, согласно теореме 1). Тогда теорему 3 можно переформулировать для астросетей Штейнера следующим образом.

Утверждение 5. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$, и K — некоторый компакт. Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, для любой точки $a_i \in A_i$ существуют точки $k \in K$ и $a_j \in A_j$, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, такие, что $d_H(A_j, K) \ge |a_j k|$ для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$. В частности, $S_{\mathcal{A}}(K) \ge \sigma_{a_1 \cdots a_n}(k)$.*

Далее мы получим грубую нижнюю оценку на длину минимальной астросети. Для многих границ эта оценка не достигается. Нас же будут интересовать те границы, длина минимальной астросети для которых в точности равняется нижней грани.

Утверждение 6. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется*

$$S_{\mathcal{A}} \ge \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \ne i} \sigma_{a_1 \cdots a_n}.$$

Доказательство. По утверждению 5, для любого $i \in \{1,\dots,n\}$, для любого $a_i \in A_i$ существуют точка k из астрокомпакта Штейнера K и точки $a_j \in A_j$, $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$, такие, что

$$S_{\mathcal{A}} \geq \sigma_{a_1\cdots a_n}(k) \geq \sigma_{a_1\cdots a_n} \geq \min_{a_j \in A_j, j\neq i} \sigma_{a_1\cdots a_n}.$$

Поскольку точку $a_i \in A_i$ можно выбрать произвольным образом, то

$$S_{\mathcal{A}} \geq \max_{a_i\in A_i} \min_{a_j\in A_j, j\neq i} \sigma_{a_1\cdots a_n}.$$

Утверждение доказано. □

Поскольку в утверждении 6 можно зафиксировать любой индекс $i \in \{1,\dots,n\}$, то справедливо следствие.

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1,\dots,A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда*

$$S_{\mathcal{A}} \geq \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \max_{a_i\in A_i} \min_{a_j\in A_j, j\neq i} \sigma_{a_1\cdots a_n}.$$

Правую часть неравенства из следствия 4 назовем *нижней точечной оценкой для $S_{\mathcal{A}}$* и обозначим через $\sigma_{\mathcal{A}}$.

3.2. Точечно реализуемые границы

Границу $\mathcal{A}$ назовем *точечно реализуемой*, если существует компакт K такой, что $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$. Из следствия 4 немедленно получаем следующий факт.

Утверждение 7. *Пусть $\mathcal{A}$ — точечно реализуемая граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда компакт K, для которого верно $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$, является астрокомпактом Штейнера для $\mathcal{A}$, и $S_{\mathcal{A}} = \sigma_{\mathcal{A}}$.*

Поскольку A_i являются компактами, существуют $a'_i \in A_i$, на которых нижняя точечная оценка достигается: $\sigma_{\mathcal{A}} = \sigma_{a'_1\cdots a'_n}$. Все такие упорядоченные наборы $(a'_1,\dots,a'_n)$ назовем *реализующими для $\mathcal{A}$*, или *соответствующими ей*.

Индекс i назовем *реализующим*, если

$$\max_{a_i\in A_i} \min_{a_j\in A_j, j\neq i} \sigma_{a_1\cdots a_n} = \sigma_{\mathcal{A}}.$$

Точку $a'_i \in A_i$ с реализующим индексом i назовем *i-максимальной*, если

$$\min_{a_j\in A_j, j\neq i} \sigma_{a_1\cdots a_{i-1}a'_i a_{i+1}\cdots a_n} = \max_{a_i\in A_i} \min_{a_j\in A_j, j\neq i} \sigma_{a_1\cdots a_n}$$

(она существует, так как A_i — компакт).

Утверждение 8. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1,\dots,A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$, а точка $a'_i \in A_i$ и компакт K таковы, что*

$$S_{\mathcal{A}}(K) = \min_{a_j\in A_j, j\neq i} \sigma_{a_1\cdots a_{i-1}a'_i a_{i+1}\cdots a_n}.$$

Тогда K является астрокомпактом Штейнера для $\mathcal{A}$, и a'_i является i-максимальной точкой.

Доказательство. По утверждению 6, для каждого фиксированного $i \in \{1, \dots, n\}$ и любого компакта K выполняется

$$S_{\mathcal{A}}(K) \geq S_{\mathcal{A}} \geq \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \cdots a_n}.$$

По условию, для некоторого фиксированного i существует компакт K, для которого выполняется

$$S_{\mathcal{A}}(K) = \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \cdots a_{i-1} a'_i a_{i+1} \cdots a_n} \leq \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \cdots a_n}.$$

Следовательно, все неравенства обращаются в равенства. В частности, $S_{\mathcal{A}}(K) = S_{\mathcal{A}}$, то есть K является астрокомпактом Штейнера для $\mathcal{A}$, и выполняется равенство из определения i-максимальной точки для a'_i. Утверждение доказано. □

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда либо она не является точечно реализуемой, либо $\{K : S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}\} = \Sigma(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Пусть существует компакт K такой, что $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$.

По утверждению 7, такой компакт является астрокомпактом Штейнера для $\mathcal{A}$, то есть $\{K : S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}\} \subset \Sigma(\mathcal{A})$.

Обратно, из точечной реализуемости $\mathcal{A}$ следует существование компакта K такого, что $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$, причем, согласно утверждению 7, K является астрокомпактом Штейнера. Пусть K' — астрокомпакт Штейнера для $\mathcal{A}$, тогда $S_{\mathcal{A}}(K') = S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$. Значит, $\{K : S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}\} \supset \Sigma(\mathcal{A})$.

Теорема доказана. □

Пусть граница $\mathcal{A}$ — точечно реализуемая, K — ее астрокомпакт Штейнера, а набор $(a'_1, \dots, a'_n)$, $a'_j \in A_j$, — реализующий для $\mathcal{A}$. Пусть также существует точка $k \in K$ такая, что $|a'_j k| = d_H(A_j, K)$ для всех $j = 1, \dots, n$. Тогда назовем:

- набор $(a'_1, \dots, a'_n)$ — *K-взвешенным набором*;
- точку k — *реализующей точкой*;
- точечную астросеть с вектором вершин $(a'_1, \dots, a'_n, k)$ и астровершиной k — *K-реализующей астросетью*.

Астровершину Штейнера для точечной границы $\{a_1, \dots, a_n\}$ также будем называть *точкой Ферма — Штейнера*.

Теорема 5 (необходимое условие точечной реализуемости границы). *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — точечно реализуемая граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда для любого астрокомпакта Штейнера K существует K-реализующая астросеть с вектором вершин $(a'_1, \dots, a'_n, k)$, в которой астровершина k является точкой Ферма — Штейнера для границы $\{a'_1, \dots, a'_n\}$.*

Доказательство. Пусть i — реализующий индекс, и пусть $a'_i \in A_i$ — i-максимальная точка, то есть

$$\min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \cdots a_{i-1} a'_i a_{i+1} \cdots a_n} = \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \cdots a_n}.$$

По утверждению 5, для точки $a'_i \in A_i$ существуют точки $k \in K$ и $a'_j \in A_j$, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, такие, что $d_H(A_j, K) \geq |a'_j k|$ для любого $j = 1, \dots, n$ и $S_{\mathcal{A}}(K) \geq \sigma_{a'_1 \cdots a'_n}(k)$. Получаем:

$$\sigma_{a'_1 \cdots a'_n}(k) \leq S_{\mathcal{A}}(K) = \max_{a_i \in A_i} \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \cdots a_n} =$$

$$= \min_{a_j \in A_j, j \neq i} \sigma_{a_1 \cdots a_{i-1} a'_i a_{i+1} \cdots a_n} \leq \sigma_{a'_1 \cdots a'_n} \leq \sigma_{a'_1 \cdots a'_n}(k).$$

Значит, все неравенства обращаются в равенства, поэтому $k \in K$ является точкой Ферма — Штейнера для $\{a'_1, \ldots, a'_n\}$, причем $d_H(A_j, K) = |a'_j k|$ для любого $j = 1, \ldots, n$. Теорема доказана. □

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — точечно реализуемая граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Тогда разным классам одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A})$ соответствуют различные векторы d длин ребер K_d-реализующих астросетей, где $K_d \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.*

Теорема 6. *Граница $\mathcal{A}$ точечно реализуема тогда и только тогда, когда некоторый реализующий набор $(a_1, \ldots, a_n)$ и его точка Ферма — Штейнера k таковы, что для $d_i = |a_i k|$ и $d = (d_1, \ldots, d_n)$ выполняется $S_{\mathcal{A}}\Big(B_d(\mathcal{A})\Big) = \sigma_{\mathcal{A}}$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 5 и того факта, что каноническое расширение астрокомпакта Штейнера равно максимальному астрокомпакту Штейнера из того же класса одинаковой взвешенности. Достаточность следует из определения точечно реализуемой границы. Теорема доказана. □

Замечание 1. *Получаем алгоритм определения точечной реализуемости границы $\mathcal{A}$ и, в случае точечной реализуемости, перечисления всех ее максимальных астрокомпактов Штейнера (а значит, и классов одинаковой взвешенности):*

1. *Вычисляем $\sigma_{\mathcal{A}}$;*
2. *Находим все реализующие наборы $(a_1, \ldots, a_n)$;*
3. *Находим все точки Ферма — Штейнера k для каждого реализующего набора;*
4. *Для каждого k строим каноническое расширение компакта $\{k\}$ относительно границы $\mathcal{A}$ и вектора расстояний $d = \big(|a_1 k|, \ldots, |a_n k|\big)$;*
5. *Если среди канонических расширений существует компакт K такой, что $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{\mathcal{A}}$, то граница $\mathcal{A}$ является точечно реализуемой, компакт K — максимальным астрокомпактом Штейнера, а $\sigma_{\mathcal{A}}$ — длиной минимальной астросети;*
6. *Все канонические расширения K', для которых выполняется равенство $S_{\mathcal{A}}(K') = \sigma_{\mathcal{A}}$, являются максимальными астрокомпактами Штейнера в своих классах одинаковой взвешенности, и все классы для границы $\mathcal{A}$ исчерпываются данными.*

Замечание 2. *Неизвестен ответ на следующий вопрос: верно ли, что для любого реализующего набора и каждой его точки Ферма — Штейнера f существует астрокомпакт Штейнера той же взвешенности и содержащий f.*

Утверждение 9. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — точечно реализуемая граница в ограниченно компактном пространстве $H(X)$. Если K — астрокомпакт Штейнера из класса одинаковой взвешенности $\Sigma_d(\mathcal{A})$, а каждая i-максимальная точка $a_i \in A_i$ входит ровно в один K-взвешенный реализующий набор $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_j \in A_j$, и он имеет единственную точку Ферма — Штейнера f, то f принадлежит всем астрокомпактам из класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Пусть i — реализующий индекс, и пусть $a_i \in A_i$ — i-максимальная точка. Пусть K — астрокомпакт Штейнера из условия, а K' — другой астрокомпакт Штейнера из

того же класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$. По теореме 5, существуют реализующие точки $k \in K$ и $k' \in K'$, соответствующие реализующим наборам $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(a'_1, \ldots, a'_{i-1}, a_i, a'_{i+1}, \ldots, a'_n)$ и являющиеся для них точками Ферма — Штейнера. Принадлежность K и K' одному классу одинаковой взвешенности влечет равенства $|a'_j k'| = d_H(A_j, K') = d_H(A_j, K) = |a_j k|$ для всех $j = 1, \ldots, n$, поэтому оба набора являются K-взвешенными. По условию, для такой a_i существует единственный K-взвешенный реализующий набор, а поэтому $a'_j = a_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Более того, из условия единственности точки Ферма — Штейнера для такого набора следует, что $k' = k = f$. Значит, f является общей точкой всех астрокомпактов Штейнера из класса $\Sigma_d(\mathcal{A})$. Утверждение доказано. □

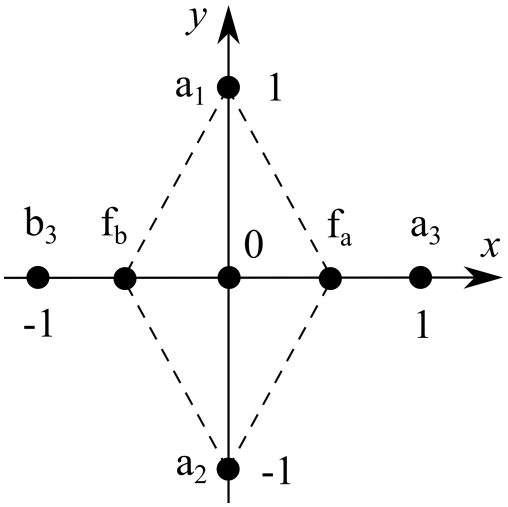


Рис. 1: К замечанию 3.

Замечание 3. *Применим теорию к определению точечной реализуемости границы. Пусть в* $\mathbb{R}^2$ *даны точки* $a_1 = (0,1)$, $a_2 = (0,-1)$, $a_3 = (1,0)$, $b_3 = (-1,0)$ *(см. рис. 1). Рассмотрим границу* $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$, *где* $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_2\}$, $A_3 = \{a_3, b_3\}$. *Тогда при* $i = 1$ *верно*

$$\max_{c_1 \in A_1} \min_{c_j \in A_j, j \neq 1} \sigma_{c_1 c_2 c_3} = \min\{\sigma_{a_1 a_2 a_3}, \sigma_{a_1 a_2 b_3}\} = \sigma_{a_1 a_2 a_3} = \sigma_{a_1 a_2 b_3}.$$

В силу имеющихся симметрий,

$$\max_{c_2 \in A_2} \min_{c_j \in A_j, j \neq 2} \sigma_{c_1 c_2 c_3} = \sigma_{a_1 a_2 a_3}.$$

При $i = 3$ *имеем:*

$$\max_{c_3 \in A_3} \min_{c_j \in A_j, j \neq 3} \sigma_{c_1 c_2 c_3} = \max\{\sigma_{a_1 a_2 a_3}, \sigma_{a_1 a_2 b_3}\} = \sigma_{a_1 a_2 a_3}.$$

Значит, $\sigma_{\mathcal{A}} = \sigma_{a_1 a_2 a_3} = \sigma_{a_1 a_2 b_3}$.

Согласно теореме 5, необходимым условием точечной реализуемости границы $\mathcal{A}$ *является принадлежность ее астрокомпакту Штейнера* K *точки Ферма — Штейнера* k *каждой* K*-реализующей точечной астросети с вектором вершин* (c_1, c_2, c_3, k), $c_i \in A_i$. *Поэтому рассмотрим точки Ферма — Штейнера для наборов* (a_1, a_2, a_3) *и* (a_1, a_2, b_3) *и обозначим их через* f_a *и* f_b *соответственно. Пусть* $K = \{f_a, f_b\}$. *Непосредственной проверкой получим, что* $S_{\mathcal{A}}(K) = \sigma_{a_1 a_2 a_3}$, *следовательно, по определению,* $\mathcal{A}$ *является точечно реализуемой границей. У нее есть два реализующих набора* (a_1, a_2, a_3) *и* (a_1, a_2, b_3), *а* K *является астрокомпактом*

Штейнера. По утверждению 9, f_a и f_b принадлежат всем астрокомпактам Штейнера из класса одинаковой взвешенности, содержащего K, поэтому K — минимальный астрокомпакт Штейнера. Поскольку не существует других точечных минимальных астросетей, соединяющих наборы (a_1, a_2, a_3) и (a_1, a_2, b_3), то, согласно следствию 5, этот класс одинаковой взвешенности — единственный.

3.3. Структура решений задачи Ферма — Штейнера для одноточечных граничных компактов

Из следствия 3 вытекает следующий факт.

Следствие 6. *Длина минимальной параметрической сети для границы $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ в пространстве X равна длине минимальной параметрической сети той же топологии для границы $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\big\}$ в $H(X)$.*

В частности, следствие верно для минимальной параметрической астросети. Кроме того, поскольку кратчайшее дерево можно получить перебором минимальных параметрических сетей, то справедливо

Следствие 7. *Длина кратчайшего дерева для границы $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ в пространстве X равна длине кратчайшего дерева для границы $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\big\}$ в $H(X)$.*

Теорема 7. *Пусть для некоторого множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из X не существует двух разных кратчайших деревьев одной и той же топологии. Тогда в каждом кратчайшем дереве, соединяющем $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\big\}$ в $H(X)$, все компакты Штейнера — одноточечные.*

Доказательство. Пусть $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{K}, E)$ — кратчайшее дерево в $H(X)$, $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ — внутренние вершины G. Если внутренняя вершина K содержит хотя бы две различные точки k_1 и k_2, то, по теореме 3, существуют два разных дерева $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$, содержащих k_1 и k_2 в качестве вершин и, соответственно, два разных дерева $\nu^{-1}(\bar{G}_1)$ и $\nu^{-1}(\bar{G}_2)$. По следствию 6, $\nu^{-1}(\bar{G}_1)$ и $\nu^{-1}(\bar{G}_2)$ являются кратчайшими деревьями и имеют одну и ту же топологию. Последнее противоречит условию. Значит, $K = \{k\}$, откуда все компакты Штейнера являются одноточечными множествами: $K_j = \{k_j\}$ для любого $j = 1, \ldots, m$. Теорема доказана. □

Как известно, в пространстве $X = \mathbb{R}^m$ для любого множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ не существует двух кратчайших деревьев одной и той же топологии. Учитывая это, из теоремы 7 вытекает

Следствие 8. *В каждом кратчайшем дереве, соединяющем границу $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\big\}$ в $H(\mathbb{R}^m)$, все компакты Штейнера — одноточечные.*

Для минимальных параметрических астросетей возможно получить критерий одноточечности астровершины Штейнера.

Теорема 8 (критерий одноточечности астровершины Штейнера для одноточечной границы в $H(X)$). *Для множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ из X существует хотя бы две различные астровершины Штейнера в одном классе одинаковой взвешенности тогда и только тогда, когда для границы $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}\big\}$ в $H(X)$ существует неодноточечная астровершина Штейнера.*

Доказательство. Пусть k_1, k_2 — различные астровершины Штейнера из одного класса одинаковой взвешенности для границы $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ в X, следовательно, для каждого i верно $\rho(k_1, a_i) = \rho(k_2, a_i)$. Тогда для каждого i верно $d_H\big(\{k_1, k_2\}, \{a_i\}\big) = d_H\big(\{k_1\}, \{a_i\}\big) =$

$\rho(k_1, a_i)$, откуда $S_{\mathcal{A}}\big(\{k_1, k_2\}\big) = S_{\mathcal{A}}\big(\{k_1\}\big) = S_A$. Согласно следствию 6, $S_A = S_{\mathcal{A}}$, откуда следует, что $\{k_1, k_2\}$ является астровершиной Штейнера для $\mathcal{A}$.

Обратно, пусть существует астровершина K для границы $\mathcal{A}$, содержащая хотя бы две различные точки k_1 и k_2. По утверждению 3, для каждого i выполняются неравенства $\rho(k_1, a_i) \le d_H\big(K, \{a_i\}\big)$ и $\rho(k_2, a_i) \le d_H\big(K, \{a_i\}\big)$. Тогда $S_{\mathcal{A}}\big(\{k_1\}\big) = S_A(k_1) \le S_{\mathcal{A}}(K)$ и $S_{\mathcal{A}}\big(\{k_2\}\big) = S_A(k_2) \le S_{\mathcal{A}}(K) = S_{\mathcal{A}}$, значит, компакты $\{k_1\}$ и $\{k_2\}$ также являются астровершинами Штейнера и все неравенства обращаются в равенства. Тогда $\rho(k_1, a_i) = \rho(k_2, a_i)$ для каждого i, поэтому k_1 и k_2 являются астровершинами Штейнера для границы A и лежат в одном классе одинаковой взвешенности.

Теорема доказана. □

Утверждение 10. *Пусть X — конечномерное нормированное пространство со строго или нестрого выпуклой нормой ρ. Тогда для границы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ в X каждый класс одинаковой взвешенности $\Sigma_d(A)$ является выпуклым множеством.*

Доказательство. Если $\Sigma_d(A)$ состоит из одного элемента, то оно выпукло. Если в $\Sigma_d(A)$ содержится два различных решения x_1 и x_2. Так как функция расстояния в X выпуклая, то сумма расстояний от любой точки $x \in [x_1, x_2]$ до $\{a_1, \dots, a_n\}$ не превышает S_A, а из минимальности функции $S_A(x)$ в точках x_1 и x_2 следует, что $S_A(x) = S_A(x_1) = S_A$. Значит, весь отрезок $[x_1, x_2]$ содержится в $\Sigma_d(A)$, откуда следует, что $\Sigma_d(A)$ — выпуклое множество. □

Следствие 9. *Пусть X — конечномерное нормированное пространство со строго выпуклой нормой ρ. Тогда все астровершины Штейнера для границы $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\big\}$ в $H(X)$ — одноточечные.*

Доказательство. Заметим, что если x является решением из класса одинаковой взвешенности $\Sigma_d(A)$ с $d = \big(r_1, \dots, r_n\big)$, где $r_i = \rho(a_i, x)$, то x лежит в пересечении всех сфер с центрами в a_i и радиусами r_i. Если в классе $\Sigma_d(A)$ содержится два различных решения x_1 и x_2, то, по утверждению 10, $\Sigma_d(A)$ является выпуклым множеством, поэтому в нем содержится и отрезок $[x_1, x_2]$. Из определения строго выпуклой нормы следует, что внутренность отрезка с концами на сфере не содержится в сфере, следовательно, получили противоречие. Таким образом, каждый класс $\Sigma_d(A)$ состоит из одной точки. Используя критерий из теоремы 8, получаем, что в $H(X)$ не возникает дополнительных решений, отличных от соответствующих решений в X. Следствие доказано. □

Следствие 10. *Все астрокомпакты Штейнера для границы $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\big\}$ в $H(\mathbb{R}^m)$ — одноточечные.*

Утверждение 11. *Пусть X — конечномерное нормированное пространство со строго выпуклой нормой ρ. Тогда граница $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\big\}$ в $H(X)$ имеет либо единственное решение, либо континуум классов одинаковой взвешенности, каждый из которых состоит из одного элемента.*

Доказательство. Если для границы $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ в X существует единственное решение, то согласно критерию из теоремы 8, решение для $\mathcal{A}$ одноточечное и потому определено однозначно.

Пусть для границы A существует хотя бы два различных решения $x_1 \ne x_2$. Из утверждения 10 следует, что в $\Sigma(A)$ содержится и весь отрезок $[x_1, x_2]$. Согласно следствию 9, в каждом классе одинаковой взвешенности $\Sigma_d(A)$ содержится ровно одно решение. Таким образом, для каждого $x \in [x_1, x_2]$ существует класс, состоящий из x. Тогда, согласно критерию из теоремы 8, решение для $\mathcal{A}$ в каждом классе одноточечное и потому определено однозначно. Значит, число классов континуально.

Утверждение доказано. □

Проиллюстрируем важность строгой выпуклости нормы. В пространстве $\mathbb{R}^3$ с невыпуклой max-нормой рассмотрим границу $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ такую, что a_i лежат в плоскости Oxy и что дня нее существует астровершина Штейнера k, лежащая в Oxy, для которой все $\rho(a_i, k) > 0$. Тогда k принадлежит сферам с центрами в a_i радиуса $\rho(a_i, k)$. В пространстве с max-нормой сферами являются поверхности кубов, параллельных координатным осям. Поскольку ребра всех трех кубов положительной длины, центры кубов лежат в одной плоскости, а поверхности кубов имеют общую точку, то они пересекаются по некоторому отрезку T. Тогда любое непустое подмножество отрезка T является астровершиной Штейнера для A, и все они принадлежат одному классу одинаковой взвешенности.

Продемонстрируем важность нормированности пространства. Рассмотрим ненормированное метрическое пространство W, состоящее из двух единичных кругов $B_1(o_1)$ и $B_1(o_2)$ из $\mathbb{R}^2$, у которых отождествлены границы: $\partial B_1(o_1) = \partial B_1(o_2)$. Метрику на W определим равной евклидовой метрике ρ для x_1, x_2 из одного круга и равной $\min_{y \in \partial B_1(o_1)} \Big(\rho(x_1, y) + \rho(x_2, y)\Big)$ для x_1, x_2 из разных кругов (это фактор-метрика относительно изометрии $b = f(a)$, где f — отождествление границ кругов, о фактор-метрике см. [13]). Рассмотрим границы $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathcal{A} = \big\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\big\}$, где точки a_1, a_2, a_3 лежат на $\partial B_1(o)$ и попарно равноудалены. Граница A имеет две различные астровершины Штейнера, o_1 и o_2, в одном классе одинаковой взвешенности $\Sigma_d(A)$, где $d = (1, 1, 1)$. Пусть K — астровершина Штейнера для границы $\mathcal{A}$. Из теоремы 3 следует, что $S_A \le S_{\mathcal{A}}$. Длина минимального дерева Штейнера для границы $\{a_1, a_2, a_3\}$ на круге $B_1(o_1)$ равна 3. Поскольку $S_{\mathcal{A}}\big(\{o_1, o_2\}\big) = 3$, то $\{o_1, o_2\}$ является астрокомпактом Штейнера для границы $\mathcal{A}$ в $H(W)$.

Замечание 4. *Рассмотрим ненормированное метрическое пространство W, состоящее из $\{B_1(o_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ из $\mathbb{R}^2$, у которых отождествлены границы, и введем фактор-метрику. Тогда для границы $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, где точки a_1, a_2, a_3 лежат на $\partial B_1(o)$ и попарно равноудалены, в $H(W)$ существует астровершина Штейнера для границы $\mathcal{A}$ мощности, равной мощности Λ. При этом максимальная астровершина Штейнера в этом пространстве не определена.*

4. Примеры 1-параметрических семейств точечно реализуемых границ в $H(\mathbb{R}^2)$

В данном разделе мы рассмотрим некоторые семейства точечно реализуемых границ в $H(\mathbb{R}^2)$ и исследуем бифуркации множества астрокомпактов Штейнера при 1-параметрической деформации границ. Заметим, что в случае трехэлементных границ компакты Штейнера одновременно являются астрокомпактами Штейнера, поэтому мы будем использовать их свойства, но пользоваться первым названием.

Нам потребуется вспомогательное утверждение.

Утверждение 12. *Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ — граница в метрическом пространстве (X, ρ) и для $k \ge \frac{n}{2}$ выполняется $a_{n-k+1} = \dots = a_n$. Тогда единственной астровершиной Штейнера для $\mathcal{A}$ является a_n.*

Доказательство. Для каждого $x \in X$ справедлива оценка:

$$S_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{i=1}^{n-k} \Big(\rho(a_i, x) + \rho(a_{n-k+i}, x)\Big) + \sum_{i=2n-2k+1}^{n} \rho(a_i, x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-k} \Big(\rho(a_i, x) + \rho(a_n, x)\Big) + (2k - n)\rho(a_n, x) \ge \sum_{i=1}^{n-k} \rho(a_i, a_n) = S_{\mathcal{A}}(a_n).$$

Таким образом, $S_{\mathcal{A}}$ достигается на a_n, поэтому a_n является астровершиной Штейнера. Заметим, что последнее неравенство обращается в равенство только когда $\rho(a_n, x) = 0$, поэтому других астровершиной Штейнера нет. Утверждение доказано. □

4.1. Пример с единственным классом одинаковой взвешенности и непостоянным числом минимальных компактов Штейнера

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_r \subset H(\mathbb{R}^2)$, состоящую из двух одноточечных компактов $A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_2\}$ и отрезка $A_3 = [t_1, t_2]$, которые расположены следующим образом. Введем декартову систему координат так, что $a_1 = (0, r)$, $a_2 = (0, -r)$, $t_1 = (-1, 0)$, $t_2 = (1, 0)$, где $r \in \mathbb{R}$ — неотрицательный параметр. Пусть K — компакт Штейнера для $\mathcal{A}_r$ из класса $\Sigma_d(\mathcal{A}_r)$, он существует по следствию 2. Обозначим через d_i величину $d_H(A_i, K)$, $i = 1, 2$. Обозначим через f_i точку Ферма — Штейнера для тройки точек $\{a_1, a_2, t_i\}$.

Теорема 9 (решение задачи Штейнера для границы $\mathcal{A}_r$). *Множество всех компактов Штейнера $\Sigma(\mathcal{A}_r)$ состоит из единственного класса $\Sigma_d(\mathcal{A}_r)$, где*

$$d = \begin{cases} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}r, \frac{2}{\sqrt{3}}r, 1 - \frac{r}{\sqrt{3}}\right), & \text{если } r \in [0, \sqrt{3}]; \\ \left(\sqrt{r^2+1}, \sqrt{r^2+1}, 0\right), & \text{если } r \in [\sqrt{3}, +\infty). \end{cases}$$

При $r > 0$ максимальный компакт Штейнера является выпуклым и имеет мощность континуума, а при $r = 0$ он является одноточечным. Множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ минимальных компактов Штейнера устроено следующим образом:

1. *при $r = 0$ множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ совпадает с $\Sigma(\mathcal{A}_r)$ и состоит из единственного одноточечного элемента $A_1 = A_2$ (см. рисунок 2);*

2. *при $r \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ состоит из единственного двухточечного элемента $\{f_1, f_2\}$ (см. рисунок 3);*

3. *при $r \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ имеет мощность континуума, каждый его элемент — конечный и состоит из точек f_1, f_2 и центров кругов, составляющих минимальное покрытие множества $[f_1, f_2] \setminus B_{|t_1 f_1|}\Big(\{f_1, f_2\}\Big)$, причем минимальная мощность этих элементов равна $\lceil \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-r} \rceil$ (см. рисунок 4);*

4. *при $r \in [\sqrt{3}, +\infty)$ множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ совпадает с $\Sigma(\mathcal{A}_r)$ и состоит из единственного элемента A_3 (см. рисунок 5).*

Доказательство. Воспользуемся результатами из раздела 3. Вычислим $\sigma_{\mathcal{A}_r}$. Несложно проверить, что

$$\max_{a'_1 \in A_1} \min_{a'_j \in A_j, j \neq 1} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = \max_{a'_2 \in A_2} \min_{a'_j \in A_j, j \neq 2} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = |a_1 a_2| = 2r,$$

$$\max_{a'_3 \in A_3} \min_{a'_j \in A_j, j \neq 3} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = \sigma_{a_1 a_2 t_1} = \sigma_{a_1 a_2 t_2} > 2r.$$

Поэтому $\sigma_{\mathcal{A}_r} = \sigma_{a_1 a_2 t_1}$.

Из алгоритмического построения точек Ферма — Штейнера и имеющихся симметрий точек a_1, a_2 относительно оси абцисс и точек t_1, t_2 относительно оси ординат вытекают равенства

$|t_1f_1| = |t_2f_2|$ и $|a_1f_1| = |a_1f_2| = |a_2f_1| = |a_2f_2|$, а также тот факт, что f_i лежит на отрезке $[o, t_i]$, $i = 1, 2$. Заметим, что для $i = 1, 2$ верно равенство

$$d_H\big(A_i, [f_1, f_2]\big) = \sup_{f\in[f_1,f_2]} |a_if| = |a_if_1|.$$

Поскольку $[f_1, f_2] \subset [t_1, t_2]$, то

$$d_H\big(A_3, [f_1, f_2]\big) = \sup_{t\in[t_1,t_2]} \inf_{f\in[f_1,f_2]} |tf| = |t_1f_1|.$$

Поэтому $S_{\mathcal{A}_r}\big([f_1, f_2]\big) = \sigma_{a_1a_2t_1}$. Значит, граница $\mathcal{A}_r$ является точечно реализуемой и, согласно утверждению 7, $[f_1, f_2]$ является компактом Штейнера. Единственность класса $\Sigma_d(\mathcal{A}_r)$ одинаковой взвешенности, содержащего $[f_1, f_2]$, вытекает из следствия 5 и единственности точки Ферма — Штейнера для каждой тройки точек $\{a_1, a_2, t_i\}$, $i = 1, 2$. Здесь $d = (d_1, d_2, d_3)$, где $d_1 = d_2 = |a_if_j|$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, $d_3 = |t_1f_1| = |t_2f_2|$.

Непосредственными вычислениями найдем длины d_i при разных значениях параметра r. При $r \in [0, \sqrt{3}]$ расстояния $d_i = d_H\big(\{a_i\}, [f_1, f_2]\big)$ равны по $\frac{2}{\sqrt{3}}r$, $i = 1, 2$, а $d_3 = d_H\big([t_1, t_2], [f_1, f_2]\big) = 1 - \frac{r}{\sqrt{3}}$. При $r \in [\sqrt{3}, +\infty)$ расстояние $d_3 = d_H\big([t_1, t_2], [f_1, f_2]\big)$ равно 0, а расстояния $d_i = d_H\big(\{a_i\}, [f_1, f_2]\big)$ по теореме Пифагора равны $\sqrt{r^2 + 1}$. Тогда длина минимального дерева Штейнера $S_{\mathcal{A}_r}$ выражается следующим образом:

$$S_{\mathcal{A}_r} = \begin{cases} 1 + \sqrt{3}r, & \text{если } r \in [0, \sqrt{3}]; \\ 2\sqrt{r^2 + 1}, & \text{если } r \in [\sqrt{3}, +\infty). \end{cases}$$

Эта функция возрастает при $r \in [0, +\infty)$.

Максимальный компакт Штейнера $K_{\max}$ при всех значениях r равен, согласно теореме 2, компакту $B_{d_1}(a_1) \cap B_{d_2}(a_2) \cap B_{d_3}\big([t_1, t_2]\big)$. При $r > 0$ он выпуклый и имеет мощность континуума. При $r = 0$ происходит совпадение точек a_1 и a_2 (а значит, и точек f_i) с серединой отрезка $[t_1, t_2]$. Следовательно, $d_1 = d_2 = 0$ и максимальный компакт равен одноточечному компакту $A_1 = A_2$.

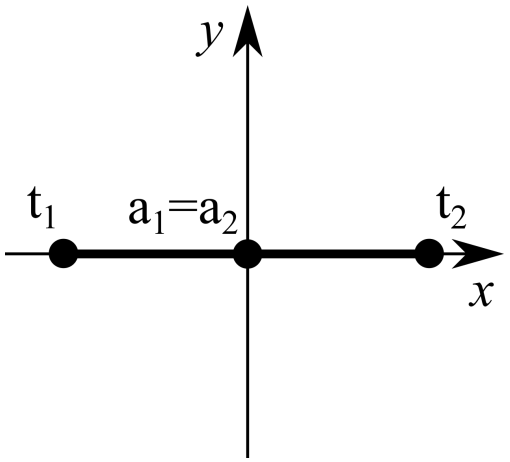


Рис. 2: Случай $r = 0$

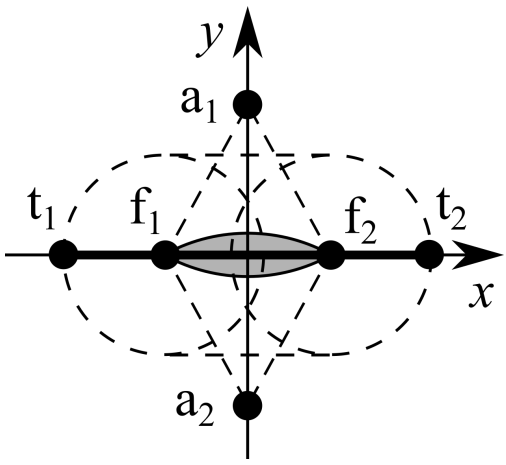


Рис. 3: Случай $r \in \big(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\big]$

Теперь для каждого значения параметра r найдем все минимальные компакты Штейнера.

Случай 1. При $r = 0$, как показано выше, максимальный компакт Штейнера совпадает с одноточечным компактом $A_1 = A_2$, поэтому он является единственным элементом в $\Sigma(\mathcal{A}_0)$ (см. рисунок 2).

Случай 2. При $r \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ (см. рисунок 3) выполняется $|t_i f_i| \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, поэтому, с учетом равенства $d_3 = |t_i f_i|$, верно включение $[t_1, t_2] \subset B_{d_3}\left(\{f_1, f_2\}\right)$. Кроме того, очевидно, что $\{f_1, f_2\} \subset B_{d_3}\left([t_1, t_2]\right)$. Тогда выполняется $d_H\left([t_1, t_2], \{f_1, f_2\}\right) \leq d_3 = d_H\left([t_1, t_2], [f_1, f_2]\right)$. Поскольку $d_H\left(\{a_i\}, \{f_1, f_2\}\right) = d_H\left(\{a_i\}, [f_1, f_2]\right)$, верно неравенство $S_{\mathcal{A}_r}\left(\{f_1, f_2\}\right) \leq S_{\mathcal{A}_r}\left([f_1, f_2]\right)$, и из минимальности функции $S_{\mathcal{A}_r}$ на компакте $[f_1, f_2]$ следует, что $\{f_1, f_2\}$ также является компактом Штейнера. Он является минимальным, так как удаление из него любой точки приведет, очевидно, к увеличению расстояния до $[t_1, t_2]$ при сохранении расстояний до $\{a_i\}$.

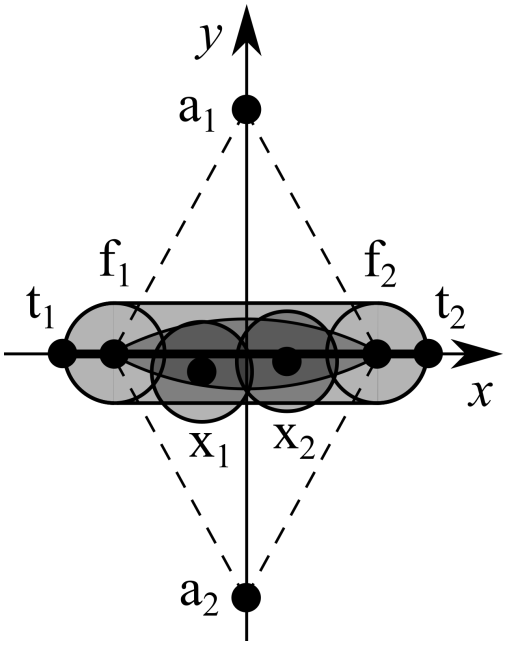


Рис. 4: Случай $r \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$

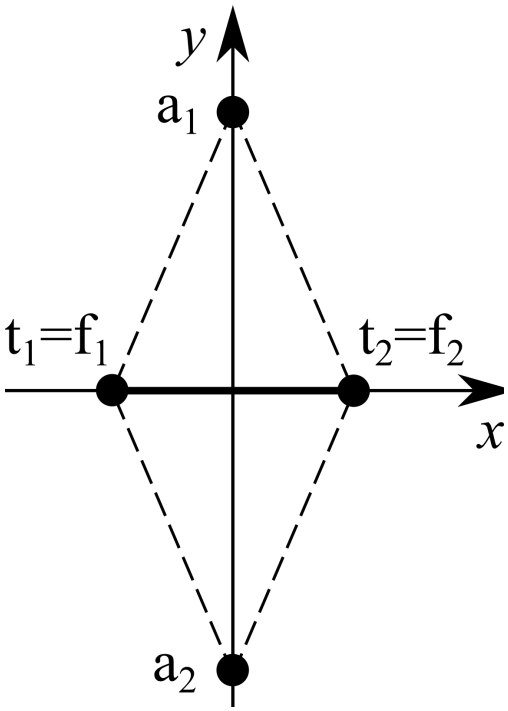


Рис. 5: Случай $r \in [\sqrt{3}, +\infty)$

Случай 3. При $r \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ (см. рисунок 4) выполняется $|t_i f_i| \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, поэтому компакт $B_{d_3}\left(\{f_1, f_2\}\right)$ не покрывает $[t_1, t_2]$. Рассмотрим всевозможные минимальные покрытия отрезка $T := \overline{[t_1, t_2] \setminus B_{d_3}\left(\{f_1, f_2\}\right)}$ открытыми кругами радиуса d_3 с центрами, лежащими в $K_{\max}$. Поскольку T — компакт, каждое такое покрытие является конечным. Рассмотрим замыкания этих кругов; если покрытие перестало быть минимальным, то удалим избыточные круги. Центры оставшихся кругов обозначим через $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Таким образом, компакт $\{f_1, f_2, x_1, \ldots, x_n\}$ является минимальным компактом Штейнера.

Посчитаем наименьшую возможную мощность минимального компакта Штейнера в этом случае. Пересечение отрезка T и круга $B_{d_3}(x_i)$, где x_i — точка из минимального компакта Штейнера, является отрезком длины, не превышающей $2d_3$. Поскольку отрезок T имеет длину $2 - 4d_3$, то для его покрытия требуется $\lceil \frac{2-4d_3}{2d_3} \rceil = \lceil \frac{1}{d_3} \rceil - 2$ кругов. Ещё два круга, $B_{d_3}(f_1)$ и $B_{d_3}(f_2)$, покрывают оставшуюся часть отрезка $[t_1, t_2]$, поэтому наименьшая возможная мощность минимального компакта Штейнера равна $\lceil \frac{1}{d_3} \rceil = \lceil \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-r} \rceil$.

Докажем теперь, что множество $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ минимальных компактов Штейнера имеет мощность континуума.

Скажем, что точка $t \in T$ имеет *кратность* k, если она принадлежит k разным элементам покрытия $\left\{B_{d_3}(x_i)\right\}_{i=1}^{m'}$. Покрытие $\left\{B_{d_3}(x_i)\right\}_{i=1}^{m'}$ является минимальным для T тогда и только тогда, когда для каждого i существует точка $t \in T \cap B_{d_3}(x_i)$ кратности 1. Это также

равносильно условию, что $\{x_1, \ldots, x_{m'}\}$ является минимальным компактом Штейнера.

Заметим, что для любого $f = |f_1 f_2| > 2d_3$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $f \in \Big(md_3, (m+1)d_3\Big]$. Поскольку $m+1 < 2k$ при $m > 1$, то $md_3 < f < 2md_3$. Расположим на $[f_1, f_2]$ точки $x_1 = f_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1} = f_2$ так, чтобы для $i = 1, \ldots, m$ выполнялось $|x_m x_{m+1}| = \frac{|f_1 f_2|}{m} = t$. Из доказанного выше следует, что $d_3 < t < 2d_3$. Условие $t > d_3$ означает, что в некоторой $U_{\varepsilon_i}(x_i)$ содержатся только точки кратности 1, $i = 1, \ldots, m+1$. Условие $t < 2d_3$ означает, что в некоторой $U_{\delta_i}(y_i)$, где y_i — середина отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, содержатся только точки кратности 2, $i = 2, \ldots, m$. Так как неравенства строгие, а функция расстояния — непрерывная, то для любой точки $x_2' \in U_{\min\{\varepsilon_i, delta_i\}}(x_2)$ неравенства $d_3 < |x_2' x_1| < 2d_3$ и $d_3 < |x_2' x_3| < 2d_3$ также будут строгими. Значит, заменив в минимальном компакте $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}\}$ точку x_2 на x_2', мы получим новый минимальный компакт Штейнера. Поскольку существует континуум способов выбрать точку x_2', то $\Sigma_{\min}(\mathcal{A}_r)$ имеет мощность континуума.

Случай 4. Наконец, при $r \in [\sqrt{3}, +\infty)$ точка f_i совпадает с точкой t_i, $i = 1, 2$ (см. рисунок 5), откуда следует, что $d_H\big([t_1, t_2], [f_1, f_2]\big) = 0$. Значит, для любого компактного подмножества L такого, что $\{t_1, t_2\} \subset L \subset [t_1, t_2]$, расстояние $d_H\big([t_1, t_2], L\big) > d_3 = 0$, а $d_H\big(\{a_i\}, L\big) = d_H\big(\{a_i\}, \{t_1, t_2\}\big) = d_i$, $i = 1, 2$. Значит, L не является компактом Штейнера, поэтому $[t_1, t_2]$ — минимальный.

Теорема доказана. □

4.2. Пример, для которого число классов одинаковой взвешенности непостоянно и конечно

Нам потребуется вспомогательные утверждения.

Утверждение 13. *Пусть t_1, t_2 — точки на окружности $\partial B_1(o)$, прямая l проходит через o и перпендикулярна $[t_1, t_2]$. Тогда при движении точки q по большой дуге окружности $\partial B_1(o)$ с концами t_1 и t_2 от точки t_2 до пересечения с прямой l значение $\sigma_{t_1 t_2 q}$ строго монотонно увеличивается.*

Доказательство. Построим правильный треугольник $\triangle t_0 t_1 t_2$ так, что отрезок $[o, t_0]$ пересекается с $[t_1, t_2]$. Пусть q_0 — точка пересечения прямой $t_0 t_2$ и окружности $\partial B_1(o)$, отличная от t_2 (см. рисунок 6).

Пусть сначала q лежит на малой дуге окружности $\partial B_1(o)$ с концами t_2 и q_0 (на рисунке такая q обозначена через q_1). Поскольку $\angle t_1 t_2 q_0 = \frac{2\pi}{3}$, то $\angle t_1 t_2 q > \frac{2\pi}{3}$. Значит, для таких q выполняется $\sigma_{t_1 t_2 q} = |t_1 t_2| + |t_2 q|$. Тогда при движении q по малой дуге окружности от t_2 к q_0 значение $|t_2 q|$ строго монотонно возрастает, а значит, строго монотонно возрастает значение $\sigma_{t_1 t_2 q}$.

Теперь пусть q лежит на малой дуге окружности $\partial B_1(o)$ между q_0 и точкой пересечения окружности с прямой l (на рисунке такая q обозначена через q_2). Построим отрезок $[t_0, q]$, он является линией Симпсона и его длина, как известно (см. [16]), равняется $\sigma_{t_1 t_2 q}$. В треугольнике $\triangle t_0 o q$ при движении q по дуге окружности сохраняются длины сторон $[t_0, o]$ и $[o, q]$, а угол $\angle t_0 o q$ увеличивается, следовательно, увеличивается длина стороны $[t_0, q]$. Таким образом, $\sigma_{t_1 t_2 q}$ строго монотонно возрастает.

Утверждение доказано. □

Следствие 11. *Пусть t_1, t_2, q_1, q_2 — точки на окружности $\partial B_1(o)$, причем q_1, q_2 лежат на большой дуге с концами t_1, t_2. Если длина дуги с концами в q_1 и ближайшей к q_1 точке t_i меньше, чем длина дуги с концами в q_2 и ближайшей к q_2 точке t_i, то $\sigma_{t_1 t_2 q_1} < \sigma_{t_1 t_2 q_2}$.*

Доказательство. Пусть l — серединный перпендикуляр к отрезку $[t_1, t_2]$. Если q_1, q_2 лежат по одну сторону от прямой l, то, согласно утверждению 13, $\sigma_{t_1 t_2 q_1} < \sigma_{t_1 t_2 q_2}$. Если q_1, q_2

разделены прямой l, то построим точку q_1' симметрично l, для нее справедливо неравенство $\sigma_{t_1t_2q_1'} = \sigma_{t_1t_2q_1}$. Поскольку q_1' попадает на малую дугу с концами в q_2 и ближайшей к q_2 точке t_i, то, по утверждению 13, $\sigma_{t_1t_2q_1'} < \sigma_{t_1t_2q_2}$, откуда получаем требуемое неравенство. Следствие доказано. □

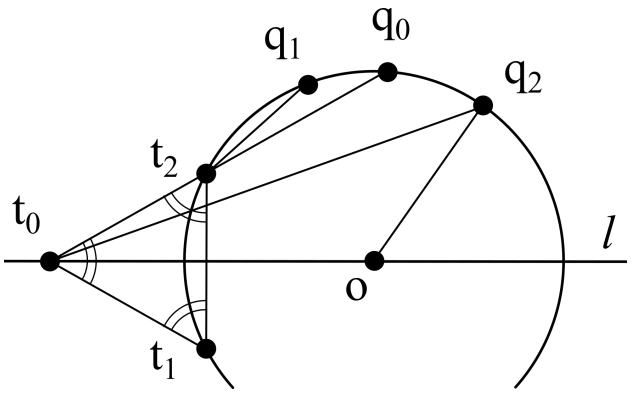


Рис. 6: К утверждению 13.

Рассмотрим границу $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, A_3\} \subset H(\mathbb{R}^2)$, где $A_i = \{a_i, b_i\}$, $|a_ib_i| = 2$, $\{a_1, b_1\}$ и $\{a_3, b_3\}$ получаются из $\{a_2, b_2\}$ поворотом относительно середины o отрезка $[a_2, b_2]$ на углы $-\alpha$ и α соответственно, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (см. рисунок 7).

Теорема 10. *В сделанных выше обозначениях,*

$$S_{\mathcal{A}_\alpha} = \begin{cases} \sigma_{a_1a_2a_3} = 4\sin\frac{\alpha}{2}, & \text{если } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]; \\ \sigma_{a_1a_2b_3} = 2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\cos\alpha, & \text{если } \alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна, строго монотонно возрастает от 0 *до* 2 *при* $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, *строго монотонно убывает от* 2 *до* $\sqrt{2}$ *при* $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ *и дифференцируема на* $\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Каждый класс одинаковой взвешенности состоит ровно из одного компакта, совпадающего с одним из граничных компактов. Подробная характеристика множеств $\Sigma(\mathcal{A}_\alpha)$ *приведена в таблице*:

α	$N_{cl}(\mathcal{A}_\alpha)$	$A_1 \in \Sigma(\mathcal{A}_\alpha)$	$A_2 \in \Sigma(\mathcal{A}_\alpha)$	$A_3 \in \Sigma(\mathcal{A}_\alpha)$
0	1	+	+	+
$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	1	−	+	−
$\frac{\pi}{3}$	3	+	+	+
$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$	2	+	−	+
$\frac{\pi}{2}$	1	+	−	+

Доказательство. **Случай 1.** При $\alpha = 0$ все граничные компакты совпадают, поэтому, согласно утверждению 12, единственным компактом Штейнера является граничный компакт $A_1 = A_2 = A_3$, и $S_{\mathcal{A}_\alpha} = 0$.

Случай 2. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ совпадают два граничных компакта: $A_1 = A_3$, поэтому, согласно утверждению 12, единственным компактом Штейнера является граничный компакт $A_1 = A_3$, и $S_{\mathcal{A}_\alpha} = d_H(A_1, A_2)$. Поскольку $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ — перпендикулярные диаметры окружности, то $d_H(A_1, A_2) = \sqrt{2}$.

Случай 3. При $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ вычислим $\sigma_{\mathcal{A}_\alpha}$. В силу имеющихся симметрий достаточно взять максимум по $i \in \{1, 2\}$, а в каждом из вариантов фиксировать $a_i' = a_i$.

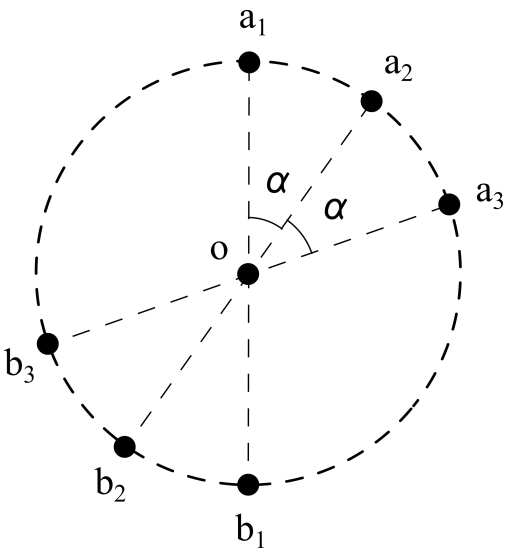


Рис. 7: Случай $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

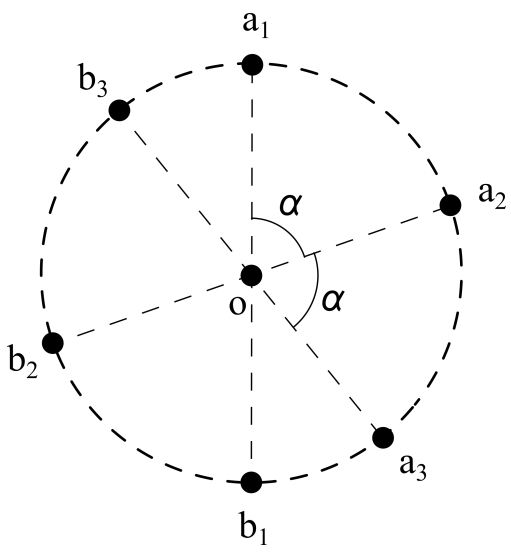


Рис. 8: Случай $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Если $i = 1$, то

$$\min_{a'_j \in A_j, j \neq 1} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = \min\{\sigma_{a_1 a_2 a_3}, \sigma_{a_1 b_2 a_3}, \sigma_{a_1 a_2 b_3}, \sigma_{a_1 b_2 b_3}\},$$

причем $\sigma_{a_1 a_2 b_3} = \sigma_{a_1 b_2 b_3}$.

Если $i = 2$, то

$$\min_{a'_j \in A_j, j \neq 2} \sigma_{a'_1 a'_2 a'_3} = \min\{\sigma_{a_1 a_2 a_3}, \sigma_{b_1 a_2 a_3}, \sigma_{a_1 a_2 b_3}, \sigma_{b_1 a_2 b_3}\},$$

причем $\sigma_{a_1 a_2 b_3} = \sigma_{b_1 a_2 a_3}$.

Поскольку $\triangle a_1 a_2 a_3$ и $\triangle a_1 b_2 a_3$ — равнобедренные треугольники с общим основанием $a_1 a_3$ и соотношением боковых сторон $|a_1 b_2| > |a_1 a_2|$, то $\sigma_{a_1 b_2 a_3} > \sigma_{a_1 a_2 a_3}$. Поскольку также $\sigma_{b_1 a_2 b_3} = \sigma_{a_1 b_2 a_3}$, то на этих значениях не могут достигаться минимумы. Осталось сравнить $\sigma_{a_1 a_2 b_3}$ и $\sigma_{a_1 a_2 a_3}$ при разных значениях α, используя утверждение 13.

Случай 3.1. При $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ малая дуга с концами a_2 и a_3 короче, чем малая дуга с концами a_1 и b_3 (см. рис. 7), поэтому $\sigma_{a_1 a_2 b_3} > \sigma_{a_1 a_2 a_3}$. Значит, оба минимума и, следовательно, $\sigma_{\mathcal{A}_\alpha}$, равны $\sigma_{a_1 a_2 a_3}$.

Кроме того, при данных α выполняется $\angle a_1 a_2 a_3 = \pi - \alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, поэтому $\sigma_{a_1 a_2 a_3} = |a_1 a_2| + |a_2 a_3|$ и a_2 является точкой Ферма — Штейнера для (a_1, a_2, a_3). С учетом симметрий, $\sigma_{a_1 a_2 a_3} = \sigma_{b_1 b_2 b_3} = |b_1 b_2| + |b_2 b_3|$ и b_2 является точкой Ферма — Штейнера для (b_1, b_2, b_3). Заметим, что $S_{\mathcal{A}_\alpha}(A_2) = \sigma_{a_1 a_2 a_3}$, поэтому $\mathcal{A}_\alpha$ — точечно реализуемая граница, и, согласно утверждению 7, A_2 является компактом Штейнера. Обе A_2-реализующие астросети имеют вектор длин ребер $d = (|a_1 a_2|, 0, |a_2 a_3|)$, поэтому, с учетом следствия 5, класс одинаковой взвешенности единственный.

Случай 3.2. При $\alpha = \frac{\pi}{3}$ длина малой дуги с концами a_2 и a_3 равна длине малой дуги с концами a_1 и b_3 (см. рис. 8), поэтому $\sigma_{\mathcal{A}_\alpha} = \sigma_{a_1 a_2 b_3} = \sigma_{a_1 a_2 a_3}$.

Поскольку $\angle a_1 a_2 a_3 = \frac{2\pi}{3}$, то $\sigma_{a_1 a_2 a_3} = |a_1 a_2| + |a_2 a_3|$ и a_2 является точкой Ферма — Штейнера для (a_1, a_2, a_3). С учетом симметрий, каждая из шести точек $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ является точкой Ферма — Штейнера для набора, состоящего из нее и двух ближайших. Заметим, что $S_{\mathcal{A}_\alpha}(A_i) = \sigma_{a_1 a_2 a_3} = 2$ для каждого $i = 1, 2, 3$, поэтому $\mathcal{A}_\alpha$ — точечно реализуемая граница, и, согласно утверждению 7, A_i является компактом Штейнера. Для каждого i существуют ровно

две A_i-реализующие астросети с одинаковым вектором длин ребер, поэтому, с учетом следствия 5, существует три класса одинаковой взвешенности, соответствующие векторам $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$.

Случай 3.3. При $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ малая дуга с концами a_1 и b_3 короче, чем малая дуга с концами a_2 и a_3, поэтому $\sigma_{a_1a_2a_3} > \sigma_{a_1a_2b_3}$ и, следовательно, $\sigma_{\mathcal{A}_\alpha} = \sigma_{a_1a_2b_3}$.

Кроме того, при данных α выполняется $\angle b_3a_1a_2 = \pi - \angle b_3b_1a_2 = \pi - \frac{1}{2}\angle b_3oa_2 = \frac{\pi+\alpha}{2} \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$, поэтому $\sigma_{a_1a_2b_3} = |a_1a_2| + |a_1b_3|$ и a_1 является точкой Ферма — Штейнера для (a_1, a_2, b_3). С учетом симметрий, $\sigma_{a_1a_2b_3} = \sigma_{a_1b_2b_3} = |b_1b_2| + |b_2b_3|$ и b_3 является точкой Ферма — Штейнера для (b_1, b_2, b_3). Аналогично, a_3 и b_1 являются точками Ферма — Штейнера для (b_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, a_3) соответственно. Заметим, что $S_{\mathcal{A}_\alpha}(A_1) = S_{\mathcal{A}_\alpha}(A_3) = \sigma_{a_1a_2b_3}$, поэтому $\mathcal{A}_\alpha$ — точечно реализуемая граница, и, согласно утверждению 7, A_1 и A_3 являются компактами Штейнера. Обе A_1-реализующие астросети имеют вектор длин ребер $d = (0, |a_1a_2|, |a_1b_3|)$, обе A_3-реализующие астросети имеют вектор длин ребер $d = (|b_1a_3|, |a_2a_3|, 0)$, поэтому, с учетом следствия 5, существует два класса одинаковой взвешенности.

Во всех трех случаях компакт Штейнера совпадает со своим каноническим расширением, поэтому является максимальным компактом Штейнера, а удаление из него любой точки увеличит расстояние до граничных компактов, поэтому он является также минимальным, а следовательно, единственным компактом Штейнера в своем классе.

Таким образом, при $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ длина минимального дерева Штейнера равняется $\sigma_{a_1a_2a_3} = 4\sin\frac{\alpha}{2}$, эта функция строго монотонно возрастает при данных α. При $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ длина минимального дерева Штейнера равняется $\sigma_{a_1a_2b_3} = 2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\cos\alpha$, эта функция строго монотонно убывает при данных α. Заметим, что в точке $\alpha = \frac{\pi}{3}$ график функции $S_{\mathcal{A}_\alpha}$ имеет излом, а сама функция не дифференцируема.

Теорема доказана. □

5. Заключение

Таким образом, получена нижняя оценка длины минимальной параметрической сети через длину астросети с одноточечными вершинами, содержащимися в граничных компактах, и изучены бифуркации решений задачи Ферма — Штейнера при 1-параметрической деформации трехэлементных границ в $H(\mathbb{R}^2)$, для которых достигается нижняя оценка длины минимальной астросети.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jarnik V., Kössler M. O minimalnich grafech, obsahujicich n danych bodu // Casopis pro pestovani matematiky a fysiky, 1934. Vol. 63, № 8. P. 223-235.

2. Cieslik D. k-Steiner minimal trees in metric spaces // Ernst–Moritz–Arndt–Univ. Greifswald, Inst. fur Mathematik und Informatik, 1999.

3. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. The Steiner Problems and Its Generalizations // CRC Press, Boca Raton, Fl., 1994.

4. Тужилин А. А., Фоменко А. Т. Многозначные отображения, минимальные поверхности и мыльные пленки // Вестник МГУ, сер. матем., 1986, № 3. С. 3-12.

5. Степанова Е. И. Бифуркации минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехточечных границ и суботношение Штейнера евклидовой плоскости // Вестн. Моск. Ун-та., Сер. 1, Математика. Механика. 2016, Т. 71, № 2. С. 48-51.

6. Степанова Е. И. Бифуркации топологий деревьев Штейнера на плоскости // Фунд. и прикл. матем. 2016. Т. 21, № 6. С. 183-204.

7. Арнольд В. И. Теория катастроф // Динамические системы — 5, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, ВИНИТИ, М., 1986, Т. 5, С. 219-277

8. Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].

9. Schlicker S. The geometry of the Hausdorff metric // GVSU REU, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2008.

10. Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова—Хаусдорфа: случай компактов // М.: Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, 2017.

11. Blackburn C. C., Lund K., Schlicker S., Sigmon P., Zupan A. An introduction to the geometry of $H(\mathbb{R}^n)$ // GVSU REU, Grand Valley State Univ., Allendale, MI, 2007.

12. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов // Наука, М., 1990.

13. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии // Москва—Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2004.

14. Ivanov A., Tropin A., Tuzhilin A. Fermat—Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance // J. Geom. 2017. Vol. 108. P. 575-590.

15. Галстян А. Х., Иванов А. О., Тужилин А. А. Проблема Ферма — Штейнера в пространстве компактных подмножеств $\mathbb{R}^m$ с метрикой Хаусдорфа // Матем. сб., 2021, Т. 212, № 1, С. 28-62.

16. Gilbert E. N. and Pollak H. O., Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. 1968. Vol. 16, № 1. P. 1-29 (1968).

REFERENCES

1. Jarnik, V., Kössler, M. 1934, "On minimal graphs containing n given points", *Journal for Cultivation of Mathematics and Physics*, vol. 63, no. 8, pp. 223-235.

2. Cieslik, D. 1999, "k-Steiner minimal trees in metric spaces", Ernst–Moritz–Arndt–Univ. Greifswald, Inst. fur Mathematik und Informatik.

3. Ivanov, A. O., Tuzhilin, A. A. 1994, "Minimal Networks. The Steiner Problems and Its Generalizations", CRC Press, Boca Raton, Fl.

4. Tuzhilin, A. A., Fomenko, A. T. 1986, "Multivalued mappings, minimal surfaces and soap films". *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh*, № 3, pp. 3-12, 117-118 [in Russian].

5. Stepanova, E. I. 2016, "Bifurcations of Steiner minimal trees and minimal fillings for non-convex four-point boundaries and Steiner subratio for the Euclidean plane", *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 71, pp. 79–81.

6. Stepanova, E. I. 2020, "Bifurcations of Steiner tree topologies in the plane", *J. Math. Sci.*, vol. 248, pp. 788-802.

7. Arnol'd, V. I. 1986, "Catastrophe theory", In: Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya, vol. 5, pp. 219-277

8. Hausdorff, F. 1914, “Grundzüge der Mengenlehre”, Veit, Leipzig [reprinted by Chelsea in 1949].

9. Schlicker, S. 2008, “The geometry of the Hausdorff metric”, GVSU REU, Grand Valley State Univ., Allendale, MI.

10. Ivanov, A. O. & Tuzhilin, A. A., 2017, Geometry of Hausdorff and Gromov—Hausdorff distances, the case of compact spaces, Izd-vo Popech. Soveta Mech.-Mat. Facult. MGU, Moscow [in Russian].

11. Blackburn, C. C., Lund, K., Schlicker, S., Sigmon, P., Zupan, A. 2007, “An introduction to the geometry of $H(\mathbb{R}^n)$”, GVSU REU, Grand Valley State Univ., Allendale, MI.

12. Melnikov, O., Tyshkevich, R., Yemelichev, V., Sarvanov, V. 1994, “Lectures on graph theory”, Bibliographisches Institut, Mannheim.

13. Burago, D. Yu., Burago, Yu. D. & Ivanov, S. V. 2001, “A Course in Metric Geometry”, Graduate Studies in Mathematics, vol.33, American Mathematical Society, Providence, RI.

14. Ivanov, A., Tropin, A. & Tuzhilin, A. 2017, “Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance”, *J. Geom.*, vol. 108, pp. 575-590.

15. Galstyan A. Kh., Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. 2021, “Fermat–Steiner problem in the space of compact sets of $\mathbb{R}^m$ endowed with Hausdorff distance”, *Matem. sb.*, vol. 212, № 1, p. 28-62 [in Russian].

16. Gilbert, E. N. & Pollak, H. O. 1968, “Steiner minimal trees”, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 16, no. 1, pp. 1-29.

Получено 27.07.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 514 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-288-304

Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных метрических пространств[1]

В. М. Чикин

Чикин Владимир Максимович — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва)
e-mail: chikinvm@gmail.com

Аннотация

Настоящая работа посвящена изучению однопараметрических деформаций метрик. Мы предполагаем наличие непрерывности длин кривых при изменении параметра, и изучаем дополнительные условия, которых будет достаточно для непрерывности расстояний. Мы отталкиваемся от наличия непрерывности длин кривых, поскольку это удобно на практике – из непрерывной зависимости римановой или финслеровой метрики от параметра очевидно вытекает непрерывность длин кривых, и чтобы получить непрерывность функции расстояния, достаточно проверить выполнение определенных условий. Мы предполагаем наличие функционалов длины, непрерывно зависящих от параметра, и рассматриваем внутренние метрики, порожденными этими функционалами длины. В работе показывается, что компактности пространства и непрерывности длин кривых при изменении параметра не достаточно для непрерывности расстояний, и приводится соответствующий пример. Помимо этого, мы приводим специальные условия, которых достаточно для непрерывности расстояний в совокупности с ограниченной компактностью пространства. В качестве приложения, мы рассматриваем финслеровы многообразия, метрики которых непрерывно зависят от параметра. Мы показываем, что на компактных финслеровых многообразиях выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, из чего следует, что функция расстояния на таких многообразиях также непрерывно зависит от параметра. Последний результат обобщается на полные финслеровы многообразия. Поскольку финслеровы многообразия являются обобщением римановых многообразий, в качестве следствия мы получаем, что на компактных римановых многообразиях, метрики которых непрерывно зависят от параметра, выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, а также получаем, что на полных римановых многообразиях, метрики которых непрерывно зависят от параметра, расстояния между точками непрерывно зависят от этого параметра.

Ключевые слова: функционал длины, ограниченно компактное метрическое пространство, внутренняя метрика, финслерова метрика.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
В. М. Чикин. Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных метрических пространств // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 288–304.

[1]Исследование выполнено в МГУ имени М.В.Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00355).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 514 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-288-304

The relation between the continuity of the lengths of curves and the continuity of distances in the case of boundedly compact metric spaces

V. M. Chikin

Chikin Vladimir Maksimovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chikinvm@gmail.com

Abstract

This work is devoted to the study of one-parameter deformations of metrics. We assume that the lengths of curves are continuous when the parameter changes, and we study additional conditions that will be sufficient for the continuity of the distances. We start from the presence of the continuity of the lengths of curves, since it is convenient in practice — the continuous dependence of the Riemannian or Finsler metric on the parameter obviously implies the continuity of the lengths of curves, and to obtain the continuity of the distance, it is enough to check the fulfillment of certain conditions. It is shown in the paper that the compactness of space and the continuity of the lengths of curves when changing the parameter is not enough for the continuity of the distances, and an example is given. In addition, we give special conditions, which are sufficient for the continuity of the distances in combination with the boundedly compactness of the space. As an application, we consider Finsler manifolds whose metrics continuously depend on a parameter. We show that sufficient conditions for the continuity of the distance are satisfied on compact Finsler manifolds, from which it follows that the distance function on such manifolds also continuously depends on the parameter. The last result is generalized to complete Finsler manifolds. Since Finsler manifolds are a generalization of Riemannian manifolds, as a corollary we obtain similar results for Riemannian manifolds.

Keywords: length function, boundedly compact metric space, intrinsic metric, Finsler metric.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
V. M. Chikin, 2021, "The relation between the continuity of the lengths of curves and the continuity of distances in the case of boundedly compact metric spaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 288–304.

1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению связи непрерывности изменения длин кривых с непрерывностью изменения расстояний между точками при однопараметрических деформациях метрик. Мы изучаем дополнительные к непрерывности длин кривых условия, которых будет достаточно для непрерывности расстояний. Мы отталкиваемся от наличия непрерывности длин кривых, поскольку это удобно на практике — из непрерывной зависимости римановой или финслеровой метрики от параметра очевидно вытекает непрерывность длин кривых, и чтобы получить непрерывность функции расстояния, достаточно проверить выполнение определенных условий. В свою очередь, из возникающей непрерывной зависимости расстояний от

параметра вытекают полезные следствия, например, непрерывная зависимость от параметра длин минимальных параметрических деревьев в полных метрических пространствах [1].

В настоящей работе рассматриваются топологические пространства, на которых задан функционал длины. Как известно, функционал длины задается классом допустимых кривых, длины которых можно измерять, и длиной — соответствием, которое приписывает неотрицательное число каждой кривой из этого класса. Имея функционал длины, можно определить внутреннюю метрику, индуцированную этой структурой. В этом случае расстояние между любыми двумя точками будет равно точной нижней грани длин допустимых кривых, соединяющих эти точки. Внутренние метрики подробно изучены, см. [2], [3], [4], [5], [6]. В работе [1] приводится пример не ограниченно компактного пространства и однопараметрического семейства функционалов длины на нем, такого, что все метрики соответствующего семейства внутренних метрик задают одну и ту же топологию и длины допустимых кривых непрерывно зависят от параметра, но при этом функция расстояния не является непрерывно зависящей от параметра. Тем самым показывается, что непрерывности длин допустимых кривых не достаточно для непрерывности расстояний. В работе [1] приводится специальное условие глобального характера, выполнения которого в совокупности с непрерывностью длин допустимых кривых достаточно для непрерывности расстояний. Возникает вопрос — каких естественных свойств метрических пространств достаточно для непрерывности расстояния? Достаточно ли ограниченной компактности в совокупности с непрерывностью длин допустимых кривых?

В настоящей работе показывается, что в случае однопараметрического семейства функционалов длины даже компактности в совокупности с непрерывностью длин допустимых кривых не достаточно для непрерывности расстояний. Мы приводим пример компактного пространства и однопараметрического семейства функционалов длины на нем, такого, что все метрики соответствующего семейства внутренних метрик задают одну и ту же топологию, длины допустимых кривых непрерывно зависят от параметра, но при этом функция расстояния не является непрерывно зависящей от параметра. Мы формулируем специальные условия, накладываемые на семейство функционалов длины, и показываем, что выполнения этих условий в совокупности с ограниченной компактностью пространства достаточно для непрерывной зависимости расстояний от параметра.

В качестве приложения, мы рассматриваем финслеровы многообразия, метрики которых непрерывно зависят от параметра. Первое обобщение римановой геометрии принадлежит Финслеру [7], который заменил квадрат элемента длины дуги кривой произвольной однородной функцией от дифференциалов локальных координат точки. Некоторые вопросы финслеровой геометрии рассматривались и в работе Нётер [8]. Подробное изучение финслеровой геометрии можно найти, например, в [9], [10], [11], [12], [13]. В данной работе мы показываем, что в случае непрерывной зависимости финслеровой метрики от параметра на компактном многообразии выполнены достаточные условия непрерывности расстояния, из чего следует, что функция расстояния на этом многообразии также непрерывно зависит от этого параметра. Последний результат обобщается на полные финслеровы многообразия. Поскольку финслеровы многообразия являются обобщением римановых многообразий, в качестве следствия мы получаем аналогичные результаты для римановых многообразий. Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А.А. Тужилину, профессору А.О. Иванову и профессору Е.О. Степанову за плодотворные обсуждения.

2. Определения и предварительные результаты

Определим необходимые объекты и перечислим их известные свойства, основываясь на теории функционалов длины из [2]. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, а l_t, $t \in [0,1]$, — семейство функционалов длины, заданное на нем. Наличие функционала длины

подразумевает фиксацию в пространстве X некоторого класса допустимых кривых, на которых определен функционал длины. Класс допустимых кривых содержится во множестве всех непрерывных кривых в X и должен быть замкнутым относительно сужений и склейки кривых, а также относительно замен параметра специального типа. Для каждого естественного класса допустимых кривых имеется свой собственный класс допустимых замен параметра. Например, для класса всех непрерывных путей это гомеоморфизмы, для класса кусочно-гладких путей — диффеоморфизмы. По определению требуется лишь, чтобы класс допустимых замен параметра включал в себя все линейные функции. Различные примеры функционалов длины и соответствующих классов допустимых кривых рассмотрены в [2].

Будем считать, что все функционалы семейства l_t, $t \in [0,1]$, определены на одном и том же классе допустимых кривых. Также будем считать, что для любой допустимой кривой γ ее длина $l_t(\gamma)$ конечна и непрерывно зависит от t. Для каждого значения $t \in [0,1]$ определим на X внутреннюю метрику ρ_t, порожденную функционалом длины l_t. Напомним, что в этом случае расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками A и B из пространства X равно точной нижней грани длин $l_t(\gamma)$ всех допустимых кривых γ, соединяющих точки A и B. Будем считать, что при каждом $t \in [0,1]$ для любых двух точек пространства X существует соединяющая их допустимая кривая конечной длины, что означает конечность всех метрик семейства ρ_t, $t \in [0,1]$. В свою очередь, каждая из метрик ρ_t индуцирует функционал длины $\hat{l}_t$, классом допустимых кривых которого являются все непрерывные кривые относительно метрики ρ_t, а длина $\hat{l}_t(\gamma)$ каждой кривой γ определяется как точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в эту кривую, см. [2]:

$$\hat{l}_t(\gamma) = \sup_{A_1A_2\ldots A_n \subset \gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \rho_t(A_i, A_{i+1}).$$

Хорошо известно, что функционал длины $\hat{l}_t$ определен на любой допустимой кривой конечной длины и не превосходит на ней функционала длины l_t. Напомним, что функционал длины l называется *полунепрерывным снизу* на пространстве допустимых кривых, если поточечная сходимость последовательности допустимых кривых γ_i к допустимой кривой γ влечет неравенство $\liminf_{i\to\infty} l(\gamma_i) \geqslant l(\gamma)$. Хорошо известно, что функционал длины, индуцированный некоторой метрикой, является полунепрерывным снизу на пространстве непрерывных относительно этой метрики кривых. Также хорошо известно, что если функционал длины l является полунепрерывным снизу на пространстве своих допустимых кривых, то на всех допустимых кривых он совпадает с функционалом длины $\hat{l}$, индуцированным внутренней метрикой ρ, которая была порождена изначальным функционалом длины l. Доказательство этих утверждений можно найти в [2]. Таким образом, если при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых, то при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t совпадает с функционалом $\hat{l}_t$ на всех допустимых для функционала l_t кривых.

В дальнейшем будем считать, что все метрики семейства ρ_t, $t \in [0,1]$, эквивалентны, то есть для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ найдутся положительные числа C_1 и C_2 такие, что имеет место неравенство $C_1\rho_{t_1} \leqslant \rho_{t_2} \leqslant C_2\rho_{t_1}$. Из этого следует, что все метрики семейства ρ_t определяют одну и ту же топологию на X. Это означает, что множество непрерывных относительно метрики кривых не меняется при переходе от одной метрики семейства ρ_t к другой. Хорошо известно, что топология индуцированной внутренней метрики может быть разве лишь тоньше, чем изначальная топология X, см. [2]. Другими словами, любое открытое множество в изначальной топологии X является открытым и в топологии построенных внутренних метрик. Также хорошо известно, что все допустимые для функционалов длины l_t кривые конечной длины непрерывны относительно внутренних метрик семейства ρ_t, см. [2]. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если последовательность кривых сходится поточечно в одной из метрик семейства ρ_t, то она сходится поточечно в каждой из метрик семейства ρ_t, а также относительно изначальной топологии пространства X.*

Доказательство. Все метрики семейства ρ_t определяют на X одну и ту же топологию, не менее тонкую, чем изначальная топология пространства X. Из этого следует, что если последовательность точек сходится в одной из метрик семейства ρ_t, то она сходится в каждой из метрик семейства ρ_t, и каждая окрестность предела последовательности в топологии внутренних метрик содержит все точки последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа. Таким образом, из того, что любое открытое множество в изначальной топологии X является открытым и в топологии построенных внутренних метрик, следует, что данная последовательность точек также сходится и в изначальной топологии пространства X, что, в свою очередь, влечет требуемое утверждение. □

Далее, под сходимостью последовательностей кривых будем иметь в виду поточечную сходимость относительно метрик семейства ρ_t, $t \in [0,1]$. Отметим, что сходящаяся последовательность допустимых кривых, вообще говоря, не обязана сходиться к допустимой кривой, и даже к кривой, непрерывной относительно метрик семейства ρ_t. Сформулируем специальные условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t.

Определение 1. *Будем называть семейство функционалов длины l_t семейством типа* 1, *если при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых.*

Определение 2. *Будем называть семейство функционалов длины l_t семейством типа* 2, *если для любой последовательности допустимых кривых γ_n, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, из того, что последовательность чисел $l_{t_n}(\gamma_n)$ ограничена, следует, что последовательность чисел $l_{t_0}(\gamma_n)$ тоже ограничена.*

Из эквивалентности метрик семейства ρ_t следует, что X должно быть ограниченно компактно или же нет относительно всех метрик семейства ρ_t одновременно. В работе [1] приводится пример однопараметрического семейства функционалов длины l_t на топологическом пространстве X, для которого выполнены перечисленные выше условия, любые две метрики из соответствующего семейства внутренних метрик ρ_t эквивалентны, семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1 и 2, но расстояние между некоторыми точками разрывно по t. В этом примере метрические пространства (X, ρ_t) не являются ограниченно компактными. Далее мы покажем, что в случае ограниченно компактных, и даже компактных метрических пространств перечисленных выше условий не достаточно для непрерывности функции расстояния. Сформулируем еще два условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t. В дальнейшем мы покажем, что в совокупности с некоторыми из предыдущих условий эти условия являются достаточными для непрерывной зависимости функции расстояния от параметра.

Определение 3. *Будем называть семейство функционалов длины l_t семейством типа* 3, *если для любой сходящейся последовательности допустимых кривых γ_n такой, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C$, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, выполнено следующее соотношение: $l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Определение 4. *Будем называть семейство функционалов длины l_t семейством типа* 4, *если для любой последовательности допустимых кривых γ_n, сходящейся к некоторой кривой γ_0, непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, $t \in [0,1]$, и любых чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$.*

Утверждение 2. *Из определения семейства функционалов длины типа* 3 *вытекает условие непрерывности по* t *длины каждой допустимой кривой.*

Доказательство. Для фиксированной допустимой кривой γ рассмотрим последовательность кривых $\gamma_n = \gamma, n \in \mathbb{N}$. Данная последовательность сходится, и применение к ней условия из определения семейства типа 3 дает непрерывность длины $l_t(\gamma)$ кривой γ по t. □

Напомним понятие Г-сходимости функционалов. Понятие Г-сходимости было введено Эннио де Джорджи в серии работ [14], [15], [16]. Подробный обзор теории, связанной с Г-сходимостью, можно найти в [17] и [18]. Пусть S — топологическое пространство. Напомним, что функционал $f_0 : S \to [0, +\infty)$ называется *асимптотической нижней гранью* последовательности функционалов $f_n : S \to [0, +\infty)$, если для любой последовательности $s_n \in S$ такой, что $s_n \to s_0 \in S$ при $n \to \infty$, выполнено $\liminf_{n\to\infty} f_n(s_n) \geqslant f_0(s_0)$. При этом, если для любого $s_0 \in S$ существует последовательность $s_n \in S$, сходящаяся к s_0, такая, что $\limsup_{n\to\infty} f_n(s_n) \leqslant f_0(s_0)$, то эта нижняя грань называется *точной*. Последовательность функционалов f_n называется Г-*сходящейся к функционалу* f_0, если f_0 является асимптотической нижней гранью последовательности f_n, и эта нижняя грань является точной. В случае функционалов длины пространство S является пространством кривых, на котором определены функционалы. Выберем в качестве него пространство всех кривых, непрерывных относительно метрик семейства ρ_t. Отметим, что определение семейств функционалов типа 4 напоминает понятие Г-сходимости функционалов. Сформулируем еще два условия, которые могут быть наложены на семейство функционалов длины l_t.

Определение 5. *Будем называть семейство функционалов длины* l_t *семейством типа* 5, *если для любых чисел* t_n *таких, что* $t_n \to t_0$ *при* $n \to \infty$, *функционал* $\hat{l}_{t_0}$ *является асимптотической нижней гранью последовательности функционалов* $\hat{l}_{t_n}$.

Определение 6. *Будем называть семейство функционалов длины* l_t *семейством типа* 6, *если при фиксированной сходящейся последовательности кривых* γ_n *и фиксированном числе* $t_0 \in [0, 1]$ *величины* $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n)$ *равны для различных последовательностей чисел* t_n, *сходящихся к* t_0 *при* $n \to \infty$.

Утверждение 3. *Семейство функционалов длины типов* 1 *и* 5 *является семейством функционалов длины типа* 4.

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и последовательность допустимых кривых γ_n, сходящуюся к некоторой кривой γ_0. По условию, функционал $\hat{l}_{t_0}$ является асимптотической нижней гранью последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$, и, следовательно, выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$. Это неравенство равносильно неравенству $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$, поскольку значения функционалов $\hat{l}_{t_n}$ и l_{t_n} совпадают на допустимых кривых в силу того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 1. Это означает, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 4. □

Утверждение 4. *Семейство функционалов длины типа* 6 *является семейством функционалов длины типа* 5.

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел t_n таких, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и последовательность кривых γ_n, сходящуюся к некоторой кривой γ_0. Из условия следует, что $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n) = \liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_0}(\gamma_n)$. При этом, функционал $\hat{l}_{t_0}$ является полунепрерывным снизу на пространстве кривых, непрерывных относительно внутренних метрик семейства ρ_t, как функционал, индуцированный внутренней метрикой. Из этого следует, что $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_0}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$. В результате, мы получаем, что $\liminf_{n\to\infty} \hat{l}_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$, что

означает, что функционал $\hat{l}_{t_0}$ является асимптотической нижней гранью последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$. $\square$

Таким образом, если от семейства функционалов длины l_t типа 1 потребовать, чтобы для любых чисел t_n, стремящихся к t_0 при $n \to \infty$, функционал $\hat{l}_{t_0}$ являлся Г-пределом последовательности функционалов $\hat{l}_{t_n}$, то это семейство будет являться семейством типа 4. При этом, требование точности нижней грани в определении Г-сходимости является избыточным. Как мы покажем далее, из этого следует, что требования такой Г-сходимости в совокупности с некоторыми базовыми условиями было бы достаточно для непрерывной зависимости функции расстояния от параметра.

3. Пример разрывного расстояния при наличии непрерывности длин кривых в случае компактного пространства

Утверждение 5. *Существуют хаусдорфово топологическое пространство X и однопараметрическое семейство функционалов длины l_t на нем, $t \in [0,1]$, такие, что*

- *все метрики соответствующего семейства внутренних метрик ρ_t эквивалентны,*
- *для любого $t \in [0,1]$ пространства (X, ρ_t) компактны и линейно связны,*
- *длины всех допустимых кривых непрерывно зависят от параметра t,*
- *семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1 и 2,*
- *семейство функционалов длины l_t не является семейством типов 3 и 4,*
- *расстояние $\rho_t(A,B)$ разрывно по t между некоторой парой точек A и B.*

Доказательство. Пусть X — двумерная сфера, половина большой окружности которой равна 3, ρ_0 – стандартная внутренняя метрика на ней, A и B – диаметрально противоположные точки, и $\rho_0(A,B) = 3$. Рассмотрим последовательность различных кратчайших геодезических $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, соединяющих A и B, монотонно сходящуюся к некоторой кратчайшей геодезической γ_0, отличной от всех γ_k. Обозначим через Ω множество сферических ломаных относительно метрики ρ_0, образованных конечными наборами сферических отрезков, не лежащих на γ_0. Определим на X семейство функционалов длины $l_t, t \in [0,1]$, с классом допустимых кривых Ω. Пусть длина l_t сферического отрезка $\gamma \in \Omega$, образ которого целиком лежит в образе $\operatorname{Im}\gamma_k$ некоторой кривой γ_k, равна $l_t(\gamma) = \frac{1}{3}(2+\cos(kt))l_0(\gamma)$, где $l_0(\gamma)$ — длина сферического отрезка γ, посчитанная относительно метрики ρ_0. Ясно, что $l_t(\gamma_k) = (2+\cos(kt))$. Для сферических отрезков, не лежащих ни на каких γ_k, определим длину l_t независимой от t и равной длине, посчитанной относительно метрики ρ_0. Далее, длину l_t любой сферической ломаной из Ω определим по аддитивности.

Для удобства, множество кривых, соединяющих A и B, будем обозначать $\{\gamma : A \sim B\}$. Имея длины l_t всех кривых $\gamma \in \Omega$ при каждом $t \in [0,1]$, для каждой пары точек A, B определим $\rho_t(A,B)$ как точную нижнюю грань длин l_t кривых $\gamma \in \Omega$, соединяющих A и B: $\rho_t(A,B) = \inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:A\sim B} l_t(\gamma)$. Заметим, что определенная таким образом функция ρ_0 совпадает с метрикой ρ_0, введенной ранее. Покажем, что при каждом $t \in [0,1]$ построенная функция ρ_t — метрика на X. Симметричность и положительно определенность очевидны. Для любых трех точек $A, B, C \in X$ сумма $\rho_t(A,B) + \rho_t(B,C)$ равна сумме

$$\inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:A\sim B} l_t(\gamma) + \inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:B\sim C} l_t(\gamma),$$

что равно $\inf l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кривым $\gamma \in \Omega, \gamma : A \sim C$, проходящим через B. Последняя величина, в свою очередь, больше либо равна $\inf_{\gamma\in\Omega,\gamma:A\sim C} l_t(\gamma) = \rho_t(A,C)$, из чего следует неравенство треугольника для ρ_t.

Из определения семейства функционалов длины l_t следует, что для любых $\gamma \in \Omega$ и $t \in [0,1]$ выполняется неравенство $\frac{l_0(\gamma)}{3} \leqslant l_t(\gamma) \leqslant l_0(\gamma)$, откуда следует, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 2. Также это означает, что при каждом $t \in [0,1]$ выполнено неравенство $\frac{\rho_0}{3} \leqslant \rho_t \leqslant \rho_0$, откуда следует эквивалентность любых двух метрик семейства ρ_t. При этом, из того, что метрическое пространство (X,ρ_0) является компактным, следует, что для любого $t \in [0,1]$ метрические пространства (X,ρ_t) компактны, поскольку они обладают той же самой топологией. Линейная связность метрических пространств (X,ρ_t) очевидна. Для каждой кривой $\gamma \in \Omega$ функция $l_t(\gamma)$ равна конечной сумме длин l_t сферических отрезков. По построению эти длины непрерывно зависят от t, в результате чего функция $l_t(\gamma)$ непрерывно зависит от t для каждой допустимой кривой γ.

Пусть $\gamma \in \Omega$ — сферический отрезок, который полностью лежит на геодезической γ_m из последовательности $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, и не содержит точек A и B, а $A_1A_2\dots A_n$ — вписанная в γ ломаная. Через d обозначим точную нижнюю грань расстояний ρ_0 между точками образа кривой γ и точками образов кривых из последовательности γ_k, отличных от γ_m. Как известно, кривая γ_m не является предельной для множества остальных кривых из последовательности γ_k, а потому из замкнутости образов кривых γ_k и кривой γ следует, что d положительно.

Будем считать, что размер звеньев ломаной $A_1A_2\dots A_n$ не превосходит d в метрике ρ_0. Обозначим подотрезок отрезка γ между A_i и A_{i+1} через γ' и зафиксируем произвольное $t \in [0,1]$. Отметим, что $l_t(\gamma') \leqslant l_0(\gamma') = \rho_0(A_i,A_{i+1}) \leqslant d$. Длина l_t каждой допустимой кривой, которая соединяет A_i и A_{i+1} и имеет общие точки с другими геодезическими из последовательности γ_k, больше d. Из того, что $l_t \leqslant l_0$, а также из того, что для сферических отрезков, не лежащих ни на каких γ_k, длины l_t и l_0 равны, следует, что длина l_t каждой допустимой кривой, которая соединяет A_i и A_{i+1} и не имеет общих точек с другими геодезическими из последовательности γ_k, не превосходит $l_t(\gamma')$. Таким образом, длина каждого звена $\rho_t(A_i,A_{i+1})$ будет равна длине l_t подотрезка γ между A_i и A_{i+1} при каждом $t \in [0,1]$. Из аддитивности длины l_t следует, что

$$\hat{l}_t(\gamma) = \sup_{A_1A_2\dots A_n\subset\gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \rho_t(A_i,A_{i+1}) = l_t(\gamma).$$

Случай, в котором сферический отрезок $\gamma \in \Omega$ полностью лежит на одной из геодезических последовательности γ_k, и может содержать точки A и B, получается из предыдущего случая предельным переходом.

Пусть $\gamma \in \Omega$ — сферический отрезок, не пересекающийся даже по своему концу ни с одной кривой $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, а также с кривой γ_0. Пусть также $A_1A_2\dots A_n$ — вписанная в γ ломаная. Аналогично, через d обозначим точную нижнюю грань расстояний ρ_0 между точками образа кривой γ и точками образов кривых $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, и кривой γ_0. Из замкнутости образов кривых γ_k, γ_0 и γ следует, что d положительно. При размере звеньев ломаной $A_1A_2\dots A_n$ меньшем, чем d, длина каждого звена $\rho_t(A_i,A_{i+1})$ будет равна $\rho_0(A_i,A_{i+1})$, в связи с чем длина $\hat{l}_t(\gamma)$ будет равна $l_0(\gamma)$, которая, в свою очередь, на таком сферическом отрезке по построению равна $l_t(\gamma)$. Случай, когда сферический отрезок $\gamma \in \Omega$ пересекается с некоторой $\gamma_k, k \in \mathbb{N}$, или с γ_0 только по своему концу, получается из предыдущего случая предельным переходом. Совпадение $\hat{l}_t$ и l_t на остальных кривых из Ω следует из аддитивности функционала длины.

Таким образом, при каждом $t \in [0,1]$ значения функционалов l_t и $\hat{l}_t$ совпадают на всех кривых из класса Ω. При этом, при каждом $t \in [0,1]$ функционал $\hat{l}_t$ является полунепрерывным снизу на пространстве непрерывных относительно ρ_0 кривых, как функционал длины, порожденный внутренней метрикой ρ_t, эквивалентной ρ_0. Это означает, что сходимость последовательности кривых γ_i к кривой γ влечет неравенство $\liminf_{i\to\infty} \hat{l}(\gamma_i) \geqslant \hat{l}(\gamma)$. В част-

ности, сходимость последовательности кривых γ_i из Ω к кривой γ из Ω влечет неравенство $\liminf_{i\to\infty} l(\gamma_i) \geqslant l(\gamma)$, поскольку все кривые из Ω являются непрерывными относительно ρ_0, и на них значения функционалов l_t и $\hat{l}_t$ совпадают при каждом $t \in [0,1]$. В результате, мы показали, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 1.

По построению, последовательность геодезических γ_k является сходящейся к γ_0 последовательностью допустимых кривых, где γ_0 — непрерывная относительно ρ_0 кривая, не содержащаяся в классе допустимых кривых. Рассмотрим последовательность чисел $t_n = \frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N}$, которая сходится к $t_0 = 0$ при $n \to \infty$:

$$l_{t_n}(\gamma_n) - l_0(\gamma_n) = \left(2 + \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{n}\right)\right) - 3 = 1 - 3 = -2 \not\to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

следовательно, семейство функционалов длины l_t не является семейством типа 3. Более того, $l_{t_n}(\gamma_n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а потому величина $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n)$ равна 1. Таким образом, неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_0(\gamma_0)$ не выполнено, поскольку величина $\hat{l}_0(\gamma_0)$ равна 3, следовательно, семейство функционалов длины l_t не является семейством типа 4. Заметим также, что $\rho_{t_n}(A,B) \leqslant l_{t_n}(\gamma_n) = 1$, но $\rho_0(A,B) = 3$, из чего следует, что расстояние между точками A и B разрывно по t при $t = 0$. □

Следствие 1. *Требования непрерывной зависимости от t длин всех допустимых кривых и принадлежности семейства функционалов длины семействам типов 1 и 2 недостаточно для непрерывной зависимости внутренней метрики ρ_t от параметра t в случае компактности (X, ρ_t) при каждом $t \in [0,1]$.*

Следствие 2. *Семейство функционалов длины типов 1 и 2 не обязательно является семейством типа 3 или типа 4 в случае непрерывной зависимости от t длин всех допустимых кривых и компактности (X, ρ_t) при каждом $t \in [0,1]$.*

4. Достаточные условия для непрерывности расстояний в случае ограниченно компактных пространств с внутренней метрикой

Как и ранее, мы предполагаем, что все метрики семейства ρ_t эквивалентны и конечны, а длины всех допустимых кривых непрерывно зависят от t.

Теорема 1. *Расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ полунепрерывно сверху по t.*

Доказательство. Рассматриваемые метрики ρ_t внутренние, следовательно, имеет место равенство $\rho_t(A,B) = \inf_\gamma l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем допустимым кривым γ, соединяющим A и B. Докажем полунепрерывность $\rho_t(A,B)$ сверху в некоторой точке $t_0 \in [0,1]$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется соединяющая точки A и B кривая γ, удовлетворяющая неравенству $|l_{t_0}(\gamma) - \rho_{t_0}(A,B)| < \varepsilon/2$. В свою очередь, из того, что длина $l_t(\gamma)$ этой кривой непрерывно зависит от t, следует существование $\delta > 0$ такого, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено неравенство $|l_t(\gamma) - l_{t_0}(\gamma)| < \varepsilon/2$. В результате, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать такое $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ будет выполнено

$$\rho_t(A,B) = \inf_\gamma l_t(\gamma) \leqslant l_t(\gamma) < l_{t_0}(\gamma) + \varepsilon/2 < \rho_{t_0}(A,B) + \varepsilon,$$

что и означает полунепрерывность сверху. □

Теорема 2. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1, 2 и 3. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Полунепрерывность расстояния по t сверху вытекает из теоремы 1. Пусть полунепрерывности расстояния по t снизу нет, тогда существуют $\varepsilon > 0$, числа t_n такие, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и точки $A, B \in X$ такие, что $\rho_{t_n}(A,B) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность допустимых кривых γ_n, соединяющих A и B, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) - \rho_{t_n}(A,B) < \varepsilon/2$, и, следовательно, $l_{t_n}(\gamma_n) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/2 = C_1$. Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 2, следует, что существует число $C_2 > 0$, для которого $l_{t_0}(\gamma_n) < C_2$ при любом $n \in \mathbb{N}$. В метрике ρ_{t_0} рассмотрим замкнутый шар K с центром в точке A и радиусом C_2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ образ кривой γ_n полностью лежит в шаре K, поскольку ее длина $l_{t_0}(\gamma_n)$ меньше C_2. В силу ограниченной компактности (X, ρ_{t_0}) шар K является компактом в метрике ρ_{t_0}, в связи с чем из теоремы Арцела-Асколи следует, что из последовательности кривых γ_n в компакте K можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой кривой γ_0, соединяющей точки A и B. Кривая γ_0 является непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, но не обязательно является допустимой. Перейдем к этой подпоследовательности – для каждой кривой из нее неравенство $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$ останется верным.

Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 1, следует, что при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t является полунепрерывным снизу на пространстве допустимых кривых, и, следовательно, при каждом $t \in [0,1]$ функционал l_t совпадает с функционалом $\hat{l}_t$ на всех допустимых для функционала l_t кривых. В свою очередь, при каждом $t \in [0,1]$ функционал $\hat{l}_t$ является полунепрерывным снизу на пространстве кривых, непрерывных относительно метрики ρ_t, как функционал длины, порожденный внутренней метрикой ρ_t. Это означает, что найдется $n_1 \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > n_1$ выполнено неравенство $\hat{l}_{t_0}(\gamma_n) > \hat{l}_{t_0}(\gamma_0) - \varepsilon/8$. Учитывая, что для каждого $t \in [0,1]$ функционалы l_t и $\hat{l}_t$ совпадают на всех допустимых кривых, мы получаем, что при $n > n_1$ выполнено неравенство $l_{t_0}(\gamma_n) > \hat{l}_{t_0}(\gamma_0) - \varepsilon/8$. При этом, из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 3, следует, что найдется $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > n_2$ выполнено неравенство $|l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n)| < \varepsilon/8$. Из этого следует, что при $n > \max(n_1, n_2)$ выполнено неравенство $l_{t_n}(\gamma_n) > \hat{l}_{t_0}(\gamma_0) - \varepsilon/4$, но $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$, откуда $\hat{l}_{t_0}(\gamma_0) < C_1 + \varepsilon/4 < \rho_{t_0}(A,B)$ — противоречие. Полунепрерывность расстояния снизу показана. □

Теорема 3. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 2 и 4. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Полунепрерывность расстояния по t сверху вытекает из теоремы 1. Пусть полунепрерывности расстояния по t снизу нет, тогда существуют $\varepsilon > 0$, числа t_n такие, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, и точки $A, B \in X$ такие, что $\rho_{t_n}(A,B) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon$. Рассмотрим последовательность допустимых кривых γ_n, соединяющих A и B, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) - \rho_{t_n}(A,B) < \varepsilon/2$, и, следовательно, таких, что $l_{t_n}(\gamma_n) < \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/2 = C_1$. Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 2, следует, что существует число $C_2 > 0$ такое, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C_2$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Аналогично доказательству теоремы 2, рассмотрим в метрике ρ_{t_0} замкнутый шар с центром в точке A и радиусом C_2, который является компактом в силу ограниченной компактности (X, ρ_{t_0}) и содержит образы всех кривых из последовательности γ_n. По теореме Арцела-Асколи мы можем перейти от последовательности γ_n к ее подпоследовательности, сходящейся к некоторой кривой γ_0. Кривая γ_0 является непрерывной относительно метрик семейства ρ_t, но не обязательно является допустимой. Из того, что семейство функционалов длины l_t является семейством типа 4, следует, что выполнено неравенство $\liminf_{n\to\infty} l_{t_n}(\gamma_n) \geqslant \hat{l}_{t_0}(\gamma_0)$. При этом, $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $\hat{l}_{t_0}(\gamma_0) \leqslant C_1 = \rho_{t_0}(A,B) - \varepsilon/2$ — противоречие. Полунепрерывность расстояния снизу показана. □

Теорема 4. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1, 2 и 5. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждения 3 и теоремы 3. □

Теорема 5. *Пусть метрические пространства (X, ρ_t) ограниченно компактны для любого $t \in [0,1]$, а семейство функционалов длины l_t является семейством типов 1, 2 и 6. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in X$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждения 4 и теоремы 4. □

5. Непрерывность расстояний в случае полных финслеровых и римановых многообразий

Рассмотрим k-мерное компактное связное гладкое многообразие M с заданой на его касательном расслоении TM функцией $F_t(x,\xi), x \in M, \xi \in T_xM$, которая является финслеровой метрикой на M при каждом $t \in [0,1]$ и непрерывно зависит от параметра t. Как известно, при каждом фиксированном $t \in [0,1]$ функция $F_t(x,\xi)$ является гладкой функцией на $TM \setminus \{0\}$ и положительно однородной функцией по ξ: $F_t(x,\lambda\xi) = \lambda F_t(x,\xi)$ для любых $\lambda > 0$ и $\xi \neq 0$. Мы будем рассматривать финслеровы метрики, которые являются нормами на касательных пространствах T_xM для всех $x \in M$. Для каждого $t \in [0,1]$ финслерова метрика $F_t(x,\xi)$ определяет функционал длины, классом допустимых кривых которого является класс кусочно-гладких кривых. Для удобства мы будем рассматривать кривые, параметризованные отрезком $[0,1]$. Длина кусочно-гладкой кривой $\gamma : [0,1] \to M$ в финслеровой метрике $F_t(x,\xi)$ равна

$$l_t(\gamma) = \int_0^1 F_t(\gamma(s), \dot\gamma(s))ds.$$

Легко показать, что длина каждой кусочно-гладкой кривой в финслеровой метрике F_t непрерывно зависит от t. Действительно, достаточно рассмотреть разбиение кривой на последовательные кривые, образы которых лежат в некоторых картах. Длина каждого участка кривой непрерывно зависит от t, поскольку в соответствующей карте она представляется в виде определенного интеграла от функции, непрерывно зависящей от параметра t.

В силу связности многообразия при каждом фиксированном $t \in [0,1]$ для любых двух точек из M найдется кусочно-гладкая кривая конечной длины, соединяющая их. Обозначим через $\rho_t, t \in [0,1]$, соответствующее семейство внутренних метрик на M. Хорошо известно, что внутренняя метрика, индуцированная финслеровым функционалом длины, определяет на гладком многообразии топологию, которая совпадает с изначальной топологией этого многообразия, см. [2]. Таким образом, все метрики ρ_t определяют одну и ту же топологию на M, причем эта топология совпадает с изначальной топологией пространства M. При этом, метрики семейства ρ_t не обязаны быть эквивалентными на всем многообразии. В дальнейшем нам будет необходимо лишь то, чтобы многообразие M было ограниченно компактным при каждом $t \in [0,1]$, и позже мы потребуем это непосредственно. Как известно, из того, что при любых фиксированных $t \in [0,1]$ и $x \in M$ функция $F_t(x,\cdot)$ является нормой на касательном пространстве T_xM, следует, что соответствующий функционал финслеровой длины l_t является полунепрерывным снизу на пространстве кусочно-гладких кривых в M, см. [2]. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 6. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 1.

Утверждение 7. *Если гладкое многообразие M — компактно, то для любых $t_0 \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ для любой пары $(x,\xi), \xi \neq 0$, принадлежащей касательному расслоению TM, будет выполнено неравенство*

$$\left| \frac{F_t(x,\xi)}{F_{t_0}(x,\xi)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Зафиксируем t_0 и рассмотрим функцию, определенную на $(TM \setminus T_0) \times [0,1]$, где T_0 — нулевое сечение TM:

$$f(x,\xi,t) = \frac{F_t(x,\xi)}{F_{t_0}(x,\xi)}.$$

Она непрерывна, а значит, равномерно непрерывна на компакте $SM \times [0,1]$, где SM — сферизация касательного расслоения в метрике F_{t_0}. Таким образом, для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех t, удовлетворяющих неравенству $|t - t_0| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x,\xi,t) - f(x,\xi,t_0)| < \varepsilon$ при любых $(x,\xi) \in SM$. Учитывая, что $f(x,\xi,t_0) = 1$, мы получаем соотношение $|f(x,\xi,t) - 1| < \varepsilon$. Таким образом, из того, что $f(x,\lambda\xi,t) = f(x,\xi,t)$ при $\lambda > 0$, следует требуемое утверждение. □

Утверждение 8. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 2.

Доказательство. Пусть $\gamma_n : [0,1] \to M, n \in \mathbb{N}$, — последовательность кусочно-гладких кривых, а числа $t_0, t_n, n \in \mathbb{N}$, таковы, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$ и $l_{t_n}(\gamma_n) < C_1$ для некоторой константы $C_1 > 0$. Зафиксируем произвольное ε, удовлетворяющее неравенству $0 < \varepsilon < 1$. Из утверждения 7 следует, что для ε найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ неравенство $1 - \varepsilon < \frac{F_t(\xi)}{F_{t_0}(\xi)}$ будет выполнено для любой пары $(x,\xi) \in TM, \xi \neq 0$. В силу того, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$, существует $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$ выполнено неравенство $|t_n - t_0| < \delta$. Таким образом, для любых $n > N$ и $s \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s)) < \frac{F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))}{1 - \varepsilon}.$$

Проинтегрируем это неравенство по s на отрезке $[0,1]$:

$$l_{t_0}(\gamma_n) = \int_0^1 F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))ds < \int_0^1 \frac{F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))}{1 - \varepsilon} ds = \frac{l_{t_n}(\gamma_n)}{1 - \varepsilon} < \frac{C_1}{1 - \varepsilon},$$

то есть последовательность чисел $l_{t_0}(\gamma_n), n \in N$, ограничена. □

Утверждение 9. *Непрерывно зависящее от t семейство финслеровых метрик F_t на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 3.

Доказательство. Пусть $\gamma_n : [0,1] \to M, n \in \mathbb{N}$, — сходящаяся последовательность кусочно-гладких кривых, их длины в метрике F_{t_0} ограничены единой константой $C > 0$, а числа $t_0, t_n, n \in \mathbb{N}$, таковы, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $F_{t_0}(x,\xi) > 0$ для любой пары $(x,\xi) \in TM, \xi \neq 0$, из утверждения 7 следует, что найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ для любой пары $(x,\xi) \in TM, \xi \neq 0$, будет выполнено неравенство $|F_t(x,\xi) - F_{t_0}(x,\xi)| < \varepsilon F_{t_0}(x,\xi)$. Рассмотрим такое $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$ выполнено неравенство $|t_n - t_0| < \delta$. В результате, для любых $n > N$ и $s \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$|F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s)) - F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))| < \varepsilon F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s)).$$

Рассмотрим модуль разности длин кривой γ_n относительно метрик F_{t_n} и F_{t_0} при $n > N$:

$$|l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n)| = \left| \int_0^1 F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s)) - F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))ds \right| <$$

$$< \int_0^1 |F_{t_n}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s)) - F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))|ds < \varepsilon \int_0^1 F_{t_0}(\gamma_n(s), \dot\gamma_n(s))ds = \varepsilon l_{t_0}(\gamma_n) < \varepsilon C.$$

Это означает, что $|l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n)| \to 0$ при $n \to \infty$. □

Теорема 6. *Пусть гладкое финслерово многообразие M компактно, а его метрика F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$. Тогда расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in M$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждений 6, 8, 9 и теоремы 2. □

Для того, чтобы воспользоваться свойствами непрерывных на компакте функций, мы оттолкнулись от компактных финслеровых многообразий. Теорема 6 может быть распространена на ограниченно компактные финслеровы многообразия. Отметим, что ограниченная компактность конечномерного финслерова многообразия равносильна условию его полноты. Идея доказательства непрерывности расстояния в этом случае проста: мы рассмотрим достаточно большой компактный шар, содержащий точки A и B, и сведем задачу к случаю компактного многообразия.

Теорема 7. *Пусть M — гладкое связное многообразие, а функция F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$ и является финслеровой метрикой на M при каждом $t \in [0,1]$. Если финслерово многообразие (M, F_t) является полным метрическим пространством при каждом $t \in [0,1]$, то расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in M$ непрерывно зависит от t.*

Доказательство. Докажем непрерывность $\rho_t(A,B)$ в некоторой точке $t_0 \in [0,1]$. В силу связности многообразия существует кусочно-гладкая кривая $\gamma_1 : [0,1] \to M$ такая, что $\gamma_1(0) = A$, $\gamma_1(1) = B$. Функция $l_t(\gamma_1) = \int_0^1 F_t(\gamma_1(s), \dot\gamma_1(s))ds$ непрерывна по переменной t на отрезке $[0,1]$, в следствие чего величина $m = \max_{t\in[0,1]} l_t(\gamma_1)$ конечна. Рассмотрим замкнутый шар $K = \{x \in M | \rho_{t_0}(A,x) \leqslant m+1\}$, который является компактом, так как M полное. Если K совпал с M, то утверждение сводится к случаю компактного многообразия и вытекает из теоремы 6. Иначе, рассмотрим множество кривых L, образы которых лежат в K, один конец которых совпадает с A, а другой лежит на границе ∂K. Если $\gamma \in L$ — кривая и P — ее конец, лежащий на ∂K, то $l_{t_0}(\gamma) \geqslant \rho_{t_0}(A,P) = m+1$. Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ выполнено $l_t(\gamma) > m$ для любой кривой $\gamma \in L$.

Предположим, что это не так, и существуют числа t_n такие, что $t_n \to t_0$ при $n \to \infty$ для некоторого t_0, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует кривая γ_n такая, что $l_{t_n}(\gamma_n) \leqslant m$. Заметим, что K является компактным финслеровым многообразием, финслерова метрика F_t на котором непрерывно зависит от t, и образы кривых γ_n полностью лежат в K. Рассмотрим ограничение семейства функционалов длины l_t на K. Классом допустимых кривых этого ограничения является множество кусочно-гладких кривых, образы которых полностью лежат в K. Из утверждения 8 следует, что семейство функционалов длины l_t, ограниченное на компакт K, является семейством типа 2, а, значит, существует константа $C > 0$ такая, что $l_{t_0}(\gamma_n) < C$ для любого $n \in \mathbb{N}$. В силу того, что K — компакт, из теоремы Арцела-Асколи следует, что в метрике F_{t_0} из последовательности кривых γ_n можно извлечь сходящуюся подпоследовательность кривых. Перейдем к этой подпоследовательности – для каждой кривой из нее неравенство $l_{t_n}(\gamma_n) \leqslant m$ останется верным. Таким образом, γ_n — сходящаяся последовательность кривых в компакте K, длины которых в метрике F_{t_0} ограничены общей константой. Из утверждения 9

следует, что семейство функционалов длины l_t, ограниченное на K, является семейством типа 3, и, значит, $l_{t_n}(\gamma_n) - l_{t_0}(\gamma_n) \to 0$ при $n \to \infty$, что противоречит неравенствам $l_{t_0}(\gamma_n) \geqslant m+1$ и $l_{t_n}(\gamma_n) \leqslant m$, которые должны были быть верны для любого $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим кривую $\gamma : [0,1] \to M, \gamma(0) = A, \gamma(1) = B$, образ которой не лежит в K. Пусть $s_0 = \inf\{s | s \in [0,1], \gamma(s) \notin K\}$. Ограничение кривой γ на отрезок $[0, s_0]$ — это кривая из L, а значит, $l_t(\gamma|_{[0,s_0]}) > m$ при $|t - t_0| < \delta$. Из этого следует, что $l_t(\gamma) > l_t(\gamma|_{[0,s_0]}) > m$ при $|t - t_0| < \delta$. При этом, точная нижняя грань длин всех кривых, соединяющих A и B, не превосходит m в каждой метрике F_t, $t \in [0,1]$, а значит при $|t - t_0| < \delta$ она совпадает с точной нижней гранью длин кривых, соединяющих A и B, образы которых лежат в K. Определим $\rho_t^K(A,B) = \inf l_t(\gamma)$, где точная нижняя грань берется по всем кусочно-гладким соединяющим A и B кривым γ, образы которых лежат в K. Из теоремы 6 следует, что $\rho_t^K(A,B)$ непрерывно по t, так как K — компакт. При этом, мы показали, что $\rho_t^K(A,B) = \rho_t(A,B)$ при $|t - t_0| < \delta$, а значит, $\rho_t(A,B)$ непрерывно в точке t_0. $\square$

Как известно, финслерова метрика является обобщением римановой метрики, где общее определение длины касательного к многообразию вектора не обязательно задается в виде квадратичного корня из симметричной билинейной формы, как это делается в римановом случае. Таким образом, результаты, полученные для финслеровых многообразий, имеют место и в случае римановых многообразий. Действительно, пусть дано k-мерное гладкое связное риманово многообразие M с метрикой ds_t^2, непрерывно зависящей от параметра $t \in [0,1]$. Подразумевается, что ds_t^2 — риманова метрика при каждом $t \in [0,1]$ и в каждой точке $x \in M$ компоненты метрического тензора $g_{ij}^t(x)$ в каждых локальных координатах непрерывно зависят от t. Аналогично, для любой пары точек $A, B \in M_n$ расстояние $\rho_t(A,B)$ между ними в метрике ds_t^2 определяется как точная нижняя грань длин $l_t(\gamma)$ посчитанных относительно метрики ds_t^2 кусочно-гладких кривых γ, соединяющих A и B.

Через $||\xi||_t$ обозначим норму вектора ξ, принадлежащего касательному расслоению TM к многообразию M, относительно метрики ds_t^2 . В локальных координатах $(x_1, \ldots, x_k)$, определенных в некоторой карте, эта норма записывается следующим образом:

$$||\xi||_t = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}^t(x_1, \ldots, x_k)\xi^i\xi^j},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_k)$ — точка приложения вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, а значит, она непрерывно зависит от t, поскольку g_{ij}^t непрерывно зависят от t. Рассмотрим на многообразии M семейство финслеровых метрик, заданных следующим равенством:

$$F_t(x, \xi) = ||\xi||_t, t \in [0,1].$$

По построению, финслерова метрика F_t непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$. При этом, финслерова метрика F_t и риманова метрика ds_t^2 определяют одну и ту же функцию расстояния ρ_t и один и тот же функционал длины на многообразии M. Таким образом, из утверждений 6, 8, 9 и теоремы 7 вытекают аналогичные результаты для римановой метрики:

Утверждение 10. *Непрерывно зависящее от t семейство римановых метрик ds_t^2 на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 1.

Утверждение 11. *Непрерывно зависящее от t семейство римановых метрик ds_t^2 на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 2.

Утверждение 12. *Непрерывно зависящее от t семейство римановых метрик ds_t^2 на гладком компактном многообразии M задает семейство функционалов длины типа* 3.

Теорема 8. *Пусть M — гладкое связное риманово многообразие, и его метрика ds_t^2 непрерывно зависит от параметра $t \in [0,1]$. Если риманово многообразие (M, ds_t^2) является полным метрическим пространством при каждом $t \in [0,1]$, то расстояние $\rho_t(A,B)$ между любыми двумя точками $A, B \in M$ непрерывно зависит от t.*

6. Заключение

Связь непрерывности длин кривых и непрерывности расстояний между точками при деформациях метрики оказалась нетривиальным вопросом. Как показано в настоящей работе, а также в работе [1], существуют примеры пространств и заданных на них функционалов длины, в которых при деформации этих функционалов длины из непрерывности изменения длин допустимых кривых не следует непрерывность изменения расстояний между точками, причем эти пространства могут быть как компактны, так и не компактны относительно соответствующих внутренних метрик. При этом, в настоящей работе мы приводим условия, которых в совокупности с непрерывностью изменения длин кривых достаточно для непрерывности изменения расстояний между точками при деформации функционала длины в случае ограниченно компактных метрических пространств. Мы показываем, что эти условия выполнены на компактных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра. В качестве следствия мы получаем, что на полных финслеровых и римановых многообразиях в случае непрерывной зависимости соответствующей метрики от параметра расстояния между любыми точками непрерывно зависят от этого параметра.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чикин В.М. Минимальные деревья Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий / Чикин В.М. // Матем. сб., 2017, Vol. 208, №7. P. 145-171, http://mi.mathnet.ru/msb8759.

2. Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии / Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. - Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

3. Gromov M. Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces / Gromov M. - Progress in Math., 152, Birkhäuser, 1999.

4. Khamsi M. A., Kirk W. A. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory / Khamsi M. A., Kirk W. A. - Wiley-IEEE, 2001.

5. Busemann H. The Geometry of Geodesics / Busemann H. - Academic Press, New York, 1955.

6. Papadopoulos A. Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature / Papadopoulos A. - IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 6, European Mathematical Society, 2005.

7. Finsler P. Uber Kerven und Flachen in allgemeinen Raumen / Finsler P. - Basel, Verlag Birkhauser AG, 1951.

8. Noether E. Invarianten beliebiger Differentialausdrücke / Noether E. // Nachr. Ges. Wiss. Gott., Math.-Phys. Kl., 1918, Vol. 1918, P. 37-44.

9. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств / Рунд Х. - Москва: Наука, 1981.

10. Antonelli P.L. Handbook of Finsler geometry / Antonelli P.L. - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

11. Bao D., Chern S. S., Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry / Bao D., Chern S. S., Shen Z. - Springer-Verlag, 2000.

12. Shen Z. Lectures on Finsler Geometry / Shen Z. - World Scientific Publishers, 2001.

13. Shen Z. Differential geometry of spray and Finsler spaces / Shen Z. - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

14. De Giorgi E. Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area / De Giorgi E. // Rend. Mat., Ser. 8, 1975, P. 277-294.

15. De Giorgi E., Franzoni T. Su un tipo di convergenza variazionale / De Giorgi E., Franzoni T. // Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1975, Vol. 58, №6, P. 842-850.

16. De Giorgi E., Spagnolo S. Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine / De Giorgi E., Spagnolo S. // Boll. Un. Mat. It., Ser. 8, 1973, P. 391-411.

17. Dal Maso G. An Introduction to Gamma-Convergence / Dal Maso G. - Birkhäuser, Boston, 1993.

18. Braides A. Gamma-convergence for beginners / Braides A. - Oxford University Press, 2002.

REFERENCES

1. Chikin V.M., 2017, "Steiner minimal trees in small neighbourhoods of points in Riemannian manifolds", *Sb. Math.*, vol. 208, no. 7, pp. 1049-1072, https://iopscience.iop.org/article/10.1070/SM8759.

2. Burago D., Burago Yu., Ivanov S., 2001, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics 33, AMS.

3. Gromov M., 1999, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Progress in Mathematics 152, Birkhäuser, Boston.

4. Khamsi M. A., Kirk W. A., 2001, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, Wiley-IEEE.

5. Busemann H., 1955, *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, New York.

6. Papadopoulos A., 2005, *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 6, European Mathematical Society.

7. Finsler P., 1951, *Uber Kerven und Flachen in allgemeinen Raumen*, Basel, Verlag Birkhauser AG.

8. Noether E., 1918, "Invarianten beliebiger Differentialausdrücke" [Invariants of arbitrary differential expressions], *Nachr. Ges. Wiss. Gott., Math.-Phys. Kl.*, vol. 1918, pp. 37-44.

9. Rund H., 1959, *The differential geometry of Finsler spaces*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 101, Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag.

10. Antonelli P.L., 2003, *Handbook of Finsler geometry*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

11. Bao D., Chern S. S., Shen Z., 2000, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Verlag.

12. Shen Z., 2001, *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific Publishers.

13. Shen Z., 2001, *Differential geometry of spray and Finsler spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

14. De Giorgi E., 1975, "Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area", *Rend. Mat.*, ser. 8, pp. 277-294.

15. De Giorgi E., Franzoni T., 1975, "Su un tipo di convergenza variazionale", *Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, vol. 58, no. 6, pp. 842-850.

16. De Giorgi E., Spagnolo S., 1973, "Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine", *Boll. Un. Mat. It.*, ser. 8, pp. 391-411.

17. Dal Maso G., 1993, *An Introduction to Gamma-Convergence*, Birkhäuser, Boston.

18. Braides A., 2002, *Gamma-convergence for beginners*, Oxford University Press.

Получено 12.02.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-305-322

О кратных рациональных тригонометрических суммах над полем алгебраических чисел

В. Н. Чубариков

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

В работе описаны основные свойства полиномиальных сравнений по модулю идеала в кольце целых алгебраического числового поля, найдены оценки полных рациональных тригонометрических сумм от многочлена над алгебраическим полем, получены оценки сумм характеров Дирихле по модулю, равному степени простого идеала в алгебраическом поле, даны оценки кратных полных рациональных тригонометрических сумм от многочленов над алгебраическим полем.

Ключевые слова: тригонометрические суммы, метод И. М. Виноградова, метод Хуа Локена, кольцо целых в алгебраическом числовом поле, полные рациональные тригонометрические суммы над алгебраическим числовым полем, характеры Дирихле в алгебраических числовых полях, формула А. Г. Постникова для характеров Дирихле в алгебраическом поле.

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. О кратных рациональных тригонометрических суммах над полем алгебраических чисел // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 305–322.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-305-322

On multiple rational trigonometric sums over a field of algebraic numbers

V. N. Chubarikov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

The paper describes the basic properties of polynomial comparisons modulo an ideal in the ring of integers of an algebraic number field, estimates of total rational trigonometric sums from a polynomial over an algebraic field are found, estimates of sums of Dirichlet characters modulo the degree of a prime ideal in an algebraic field are obtained, estimates of multiples of total rational trigonometric sums from polynomials over an algebraic field are given.

Keywords: trigonometric sums, I. M. Vinogradov method, Hua Lo-ken method, ring of integers in an algebraic number field, complete rational trigonometric sums over an algebraic number field, Dirichlet characters in algebraic number fields, A. G. Postnikov formula for Dirichlet characters in an algebraic field.

Bibliography: 37 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2021, "On multiple rational trigonometric sums over a field of algebraic numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 305–322.

1. Введение

Настоящая статья посвящена светлой памяти академика И.М.Виноградова (14.09.1891 – 20.03.1983) и была подготовлена к 130-летию со дня его рождения [35]-[37].

Рациональные тригонометрические суммы вида

$$S = S(q; f(x)) = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{f(x)}{q}},$$

где $q \geq 1, f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x, (a_n, \ldots, a_1, q) = 1$, сами по себе имеют ярко выраженный "алгебраический" аспект, поскольку тесно связаны с кольцом вычетов по модулю q.

Первым примером такого рода взаимосвязи явились суммы Гаусса [25]

$$\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{x^2}{q}} = \frac{1 + i^{-q}}{1 + i^{-1}} \sqrt{q}.$$

В 1940 г. Хуа Ло-кен нашел неулучшаемую оценку [29]

$$S(q; f(x)) \ll_n q^{1-\frac{1}{n}+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная. В дальнейшем, Хуа Ло-кен, В.И.Нечаев в этой оценке убрали величину ε, другие уточнения были получены С. Б. Стечкиным и Чен Джинруном.

В 1942 г. Хуа Л. К. и С. Х. Мин обобщили этот результат на случай многочленов от двух переменных, которые не приводятся к многочлену степени k от одной переменной, доказав, что

$$\sum_{x=1}^{p}\sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i\frac{f(x,y)}{p}} \ll p^{2-\frac{2}{n}},$$

где p — простое число и

$$f(x,y)\sum_{\substack{k=0\\1\le k+m\le n}}^{n}\sum_{m=0}^{n} a_{k,m}x^k y^m$$

многочлен с коэффициентами простыми в совокупности с p. Существенно новые оценки для полных сумм по простому модулю с многочленом от одной и нескольких переменных были получены А.Вейлем и П.Делинем. Элементарный метод оценки таких сумм был развит А. Г. Постниковым, С. А. Степановым, Н. М. Коробовым, Д. А. Митькиным и др.

Неулучшаемые оценки полных кратных рациональных тригонометрических сумм в 1976 г. были получены автором статьи [32],[33]. Они имеют вид

$$S = S(q; f(x_1,\dots,x_r)) = \sum_{x_1=1}^{q}\cdots\sum_{x_r=1}^{q} e^{2\pi\frac{f(x_1,\dots,x_r)}{q}} \ll_{r,n} q^{r-\frac{1}{n}}(\tau(q))^{r-1},$$

где постоянная в знаке $\ll_{r,n}$ зависит от r и n,

$$f(x_1,\dots,x_r) = \sum_{t_1=0}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n} a(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r}, a(0,\dots,0) = 0,$$

и коэффициенты $a(t_1,\dots,t_r)$ просты в совокупности с q.

Мощному развитию методов исследования рациональных тригонометрических сумм послужило создание и систематическое изучение "метода круга" Харди – Литтлвуда – Рамануджана [26]–[28] в аддитивной теории чисел и, в первую очередь, в проблеме Варинга о представлении натуральных чисел в виде суммы ограниченного числа степеней неотрицательных целых чисел. Существенным звеном в их исследованиях по проблеме Варинга играют оценки сумм Г.Вейля, найденные им в 1916 г. в работе о равномерном распределении последовательностей по модулю единица. В 1934 г. И. М. Виноградов принципиально усилил результат Харди – Литтлвуда, создав новый мощный метод в аналитической теории чисел [1]–[24].

В частности, в 1952 г. Хуа Ло-кен [29] доказал, что особый ряд

$$\sigma = \sigma(k) = \sum_{q_1=1}^{+\infty}\cdots\sum_{q_n=1}^{+\infty}\sum_{\substack{h_1=1\\(h_1,q_1)=1}}^{q_1}\dots\sum_{\substack{h_n=1\\(h_n,q_n)=1}}^{q_n} 1\times$$

$$\times\left|(q_1\dots q_n)^{-1}\sum_{x=1}^{q_1\dots q_n} e^{2\pi i(\frac{h_n}{q_n}x^n+\dots+\frac{h_1}{q_1}x)}\right|^{2k}$$

сходится при $2k > \frac{n(n+1)}{2}+2$ и расходится при $2k \le \frac{n(n+1)}{2}+2$. Ряд σ отвечает за "арифметическую природу" в главном члене асимптотической формулы для числа решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+\dots+x_k = y_1+\dots+y_k,\\ \quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\\ x_1^n+\dots+x_k^n = y_1^n+\dots+y_k^n, \end{cases}$$

в натуральных числах, не превосходящих любой наперед заданной границы.

В 1978 г. Г. И. Архипов, А. А. Карацуба и В. Н. Чубариков [32], [33] доказали, что при $1 \le l \le \cdots \le n, l + \cdots + n < \frac{n(n+1)}{2}$ для "выщербленной системы" уравнений

$$\begin{cases} x_1^l + \cdots + x_k^l = y_1^l + \cdots + y_k^l, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n = y_1^n + \cdots + y_k^n, \end{cases}$$

в натуральных числах, не превосходящих любой наперед заданной границы, особый ряд

$$\sigma' = \sigma'(k) = \sum_{q_l=1}^{+\infty} \cdots \sum_{q_n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{h_l=1 \\ (h_l,q_l)=1}}^{q_l} \cdots \sum_{\substack{h_n=1 \\ (h_n,q_n)=1}}^{q_n} 1 \times$$

$$\times \left| (q_l \dots q_n)^{-1} \sum_{x=1}^{q_l \dots q_n} e^{2\pi i (\frac{h_n}{q_n} x^n + \cdots + \frac{h_l}{q_l} x^l)} \right|^{2k};$$

сходится при $2k > l + \cdots + n + 1$ и расходится при $2k \le l + \cdots + n + 1$.

Весьма полезной в аддитивной теории чисел оказалась формула Хуа Ло-кена [29] при $P < q$ для неполных рациональных тригонометрических сумм вида

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{hx^n}{q}} = \frac{P}{q} \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{hx^n}{q}} + (q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

где $(h, q) = 1$ и $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

Формула Постникова [31] позволяет свести оценку сумм характеров Дирихле к рациональным тригонометрическим суммам. Пусть $p \ge 3$ — простое число, n, m и s — натуральные числа, $s < n, n - s \le sm < n + s - 1$ и $\operatorname{ind} \nu$ — индекс вычета ν по модулю p^n. Тогда справедлива формула

$$\frac{\operatorname{ind}(1 + p^s u)}{p - 1} \equiv a_1 p^s u + \frac{1}{2} a_2 (p^s u)^2 + \cdots + \frac{1}{m} a_m (p^s u)^m \pmod{p^{n-1}},$$

где $(a_k, p) = 1, k = k_1 p^{\alpha_k}, (k_1, p) = 1, 1 \le k \le m$, и $\frac{1}{k} = p^{-\alpha_k} \bar{k_1}, k_1 \bar{k_1} \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

В настоящей работе продолжены исследования Хуа Ло-кена [29],[30] по оценкам рациональных тригонометрических сумм и сумм характеров Дирихле в алгебраических числовых полях.

2. Полиномиальные сравнения по модулю идеала в кольце целых алгебраического числового поля

Пусть k, n — натуральные числа. Рассмотрим поле алгебраических чисел $\mathbf{K}$ степени n над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Пусть $\operatorname{tr}(\alpha) = \alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(n)} \in \mathbf{Q}, N(\alpha) = \prod_{s=1}^{n} \alpha^{(s)}$ — след и норма элемента $\alpha \in \mathbf{K}$ и $\alpha^{(s)}, 1 \le s \le n$, — его сопряжённые. Обозначим через $\mathbf{J}$ кольцо целых поля $\mathbf{K}$.

Система $\mathbf{a}$ чисел поля $\mathbf{K}$ называется идеалом, если

1) для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{a}$ и для любых целых $\lambda, \mu \in \mathbf{J}$ имеем $\lambda\alpha + \mu\beta \in \mathbf{a}$;

2) существует целое ν такое, что для любого $\alpha \in \mathbf{a}$ число $\nu\alpha \in \mathbf{J}$ является целым.

Идеалы, содержащие только целые числа, называются целыми, все остальные идеалы называются дробными.

Пусть задан дробный идеал $\mathbf{f}$ и целый идеал $\mathbf{b}$. Очевидно, $\mathbf{f}|\mathbf{fb}$. Разобьем множество элементов идеала $\mathbf{f}$ на классы вычетов, отвечающие модулю $\mathbf{fb}$. Число различных классов вычетов будет равно норме $N(\mathbf{b})$ идеала $\mathbf{b}$. В каждом классе возьмем один элемент. Множество всех таких элементов образует *полную систему вычетов идеала* $\mathbf{f}$ *по модулю идеала* $\mathbf{fb}$.

Пусть далее идеал δ обозначает дифференту поля $\mathbf{K}$ над $\mathbf{Q}$, и пусть D — дискриминант поля $\mathbf{K}$, так что норма $N(\delta) = D$, причём

$$\delta^{-1} = \{\rho \in \mathbf{K} \mid \forall \alpha \in \mathbf{K} \text{ имеем } \operatorname{tr}(\rho\alpha) \in \mathbf{Z}\},$$

т.е.

$$E(\rho\alpha) = e^{2\pi i \operatorname{tr}(\rho\alpha)} = 1.$$

Заметим, что для квадратичного поля $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ при $d \equiv 1 \pmod 4$ базис кольца целых $\mathbf{J} \subset \mathbf{K}$ имеет вид $\{1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{d})\}$, дифферента $\sqrt{d}\mathbf{J}$, дискриминант $D = d$; а при $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ базис представляет собой $\{1, \sqrt{d}\}$, дифферента равна $2\sqrt{d}\mathbf{J}$ и дискриминант равен $D = 4d$.

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения, доказательства которых по существу повторяют вывод соотетствующих утверждений из [32], [33].

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *— целый идеал в поле* $\mathbf{K}$, *и пусть* $\wp$ *— простой идеал, причём* $\wp \not| \mathbf{a}$. *Тогда число решений сравнения*

$$f(\xi) = \alpha_m \xi^m + \cdots + \alpha_1 \xi + \alpha_0 \equiv 0 \pmod{\wp}$$

с учётом кратности, не превосходит m.

Лемма 2. *Пусть* $\wp$ *— простой идеал, и пусть* $f(x)$ *— многочлен с целыми коэффициентами по модулю* $\wp$. *Пусть, далее,* $x = a$ *— корень кратности* m *сравнения* $f(x) \equiv 0 \pmod{\wp}$. *Пусть, наконец,* λ *— целое число, делящееся на* $\wp$, *но не делящееся на* $\wp^2$, *и пусть* v *будет наибольшее целое такое, что* $\wp^v$ *делит все коэффициенты многочлена*

$$f(\lambda x + a) - f(a).$$

Положим

$$h(x) \equiv \lambda^{-v}(f(\lambda x + a) - f(a)) \pmod{\wp}.$$

Тогда $v \le m$ *и число решений сравнения* $h(x) \equiv 0 \pmod{\wp}$ *не превосходит* m.

3. Полные рациональные тригонометрические суммы от многочлена над алгебраическим полем

Положим

$$\exp(x) = e^x, e(x) = \exp(2\pi i x), E(\alpha) = e(\operatorname{tr}(\alpha)).$$

Наконец, пусть задан дробный идеал $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{K}$. Тогда найдутся единственные целые взаимно простые идеалы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{q}$ такие, что

$$\mathbf{a}\delta = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{q}}.$$

Для данного идеала $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ определим многочлен $f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k$ степени k с коэффициентами из поля $\mathbf{K}$ и полную рациональную тригонометрическую сумму

$$S(f(x), \mathbf{q}) = \sum_{x(\mathbf{q})} e^{2\pi i \operatorname{tr}(f(x))} = \sum_{x(\mathbf{q})} E(f(x)),$$

где вычет $x = x(\mathbf{q})$ пробегает полную систему вычетов по модулю идеала $\mathbf{q}$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{q}$ *— целый идеал,* $\alpha \in \mathbf{J}$ *— целое число, и пусть* $\xi \in \mathbf{J}$ *пробегает полную систему вычетов* $(\mathbf{q}\delta)^{-1}$ *по модулю* δ^{-1}. *Тогда*

$$\sum_{\xi} E(\alpha\xi) = \sum_{\xi} e^{2\pi i \operatorname{tr}(\alpha\xi)} = \begin{cases} N(\mathbf{q}), & \text{если} \quad \mathbf{q}|\alpha, \\ 0, & \text{если} \quad \mathbf{q}\not|\alpha. \end{cases}$$

Доказательство. см., например, [34], Lemma 2.5, p.16-17.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{a}, \mathbf{q}, \mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}$ *— целые идеалы,*

$$\mathbf{q} = \mathbf{q_1}\mathbf{q_2}, (\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) = \mathbf{1}, \mathbf{a} = \{\alpha_k, \dots, \alpha_1\},$$

$$f(\xi) = \alpha_k\xi^k + \dots + \alpha_1\xi, \mathbf{a}\mathbf{q}\delta = \mathbf{r}, (\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \mathbf{1}.$$

Тогда найдутся многочлены

$$f_s(\xi) = \alpha_{s,k}\xi^k + \dots + \alpha_{s,1}\xi, \mathbf{a_s} = \{\alpha_{s,k}, \dots, \alpha_{s,1}\}, s = 1, 2,$$

степени k, *с идеалами* $\mathbf{a_1}\mathbf{q_1}\delta = \mathbf{r_1}, \mathbf{a_2}\mathbf{q_2}\delta = \mathbf{r_2}$, *взаимно простыми соответственно с* $\mathbf{q_1}$ *и* $\mathbf{q_2}$, *такие, что*

$$S(f(\xi), \mathbf{q}) = S(f_1(\xi), \mathbf{q_1})S(f_2(\xi), \mathbf{q_2})$$

Доказательство. см. [34], Lemma 2.4, p.16.

Пусть $\mathbf{a} = \{\alpha_k, \dots, \alpha_1\}$ — дробный идеал и $\mathbf{a}\delta = \mathbf{r}/\wp^l, (\mathbf{r}, \wp) = 1$.

Рассмотрим полную тригонометрическую сумму от многочлена

$$f(x) = \alpha_k x^k + \alpha_{k-1}x^{k-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x,\ \alpha_k, \dots, \alpha_1 \in \mathbf{K},$$

по модулю $\wp^l$ вида

$$S(f(x), \wp^l) = \sum_{x(\wp^l)} e^{2\pi i \operatorname{tr}(f(x))},$$

где $\wp$ — простой идеал, $l \geq 1$ — натуральное число и $x = x(\wp)$ пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp^l$.

Обозначим через $\mathbf{b}$ идеал

$$\mathbf{b} = \{k\alpha_k, (k-1)\alpha_{k-1}, \dots, 2\alpha_2, \alpha_1\}.$$

Имеем, что $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$. Пусть, как и раньше, t обозначает наивысшую степень идеала $\wp$, делящую $\mathbf{b}\mathbf{a}^{-1}$.

Рассмотрим сначала случай $l \geq 2(t+1)$. Каждый вычет $x = x(\wp^l)$ единственным способом представим в виде

$$x = y + \wp^{l-t-1}z,$$

где $y = y(\wp^{l-t-1})$ и $z = z(\wp^{t+1})$ — некоторые вычеты из соответствующих полных систем вычетов по модулям $\wp^{l-t-1}$ и $\wp^{t+1}$.

Пусть теперь $\nu = \nu(\wp)$ пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp$. Тогда имеем

$$S(f, \wp^l) = \sum_{y(\wp^{l-t-1})} \sum_{z(\wp^{t+1})} e^{2\pi i \operatorname{tr}(f(y+\wp^{l-t-1}z))} = \sum_{\nu(\wp)} S_{\nu(\wp)},$$

где

$$S_\nu = \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod{\wp}}} \sum_{z(\wp^{t+1})} e^{2\pi i \operatorname{tr}(f(y+\wp^{l-t-1}z))}.$$

Используя разложение многочлена $f(y+\wp^{l-t-1}z)$ по формуле Тейлора, получим

$$f(y+\wp^{l-t-1}z)=\sum_{s=0}^{k}\frac{f^s(y)}{s!}\left(\wp^{l-t-1}z\right)^{l-s}\equiv$$

$$\equiv f(y)+\wp^{l-t-1}zf'(y)\pmod{\wp^{l-t}}.$$

Лемма 5. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu\in\wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^t\|\mathbf{b}, l\geq 2t+2$, и пусть, также, ν не является корнем сравнения $\wp^{l-t}f'(\nu)\equiv 0\pmod{\wp}$. Тогда*

$$S_\nu=0.$$

Доказательство. Имеем

$$S_\nu=\sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1})\\ y\equiv\nu\pmod{\wp}}}\sum_{z(\wp^{t+1})}e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(f(y)+\wp^{l-t-1}zf'(y))}.$$

Отсюда, применяя лемму 1 к внутренней сумме, находим

$$\sum_{z(\wp^{t+1})}e^{2\pi i\,\mathrm{tr}(\wp^{l-t}f'(\nu)\wp^{-1}z)}=0.$$

Стало быть, $S_\nu=0$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu\in\wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^t\|\mathbf{b}, l\geq 2t+2$, и пусть, также, ν является корнем сравнения*

$$\wp^{l-t}f'(\nu)\equiv 0\pmod{\wp}. \tag{1}$$

Пусть, далее, показатель $u=u(\nu)$ определяется из соотношений

$$f(\wp y+\nu)-f(\nu)=\wp^u f_1(y)=\wp^u\sum_{s=1}^{k}a_{1,s}y^s,\quad \mathbf{a_1}=\{a_{1,n},\dots,a_{1,1}\},\wp\not|\mathbf{a_1}.$$

Тогда

$$S(f;\wp^l)=\sum_{\nu}{}'N(\wp^{u-1})E(f(\nu))S(f_1;\wp^{l-u}),$$

где штрих в знаке суммирования по ν означает, что вычеты ν пробегают решения сравнения (1) из полной системы вычетов по модулю $\wp$.

Доказательство. Положим

$$f(y+\nu)-f(\nu)=\tilde{f}(y)=\sum_{s=0}^{k}\tilde{a}_s y^s,$$

где коэффициенты многочлена $\tilde{f}(y)$ определяютя соотношениями

$\tilde{a}_n=a_n,$

$\tilde{a}_{n-1}=a_{n-1}+\binom{n}{1}a_n\nu,$

$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$

$\tilde{a}_s=a_s+\binom{s+1}{s}a_{s+1}\nu+\dots+\binom{n}{s}a_n\nu^{n-s},$

$$\tilde{a}_1 = a_1 + \binom{2}{1}a_2\nu + \dots + \binom{n}{1}a_n\nu^{n-1}.$$

Отсюда находим $\wp^t \| \{n\tilde{a}_n, (n-1)\tilde{a}_{n-1}, \dots, 2\tilde{a}_2, \tilde{a}_1\}$.

Определим показатель $u = u(\nu)$ из соотношений делимости идеалов

$$\wp^u \| \{\wp^n \tilde{a}_n, \wp^{n-1}(n-1)\tilde{a}_{n-1} \dots, \wp^2\tilde{a}_2, \wp\tilde{a}_1\}.$$

Далее по условию леммы имеем

$$f(\wp y + \nu) - f(\nu) = \wp^u f_1(y) = \wp^u \sum_{s=1}^{k} a_{1,s}y^s, \quad \mathbf{a_1} = \{a_{1,n}, \dots, a_{1,1}\}, \wp \nmid \mathbf{a_1}.$$

Следовательно,

$$S_\nu = S_\nu(f; \wp^l) = \sum_{\substack{x(\wp^l) \\ x \equiv \nu \pmod{\wp}}} E(f(x)) =$$

$$= \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod{\wp}}} E(f(y)) \sum_{z(\wp^{t+1})} E(f(y + z\wp^{l-t-1}) - f(y)) =$$

$$= \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod{\wp}}} E(f(y)) \sum_{z(\wp^{t+1})} E(\wp^{l-t-1} f'(y)z) = N(\wp^{t+1}) \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod{\wp}}} E(f(y)) =$$

$$= N(\wp^{t+1})E(f(\nu)) \sum_{y(\wp^{l-t-2})} E(f(y\wp + \nu) - f(\nu)) =$$

$$= N(\wp^{t+1})E(f(\nu)) \sum_{y(\wp^{l-t-2})} E(\wp^u f_1(y)) = N(\wp^{u-1})E(f(\nu))S(f_1; \wp^{l-u}).$$

Лемма доказана.

Положим

$$f_0(x) = f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_k x^k, \mathbf{a_0} = \{a_k, \dots, a_1\}, \mathbf{b_0} = \{ka_k, \dots, 2a_2, a_1\}.$$

Определим показатель t_0 из условия $\wp^{t_0} \| \mathbf{b_0}$. Пусть вычеты $x = \nu_{0,q}$ из полной системы вычетов по модулю $\wp$ пробегают все решения сравнения

$$\wp^{l-t_0} f_0'(x) \equiv 0 \pmod{\wp}.$$

Их количество не превосходит степени k многочлена $f_0(x)$. Для каждого корня $\nu_{0,q}$ определим показатель $u = u_{0,q}$ из соотношений

$$f_0(\wp y + \nu_{0,q}) - f_0(\nu_{0,q}) = \wp^u f_1(y) = \wp^u \sum_{r=1}^{k} a_{1,r}y^r,$$

$$\mathbf{a_1} = \{a_{1,k}, \dots, a_{1,1}\}, \wp \nmid \mathbf{a_1}, l_1 = l - u.$$

Пусть определены многочлены $f_0(x), \dots, f_{s-1}(x), s \geq 1$ и соответствующие им корни $\nu_{r,q}, 0 \leq r \leq s-1$, и показатели $u = u_{r,q}$.

Имеем

$$f_{s-1}(x)=\sum_{j=1}^{k}a_{s-1,k}x^k,\mathbf{a_{s-1}}=\{a_{s-1,k},\dots,a_{s-1,1}\},\mathbf{b_{s-1}}=\{ka_{s-1,k},\dots,2a_{s-1,2},a_{s-1,1}\}.$$

Показатель t_{s-1} задается условием $\wp^{t_{s-1}}\|\mathbf{b_{s-1}}$. Вычеты $x=\nu_{s-1,q}$ из полной системы вычетов по модулю $\wp$ пробегают все решения сравнения

$$\wp^{l_{s-1}-t_{s-1}}f'_{s-1}(x)\equiv 0 \pmod{\wp}.$$

Для каждого корня $\nu_{s-1,q}$ определим показатель $u=u_{s,q}$ из соотношений

$$f_{s-1}(\wp y+\nu_{s-1,q})-f_{s-1}(\nu_{s-1,q})=\wp^u f_s(y)=\wp^u\sum_{r=1}^{k}a_{s,r}y^r,$$

$$\mathbf{a_s}=\{a_{s,k},\dots,a_{s,1}\},\wp\not|\mathbf{a_s}.$$

Для каждого набора корней $\nu_{0,q_0},\nu_{1,q_1},\dots,\nu_{h,q_h}$ находим набор показателей

$$\{u_0,u_1,\dots,u_h\}=\{u_{0,q_0},u_{1,q_1},\dots,u_{h,q_h}\},$$

где длина набора h определяется неравенствами

$$l-u_0-u_1-\dots-u_{h-1}>2w+1,l-u_0-u_1-\dots-u_h\le 2w+1,$$

причем w находится как максимум показателей v таких, что $\wp^v\|m$ по всем $m\le k$. Отсюда, в частности, следует, что $t_0\le w$.

Лемма 7. *Количество наборов показателей* $\{u_0,u_1,\dots,u_h\}=\{u_{0,q_0},u_{1,q_1},\dots,u_{h,q_h}\}$ *не превосходит степени* k *многочлена* $f(x)$.

Доказательство. аналогично [32],[33], гл. II.

Лемма 8. *Имеем*

$$k\ge u_0\ge u_1\ge\dots\ge u_h\ge 2.$$

Доказательство. аналогично [32],[33], гл. II.

Из этих вспомогательных утверждений получим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $\wp$ *— простой идеал,* $\nu_s\in\wp$ *— вычет по модулю* $\wp$, *пусть* $\wp^{t_s}\|\mathbf{b_s},l\ge 2t_s+2$, *и пусть, также,* ν_s *является корнем сравнения*

$$\wp^{l_s-t_s}f'(\nu_s)\equiv 0 \pmod{\wp}. \tag{2}$$

Пусть, далее, показатель $u_s=u_s(\nu_s)$ *определяется из соотношений*

$$f_{s-1}(\wp y+\nu_s)-f_{s-1}(\nu_s)=\wp^{u_s}f_s(y)=\wp^{u_s}\sum_{r=1}^{k}a_{s,r}y^r,$$

$$\mathbf{a_s}=\{a_{s,k},\dots,a_{s,1}\},\wp\not|\mathbf{a_s}.$$

Тогда

$$S(f;\wp^l)=\sum_{\nu_1,\dots,\nu_s}{}'N(\wp^{u_1+\dots+u_s-s})E(f(\nu_1)+\dots+\wp^{u_1+\dots+u_s}f_s(\nu_s))\times$$

$$\times S(f_s;\wp^{l-u_1-\dots-u_s}),$$

где штрих в знаке суммирования по $\nu_1,\dots,\nu_s$ *означает, что вычеты* $\nu_1,\dots,\nu_s$ *пробегают решения сравнения (2) из полной системы вычетов по модулю* $\wp$.

4. Характеры Дирихле по модулю, равному степени простого идеала, в алгебраическом поле

Пусть l — натуральное число, $\wp$ — простой идеал с нормой, не делящейся на 2, и пусть g — первообразный корень по модулю $\wp$. Тогда найдется вычет t из полной системы вычетов по модулю $\wp$ такой, что $g_1 = g + t\wp$ является первообразным корнем по модулю $\wp^l$, причем

$$(g + t\wp)^{N\wp - 1} = 1 + b\wp,\ (b, \wp) = 1. \tag{4}$$

Пусть μ — любой вычет по модулю $\wp^l$ с условием $(\mu, \wp) = 1$. Обозначим символом $\operatorname{ind}\mu = \operatorname{ind}_{g_1}\mu$ индекс вычета μ по модулю $\wp^l$ при основании g_1, т.е. натуральное число $\gamma = \operatorname{ind}\mu$ такое, что

$$g_1^{\gamma} \equiv \mu \pmod{\wp^l},$$

причем можно считать, что $1 \le \gamma \le N\wp^{l-1}(N\wp - 1) = \Phi(\wp^l)$.

Определим теперь характер Дирихле χ по модулю, равному степени $l \ge 1$ простого идеала $\wp$ с нормой, не делящейся на 2. Функция $\chi(t)$, определенная на полной системе вычетов по модулю $\wp^l$ при любом целом m следующей формулой

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (\mathrm{t}, \wp) \neq 1, \\ E(\frac{\operatorname{ind} t}{\Phi(\wp^l)}), & \text{если} \quad (\mathrm{t}, \wp) = 1, \end{cases}$$

называется характером Дирихле по модулю $\wp^l$. Если $(m, \wp) = 1$, то характер называется примитивным.

Лемма 9. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\wp \not| 2, \chi$ — характер Дирихле по модулю $\wp^l$, $\nu \in \wp$ — вычет по модулю $\wp$. Тогда*

$$\sum_{\nu(\wp)} \chi(1 + \nu\wp^{l-1}) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\gamma = \operatorname{ind}_{g_1}(1 + \nu\wp^{\alpha-1})$ по модулю $\wp^{\alpha}$. Тогда из равенства (4) находим, что $\gamma = (N(\wp) - 1)\gamma_1$, т.е.

$$(1 + \wp b)^{\gamma_1} \equiv 1 + \nu\wp^{\alpha-1} \pmod{\wp^{\alpha}}.$$

Следовательно, $\gamma_1 = \nu b_1 \wp^{\alpha-1}, bb_1 \equiv 1 \pmod{\wp}$.

Отсюда для примитивного характера χ при некотором целом рациональном $(m, \wp) = 1$ имеем

$$\sum_{\nu(\wp)} \chi(1 + \nu\wp^{\alpha-1}) = \sum_{\nu(\wp)} E(\frac{m\nu b_1}{\wp}) = 0.$$

Лемма доказана.

Для данного идеала $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ определим многочлен $f(x) = \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k$ степени k с коэффициентами из кольца целых $\mathbf{J}$ и полную сумму характеров Дирихле по модулю, равному степени $l \ge 1$ простого идеала $\wp$. Имеем

$$S(f(x), \wp^l; \chi) = \sum_{x(\wp^l)} \chi(f(x)),$$

где вычеты $x = x(\mathbf{q})$ пробегает полную систему вычетов по модулю идеала $\mathbf{q}$. Положим, как и раньше, $\mathbf{b} = \{na_n, (n-1)a_{n-1}, \ldots, 2a_2, a_1\}$.

Рассмотрим сначала случай $l \ge 2(t+1)$. Каждый вычет $x = x(\wp^l)$ единственным способом представим в виде

$$x = y + \wp^{l-t-1} z,$$

где $y = y(\wp^{l-t-1})$ и $z = z(\wp^{t+1})$ — некоторые вычеты из соответствующих полных систем вычетов по модулям $\wp^{l-t-1}$ и $\wp^{t+1}$, причем вычет x пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp^l$ тогда и только тогда, когда независимо y пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp^{l-t-1}$ и z — полную систему вычетов по модулю $\wp^{t+1}$.

Пусть теперь $\nu = \nu(\wp)$ пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp$. Тогда имеем

$$S(f, \wp^l; \chi) = \sum_{y(\wp^{l-t-1})} \sum_{z(\wp^{t+1})} \chi(f(y + \wp^{l-t-1}z)) = \sum_{\nu(\wp)} S_{\nu(\wp)},$$

где

$$S_\nu = \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod{\wp}}} \sum_{z(\wp^{t+1})} \chi(f(y + \wp^{l-t-1}z)).$$

Используя разложение многочлена $f(y + \wp^{l-t-1}z)$ по формуле Тейлора, получим

$$f(y + \wp^{l-t-1}z) = \sum_{s=0}^{k} \frac{f^s(y)}{s!} \left(\wp^{l-t-1}z\right)^{l-s} \equiv$$

$$\equiv f(y) + \wp^{l-t-1}zf'(y) \pmod{\wp^{l-t}}.$$

Лемма 10. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu \in \wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^t \| \mathbf{b}, l \geq 2t+2$, и пусть, также, ν не является корнем сравнения $\wp^{-t}f'(\nu) \equiv 0 \pmod{\wp}$. Тогда*

$$S_\nu = 0.$$

Доказательство. Очевидно, утверждение леммы справедливо при $f(\nu) \equiv 0 \pmod{\wp}$. Поэтому предположим, что $f(\nu) \not\equiv 0 \pmod{\wp}$. Имеем

$$S_\nu = \sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1}) \\ y \equiv \nu \pmod{\wp}}} \sum_{z(\wp^{t+1})} \chi(f(y) + \wp^{l-t-1}zf'(y)).$$

Отсюда, применяя лемму 10 к внутренней сумме, находим

$$\sum_{z(\wp^{t+1})} \chi(f(\nu) + \wp^{l-t-1}f'(\nu)z) = 0.$$

Следовательно, $S_\nu = 0$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu \in \wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^t \| \mathbf{b}, l \geq 2t+2$, и пусть, также, ν является корнем сравнения*

$$\wp^{l-t}f'(\nu) \equiv 0 \pmod{\wp}. \tag{3}$$

Пусть, далее, показатель $u = u(\nu)$ определяется из соотношений

$$f(\wp y + \nu) - f(\nu) = \wp^u f_1(y) = \wp^u \sum_{s=1}^{k} a_{1,s}y^s, \quad \mathbf{a_1} = \{a_{1,n}, \ldots, a_{1,1}\}, \wp \not| \mathbf{a_1}.$$

Тогда

$$S(f; \wp^l; \chi) = {\sum_{\nu}}' N(\wp^{u-1}) \sum_{y(\wp^{l-u})} \chi(f(\nu) + \wp^u f_1(y)),$$

где штрих в знаке суммирования по ν означает, что вычеты ν пробегают только решения сравнения (3) из полной системы вычетов по модулю $\wp$.

Доказательство. Положим

$$f(y+\nu)-f(\nu)=\tilde{f}(y)=\sum_{s=0}^{k}\tilde{a}_s y^s,$$

где коэффициенты многочлена $\tilde{f}(y)$ определяютя соотношениями

$$\tilde{a}_n=a_n,$$
$$\tilde{a}_{n-1}=a_{n-1}+\binom{n}{1}a_n\nu,$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$
$$\tilde{a}_s=a_s+\binom{s+1}{s}a_{s+1}\nu+\dots+\binom{n}{s}a_n\nu^{n-s},$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots$$
$$\tilde{a}_1=a_1+\binom{2}{1}a_2\nu+\dots+\binom{n}{1}a_n\nu^{n-1}.$$

Отсюда находим $\wp^t\|\{n\tilde{a}_n,(n-1)\tilde{a}_{n-1},\dots,2\tilde{a}_2,\tilde{a}_1\}$.

Определим показатель $u=u(\nu)$ из соотношений делимости идеалов

$$\wp^u\|\{\wp^n\tilde{a}_n,\wp^{n-1}(n-1)\tilde{a}_{n-1}\dots,\wp^2\tilde{a}_2,\wp\tilde{a}_1\}.$$

Далее по условию леммы имеем

$$f(\wp y+\nu)-f(\nu)=\wp^u f_1(y)=\wp^u\sum_{s=1}^{k}a_{1,s}y^s,\quad \mathbf{a_1}=\{a_{1,n},\dots,a_{1,1}\},\wp\not|\mathbf{a_1}.$$

Следовательно,

$$S_\nu=S_\nu(f;\wp^l)=\sum_{\substack{x(\wp^l)\\ x\equiv\nu\pmod\wp}}\chi(f(x))=$$

$$=\sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1})\\ y\equiv\nu\pmod\wp}}\sum_{z(\wp^{t+1})}\chi(f(y)+(f(y+z\wp^{l-t-1})-f(y)))=$$

$$=\sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1})\\ y\equiv\nu\pmod\wp}}\sum_{z(\wp^{t+1})}\chi(f(y)+\wp^{l-t-1}f'(y)z)=$$

$$=N(\wp^{t+1})\sum_{\substack{y(\wp^{l-t-1})\\ y\equiv\nu\pmod\wp}}\chi(f(y))=$$

$$=N(\wp^{t+1})\sum_{y(\wp^{l-t-2})}\chi(f(\nu)+(f(y\wp+\nu)-f(\nu)))=$$

$$=N(\wp^{t+1})\sum_{y(\wp^{l-t-2})}\chi(f(\nu)+\wp^u f_1(y))=N(\wp^{u-1})\sum_{y(\wp^{l-u})}\chi(f(\nu)+\wp^u f_1(y)).$$

Лемма доказана.

Отсюда выводится следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\wp$ — простой идеал, $\nu_s \in \wp$ — вычет по модулю $\wp$, пусть $\wp^{t_s} \| \mathbf{b_s}, l \geq 2t_s + 2$, и пусть, также, ν_s является корнем сравнения*

$$\wp^{l_s - t_s} f'(\nu_s) \equiv 0 \pmod{\wp}. \tag{5}$$

Пусть, далее, $f_0(x) = f(x)$, показатель $u_s = u_s(\nu_s), s \geq 1$, определяется из соотношений

$$f_{s-1}(\wp y + \nu_s) - f_{s-1}(\nu_s) = \wp^{u_s} f_s(y) = \wp^{u_s} \sum_{r=1}^{k} a_{s,r} y^r,$$

$$\mathbf{a_s} = \{a_{s,k}, \ldots, a_{s,1}\}, \wp \not| \mathbf{a_s}.$$

Тогда

$$S(f; \wp^l) = {\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_s}}' N(\wp^{u_1 + \cdots + u_s - s}) \times$$

$$\times \sum_{y(\wp^{l - u_1 - \cdots - u_s})} \chi(f(\nu_1) + \cdots + \wp^{u_1 + \cdots + u_{s-1}} f_{s-1}(\nu_{s-1}) + \wp^{u_1 + \cdots + u_s} f_s(y)),$$

где штрих в знаке суммирования по $\nu_1, \ldots, \nu_s$ означает, что вычеты $\nu_1, \ldots, \nu_s$ пробегают решения сравнения (5) из полной системы вычетов по модулю $\wp$.

5. Кратные полные рациональные тригонометрические суммы от многочлена над алгебраическим полем

Данные утверждения подобны соответствующим резельтатам [32], [33] гл. II, поэтому их вывод мы опускаем.

Лемма 12. *Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{q}, \mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}$ — целые идеалы,*

$$\mathbf{q} = \mathbf{q_1 q_2}, (\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}) = \mathbf{1},$$

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \alpha(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}, F(0, \ldots, 0) = 0,$$

$$\mathbf{a} = \{\alpha(t_1, \ldots, t_r) \mid 0 \leq t_1, \ldots, t_r \leq n, t_1 + \cdots + t_r \geq 1\},$$

$$\mathbf{aq}\delta = \mathbf{b}, (\mathbf{b}, \mathbf{q}) = \mathbf{1}.$$

Тогда справедливо равенство

$$S(F(x_1, \ldots, x_r), \mathbf{q}) =$$

$$= S(\mathbf{q_2}^{-1} F(\mathbf{q_2} x_1, \ldots, \mathbf{q_2} x_r), \mathbf{q_1}) S(\mathbf{q_1}^{-1} F(\mathbf{q_1} x_1, \ldots, \mathbf{q_1} x_r), \mathbf{q_2}).$$

Лемма 13. *Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ — многочлен с целыми коэффициентами из $\mathbf{J}, \mathbf{a} = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ — целый идеал в $\mathbf{J}, \wp$ — простой идеал, причем $\wp \not| a$, и пусть $N_\wp(\alpha, \beta)$ — число решений сравнения*

$$f(x) \equiv 0 \pmod{\wp^\beta}, \beta \leq \alpha,$$

а неизвестная x пробегает полную систему вычетов по модулю $\wp^\alpha$.

Тогда имеем

$$N_\wp(\alpha, \beta) \leq c(N(\wp))^{\alpha - \frac{\beta}{n}},$$

где $c = c(n)$ — постоянная из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* $n \geq 2, r, \alpha \geq 1$ *— натуральные числа,*

$$F = F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} \alpha(t_1, \dots, t_r) x_1^{t_1} \dots x_r^{t_r}, F(0, \dots, 0) = 0,$$

$$\mathbf{a} = \{\alpha(t_1, \dots, t_r) \mid 0 \leq t_1, \dots, t_r \leq n, t_1 + \cdots + t_r \geq 1\}, \wp$$

— простой идеал,

$$\mathbf{a}\wp^{\alpha}\delta = \mathbf{b}, (\mathbf{b}, \wp) = \mathbf{1}.$$

Тогда имеем

$$|S(F, \wp^{\alpha})| \leq c(n, r)(N\wp)^{r\alpha - \frac{\alpha}{n}}(\alpha + 1)^{r-1}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов, И. М., Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций // Изв. РАН, 1917, **41,** *No.*16, с.1347–1378.
2. Виноградов, И. М., О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя // Сообщ. Харьк. мат. о-ва, 1918, вып.1, *No.*1 – 2, с.10–38.
3. Vinogradov, I. M., Sur la distribution des résidues et des non-résidues des puissances // Журн. Физ.-мат. о-ва при Перм. ун-те. 1918, вып. 1, с.94–98.
4. Виноградов, И. М., Элементарное доказательство одной общей теоремы аналитической теории чисел // Изв. РАН, 1925, **19,** *No.*16 – 17, с.785–796. Рез. на франц. яз.
5. Виноградов, И. М., О распределении индексов // Докл. АН СССР-А, 1926, *No.*4, с.73–76.
6. Vinogradov, I. M., On the bound of the least non-residues of n-th powers // Trans. Am. math. Soc. 1927, **29,** *No.*1, p.218–226.
7. Winogradow, J. M., Sur un théorème général de Waring // Матем. сборник. 1924, **31,** с.490–507.
8. Виноградов, И. М., К вопросу о распределении дробных долей значений функций одного переменного // Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва. 1926, bf 1, вып. 1, с.56–65. Рез. на франц. яз.
9. Виноградов, И. М., О распределении дробных долей значений функций двух переменных // Изв. Ленингр. политехн. ин-та. 1927, bf 30, с.31–52. Рез. на франц. яз.
10. Виноградов, И. М., О теореме Варинга // Изв. АН СССР. ОФМН, 1928, *No.*4, с.393–400.
11. Виноградов, И. М., Новое решение проблемы Варинга // Докл. АН СССР. 1934, **2** *No.*6, с.337–341. Текст на рус. и рез. на англ. яз.
12. Виноградов, И. М., О некоторых новых проблемах теории чисел // Докл. АН СССР. 1934, **3** *No.*1, с.1–6. Текст на рус. и англ. яз.
13. Виноградов, И. М., Новая оценка $G(n)$ в проблеме Варинга // Докл. АН СССР. 1934, **4** *No.*5 – 6, с.249–253. Текст на рус. и англ. яз.
14. Виноградов, И. М., О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга // Изв. АН СССР. ОМЕН, 1934, *No.*10, с.1455–1469. Рез. на англ. яз.

15. Виноградов, И. М., Новые оценки сумм Вейля // Докл. АН СССР. 1935, **3** *No.*5, с.195–198.

16. Виноградов, И. М., Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // Докл. АН СССР. 1937, **15** *No.*6 – 7, с.291–294.

17. Виноградов, И. М., Оценки некоторых простейших тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1939, *No.*4, с.371–398. Рез. на англ. яз.

18. Виноградов, И. М., Некоторые проблемы аналитической теории чисел. — В кн.: Труды Третьего Всесоюзного математического съезда. Москва, июнь–июль 1956 г. Т.3. Обзорные доклады. М., Изд-во АН СССР, 1958, с.3–13.

19. Виноградов, И. М., К вопросу о распределении дробных частей значений многочлена // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, **25,** *No.*6, с.749–754.

20. Виноградов, И. М., Карацуба, А. А., Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды матем. ин-та АН СССР., 1984, **168,** с.4–30.

21. Виноградов, И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980, 144 с.

22. Виноградов, И. М., Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976, 120 с.

23. Виноградов, И. М., Основы теории чисел. — Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005, 176 с.

24. Vinogradov, I. M., Selected Works, N.-Y., Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1985, pp.401.

25. Gauss, K. F., Disquisitiones arithmeticae, Leipzig, Fleischer, 1801.

26. Hardy, G. H., Littlwood, J. E., Some problems of "Partitio Numerorum":III. On the expression of a number as a sum of primes // Acta Math. 1923, **44,** 1–70.

27. Hardy, G. H., Littlwood, J. E., Some problems of "Partitio Numerorum":VI. Further researches in Waring's problem // Math. Z. 1925, **23,** 1–37.

28. Landau, E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Erster Band. Leipzig, S. Hirzel, 1927.

29. Hua Loo-Keng. Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, 1983. pp.888.

30. Hua Loo-Keng. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. Oxford. 1938. V.9. P.68-80.

31. Постников, А. Г., О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, сер. матем. 1955, **19,** вып. 1, с.11–16.

32. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред.физ.-мат. лит. 1987, 368 с.

33. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.

34. Wang Yuan. Diophantine Equations and Inequalities in Algebraic Number Fields. — Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991. pp.168.

35. Марджанишвили, К. К., Иван Матвеевич Виноградов (к восьмидесятилетию со дня рождения) // Усп. мат. наук, 1971, **26,** вып. 6, с.3–6.

36. Cassels, J. W. S., Vaughan, R. C., Ivan Matveevich Vinogradov (obituary) // Bull. London Math. Soc., 1985, **17,** 584–600.

37. Шафаревич, И. Р., Патриарх отечественной математики // Вестник АН СССР, 1991, *No.*9, с.96–100.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M., 1917, A new method for obtaining asymptotic expressions of arithmetic functions, Izv. RAS, **41,** *No.*16, c.1347–1378.

2. Vinogradov, I. M., 1918, On the average value of the number of classes of purely indigenous forms of the negative determinant, Message. Kharkiv. mat. o-va, issue 1, *No.*1 – 2, pp. 10–38.

3. Vinogradov, I. M., 1918, Sur la distribution des résidues et des non-résidues des puissances, Journal of Physics-mat. o-va at Perm. University, issue 1, pp. 94–98.

4. Vinogradov, I. M., 1925, An elementary proof of a general theorem of analytic number theory, Izv. RAS, **19,** *No.*16 – 17, pp. 785–796. Res. in French lang.

5. Vinogradov, I. M., 1926, About the distribution of indexes, Dokl. USSR Academy OF Sciences, *No.*4, pp. 73–76.

6. Vinogradov, I. M., 1927, On the bound of the least non-residues of n-th powers, Trans. Am. math. Soc., **29,** *No.*1, pp. 218–226.

7. Vinogradov, I. M., 1924, Sur un théorème général de Waring, Math. collection., **31,** pp. 490–507.

8. Vinogradov, I. M., 1926, On the question of the distribution of fractional fractions of the values of functions of one variable, Journal. Leningr. phys.-mat. o-va., bf 1, issue. 1, pp. 56–65. Res. in French lang.

9. Vinogradov, I. M., 1927, On the distribution of fractional fractions of the values of functions of two variables, Izv. Leningr. Polytechnic institute, bf 30, pp. 31–52. Res. in French lang.

10. Vinogradov, I. M., 1928, On Waring's theorem, Izv. AN USSR. OFMN, *No.*4, pp. 393–400.

11. Vinogradov, I. M., 1934, A new solution to the Waring problem, Dokl. USSR Academy of Sciences., **2** *No.*6, pp. 337–341. Text on russian language and rez. on english language.

12. Vinogradov, I. M., 1934, On some new problems of number theory, Dokl. USSR Academy of Sciences., **3** *No.*1, pp. 1–6. Text on russian language and rez. on english language.

13. Vinogradov, I. M., 1934, New assessment $G(n)$ in the Waring problem, Dokl. USSR Academy OF Sciences., **4** *No.*5 – 6, pp. 249–253. Text on russian language and rez. on english language.

14. Vinogradov, I. M., 1934, About the upper bound $G(n)$ in the Waring problem, Izv. of the USSR Academy of Sciences. OMEN, *No.*10, pp. 1455–1469. Rez. on english language.

15. Vinogradov, I. M., 1935, New estimates of Weyl sums, Dokl. USSR Academy OF Sciences., **3** *No.*5, pp. 195–198.

16. Vinogradov, I. M., 1937, Representation of an odd number by the sum of three primes, Dokl. USSR Academy OF Sciences, **15** *No.*6 – 7, pp. 291–294.

17. Vinogradov, I. M., 1939, Estimates of some simplest trigonometric sums with prime numbers, Izv. AN USSR. Ser. mat., *No.*4, pp. 371–398. Rez. on english language.

18. Vinogradov, I. M., 1958, Some problems of analytical number theory. — In: Proceedings of the Third All-Union Mathematical Congress. Moscow, June-July 1956, vol. 3. Review reports. M., Publishing House of the USSR Academy of Sciences, pp. 3–13.

19. Vinogradov, I. M., 1961, On the question of the distribution of fractional parts of the values of a polynomial, Izv. AN USSR. Ser. mat, **25,** *No.*6, pp. 749–754.

20. Vinogradov, I. M., Karatsuba, A. A., 1984, The method of trigonometric sums in number theory, Works of math. Institute of the USSR Academy of Sciences., **168,** pp. 4–30.

21. Vinogradov, I. M., 1980, The method of trigonometric sums in number theory. — M.: Science, pp. 144.

22. Vinogradov, I. M., 1976, Special variants of the trigonometric sums method. — M.: Science, pp. 120.

23. Vinogradov, I. M., 2005, Fundamentals of number theory. — Moscow-Izhevsk: SIC 'Regular and chaotic dynamics pp. 176.

24. Vinogradov, I. M., 1985, Selected Works, N.-Y., Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, pp. 401.

25. Gauss, K. F., 1801, Disquisitiones arithmeticae, Leipzig, Fleischer.

26. Hardy, G. H., Littlwood, J. E., 1923, Some problems of "Partitio Numerorum":III. On the expression of a number as a sum of primes, Acta Math., **44,** pp. 1–70.

27. Hardy, G. H., Littlwood, J. E., 1925, Some problems of "Partitio Numerorum":VI. Further researches in Waring's problem, Math. Z., **23,** pp. 1–37.

28. Landau, E., 1927, Vorlesungen über Zahlentheorie, Erster Band. Leipzig, S. Hirzel.

29. Hua Loo-Keng., 1983, Selected Papers. — N.-Y., Heidelberg, Berlin, pp. 888.

30. Hua Loo-Keng. 1938, Some results in the additive prime number theory, Quart. J. Math. Oxford. Vol. 9. pp. 68–80.

31. Postnikov, A., G., 1955, On the sum of characters modulo the power of a prime number, Izv. AN USSR, ser. matem., **19,** Vol. 1, pp. 11–16.

32. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N., 1987, Theory of multiple trigonometric sums. — M.: Science. Gl. ed.phys.-mat. lit., pp. 368.

33. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A., 2004, Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.

34. Wang Yuan., 1991, Diophantine Equations and Inequalities in Algebraic Number Fields. — Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 168.

35. Marjanishvili, K. K., 1971, Ivan Matveevich Vinogradov (to the eightieth anniversary of his birth, Usp. mat. nauk, **26,** Vol. 6, pp. 3–6.

36. Cassels, J. W. S., Vaughan, R. C., 1985, Ivan Matveevich Vinogradov (obituary), Bull. London Math. Soc., **17,** pp. 584–600.

37. Shafarevich, I. R., 1991, Patriarch of Russian Mathematics, Bulletin of the USSR Academy of Sciences, *No.*9, pp. 96–100.

Получено 29.08.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-323-330

Харьковская школа М. И. Кадеца и математики Тулы

Е. В Манохин, Н. О. Козлова, В. Э. Комов

Манохин Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: emanfinun@mail.ru
Козлова Надежда Олеговна — кандидат технических наук, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: 95kno@mail.ru
Комов Валерий Энгельсович — кандидат экономических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).
e-mail: com.valeri@yandex.ru

Аннотация

Авторы статьи ставили перед собой задачи: рассказать о неожиданном и долгом сотрудничестве и взаимодействии преподавателей и ученых Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого и Харьковской школы Михаила Иосифовича Кадеца, а также о некоторых научных работах математиков школы Михаила Иосифовича Кадеца и математиков города Тулы в двадцатилетний период 1986-2006 годов. Особо отмечается роль В. И. Рыбакова. Под его руководством вел научную работу тульский студент, которые впоследствии после обучения в Харьковской школе Михаила Иосифовича Кадеца стал кандидатом физико-математических наук. Владиславом Ивановичем Рыбаковым получены глубокие, содержательные научные результаты. Например, о «the classical theorem of Rybakov» можно прочитать в книгах и статьях, опубликованных в международной математической печати. Научной деятельностью Владислава Ивановича интересовался Михаил Иосифович Кадец. Харьковская школа Кадеца в то время получила мировую известность. Не только научной работе, много внимания и сил Михаил Иосифович уделял педагогической работе. Девятнадцать его учеников, среди которых был и ученик Рыбакова, защитили кандидатские диссертации, семь из них стали докторами наук. М. И. Кадец щедро делился своими математическими идеями со своими учениками. В статье приводятся некоторые результаты, полученные харьковскими математиками школы Кадецаи близкими им по научным интересам тульскими математиками в период 1986-2006 годов.

Ключевые слова: история математики, функциональный анализ, банаховы пространства, математики Тулы, математики Харьковской школы Михаила Иосифовича Кадеца.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
Е. В Манохин, Н. О. Козлова, В. Э. Комов. Харьковская школа М. И. Кадеца и математики Тулы // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 323–330.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-323-330

Kharkiv school of M. I. Kadets and mathematics of Tula

E. V. Manokhin, N. O. Kozlova, V. E. Komov

Manokhin Evgeny Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: emanfinun@mail.ru
Kozlova Nadezhda Olegovna — candidate of technical Sciences, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: 95kno@mail.ru
Komov Valery Engelsovich — candidate of economic sciences, associate professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).
e-mail: com.valeri@yandex.ru

Abstract

The authors of the article set themselves the tasks: to tell about the unexpected and long cooperation and interaction of teachers and scientists of the Tolstoy Tula State Pedagogical University and the Mikhail Iosifovich Kadets Kharkiv School, as well as about some scientific works of the Kharkiv mathematicians of the Mikhail Iosifovich Kadets School and mathematicians of the city of Tula in the twenty-year period 1986-2006. he role of V. I. Rybakov is particularly noted. Under his leadership, a Tula student conducted scientific work, who later, after studying at the Mikhail Iosifovich Kadets Kharkiv School, became a candidate of physical and mathematical sciences. Vladislav Ivanovich Rybakov obtained deep, meaningful scientific results. For example, you can read about "the classical theory of Rybakov"in books and articles published in the international mathematical press. Mikhail Iosifovich Kadets was interested in Vladislav Ivanovich's scientific activity. The Kharkiv school of Kadets at that time became world famous. Not only scientific work, Mikhail Iosifovich paid a lot of attention and effort to pedagogical work. Nineteen of his students, including Rybakov's student, defended their PhD theses, seven of them became doctors of science. M. I. Kadets generously shared his mathematical ideas with his students. The article presents some results obtained by Kharkiv mathematicians of the Kadets school and Tula mathematicians close to them in scientific interests in the period 1986-2006.

Keywords: history of mathematics, functional analysis, Banach spaces, Tula mathematics, mathematicians of the Mikhail Iosifovich Kadets Kharkiv School.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
E. V. Manokhin, N. O. Kozlova, V. E. Komov, 2021, "Kharkiv school of M. I. Kadets and mathematics of Tula", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 323–330.

1. Введение

В 1986 году автор окончил математический факультет Тульского пединститута, получил специальность преподаватель математики и физики средней школы. За год до этого от своего

учителя Рыбакова Владислава Ивановичаон узнал о Михаиле Иосифовиче Кадеце, его математической школе в городе Харькове, аспирантуре и о возможности поступить туда, естественно, на общих основаниях. Мы все жили в одной могучей стране СССР, город Харьков был одним из обычных больших городов этой страны и возможность учиться в аспирантуре выдающегося советского математика выглядела более чем заманчивой. Так начиналась история взаимодействия, взаимовлияния, взаимного сотрудничества Харьковской школы Михаила Иосифовича Кадеца и математиков горда Тулы, о которой мы расскажем.

2. Период 1986-1992 гг.

В это время Харьковская школа Михаила Иосифовича Кадеца уже получила мировую известность. В частности, о ней как об особом явлении в области теории банаховых пространств упоминает А. Пич в своей книге “History of Banach spaces and linear operators” (Birkhauser, 2007). Рыбаков Владислав Иванович в этот период вёл систематическую и очень плодотворную научную работу на кафедре математического анализа Тульского пединститута. Под его руководством занимались научной работой отдельные студенты, которые впоследствии стали кандидатами физико-математических наук. Поэтому, когда на научной конференции пересеклись пути Владислава Ивановича и тогда аспиранта Михаила Иосифовича Кадеца, а именно М. И. Островского, впоследствии защитившего докторскую диссертацию, зашла речь об аспирантуре и ученике Рыбакова, который заканчивал Тульский пединститут и планировал поступление в аспирантуру.

Результаты Владислава Ивановича хорошо цитировались и не только в многочисленных статьях, но и в книгах, выходивших за рубежами нашей страны, см., например, [1, 2, 3]. М. И. Кадец, чувствуя уважение к Владиславу Ивановичу, заинтересовался этим студентом, о котором рассказал ему М. И. Островский. Далее после нескольких писем и поездки Е.В. Манохина в город Харьков, где Михаил Иосифович Кадец пообщался с своим будущим учеником на научные темы, последовало поступление Манохина Е. В. в аспирантуру М. И. Кадеца в 1986 году.

Михаил Иосифович Кадец (30 ноября 1923 г. — 7 марта 2011 г.)

«Михаил Иосифович был блестящим и одновременно необычайно глубоким математиком, добрым и отзывчивым человеком, остроумным и приятным собеседником. Таким он и останется в нашей памяти» [4]. Среди полученных им выдающихся результатов, отметим что Михаил Иосифович решил в положительном смысле давно стоявшую проблему Фреше — Банаха о гомеоморфизме всех сепарабельных бесконечномерных банаховых пространств. Этот замечательный результат сразу стал классическим.

Одним из средств, предложенных Михаилом Иосифовичем при решении этой проблемы, является построение эквивалентных норм, удовлетворяющих специальным условиям выпуклости. При этом оказалось, что техника эквивалентных норм эффективна в гораздо более широком круге проблем геометрии банаховых пространств и нелинейного анализа. Михаил Иосифович по праву считается одним из создателей теории эквивалентных перенормировок банаховых пространств, превратившейся в настоящее время в самостоятельную область.

Владислав Иванович Рыбаков (13.12.1939 г. — 27.09.2016 г.)

Мы знали его как ученого и преподавателя Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого [6]. Его научная деятельность, оказала значительное влияние на развитие функционального анализа. Особо отмечаются исследования В. И. Рыбакова по теории меры и интеграла. Владиславом Ивановичем Рыбаковым получены глубокие, содержательные научные результаты. Например, о «the classical theorem of Rybakov» можно прочитать в книгах и статьях, опубликованных в международной математической печати.

Поговорим о представителях Харьковской школы Михаила Иосифовича Кадеца, актив-

но взаимодействующих тогда с туляками. Это прежде всего **М. И. Островский**. Бывший аспирант Михаила Иосифовича работал в то время в Физико-техническом институте низких температур АН УССР, активно занимался наукой.

В 1987 году вышли его работы [7], [8]. В первой работе рассматривались свойства банаховых пространств, устойчивые и неустойчивые относительно раствора. Работа [8] посвящена сравнению слабого свойства Банаха — Сакса со свойством Мазура. Доказано, что из свойства Мазура порядка p>1 следует слабое свойство Банаха — Сакса.

В 1990 году вышла совместная работа М. И. Островского и В. П. Фонфа [9]. **В. П. Фонф** был оппонентом на защите диссертации **Е. В. Манохина** [10], В. П. Фонфа приглашали в Тульский пединститут для чтения лекций студентам математического факультета. В 1988 году выходит совместная статья В. М. Кадеца, М. И. Кадеца и В. П. Фонфа [11] в которой показано, что "в большинстве случаев" существование регуляризатора влечет существование разрешающего регуляризатора, а существование последнего — существование строго разрешающего регуляризатора. Напомним, пусть X и Y — банаховы пространства, $A : X > Y$ — непрерывный оператор, тогда последовательность непрерывных операторов $Rn : Y > X$ называется регуляризатором, если RnAx сходится к x для всех $x \in X$. Регуляризатор называется разрешающим, если его множество сходимости совпадает с AX, и строго разрешающим, если каждая его подпоследовательность — разрешающий регуляризатор.

Один из соавторов этой статьи **В. М. Кадец** выдающийся математик и сын М. И. Кадеца, который в настоящее время продолжает дело отца. Он в то время часто (как и М. И. Островский) выступал на семинаре М. И. Кадеца. Автору, посещавшему семинары в то время, понравился результат В. М. Кадеца, изложенный в статье [12] об интегрируемости по Риману. Понравилось, что математическая классика вполне может быть современной и развиваться.

В 1987 году участники семинара часто обсуждали статью **В. А. Акимовича** [13]. Говорили, что это вторая статья автора, который хоть и редко публиковал статьи, но всегда очень высокого качества.

Автор активно общался с **Б. В. Годуном**. Большое впечатление произвела тогда его совместная работа с Троянским [14].

3. Период 1993-2006 гг.

После того как автор закончил аспирантуру в Харькове, он несколько лет ездил в Харьков встречался с М. И. Кадецем и М. И. Островским.

В 1996 году автор обсуждал с Михаилом Иосифовичем только что вышедшую его статью [15] о двойных рядах. В 1997 году большой интерес вызвала совместная статья М. И. Кадеца и **Каибханова Карахана Эйбхановича** [16]. Линейный ограниченный оператор $A{:}X{\to}X$ в линейно-топологическом пространстве X назовем p-инволютивным, $p \geqslant 2$, если $A_p = I$, где I — тождественный оператор. В статье дано описание линейных p-инволютивных операторов в линейно-топологическом пространстве над полем $\mathbb{C}$; доказана возможность расширения линейного оператора до инволютивного.

К. Э. Каибханов учился в аспирантуре М. И. Кадеца вместе с автором, был на следующем курсе. Завязались дружеские отношения. После окончания аспирантуры К. Э. Каибханов работал в Таганрогском государственном радиотехническом университете. Автор ездил в Таганрог в гости к другу и были совместные научные работы. В силу экономических причин поездки уступили место переписке, в том числе по интернету.

Несмотря на проблемы со здоровьем и со зрением, Владислав Иванович Рыбаков продолжал в это время вести систематическую и очень плодотворную научную работу. Различным аспектам теории Банаховых пространств посвящены работы [17-20].Например, в работе [20] устанавливается принадлежность некоторого класса топологических пространств к классу

пространств Намиоки. Результат формулируется в терминах топологических игр.

Через Манохина Е. В. завязалась научная переписка Владислава Ивановича с еще одним представителем Харьковской школы **А. Н. Пличко.** Еще в аспирантуре автора заинтересовала совместная статья В. М. Кадеца, А. Н. Пличко, М. М. Попова [21] в которой рассматривалось некоторое ослабленное понятие базиса (финитный базис) банахова пространства, имеющее смысл для пространств любой размерности. Тогда же автор изучил статью [22] в которой представлено короткое доказательство одного обобщения теоремы о существовании в сопряженном к квазирефлексивному банахову пространству тотального ненормирующего подпространства. На основании этого обобщения были получены классы функциональных пространств, на которых существовали интегральные операторы с нерегуляризуемыми обратными. Интерес А. Н. Пличко к В. И. Рыбакову объяснялся тем что А. Н. Пличко также интересовался мерами. Например, в статье [23] рассматривались носители меры в банаховом пространстве.

В это время началась работа Манохина Е. В. под руководством **Н. М. Добровольского**, сотрудничество с **И. Ю. Ребровой** и отход от тематики Харьковской школы. Хотя на начальном этапе выходила совместная с Н. М. Добровольским статья частично по тематике банаховых пространств [24], упомянутая в работе [25], посвященной теоретико-числовому методу в приближенном анализе.

4. Заключение

В этой небольшой статье, касающейся времени 1986-2006 гг., выпускаемой к 35-летию периода двадцатилетнего сотрудничества представителей Тульской математической школы и представителей Харьковской математической школы Михаила Иосифовича Кадеца, мы вспомнили многих из тех преподавателей, кто был причастен к становлению и развитию этого сотрудничества и об их научном творчестве того периода. Они дают представление о том, какие замечательные, талантливые и преданные своему делу преподаватели, научные сотрудники, формировали научные направления того периода, который совпадает по времени как с периодом последних лет СССР, так и периодом начала существования России и Украины в виде самостоятельных государств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vector and Operator Valued Measures and Applications. Editors Don H. Tucker (Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah),Hugh B. Maynard (Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah), 1973, Pages 474

2. Notas de Matemática (58): Vector Measures and Control Systems, Series: North-Holland Mathematics Studies, Year: 1975, Volume 20, Page 169

3. Handbook of Measure Theory, Volume I, 2002, Pages 249.

4. 4. Ю. И. Любич, В. А. Марченко, С. П. Новиков, М. И. Островский, Л. А. Пастур, А. Н. Пличко, М. М. Попов, Е. М. Семёнов, С. Л. Троянский, В. П. Фонф, Е. Я. Хруслов, "Михаил Иосифович Кадец (некролог)", УМН, 66:4(400) (2011), 179–180; RussianMath. Surveys, 66:4 (2011), 809–811

5. М. И. Кадец, "Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха", Функц. анализ и его прил., 1:1 (1967), 61–70

6. Е. В. Манохин, А. Е. Устян, Г. В. Кузнецов. Ученый и педагог. К 80-летнему юбилею Владислава Ивановича Рыбакова (13.12.1939–27.09.2016) // Чебышевский сборник, 2019, т. 20,вып. 4 с. 450 – 457.

7. М. И. Островский, "Свойства банаховых пространств, устойчивые и неустойчивые относительно раствора", Сиб. матем. журн., 28:1 (1987), 182–184

8. М. И. Островский, "Свойства Банаха–Сакса и Мазура в банаховых пространствах", Матем. заметки, 42:6 (1987), 786–789

9. М. И. Островский, В. П. Фонф, "Операторы с плотным образом и расширения минимальных систем", Изв. вузов. Матем., 1990, № 6, 45–47; Soviet Math. (Iz. VUZ), 34:6 (1990), 53–56

10. Манохин Е.В. О геометрических и линейно-топологических свойствах некоторых пространств Банаха. Автореф. дис. канд. ф.-м. наук. Харьковский гос. университет, Харьков. 1992.

11. В. М. Кадец, М. И. Кадец, В. П. Фонф, "О разрешающих и строго разрешающих регуляризаторах", Сиб. матем. журн., 29:3 (1988), 59–63; SiberianMath. J., 29:3 (1988), 380–384

12. В. М. Кадец, "Область слабых пределов интегральных сумм Римана абстрактной функции", Изв. вузов. Матем., 1988, № 9, 39–46; Soviet Math. (Iz. VUZ), 32:9 (1988), 56–66

13. В. А. Акимович, "Об одном классе функциональных пространств Банаха", Изв. вузов. Матем., 1987, № 7, 3–7; Soviet Math. (Iz. VUZ), 31:7 (1987), 1–6

14. Б. В. Годун, С. Л. Трояński, "Операторы, достигающие нормы, и геометрия единичной сферы пространства Банаха", Докл. АН СССР, 314:4 (1990), 777–779; Dokl. Math., 42:2 (1991), 532–534

15. М. И. Кадец, "Об абсолютной, совершенной и безусловной сходимости двойных рядов", Функц. анализ и его прил., 30:2 (1996), 85–86; Funct. Anal. Appl., 30:2 (1996), 140–142

16. М. И. Кадец, К. Э. Каибханов, "О расширении линейного оператора до инволютивного", Матем. заметки, 61:5 (1997), 671–676; Math. Notes, 61:5 (1997), 561–565

17. В. И. Рыбаков, "О функционалах, сохраняющих результант", Матем. заметки, 54:1 (1993), 65–70; Math. Notes, 54:1 (1993), 710–712

18. В. И. Рыбаков, "О сходимости на границе единичного шара сопряженного пространства", Матем. заметки, 59:5 (1996), 753–758; Math. Notes, 59:5 (1996), 543–546

19. В. И. Рыбаков, "Об интегрируемости по Петтису стоуновского преобразования", Матем. заметки, 60:2 (1996), 238–253; Math. Notes, 60:2 (1996), 175–185

20. В. И. Рыбаков, "Еще один класс пространств Намиоки", Матем. заметки, 73:2 (2003), 263–268; Math. Notes, 73:2 (2003), 244–248

21. В. М. Кадец, А. Н. Пличко, М. М. Попов, "Об одном типе полных минимальных систем в банаховых пространствах", Изв. вузов. Матем., 1988, № 5, 33–40; Soviet Math. (Iz. VUZ), 32:5 (1988), 39–48

22. А. Н. Пличко, "Ненормирующие подпространства и интегральные операторы с нерегуляризуемым обратным", Сиб. матем. журн., 29:4 (1988), 208–211; Siberian Math. J., 29:4 (1988), 687–689

23. И. К. Мацак, А. Н. Пличко, “О носителе меры в банаховом пространстве и финитной представимости”, Теория вероятн. и ее примен., 36:2 (1991), 363–367; Theory Probab. Appl., 36:2 (1991), 381–385

24. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика.Т. 4. Вып. 3. Тула, 1998. С. 56 — 67.

25. Л. П. Бочарова, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, “Пятьдесят лет теоретико-числовому методу в приближенном анализе: проблемы и достижения”, Чебышевский сб., 8:4 (2007), 4–49

REFERENCES

1. Vector and Operator Valued Measures and Applications. Editors Don H. Tucker (Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah),Hugh B. Maynard (Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah), 1973, Pages 474

2. Notas de Matemática (58): Vector Measures and Control Systems, Series: North-Holland Mathematics Studies, Year: 1975, Volume 20, Page 169

3. Handbook of Measure Theory, Volume I, 2002, Pages 249.

4. Yu. I. Lyubich, V. A. Marchenko, S. P. Novikov, M. I. Ostrovskii, L. A. Pastur, A. N. Plichko, M. M. Popov, E. M. Semenov, S. L. Troyanskii, V. P. Fonf, E. Ya. Khruslov., 2011, “Mikhail Iosifovich Kadets (obituary)” Russian Math. Surveys, 66:4, pp.809–811

5. M. I. Kadets, 1967, “Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces”, Funct. Anal. Appl., 1:1, pp.61–70 .

6. E. V. Manokhin, A. E. Ustyan, G. V. Kuznetsov, 2019, "Scholar and teacher. To the 80th anniversary Vladislav Ivanovich Rybakov (13.12.1939–27.09.2016) Chebyshevskii sbornik, vol. 20,no. 4, pp. 450–457.

7. M. I. Ostrovskii, 1987, “Properties of Banach spaces stable and unstable with respect to the gap”, Siberian Math. J., 28:1, pp.140–142

8. M. I. Ostrovskii, 1987, “Banach–Saks and Mazur properties in Banach spaces”, Math. Notes, 42:6, 931–933 .

9. M. I. Ostrovskii, 1990, V. P. Fonf, “Operators with dense images and extensions of minimal systems”, Soviet Math. (Iz. VUZ), 34:6, 53–56

10. Manokhin E.V., 1992, “About geometrical and linearly-topological properties of some Banach spaces.” The author’s PHD-abstract. Kharkov State University, Kharkov.

11. V. M. Kadets, M. I. Kadets, V. P. Fonf, 1988, “Resolving and strongly resolving regularizers”, Siberian Math. J., 29:3, 380–384

12. V. M. Kadets, 1988, “The domain of weak limits of Riemann integral sums of an abstract function”, Soviet Math. (Iz. VUZ), 32:9, 56–66

13. V. A. Akimovich, 1987, “On a class of Banach functional spaces”, Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 31:7, 1–6

14. B. V. Godun, S. L. Troyanski, 1991, “Norm-attaining operators, and the geometry of the unit sphere of a Banach space”, Dokl. Math., 42:2, 532–534

15. M. I. Kadets, 1996, “Absolute, Perfect, and Unconditional Convergence of Double Series”, Funct. Anal. Appl., 30:2, 140–142

16. M. I. Kadets, K. E. Kaibkhanov, 1997, “Continuation of a linear operator to an involution operator”, Math. Notes, 61:5, 561–565

17. V. I. Rybakov, 1993, “On resultant-preserving functionals”, Math. Notes, 54:1, pp.710–712

18. V. I. Rybakov, 1996, “On convergence on the boundary of the unit ball in dual space”, Math. Notes, 59:5, pp.543–546 .

19. V. I. Rybakov, 1996, “Pettis integrability of Stone transforms”, Math. Notes, 60:2, pp.175–185

20. 17. V. I. Rybakov, 2003, “Yet Another Class of Namioka Spaces”, Math. Notes, 73:2, pp.244–248.

21. V. M. Kadets, A. N. Plichko, M. M. Popov, 1988, “Complete minimal systems of a certain type in Banach spaces”, Soviet Math. (Iz. VUZ), 32:5, 39–48

22. A. N. Plichko, 1988, “Nonnorming subspaces and integral operators with a nonregularizable inverse”, Siberian Math. J., 29:4, 687–689

23. I. K. Matsak, A. N. Plichko, 1991, “On the support of a measure in a Banach space and finite representability”, Theory Probab. Appl., 36:2, 381–385

24. Dobrovolsky N. M., Manokhin E. V. Banach spaces of periodic functions / / Izv. TulSU. Ser. Mechanics. Mathematics. Informatics. T. 4. Issue 3. Tula, 1998. pp. 56-67.

25. L. P. Bocharova, N. M. Dobrovolsky, I. Yu. Rebrova “ Fifty years of the number-theoretic method in approximate analysis: problems and achievements”, Chebyshevsky sb., 8:4 (2007), 4-49

Получено 15.06.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-3-331-342

Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем[1]

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: Tolokonnikovla@mail.ru
Толоконников Сергей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: tolsl@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача дифракции гармонической плоской звуковой волны на однородном изотропном упругом шаре с непрерывно-неоднородным анизотропным упругим слоем. Полагается, что тело помещено в безграничную идеальную жидкость, законы неоднородности материала покрытия описываются непрерывными функциями.

Получено аналитическое решение задачи дифракции для случая, когда материал слоя, покрывающего шар, является радиально-неоднородным и трансверсально-изотропным.

Волновые поля в содержащей среде и однородном изотропном шаре описываются разложениями по сферическим волновым функциям, а для нахождения поля смещений в неоднородном анизотропном слое построена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности рассеянного акустического поля в дальней зоне. Показано, что анизотропия непрерывно-неоднородного упругого слоя может существенно изменять характеристики рассеяния сферических тел.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий шар, неоднородный анизотропный слой.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 331–342.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, https://rscf.ru/project/18-11-00199/

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 539.3:534.26 DOI 10.22405/2226-8383-2021–22-3-331-342

Diffraction of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous transversal isotropic layer

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: Tolokonnikovla@mail.ru
Tolokonnikov Sergey Lvovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: tolsl@mail.ru

Abstract

In paper the problem of diffraction of a harmonic plane sound wave by a homogeneous isotropic elastic sphere with a continuously inhomogeneous anisotropic elastic layer is considered. It is believed that the body is placed in an infinite ideal fluid, the laws of heterogeneity of the coating material are described by continuous functions.

An analytical solution to the diffraction problem is obtained for the case when the material of the sphere layer is radially inhomogeneous and transversally isotropic.

Wave field in a containing medium and a homogeneous isotropic sphere are described by expansions in spherical wave functions. A boundary value problem is constructed for a system of ordinary differential equations of the second order for finding displacement fields in an inhomogeneous anisotropic layer of sphere.

The results of numerical calculations of directional patterns for scattered acoustic field in the far zone are presented. It is shown that anisotropy of continuously inhomogeneous elastic layer one can substantially change the scattering characteristics of spherical bodies.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic sphere, inhomogeneous anisotropic layer.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov, 2021, "Diffraction of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous transversal isotropic layer" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 331–342.

1. Введение

Дифракция звука на упругих телах сферической формы, находящихся в безграничной идеальной жидкости, рассматривалась во многих работах. Дифракция звуковых волн на однородных изотропных упругих сплошных шарах и сферических оболочках изучена, например, в работах [1 – 4]. Задача о рассеянии звука неоднородной изотропной упругой сферой решена в [5]. Исследовано рассеяние плоской звуковой волны однородным [6] и неоднородным трансверсально-изотропными [7] сферическими слоями, а также неоднородным термоупругим сферическим слоем [8]. Задача дифракции нестационарной акустической волны на неоднородной трансверсально-изотропной полой сфере решена в [9]. В [10 – 13] изучено влияние

покрытий сферических упругих тел на их звукоотражающие свойства. Решены задачи дифракции плоской [10], сферической [11] и цилиндрической [12] звуковых волн на упругом шаре с радиально-неоднородным изотропным покрытием. Задача дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью рассмотрена в [13]. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами проведено в [14]. Решены прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на термоупругом шаре с непрерывно-неоднородным термоупругим покрытием в теплопроводной жидкости [15]. В [16] показана возможность моделирования непрерывно-неоднородного по толщине покрытия шара системой однородных упругих слоев.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции гармонической плоской звуковой волны на однородном изотропном упругом шаре с непрерывно-неоднородным трансверсально-изотропным упругим слоем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный упругий шар радиусом r_0, материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0. Шар покрывает радиально-неоднородный трансверсально-изотропный упругий слой радиуса r_1. Модули упругости λ_{ijkl} материала слоя описываются дифференцируемыми функциями радиальной координаты r сферической системы координат r, θ, φ, а его плотность ρ — непрерывной функцией координаты r. Сферическая система координат выбрана так, что ее начало совпадает с центром шара и является центром сферической анизотропии слоя. Шар находится в пространстве, заполненном однородной идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c.

Пусть из внешнего пространства на шар падает плоская гармоническая звуковая волна, потенциал скорости которой равен

$$\psi_0 = A \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)],$$

где A — амплитуда волны; $\mathbf{k}$ — волновой вектор; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор; ω — круговая частота; t — время. Без ограничения общности будем полагать, что плоская волна распространяется в направлении $\theta = 0$. Тогда $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos\theta$, где $k = \omega / c_1$ — волновое число в окружающей жидкости. В дальнейшем временную зависимость $\exp(-i\omega t)$ опускаем.

Определим акустическое поле, рассеянное телом, и поля смещений в однородном шаре и неоднородном трансверсально-изотропном слое.

3. Математическая модель задачи

Ввиду осевой симметрии задачи и свойств упругого материала слоя, возбуждаемые волновые поля вне тела, в однородном шаре и неоднородном анизотропном слое не будут зависеть от сферической координаты φ.

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [17]

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \tag{3.1}$$

где $\psi = \psi_0 + \psi_s$ — потенциал скорости полного акустического поля; ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны. При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\psi, \quad p = i\rho_1\omega\,\psi. \tag{3.2}$$

Распространение малых гармонических колебаний в однородной изотропной упругой среде описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [17] для продольных и поперечных волн

$$\Delta\Psi + k_l^2\Psi = 0, \tag{3.3}$$

$$\Delta\mathbf{\Phi} + k_\tau^2\mathbf{\Phi} = 0, \tag{3.4}$$

где Ψ и $\mathbf{\Phi}$ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно. При этом вектор смещения частиц в упругом однородном шаре

$$\mathbf{u}^{(0)} = \operatorname{grad}\Psi + \operatorname{rot}\mathbf{\Phi}. \tag{3.5}$$

Так как рассматриваемая задача осесимметричная, то $\mathbf{\Phi} = \Phi(r,\theta)\mathbf{e}_\varphi$, где $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор оси φ. Тогда векторное уравнение (3.4) сведется к одному скалярному уравнению относительно функции $\Phi(r,\theta)$, которое в в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta\Phi + \left(k_\tau^2 - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\Phi = 0, \tag{3.6}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Распространение упругих волн в неоднородном анизотропном упругом слое описывается общими уравнениями движения сплошной среды [18], которые при отсутствии массовых сил и с учетом временной зависимости $\exp(-i\omega t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta\right) = -\rho\omega^2 u_r,\\
&\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left[(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta + 3\sigma_{r\theta}\right] = -\rho\omega^2 u_\theta,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в слое; u_r и u_θ — проекции вектора смещения $\mathbf{u}$ на оси сферических координат r и θ; $\rho = \rho(r)$.

В дальнейшем воспользуемся двухиндексным обозначением модулей упругости λ_{ik}, где $i,k = 1,2,\ldots,6$. При этом значениям индексов 1, 2, 3, 4, 5, 6 отвечают соответственно пары индексов 11, 22, 33, 23, 13, 12.

Для трансверсально-изотропного материала слоя число независимых модулей упругости равно пяти ($\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{55}$). При такой анизотропии поверхностями изотропии являются концентрические сферические поверхности.

В этом случае обобщенный закон Гука записывается в виде [18]

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = \lambda_{11}\varepsilon_{rr} + \lambda_{12}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}), \qquad \sigma_{r\theta} = 2\lambda_{55}\varepsilon_{r\theta},\\
&\sigma_{\theta\theta} = \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{22}\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \qquad \sigma_{r\varphi} = 2\lambda_{55}\varepsilon_{r\varphi},\\
&\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda_{12}\varepsilon_{rr} + \lambda_{23}\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi}, \qquad \sigma_{\theta\varphi} = 2\lambda_{44}\varepsilon_{\theta\varphi},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где ε_{kl} — компоненты тензора деформаций; $\lambda_{44} = \dfrac{1}{2}(\lambda_{22} - \lambda_{23})$; $\lambda_{ik} = \lambda_{ik}(r)$.

На внешней поверхности слоя $r = r_1$, соприкасающейся с жидкостью, граничные условия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной анизотропной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$-i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = r_1, \tag{3.9}$$

где $v_r = \partial\psi/\partial r$ — нормальная скорость частиц жидкости.

На внутренней поверхности слоя $r = r_0$ должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$u_r = u_r^{(0)}, \quad u_\theta = u_\theta^{(0)}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(0)}, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^{(0)} \quad \text{при } r = r_0, \tag{3.10}$$

где $u_r^{(0)}$, $u_\theta^{(0)}$ и $\sigma_{ij}^{(0)}$ — компоненты вектора смещения $\mathbf{u^{(0)}}$ и тензора напряжений в однородном шаре соответственно.

Искомыми величинами являются $\psi_s(r,\theta)$, $\Psi(r,\theta)$, $\Phi(r,\theta)$, $u_r(r,\theta)$ и $u_\theta(r,\theta)$. Таким образом, в математической постановке задача состоит в нахождении решений уравнений (3.1), (3.3), (3.6), (3.7), удовлетворяющих граничным условиям (3.9) и (3.10).

4. Аналитическое решение задачи

Потенциал скорости падающей плоской волны представим в виде [19]

$$\psi_0(r,\theta) = A\sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)j_n(kr)P_n(\cos\theta), \tag{4.1}$$

где $j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя порядка n, $P_n(x)$ — многочлен Лежандра степени n.

Учитывая условия излучения на бесконечности, функцию Ψ_s, являющуюся решением уравнения (3.1), будем искать в виде

$$\psi_s(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(kr)P_n(\cos\theta), \tag{4.2}$$

где $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n.

Учитывая условия ограниченности, функции Ψ и Φ будем искать в виде

$$\Psi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(k_l r)P_n(\cos\theta), \tag{4.3}$$

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(k_\tau r)\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta). \tag{4.4}$$

Запишем уравнения распространения упругих волн в неоднородном анизотропном слое (3.7) через компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$. Для этого воспользуемся соотношениями (3.8) и выражениями компонент тензора деформаций ε_{ij} через компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в сферической системе координат [18]

$$\begin{gathered}\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_r\right), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}(u_r + u_\theta \operatorname{ctg}\theta), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right).\end{gathered} \tag{4.5}$$

Получаем

$$\lambda_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(\lambda_{11}' + \frac{2}{r}\lambda_{11}\right)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\lambda_{55}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\lambda_{55}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u_r}{\partial\theta} +$$

$$+\left[\frac{2}{r}\lambda'_{12}+\frac{2}{r^2}\left(\lambda_{12}-\lambda_{22}-\lambda_{23}\right)+\rho\omega^2\right]u_r+\frac{1}{r}(\lambda_{12}+\lambda_{55})\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta}+$$
$$+\frac{1}{r}(\lambda_{12}+\lambda_{55})\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\left[\lambda'_{12}+\frac{1}{r}(\lambda_{12}-\lambda_{22}-\lambda_{23}-\lambda_{55})\right]\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+$$
$$+\frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta\left[\lambda'_{12}+\frac{1}{r}(\lambda_{12}-\lambda_{22}-\lambda_{23}-\lambda_{55})\right]u_\theta=0, \tag{4.6}$$
$$\lambda_{55}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\lambda_{22}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+\left(\lambda'_{55}+\frac{2}{r}\lambda_{55}\right)\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\lambda_{22}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+$$
$$+\frac{1}{r}(\lambda_{12}+\lambda_{55})\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r}\left[\lambda'_{55}+\frac{1}{r}(\lambda_{22}+\lambda_{23}+2\lambda_{55})\right]\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-$$
$$-\left[\frac{1}{r}\lambda'_{55}+\frac{1}{r^2}(\lambda_{23}+2\lambda_{55}+\lambda_{22}\operatorname{ctg}^2\theta)-\rho\omega^2\right]u_\theta=0.$$

Штрихи означают дифференцирование по r.

Функции $u_r(r,\theta)$ и $u_\theta(r,\theta)$ будем искать в виде разложений

$$u_r(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}U_{1n}(r)P_n(\cos\theta),\qquad u_\theta(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}U_{2n}(r)\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta) \tag{4.7}$$

Подставим разложения (4.7) в уравнения (4.6). Воспользовавшись уравнением для многочленов Лежандра [20]

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)\right]+n(n+1)P_n(\cos\theta)=0$$

и свойством ортогональности сферических гармоник [20], получим для каждого индекса n ($n=0,1,\dots$) систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$

$$\hat{\mathbf{A}}_n\mathbf{U}''_n+\hat{\mathbf{B}}_n\mathbf{U}'_n+\hat{\mathbf{C}}_n\mathbf{U}_n=0, \tag{4.8}$$

где $\mathbf{U}_n=(U_{1n},U_{2n})^T$;

$$\hat{\mathbf{A}}_n=\begin{pmatrix}\lambda_{11}&0\\0&\lambda_{55}\end{pmatrix};\qquad \hat{\mathbf{B}}_n=\begin{pmatrix}\lambda'_{11}+\frac{2}{r}\lambda_{11}&\frac{1}{r}(\lambda_{12}+\lambda_{55})\\\frac{1}{r}(\lambda_{12}+\lambda_{55})&\lambda'_{55}+\frac{2}{r}\lambda_{55}\end{pmatrix};\qquad \hat{\mathbf{C}}_n=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix},$$

где

$$c_{11}=\frac{1}{r^2}\left[2r\lambda'_{12}+2(\lambda_{12}-\lambda_{22}-\lambda_{23})-n(n+1)\lambda_{55}\right]+\rho\omega^2;$$
$$c_{12}=-\frac{n(n+1)}{r^2}(r\lambda'_{12}+\lambda_{12}-\lambda_{22}-\lambda_{23}-\lambda_{55});$$
$$c_{21}=\frac{1}{r^2}(r\lambda'_{55}+\lambda_{22}+\lambda_{23}+2\lambda_{55});$$
$$c_{22}=\frac{1}{r^2}\left[-r\lambda'_{55}+\lambda_{22}-\lambda_{23}-2\lambda_{55}-n(n+1)\lambda_{22}\right]+\rho\omega^2.$$

Коэффициенты A_n, B_n и C_n разложений (4.2) – (4.4) подлежат определению из граничных условий.

Из первого граничного условия (3.9) находим коэффициенты A_n, выраженные через величины $U_{1n}(r_1)$

$$A_n = -\frac{Ai^n(2n+1)kj_n'(kr_1) + i\omega U_{1n}(r_1)}{kh_n'(kr_1)}. \tag{4.9}$$

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Из первых двух условий (3.10) найдем коэффициенты B_n и C_n, выраженные через величины $U_{2n}(r_0)$

$$B_n = [U_{2n}(r_0)n(n+1)j_n(k_\tau r_0) - U_{1n}(r_0)\left(j_n(k_\tau r_0) + k_\tau r_0 j_n'(k_\tau r_0)\right)]r_0 q_n^{-1}, \tag{4.10}$$

$$C_n = [U_{2n}(r_0)k_l r_0 j_n'(k_l r_0) - U_{1n}(r_0)j_n(k_l r_0)]r_0 q_n^{-1}, \tag{4.11}$$

где $q_n = n(n+1)j_n(k_l r_0)j_n(k_\tau r_0) - k_l r_0 j_n'(k_l r_0)[j_n(k_\tau r_0) + k_\tau r_0 j_n'(k_\tau r_0)]$.

При выводе (4.10) и (4.11) использовались выражения компонент вектора $\mathbf{u}^{(0)}$ через функции Ψ и Φ, полученные из (3.5),

$$u_r^{(0)} = \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\Phi), \quad u_\theta^{(0)} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r\Phi)\right]. \tag{4.12}$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получаем четыре краевых условия, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (4.8)

$$\begin{gathered}(\hat{\mathbf{A}}_n\mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{E}}_n\mathbf{U}_n)_{r=r_1} = \hat{\mathbf{D}}_n,\\ (\hat{\mathbf{A}}_n\mathbf{U}_n' + \hat{\mathbf{F}}_n\mathbf{U}_n)_{r=r_0} = 0,\end{gathered} \tag{4.13}$$

где

$$\hat{\mathbf{E}}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda_{12}}{r} + \dfrac{\rho_1\omega^2 h_n(kr)}{kh_n'(kr)} & -\dfrac{\lambda_{12}}{r}n(n+1) \\ \dfrac{\lambda_{55}}{r} & -\dfrac{\lambda_{55}}{r} \end{pmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{D}}_n = \begin{pmatrix} \dfrac{Ai^n(2n+1)\rho_1\omega}{(kr_1)^2 h_n'(kr_1)}, & 0 \end{pmatrix}^T; \quad \hat{\mathbf{F}}_n = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

$f_{11} = 2\lambda_{12}r^{-1} + [a_n b_n + c_n j_n(k_l r)]q_n^{-1}r^{-1}$;
$f_{12} = -\lambda_{12}n(n+1)r^{-1} - [b_n n(n+1)j_n(k_\tau r) + c_n k_l r j_n'(k_l r)]q_n^{-1}r^{-1}$;
$f_{21} = \lambda_{55}r^{-1} + [a_n d_n + e_n j_n(k_l r)]q_n^{-1}r$;
$f_{22} = -\lambda_{55}r^{-1} - [d_n n(n+1)j_n(k_\tau r) + e_n k_l r j_n'(k_l r)]q_n^{-1}r$;
$a_n = j_n(k_\tau r) + k_\tau r j_n'(k_\tau r)$;
$b_n = (\lambda_0 + 2\mu_0)k_l^2 r^2 j_n''(k_l r) + 2\lambda_0 k_l r j_n'(k_l r) - \lambda_0 n(n+1)j_n(k_l r)$;
$c_n = 2\mu_0 n(n+1)[j_n(k_\tau r) - k_\tau r j_n'(k_\tau r)]$;
$d_n = 2\mu_0[k_l j_n'(k_l r) - r^{-1}j_n(k_l r)]r^{-1}$;
$e_n = \mu_0[2 - n(n+1)]j_n(k_\tau r)r^{-2} - k_\tau^2 j_n''(k_\tau r)$.

При выводе (4.13) использовались соотношения между компонентами тензора напряжений $\sigma_{rr}^{(0)}$, $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ и компонентами вектора смещения $\mathbf{u}^{(0)}$ [23]

$$\sigma_{rr}^{(0)} = (\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} + \frac{\lambda_0}{r}\left(2u_r^{(0)} + \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial\theta} + u_\theta^{(0)}\operatorname{ctg}\theta\right),$$

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = \mu_0\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial r}\right),$$

соотношения (3.8), (4.5), (4.12), а также выражение для вронскиана [20]

$$j_n(x)h_n'(x) - j_n'(x)h_n(x) = i/x^2.$$

Коэффициенты A_n, B_n и C_n могут быть вычислены лишь после решения краевой задачи (4.8), (4.13), то есть после определения поля смещений в неоднородном трансверсально-изотропном слое. Решение краевой задачи может быть найдено различными методами (например, [7, 8]).

В результате получаем аналитическое описание акустического поля, рассеянного шаром с неоднородным трансверсально-изотропным слоем в виде (4.2).

Заметим, что для получения решения задачи в случае изотропного упругого слоя следует положить

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda + 2\mu, \quad \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda, \quad \lambda_{55} = \mu,$$

где λ и μ — коэффициенты Ламе изотропной среды.

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическое представление сферических функций Ганкеля при больших значениях аргумента [20]

$$h_n(kr) \simeq \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (kr \gg 1),$$

получаем из (4.2) выражение для потенциала скорости рассеянной звуковой волны

$$\Psi_s = \frac{r_0}{2r}\exp(ikr)F(\theta),$$

где

$$F(\theta) = \frac{2}{kr_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^{n+1}A_nP_n(\cos\theta)$$

5. Численные исследования

Были проведены расчеты амплитуды рассеяния $|F(\theta)|$ для однородного изотропного стального шара ($\rho_0 = 7,7\cdot10^3$ кг/м^3, $\lambda_0 = 5,3\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\mu_0 = 2,6\cdot10^{10}$ Н/м^2) с волновым размером $kr_0 = 7$. Полагалось, что тело помещено в воду ($\rho_1 = 10^3$ кг/м^3, $c = 1485$ м/с), амплитуда падающей волны $A = 1$, а отношение внешнего радиуса r_1 трансверсально-изотропного сферического слоя к внутреннему r_0 равно 1.4.

Краевая задача (4.8), (4.13) решена методом сведения ее к задачам с начальными условиями (например, [7, 10, 12]). При расчетах суммирование членов ряда (4.2) проводилось по n до $n = 10kr_0$.

Рассматривались два типа анизотропных материалов слоя, изотропной базой которых является алюминий ($\overline{\rho} = 2,7\cdot10^3$ кг/м^3, $\overline{\lambda}_{11} = 10,5\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{12} = 5,3\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{22} = 10,5\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{23} = 5,3\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{55} = 2,6\cdot10^{10}$ Н/м^2).

Были выбраны следующие средние значения модулей упругости выбранных неоднородных анизотропных материалов:

тип 1 — $\overline{\lambda}_{11} = 5,74\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{12} = 3,28\cdot10^{10}$Н/м^2, $\overline{\lambda}_{22} = 16,4\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{23} = 5,3\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{55} = 2,54\cdot10^{10}$ Н/м^2.

тип 2 — $\overline{\lambda}_{11} = 16,4\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{12} = 0,82\cdot10^{10}$Н/м^2, $\overline{\lambda}_{22} = 5,74\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{23} = 5,3\cdot10^{10}$ Н/м^2, $\overline{\lambda}_{55} = 2,95\cdot10^{10}$ Н/м^2.

Упругие характеристики трансверсально-изотропных материалов типов 1 и 2 таковы, что максимум фазовой скорости квазипродольных волн v_l в материале типа 1 достигается в направлении касательной к поверхности изотропии, а в материале типа 2 — в радиальном направлении. Причем максимальные (и минимальные) значения фазовых скоростей квазипродольных волн для материалов 1 и 2 совпадают, а отношение $v_{l\max}/v_{l\min} \approx 1,7$.

Расчеты проводились для неоднородного покрытия, механические характеристики которого менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \overline{\rho} f(r), \quad \lambda_{ij} = \overline{\lambda}_{ij} f(r), \quad f(r) = 1 + 4\left(\frac{r - r_0}{r_1 - r_0}\right)^2.$$

На рисунке представлены диаграммы направленности рассеянного поля в дальней зоне. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния $|F|$, вычисленной для соответствующих значений угла θ ($0° \leqslant \theta \leqslant 180°$). Сплошная линия соответствует неоднородному изотропному слою, пунктирная и штриховая линии — неоднородным трансверсально-изотропным слоям типа 1 и 2 соответственно. Стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны.

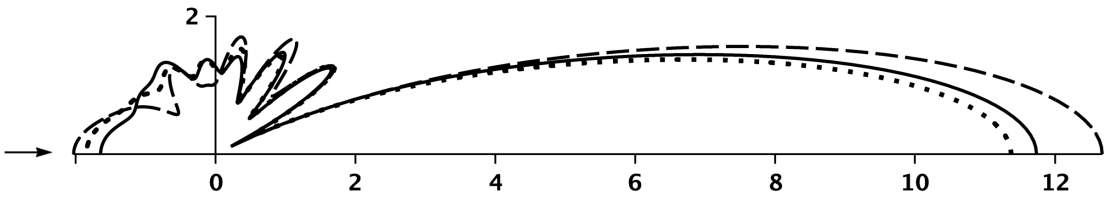


Рис. 1: Диаграммы направленности

Как показывают расчеты, анизотропия слоя, покрывающего шар существенно влияет на характер рассеяния звука.

6. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным трансверсально-изотропным слоем, позволяющее исследовать влияние материала покрытия с разными видами неоднородности и типами анизотропии на звукоотражающие характеристики тела при различных значениях волнового размера шара. На основе решения прямой задачи можно рассмотреть обратную задачу об определении законов неоднородности материала слоя, позволяющих получить требуемые звукоотражающие свойства сферического тела в заданных диапазонах частот и секторах наблюдения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23, No. 4. P. 405 – 418.

2. Junger M. C. Sound scattering by thin elastic shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. Vol. 24, No. 4. P. 366 – 373.

3. Flax L., Dragonette L. R., Uberall H. Theory of elastic resonance excitation by sound scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. No. 3. P. 723 – 731.

4. Goodman R. D., Stern R. Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1962. Vol. 34, No. 3. P. 338 – 344.

5. Приходько В. Ю., Тютекин В. В. О собственных частотах и формах колебаний радиально-слоистых упругих тел // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 6. С. 9 – 14.

6. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.

7. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем // Акустический журн. 1995. Т.41, № 6. С. 917 – 923.

8. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем // Прикладная математика и механика. 2010. Т.74, вып. 4. С. 645 – 654.

9. Бригадирова Т. Е., Медведский А. Л. Дифракция нестационарной акустической волны на неоднородной трансверсально-изотропной полой сфере // Механика композ. матер. и конструкций. 2007. Т. 13. № 1. С. 119 – 130.

10. Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 4. С. 519 – 526.

11. Толоконников Л. А., Родионова Г. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 131 – 137.

12. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, вып. 5. С. 663 – 673.

13. Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 2. С. 181 – 193.

14. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 11. С. 89 – 98.

15. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние звука термоупругим шаром с непрерывно-неоднородным покрытием в теплопроводной жидкости // Математическое моделирование. 2019. Т. 31, № 5. С. 20 – 38.

16. Толоконников Л.А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 6. С. 699 – 707.

17. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.

18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

19. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

20. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Faran, J. J. 1951, "Sound scattering by solid cylinders and spheres", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no. 4, pp. 405 – 418.

2. Junger, M. C. 1952, "Sound scattering by thin elastic shells", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 24, no. 4, pp. 366 – 373.

3. Flax, L., Dragonette, L. R. & Uberall, H. 1978, "Theory of elastic resonance excitation by sound scattering", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 63, no. 3, pp. 723 – 731.

4. Goodman, R. D. & Stern, R. 1962, "Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 34, no 3, pp. 338 – 344.

5. Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1987, "Eigenfrequencies and normal modes of a radially layered elastic body, *Soviet Applied Mechanics*, vol. 23, no 6, pp. 518 – 522.

6. Shenderov, E. L. 1989, *"Radiation and scattering of sound"*, Sudostroenie, Leningrad, 304 p., [in Russian].

7. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1995, "Sound scattering by an inhomogeneous transversaly isotropic spherical layer", *Acoustical Physics*, vol. 41, no 6, pp. 812 – 818.

8. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2010, "Scattering of sound by an inhomogeneous thermoelastic spherical layer", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 74, no. 4, pp. 460 – 466.

9. Brigodirova, T.Ė. & Medvedskii A.L̇. 2007, "Diffraction of a nonstationary acoustic wave by an inhomogeneous transversely isotropic hollow sphere", *J. Mechanics of Composite Materials and Structures*, vol. 13, no. 1, pp. 119 – 130, [in Russian].

10. Tolokonnikov, L. A. 2014, "The scattering of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 78, no. 4, pp. 367 – 373.

11. Tolokonnikov, L. A. & Rodionova, G. A. 2014, "Diffraction of a spherical acoustic wave by an elastic sphere with a non-uniform covering",*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 131 – 137, [in Russian].

12. Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic sphere with an inhomogeneous coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no. 5, pp. 467 – 474.

13. Tolokonnikov, L. A. 2014, "Diffraction of a plane acoustic wave by an elastic sphere with a non-uniform covering and arbitrarily situated spherical vacuity",*Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2, pp. 181 – 193, [in Russian].

14. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn,S. A. 2018, "Modeling an inhomogeneous coating of an elastic sphere with the required sound reflecting properties", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 10, no. 3, pp. 333 – 340.

15. Larin, N. V. & Tolokonnikov. L. A. 2019, "Sound Scattering by a Thermoelastic Ball with a Continuously Inhomogeneous Coating in a Heat-Conducting Fluid", *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 11, no. 6, pp. 1007 – 1018.

16. Tolokonnikov, L. A. 2017, "Modelling of a continuously inhomogeneous coating of an elastic sphere by a system of homogeneous elastic layers in the problem of sound scattering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 81, no. 6, pp. 480 – 485.

17. Shenderov, E. L. 1972, *"Wave problems of underwater acoustics"*, Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].

18. Nowacki, W.1973, *"Teoria sprezystosci"*, PWN, Warszawa.

19. Ivanov, E. A. 1968, *"Diffraction of electromagnetic waves by two bodies"*, Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p., [in Russian].

20. Lebedev, N. N. 1963, *"Special Functions and their Applications"*, Fizmatgiz, Moscow, 358 p., [in Russian].

Получено 29.07.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 519.146 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-343-350

Об оценках на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями полуобщего положения[1]

Н. Н. Авдеев

Авдеев Николай Николаевич — Воронежский государственный университет (г. Воронеж)
e-mail: nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru

Аннотация

Множество точек M на плоскости называется плоским множеством с целочисленными расстояниями, если все расстояния между точками M суть целые числа, и при этом M не содержится ни в какой прямой. Говорят, что плоское множество с целочисленными расстояниями есть множество полуобщего положения, если никакие три его точки не лежат на одной прямой. Известная оценка снизу для плоского множества с целочисленными расстояниями линейна относительно его мощности. Ранее не были известны отдельные оценки снизу на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями полуобщего положения заданной мощности (известная конструктивная оценка сверху на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями использует как раз множества полуобщего положения). В статье доказывается надлинейная оценка снизу на диаметр плоского множества с целочисленными расстояниями полуобщего положения (полиномиальная с показателем 5/4). Доказательство основано на относительно большом количестве лемм и наблюдений, включая результаты Солимоси из статьи, в которой была впервые доказана линейная оценка снизу на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями.

Ключевые слова: комбинаторная геометрия, диаметр множества, множество с целочисленными расстояниями.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
Н. Н. Авдеев. Об оценках на диаметр плоских множеств с целочисленными расстояниями полуобщего положения // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 343–350.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00197).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 519.146 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-343-350

On diameter bounds for planar integral point sets in semi-general position

N. N. Avdeev

Avdeev Nikolai Nikolaevich — Voronezh State University (Voronezh).
e-mail: nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru

Abstract

A point set M in the Euclidean plane is said to be a planar integral point set if all the distances between the elements of M are integers, and M is not situated on a straight line. A planar integral point set is said to be a set in semi-general position, if it does not contain collinear triples. The existing lower bound for mininal diameter of a planar integral point set is linear with respect to its cardinality. There were no known special diameter bounds for planar integral point sets in semi-general position of given cardinality (the known upper bound for planar integral point sets is constructive and employs planar integral point sets in semi-general position). We prove a new lower bound for minimal diameter of planar integral point sets in semi-general position that is better than linear (polynomial of power 5/4). The proof is based on several lemmas and observations, including the ones established by Solymosi to prove the first linear lower bound for diameter of a planar integral point set.

Keywords: combinatorial geometry, diameter of a set, integral point set.

Bibliography: 21 titles.

For citation:
N. N. Avdeev, 2021, "On diameter bounds for planar integral point sets in semi-general position", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 343–350.

1. Введение

Множеством с целочисленными расстояниями (МЦР) на плоскости называется такое множество точек M, что расстояние (евклидово) между любыми двумя точками из M есть целое число, и при этом M не является подмножеством никакой прямой. Каждое МЦР состоит лишь из конечного числа точек [1, 2]; поэтому мы можем обозначить множество всех множеств из n точек с целочисленными расстояниями через $\mathfrak{M}(2, n)$ (придерживаясь обозначений [3] и в целом для краткости изложения) и естественным образом определить диаметр множества $M \in \mathfrak{M}(2, n)$:

$$\operatorname{diam} M = \max_{A,B \in M} |AB|, \tag{1}$$

где $|AB|$ обозначает обычное (евклидово) расстояние между точками A и B. Через $\#M$ будем обозначать мощность множества M, которая в нашем случае всегда совпадает с количеством точек в M.

Поскольку любое МЦР можно очевидным образом растянуть до множества большего диаметра, интерес представляет в первую очередь минимальный возможный диаметр при заданной мощности множества. Это рассуждение формализуется следующей функцией, введённой в [4, 5]:

$$d(2, n) = \min_{M \in \mathfrak{M}(2,n)} \operatorname{diam} M. \tag{2}$$

Выяснилось, что достаточно просто сконструировать МЦР на плоскости, все точки которого, кроме одной, лежат на некоторой прямой (такие множества называются *веерными*); аналогично — для 2 точек вне прямой (см., напр., [6], где такие множества названы *крабовыми*) и даже для 4 точек вне прямой [7]. Для $9 \le n \le 122$ минимальный возможный диаметр МЦР мощности n достигается именно на веерном множестве [4].

Определение 1. *Множество $M \in \mathfrak{M}(2,n)$ есть МЦР полуобщего положения, если никакие три точки из M не лежат на одной прямой. Кратко будем писать, что $M \in \overline{\mathfrak{M}}(2,n)$.*

В [8] приводится конструкция МЦР полуобщего положения для любой наперёд заданной мощности; получаемое МЦР содержится в некоторой окружности. Кроме того, в [9] приведена изящная конструкция МЦР M любой наперёд заданной мощности, содержащегося в окружности, для любого возможного количества нечётных расстояний между точками M.

Определение 2. *Множество $M \in \overline{\mathfrak{M}}(2,n)$ есть МЦР общего положения, если никакие четыре точки из M не лежат на одной окружности. Кратко будем писать, что $M \in \dot{\mathfrak{M}}(2,n)$.*

Остаётся неясным, любую ли мощность может иметь МЦР общего положения; однако, известны [10, 11] примеры МЦР $M \in \dot{\mathfrak{M}}(2,7)$.

Очевидно неравенство

$$d(2,n) \le \overline{d}(2,n) \le \dot{d}(2,n),$$

где $\overline{d}(2,n) = \min_{M \in \overline{\mathfrak{M}}(2,n)} \operatorname{diam} M$ и $\dot{d}(2,n) = \min_{M \in \dot{\mathfrak{M}}(2,n)} \operatorname{diam} M$. Выполнено, однако, и более интересное соотношение:

$$c_1 n \le d(2,n) \le \overline{d}(2,n) \le n^{c_2 \log\log n}.$$

Верхняя оценка установлена в [8]. Нижняя оценка впервые была получена в [12]; наибольшее известное значение для c_1 равно $5/11$ (для $n \ge 4$) [13].

Известны некоторые оценки на диаметр МЦР специального вида. В частности, для множеств, в которых достаточно много точек лежит на одной прямой, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *[5, теорема 4] Для любых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и множества $P \in \mathfrak{M}(2,n)$, в котором не менее n^δ точек лежат на некоторой прямой, существует число $n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \ge n_0(\varepsilon)$ верно неравенство*

$$\operatorname{diam} P \ge n^{\frac{\delta}{4\log 2(1+\varepsilon)} \log\log n}. \tag{3}$$

Об оценках на диаметр МЦР, содержащихся в окружности, можно прочесть в [14].

Отдельные случаи МЦР на плоскости также обсуждались в [15, §5.11], [16, §D20], [17], [18]. За обобщением на пространства более высоких размерностей и соответствующими оценками отсылаем читателя к [19, 20].

В настоящей статье мы доказываем отдельную оценку снизу на диаметр множества с целочисленными расстояниями полуобщего положения. Требование полуобщего положения является существенным для доказательства.

2. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся определения и леммы, которые в дальнейшем потребуются для доказательства основного результата.

Лемма 1. *[12, наблюдение 1] Пусть стороны треугольника T есть целые числа $a \le b \le c$, тогда наименьшая из высот треугольника T не менее $\left(a - \frac{1}{4}\right)^{1/2}$.*

Определение 3. *Полосой ширины ρ будем называть часть плоскости, заключённую между двумя параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние ρ.*

Лемма 2. *[21] Пусть треугольник T, наименьшая из высот которого равна ρ, расположен в полосе. Тогда ширина этой полосы не менее ρ.*

Следствие 1. *Пусть треугольник T с целыми сторонами $a \le b \le c$ лежит в некоторой полосе, тогда ширина этой полосы не менее $\left(a - \frac{1}{4}\right)^{1/2}$.*

Лемма 3. *[3, лемма 4]; [13, лемма 2.4] Пусть $M \in \mathfrak{M}(2,n)$ и $\operatorname{diam} M = d$. Тогда M расположено в некотором квадрате со стороной d.*

Определение 4. *[13, определение 2.5] Будем называть крестом точек M_1 и M_2 и обозначать через $cr(M_1,M_2)$ объединение двух прямых: прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, и серединного перпендикуляра к отрезку M_1M_2.*

Лемма 4. *[13, теорема 3.10] Каждое множество $M \in \mathfrak{M}(2,n)$, для некоторых точек которого $M_1, M_2 \in M$ выполнено равенство $|M_1M_2| = 1$, состоит из $n-1$ точек, включая M_1 и M_2, лежащих на некоторой прямой m, и ещё одной точки, лежащей вне m на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2.*

Лемма 5. *Пусть $\{M_1,M_2,M_3,M_4\} \subset M \in \overline{\mathfrak{M}}(2,n)$ (точки M_2 и M_3 могут совпадать, остальные попарно различны), $n \ge 4$. Тогда $\#M \le 4 \cdot |M_1M_2| \cdot |M_3M_4|$.*

Замечание 1. *Лемма 5 основана на работе [2].*

Доказательство. Для каждой точки $N \in M$ выполнено одно из следующих условий:

a) N принадлежит $cr(M_1,M_2)$ — итого не более 4 точек (не более 2 на каждой из прямых);

b) N принадлежит $cr(M_3,M_4)$ — итого не более 4 точек (не более 2 на каждой из прямых);

c) N принадлежит пересечению одной из $|M_1M_2|-1$ гипербол с одной из $|M_3M_4|-1$ гипербол — итого не более $4(|M_1M_2|-1)(|M_3M_4|-1)$ точек;

По лемме 4 выполнено $|M_1M_2| \ge 2$ и $|M_3M_4| \ge 2$. Из того, что

$$\begin{aligned} 4(|M_1M_2|-1)(|M_3M_4|-1)+4+4 &= 4((|M_1M_2|-1)(|M_3M_4|-1)+2) = \\ &= 4(|M_1M_2|\cdot|M_3M_4|+1-|M_1M_2|-|M_3M_4|+2) = \\ &= 4(|M_1M_2|\cdot|M_3M_4|+(1-|M_1M_2|)+(2-|M_3M_4|)) \le 4|M_1M_2|\cdot|M_3M_4|, \quad (4) \end{aligned}$$

и следует утверждение леммы. □

3. Основной результат

Теорема 2. *Для всякого целого $n \ge 3$ выполнено неравенство*

$$\overline{d}(2,n) \ge (n/5)^{5/4}. \quad (5)$$

Доказательство. [Доказательство] Для $n = 3$ имеем $\overline{d}(2,3) = 1$ (достигается на равностороннем треугольнике со стороной 1), и утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим $M \in \overline{\mathfrak{M}}(2,n)$, $n \ge 4$, $\operatorname{diam} M = p$.

Выберем точки $M_1, M_2, M_3, M_4 \in M$ (точки M_2 и M_3 могут совпадать, остальные должны быть попарно различны) таким образом, что

$$\min_{A,B\in M} |AB| = |M_1M_2|, \tag{6}$$

$$\min_{A,B\in M\setminus\{M_1\}} |AB| = |M_3M_4| = m. \tag{7}$$

Если $m \le p^{2/5}$, то по лемме 5

$$n \le 4 \cdot |M_1M_2| \cdot |M_3M_4| \le 4p^{4/5}. \tag{8}$$

Или, что то же самое,

$$p \ge (n/4)^{5/4} > (n/5)^{5/4}. \tag{9}$$

Пусть теперь $m > p^{2/5}$. Тогда для любых точек $A, B \in M \setminus \{M_1\}$ выполнено неравенство $|AB| > p^{2/5}$. Согласно следствию 1, никакие три точки из $M\setminus\{M_1\}$ не лежат в полосе шириной $p^{1/5}/2$.

В силу леммы 3 множество M расположено в квадрате со стороной p. Покроем этот квадрат объединением q полос, $2p^{4/5} \le q < 2p^{4/5} + 1$ так, что ширина каждой полосы не превышает $p^{1/5}/2$. Каждая из полученных полос содержит не более двух точек из $M \setminus \{M_1\}$, поэтому

$$n \le 2(2p^{4/5} + 1) + 1 = 4p^{4/5} + 3 \le 5p^{4/5}. \tag{10}$$

Последнее неравенство выполнено в силу того, что $\overline{d}(2, n) \ge 4$ для $n \ge 4$ [5] и $4^{4/5} > 3$. Из неравенства (10) легко получаем, что

$$p \ge (n/5)^{5/4}. \tag{11}$$

□

Замечание 2. *Известен следующий факт [12, следствие 1]:*

Лемма 6. *Пусть $H \in \overline{\mathfrak{M}}(2, n)$. Тогда минимальное расстояние между точками H не менее $n^{1/3}$.*

Применяя аналогичные приёмы, можно получить, что

$$n \le 3\frac{\operatorname{diam} H}{n^{1/6}}, \tag{12}$$

откуда выводится оценка

$$\overline{d}(2, n) \ge c_3 n^{7/6}, \tag{13}$$

которая, очевидно, слабее оценки в теореме 2.

4. Заключение

Полученная в данной статье оценка — первая специальная оценка диаметра снизу для множества с целочисленными расстояниями полуобщего положения. Поэтому автор не преследовал цели получить как можно бóльшую константу в теореме 2, предпочитая сохранить ясность и прозрачность доказательства. Очевидно, что в результате более тщательного исследования эта константа может быть увеличена. Кроме того, и верхние, и нижние оценки по-прежнему, увы, остаются далеки от точных.

5. Благодарности

Автор благодарит проф. Е. М. Семёнова и к.ф.-м.н. А. С. Усачёва за обсуждение статьи и ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anning N. H., Erdös P. Integral distances // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1945. — т. 51, No 8. — с. 598—600.

2. Erdös P. Integral distances // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1945. — т. 51, No 12. — с. 996.

3. Авдеев Н. Н., Семёнов Е. М. Множества точек с целочисленными расстояниями на плоскости и в евклидовом пространстве // Математический форум (Итоги науки. Юг России). — 2018. — с. 217—236.

4. Kurz S., Laue R. Bounds for the minimum diameter of integral point sets // Australasian Journal of Combinatorics. — 2007. — т. 39. — с. 233—240. — arXiv: 0804.1296.

5. Kurz S., Wassermann A. On the minimum diameter of plane integral point sets // Ars Combinatoria. — 2011. — т. 101. — с. 265—287. — arXiv: 0804.1307.

6. Antonov A. R., Kurz S. Maximal integral point sets over $\mathbb{Z}^2$ // International Journal of Computer Mathematics. — 2008. — т. 87, No 12. — с. 2653—2676. — arXiv: 0804.1280.

7. Huff G. B. Diophantine problems in geometry and elliptic ternary forms // Duke Mathematical Journal. — 1948. — т. 15, No 2. — с. 443—453.

8. Harborth H., Kemnitz A., Möller M. An upper bound for the minimum diameter of integral point sets // Discrete & Computational Geometry. — 1993. — т. 9, No 4. — с. 427—432.

9. Piepmeyer L. The maximum number of odd integral distances between points in the plane // Discrete & Computational Geometry. — 1996. — т. 16, No 1. — с. 113—115.

10. Kreisel T., Kurz S. There are integral heptagons, no three points on a line, no four on a circle // Discrete & Computational Geometry. — 2008. — т. 39, No 4. — с. 786—790.

11. Constructing 7-clusters / S. Kurz [и др.] // Serdica Journal of Computing. — 2014. — т. 8, No 1. — с. 47—70. — arXiv: 1312.2318.

12. Solymosi J. Note on integral distances // Discrete & Computational Geometry. — 2003. — т. 30, No 2. — с. 337—342.

13. Avdeev N. On existence of integral point sets and their diameter bounds. // Australasian Journal of Combinatorics. — 2020. — т. 77.1. — с. 100—116. — arXiv: 1906.11926.

14. Bat-Ochir G. On the number of points with pairwise integral distances on a circle // Discrete Applied Mathematics. — 2018. — т. 254. — с. 17—32.

15. Brass P., Moser W. O., Pach J. Research problems in discrete geometry. — Springer Science & Business Media, 2006.

16. Guy R. Unsolved problems in number theory. т. 1. — Springer Science & Business Media, 2013.

17. Авдеев Н. Н. Об отыскании целоудалённых множеств специального вида // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики - сборник трудов Международной научной конференции. — Научно-исследовательские публикации, 2018. — с. 492—498.

18. Авдеев Н. Н. On integral point sets in special position // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы». — 2018. — т. 8. — с. 5—6.

19. Kurz S. On the characteristic of integral point sets in E^m // Australasian Journal of Combinatorics. — 2006. — т. 36. — с. 241. — arXiv: math/0511704.

20. Nozaki H. Lower bounds for the minimum diameter of integral point sets // Australasian Journal of Combinatorics. — 2013. — т. 56. — с. 139—143.

21. Смуров М., Спивак А. Покрытия полосками // Квант. — 1998. — No 5. — с. 6.

REFERENCES

1. Anning, N.H. & Erdös, P. 1945. “Integral distances”. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 51.8, pp. 598—600. doi: 10.1090/S0002-9904-1945-08407-9

2. Erdös, P. 1945. “Integral distances”. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 51.12, p. 996. doi: 10.1090/S0002-9904-1945-08490-0

3. Avdeev, N.N. & Semenov, E.M. 2018. “Mnozhestva tochek c tselochislennymi rasstoyaniyami na ploskosti i v evklidovom prostranstve” (“Integral point sets on the plane and in Euclidean space”) *Matematicheskiy forum (Itogi nauki. Yug Rossii)*, pp. 217—236.

4. Kurz, S. & Laue, R. 2007. “Bounds for the minimum diameter of integral point sets”. *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 39, pp. 233—240. arXiv: 0804.1296.

5. Kurz, S. & Wassermann, A. 2011. “On the minimum diameter of plane integral point sets”. *Ars Combinatoria*, vol. 101, pp. 265—287. arXiv: 0804.1307.

6. Antonov, A.R. & Kurz, S. 2008. “Maximal integral point sets over Z^2”. *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 87.12, pp. 2653—2676. arXiv: 0804.1280. doi: 10.1080/00207160902993636

7. Huff, G.B. 1948. “Diophantine problems in geometry and elliptic ternary forms”. *Duke Mathematical Journal*, vol. 15.2, pp. 443—453. doi:10.1215/S0012-7094-48-01543-9

8. Harborth, H., Kemnitz, A. & Möller, M. 1993. “An upper bound for the minimum diameter of integral point sets”. *Discrete & Computational Geometry* vol. 9.4, pp. 427—432. doi: 10.1007/bf02189331

9. Piepmeyer, L. 1996. “The maximum number of odd integral distances between points in the plane”. *Discrete & Computational Geometry*, vol. 16.1, pp. 113—115. doi: 10.1007/bf02711135

10. Kreisel, T. & Kurz, S. 2008. “There are integral heptagons, no three points on a line, no four on a circle”. *Discrete & Computational Geometry*, vol. 39.4, pp. 786—790. doi: 10.1007/s00454-007-9038-6

11. Kurz, S., Noll, L.C., Rathbun, R, & Simmons, C. 2014. "Constructing 7-clusters". *Serdica Journal of Computing*, vol. 8.1, pp. 47—70. arXiv: 1312.2318.

12. Solymosi, J. 2003. "Note on integral distances". *Discrete & Computational Geometry*, vol. 30.2, pp. 337—342. doi: 10.1007/s00454-003-0014-7

13. Avdeev, N. N. 2019. "On existence of integral point sets and their diameter bounds". *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 77.1, pp. 100—116. arXiv: 1906.11926

14. Bat-Ochir, G. 2018. "On the number of points with pairwise integral distances on a circle". *Discrete Applied Mathematics*, vol. 254, pp. 17—32. doi: 10.1016/j.dam.2018.07.004

15. Brass, P., Moser, W.O.J. & Pach, J. 2006. *Research problems in discrete geometry.* Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/0-387-29929-7

16. Guy, R. 2013. *Unsolved problems in number theory.* Vol. 1. Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/978-1-4757-1738-9

17. Avdeev, N.N. 2018. "Ob otyskanii tseloudalennykh mnozhestv spetsial'nogo vida" ("On the search of integral point sets of a special type"). *Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki, informatiki i mekhaniki - sbornik trudov Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii.* (Actual problems of applied mathematics, informatics and mechanics - proc. of the int. conf.). Voronezh, pp. 492—498.

18. Avdeev, N.N. 2018. "On integral point sets in special position". *Nekotorye voprosy analiza, algebry, geometrii i matematicheskogo obrazovaniya* (Some problems of analysis, algebra, geometry and mathematical education), vol. 8, pp. 5—6.

19. Kurz, S. 2006. "On the characteristic of integral point sets in E^m". *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 36, pp. 241–248. arXiv: math/0511704.

20. Nozaki, H. 2013. "Lower bounds for the minimum diameter of integral point sets". *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 56, pp. 139—143.

21. Smurov, M. & Spivak, A. 1998. "Pokrytiya poloskami" ("Covering by strips"). *Kvant*, vol. 5, pp. 6–12.

Получено 02.11.19 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-351-359

Математическое эффективное уравнение разгрузки пористых металлических композиционных материалов

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева

Архипов Игорь Константинович — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: iarh@list.ru
Абрамова Влада Игоревна — кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: abramova_vi@mail.ru
Кутепов Сергей Николаевич — кандидат педагогических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: kutepov.sergei@mail.ru
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru

Аннотация

С учетом микропластичности в окрестностях пор получено эффективное уравнение разгрузки. Учтено влияние пористости на остаточную деформацию при одноосном растяжении образца пористого металлического композита. Установлена нелинейность по деформациям кривой разгрузки, которая вызвана микропластичностью. Приведены численные расчеты остаточной деформации в зависимости от начального напряжения и пористости.

Ключевые слова: композиционные материалы, матрица, микропластические зоны, остаточные деформации, пористость.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
И. К. Архипов, В. И. Абрамова, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Математическое эффективное уравнение разгрузки пористых металлических композиционнх материалов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 351–359.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-351-359

Mathematical effective equation of unloading of porous metal composite materials

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva

Arkhipov Igor Konstantinovich — doctor of technical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: iarh@list.ru

Abramova Vlada Igorevna — candidate of technical sciences, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: abramova_vi@mail.ru

Kutepov Sergey Nikolaevich — candidate of pedagogical science, associate professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: kutepov.sergei@mail.ru

Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, docent, Russian State University of Justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Abstract

Aking into account the microplasticity in the vicinity of the pores, an effective discharge equation is obtained. The influence of porosity on the residual deformation under uniaxial tension of a sample of a porous metal composite is taken into account. The nonlinearity in the deformations of the discharge curve, which is caused by microplasticity, is established. Numerical calculations of the residual strain as a function of the initial stress and porosity are given.

Keywords: composite materials, matrix, microplastic zones, residual deformations, porosity.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, 2021, "Mathematical effective equation of unloading of porous metal composite materials" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 351–359.

1. Введение

В работе [1] получены соотношения между напряжениями и деформациями композитов с хаотическим армированием.

2. Основная часть

В частности для пористых композитов (при отсутствии наполнителя) указанные физические соотношения для одноосного нагружения имеют вид:

$$\langle\sigma_1\rangle = E^*(p)\langle\varepsilon_1\rangle - E_p^*(p)(\langle e_1\rangle)\langle e_1\rangle, \tag{1}$$

где $E^*(p)$ — эффективный упругий модуль Юнга для пористого композита, p — пористость, угловыми скобками обозначены средние по композиту деформации e_1; $E_p^*(\langle e_1\rangle)$ — нелинейная эффективная часть модуля Юнга, зависящая от концентрации микропластических зон $c_p(\langle e_1\rangle)$, определяемая по формуле [1]:

$$E_p^*(\langle e_1\rangle) = c_p(\langle e_1\rangle)(1-p)\left\{\frac{4}{3}\mu_2(1-\nu_2) - \chi\left[\left(3D_{\lambda\lambda}^p + 4D_{\mu\lambda}^p\right)(1-2\nu_2) + \frac{4D_{\mu\mu}^p}{1-p}\right]\right\} \tag{2}$$

где $D_{\lambda\lambda}^p, D_{\mu\mu}^p, D_{\mu\lambda}^p$ — дисперсии упругопластических жесткостей $\lambda^p(\langle e_1\rangle), \mu^p(\langle e_1\rangle)$, определяемые для пористого материала по формулам [1]:

$$D_{\lambda\lambda}^p = p\left(K_2^2 - \frac{4}{3}K_2\mu_2\right) - 4D_{\mu\mu}^p \tag{3}$$

$$D_{\mu\lambda}^p = p\left(K_2\mu_2 - \frac{2}{3}D_{\mu\mu}^p\right), \quad D_{\mu\mu}^p = \mu_2^2 \tag{4}$$

$$\chi = \frac{(2\lambda_2 + 7\mu_2)}{15\mu_2(1-p)(\lambda_2 + 2\mu_2)}. \tag{5}$$

В формулах (3)-(5) приняты следующие обозначения: λ_2, K_2, μ_2 — упругие модули материала матрицы.

Концентрация микропластических зон определяется из статистической модели [1] по формулам:

$$C_p = C_2[1-\Phi(y)]; \quad \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \quad y = \frac{\sigma_{S2} - \langle\sigma\rangle}{\sqrt{D_{\sigma\sigma}}}, \tag{6}$$

где дисперсия напряжений $D_{\sigma\sigma}$ определяется по формуле [2]:

$$D_{\sigma\sigma} = p(1-p)\frac{\mu_2^2}{\mu_*^2}\langle\sigma\rangle^2\chi_0^2, \tag{7}$$

где $\chi_0 = \dfrac{3-4\nu_2}{5(1-\nu_2)}$, ν_2 — коэффициент Пуассона материала матрицы, C_2 — объемная концентрация матрицы, σ_{S2} — предел текучести матрицы при растяжении, $\langle\sigma\rangle$ — среднее напряжение в композите.

Эффективный модуль сдвига μ_* для пористого композита в корреляционном приближении [2] определяется по формуле:

$$\mu_* = \frac{\mu_2(1-p)^2\chi_1}{p + (1-p)\chi_1}, \tag{8}$$

где $\chi_1 = \dfrac{7-5\nu_2}{2(4-5\nu_2)}$.

При снятии нагрузки при начальном напряжении σ_0 остаточная деформация $\varepsilon_{\text{ост}}$ будет отлична от нуля только для нелинейной (пластической) части соотношения (1) (см. рис. 1).

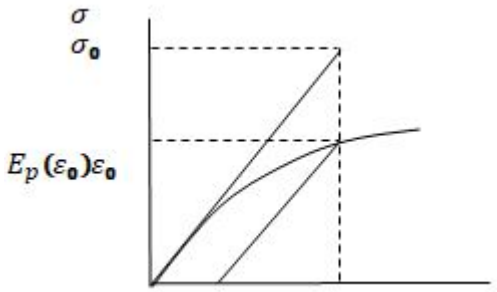


Рис. 1: Схема разгрузки пористого композита

В этом случае $\langle\sigma_1\rangle = 0$. Таким образом, для определения остаточной деформации требуется решить нелинейное уравнение:

$$\left[E_* - E_p^*(\varepsilon_0)\right]\varepsilon_0 = \sigma_0 \tag{9}$$

или $\varepsilon_0^{(1)} = \dfrac{\sigma_0}{E_* - E_p^*\left(\varepsilon_0^{(1)}\right)}$, тогда

$$\varepsilon_{\text{ост}}^{(1)} = \varepsilon_0^{(1)} - \frac{\sigma_0}{E_*} \tag{10}$$

В первом приближении $\varepsilon_{\text{ост}}^{(1)}$ будем считать закон разгрузки линейным.

В этом случае остаточная деформация определяется по формуле (10).

Поскольку σ_0 — нелинейно зависит от ε_0, что следует из уравнения (9), предлагается следующий итерационный алгоритм расчета:

1. Задаёмся значением $\sigma_0 < \sigma_{S2}$.

2. По формуле (6) определяем значения

$$y_1 = \frac{k_1 - 1}{\varphi(p)}, \quad \text{где} \quad k_1 = \frac{\sigma_{S2}}{\sigma_0} > 1; \quad \varphi(p) = \sqrt{\frac{p}{(1-p)^3}}\chi_0; \quad \Phi(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y_1} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

   где значение $\Phi(y_1)$ находятся по таблице нормального распределения [4] в зависимости от y_1.

3. Находим концентрацию микропластических зон $C_p(y_1)$:

$$C_p(y_1) = C_2[1 - \Phi(y_1)]$$

4. Для каждого значения пористости p из формулы (9) находим ε_0 в первом приближении:

$$\varepsilon_0^{(1)} = \frac{\sigma_0}{E_* - E_p(\sigma_0)},$$

   где $E_p(\sigma_0)$ определяется по формуле (2) с заменой $C_p(\varepsilon_0)$ на $C_p(y_1)$.

5. Находим остаточную деформацию $\varepsilon_{\text{ост}}^{(1)}$ в первом приближении:

$$\varepsilon_{\text{ост}}^{(1)} = \varepsilon_0^{(1)} - \frac{\sigma_0}{E_*}.$$

6. В следующих приближениях $n = 2, 3 \ldots$ находим:

$$y_n = \frac{k_n - 1}{\varphi(p)}, \quad \text{где} \quad k_n = \frac{\varepsilon_{S2}}{\varepsilon_0^{(n-1)}}, \quad \Phi(y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y_n} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

$$C_p(y_n) = C_2[1 - \Phi(y_n)]; \quad \varepsilon_0^{(n)} = \frac{\sigma_0}{E_* - E_p\left(\varepsilon_0^{(n-1)}\right)};$$

$$\varepsilon_{\text{ост}}^{(n)} = \varepsilon_0^{(n)} - \frac{\sigma_0}{E_*}.$$

Результаты расчета $\varepsilon_{\text{ост}}$ в первом приближении приведены в табл. 1

Таблица 1: Зависимость остаточной деформации $\varepsilon_{\text{ост}}$ от пористости и напряжения перед разгрузкой σ_0 при разгрузке пористой хромоникелевой стали 07Х18Н12М2

p	0,25			0,5		
k	2	1,75	1,5	2	1,75	1,5
	0,022	0,031	0,470	0,073	0,102	0,146
C_p %	0,375	1,95	7,5	8,0	11,3	16,0

Упруго-пластические характеристики пористой стали:

1. Предел текучести матрицы при одноосном растяжении $\sigma_{S2} = 600$ МПа.
2. Эффективный модуль Юнга $E_* = 11,7$ ГПа.
3. Эффективный модуль сдвига $\mu_* = 6,58$ ГПа.
4. Эффективный коэффициент Пуассона $\nu_* = 0,31$.

Из табл. 1 следует, что концентрация микропластических зон и остаточных деформаций растет с ростом пористости и с ростом начального напряжения перед разгрузкой σ_0.

3. Заключение

Полученные результаты могут быть использованы при создании ресурсосберегающих технологических термомеханических процессов обработки композиционных материалов с использованием рекомендаций работ [5-22].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов И. К., Толоконников Л. А. Эффективные соотношения между напряжениями и деформациями в корреляционной теории упругопластических деформаций. Известия АНСССР. Механика твердого тела. – 1984.– №2. – С. 196-198.
2. Архипов И. К., Абрамова В. И., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Панин А. В. Моделирование микропластичности и механического поведения пористых материалов // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №1. – С.23-29.
3. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 399 с.
4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа 1995. – 402 с.

5. Гвоздев А. Е., Кузовлева О. В. Экстремальные эффекты прочности и пластичности в металлических гетерофазных слитковых и порошковых системах и композиционных материалах: монография: 3-е изд., испр. и доп. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2020. – 498 с.

6. Структура и свойства коррозионностойких и износостойких биметаллических композиционных материалов: монография / Н. Н. Сергеев, А. Н. Сергеев, С. Н. Кутепов, А. Е. Гвоздев, Д. С. Клементьев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2021. – 120 с.

7. Эффективные характеристики вязкоупругости металлических и полимерных композитов / И. К. Архипов, В. И. Абрамова, О. М. Губанов, А. Е. Гвоздев, С. Н. Кутепов // Технология металлов. – № 10. – С. 14-18.

8. Формирование поверхности реза и поверхностное упрочнение при лазернойрезке звездочек цепных передач из сталей Ст3 и 30ХГСА / И. В. Минаев, И. В. Тихонова, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, Е. А. Архипова // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – № 9. – С. 16-21.

9. Formation of the Cut Surface and the Surface Hardening of Chain Sprockets Made of St3 and 30KhGSA Steels during Laser Cutting / I. V. Minaev, I. V. Tikhonova, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov, E. A. Arkhipova // Russian Metallurgy (Metally). Vol. 2021. No. 4. P. 501–506.

10. Бреки А. Д., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г. Полуэмпирические математические модели трения верчения стали ШХ-15 по стали Р6М5, по схеме шар-плоскость с учетом износа / Материаловедение. – 2019. – № 2. – С. 43-48.

11. Temperature field calculation at incomplete hot processing of metal alloys / G. M. Zhuravlev, D. N. Romanenko, A. E. Gvozdev, S. N. Kutepov, O. M. Gubanov // Steel in Translation. – 2019. – Т. 49. – № 10. – С. 716-719.

12. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Semiempirical mathematical models of the pivoting friction of ShKh15 steel over R6M5 steel according to the ball–plane scheme with consideration of wear // Inorganic Materials: Applied Research. – 2019. – Т. 10. – № 4. – С. 1008-1013.

13. Estimation of mechanical properties of wrapping polyethylene films / O. V. Kuzovleva, A. N. Sergeev, A. E. Gvozdev, D. V. Maliy, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. – 2019. – Т. 10. – № 1. – С. 210-213.

14. Mechanism of the hydrogen cracking of metals and alloys, part I (review) / N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. – 2019. – Vol. 10. – № 1. – P. 24-31.

15. Mechanism of the hydrogen cracking of metals and alloys, part II (review) / N. N. Sergeev, A. N. Sergeev, S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. – 2019. – Vol. 10. – № 1. – P. 32-41.

16. Сергеев Н. Н., Сергеев А. Н. Механические свойства и внутреннее трение высокопрочных сталей в коррозионных средах: монография – Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. – 430 с.

17. Power required in the plastic deformation of metallic powder materials / E. S. Makarov, G. M. Zhuravlev, M. V. Kazakov, A. E. Cheglov, A. E. Gvozdev, N. N. Sergeev, V. S. Yusupov, O. M. Gubanov, A. D. Breki // Steel in Translation. 2018. – Т. 48. – № 9. – С. 597-602.

18. Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO2 with MoS2 nanoparticles under conditions of spinning friction on ShKh15 steel / A. D. Breki, S. E. Aleksandrov, K. S.

Tyurikov, A. G. Kolmakov, A. E. Gvozdev, A. A. Kalinin // Inorganic Materials: Applied Research. – 2018. – Т. 9. – № 4. – С. 714-718.

19. Breki A. D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations offriction forces // Inorganic Materials: Applied Research. – 2017. – Т. 8. – № 4. – С. 509-514.

20. Закономерности трения верчения стали ШХ15 по поверхности покрытия наоснове SiO_2, содержащего наночастицы MoS_2 со средним размером 70 нм,нанесённого на подложку из стали 12Х18Н10Т / А. Д. Бреки, С. Е. Александров, К. С. Тюриков, А. Е. Гвоздев, А. А. Калинин, Е. В. Агеев, А. Г. Ивахненко // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2017. – Т. 7. – № 3 (24). – С. 48-59.

21. Вариант расчета максимального упрочнения малоуглеродистых сталей в процессах пластической деформации / Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, Н. Н. Сергеев, Д. А. Провоторов // Производство проката. – 2016. – № 7. – С. 9-13.

22. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М. Теория пластичности дилатирующих сред: монография; под ред. А.Е. Гвоздева. 2-е издание, переработанное и дополненное. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. – 337 с.

REFERENCES

1. Arkhipov I. K., Tolokonnikov L. A. 1984, «Effective relations between stresses and deformations in the correlation theory of elastic-plastic deformations», *Izvestiya ANSSSR. Solid state mechanics*, No.2. pp. 196-198.

2. Arkhipov I. K., Abramova V. I., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Panin A.V. 2021, «Modeling of microplasticity and mechanical behavior of porous materials», *Deformation and destruction of materials*, No.1, pp. 23-29.

3. Shermergor T. D. 1977, *Theory of elasticity of micro-homogeneous media.* Moscow: Nauka. 399 p.

4. Gmurman V. E. 1995, *Theory of probability and mathematical statistics.* Moscow: Higher school. 402 p.

5. Gvozdev A. E. Kuzovlev O. V. 2020, *Extreme effects of strength and plasticity in heterogeneous metal ingot and powder systems and composite materials: monograph.* Tula: TulGU. 498 p.

6. Sergeev N. N., Sergeev A. N., Kutepov S. N., Gvozdev A. E., Klementyev D. S. 2021, *Structure and properties of corrosion-resistant and wear-resistant bimetallic composite materials.* Tula: TulSU Publishing House. 120 p.

7. Arkhipov I. K., Abramova V. I., Gubanov O. M., Gvozdev A. E., Kutepov S. N. 2021, «Effective characteristics of viscoelasticity of metal and polymer composites», *Technology of metals*, No.10. pp. 14-18.

8. Minaev I. V., Tikhonova I. V., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G., Arkhipova E. A. 2020, «Formation of the cutting surface and surface hardening during laser cutting of chain gear sprockets made of St3 and 30XGSA steels», *Deformation and destruction of materials*, No.9. pp. 16-21.

9. Minaev I.V., Tikhonova I.V., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Arkhipova E.A. 2021, «Formation of the Cut Surface and the Surface Hardening of Chain Sprockets Made of St3 and 30KhGSA Steels during Laser Cutting», *Russian Metallurgy (Metally)*, Vol.4. pp. 501-506.

10. Breki A.D., Gvozdev A. E., Kolmakov A. G. 2019, «Semi-empirical mathematical models of the spinning friction of steel SHH-15 postali P6M5, according to the ball-plane scheme taking into account wear», *Materials Science*, No.2. pp. 43-48.

11. Zhuravlev G.M., Romanenko D.N., Gvozdev A.E., Kutepov S.N., Gubanov O.M. 2019, «Temperature field calculation at incomplete hot processing of metal alloys», *Steel in Translation*, Vol.49. №10. pp. 716-719.

12. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2019, «Semiempirical mathematical models of the pivoting friction of ShKh15 steel over R6M5 steel according to the ball–plane scheme with consideration of wear», *Inorganic Materials: Applied Research*, Vol.10. №4. pp. 1008-1013.

13. Kuzovleva O.V., Sergeev A.N. , Gvozdev A.E., Maliy D.V., Kolmakov A.G. 2019, «Estimation of mechanical properties of wrapping polyethylene films», *Inorganic Materials: Applied Research*, Vol.10. №1. pp. 210-213.

14. Sergeev N.N., Sergeev A.N. , Kutepov S.N., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2019, «Mechanism of the hydrogen cracking of metals and alloys», part I (review) *Inorganic Materials: Applied Research*, Vol.10. №1. pp. 24-31.

15. Sergeev N.N., Sergeev A.N., Kutepov S.N., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2019, «Mechanism of the hydrogen cracking of metals and alloys», part II (review) *Inorganic Materials: Applied Research*, Vol.10. №1. pp. 32-41.

16. Sergeev N. N., Sergeev A. N. 2018, *Mechanical properties and internal friction of high-strength steels in corrosive environments.* Tula: TulSU Publishing House. 430 p.

17. Makarov E.S., Zhuravlev G.M. , Kazakov M.V., Cheglov A.E., Gvozdev A.E., Sergeev N.N., Yusupov V.S., Gubanov O.M., Breki A.D. 2018, «Power required in the plastic deformation of metallic powder materials», *Steel in Translation*, Vol.48. №9. pp. 597-602.

18. Breki A.D., Aleksandrov S.E., Tyurikov K.S. , Kolmakov A.G., Gvozdev A.E., Kalinin A.A. 2018, «Antifriction properties of plasma-chemical coatings based on SiO_2 with MoS_2 nanoparticles under conditions of spinning friction on ShKh15 steel», *Inorganic Materials: Applied Researc*h, Vol.9. №4. pp. 714-718.

19. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2017, «Application of generalized pascal triangle for description of oscillations offriction forces», *Inorganic Materials: Applied Research*, Vol.8. №4. pp. 509-514.

20. Breki A.D., Alexandrov S.E., Tyurikov K. S., Gvozdev A. E., Kalinin A. A., Ageev E. V., Ivakhnenko A. G. 2017, «Regularities of the friction of twisting of steel SHX15 on the surface of a coating based on SiO_2 containing MoS_2 nanoparticles with an average size of 70 nm, deposited on a substrate made of steel 12X18H10T», I*zvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Series: Engineering and technology*, Vol.7. №3(24). pp. 48-59.

21. Zhuravlev G. M., Gvozdev A. E., Sergeev N. N., Provotorov D. A. 2016, «Variant of calculating the maximum hardening of low-carbon steels in the processes of plastic deformation», *Production of rolled products*, No.7. pp. 9-13.

22. Makarov E. S., Gvozdev A. E., Zhuravlev G. M. 2015, *Theory of plasticity of dilating media*: monograph; ed. by A. E. Gvozdev. 2nd edition, revised and expanded. Tula: TulSU Publishing House. 337 p.

Получено 13.07.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-360-368

Новая мегастабильная система с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями

И. М. Буркин, О. И. Кузнецова

Буркин Игорь Михайлович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: i-burkin@yandex.ru
Кузнецова Оксана Игоревна — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: oxxy4893@mail.ru

Аннотация

Многие реальные динамические системы характеризуются наличием множества сосуществующих аттракторов. Это свойство систем называется мультистабильностью. В мультистабильных системах может произойти внезапный переход к нежелательным или неизвестным аттракторам. Такой переход может привести к катастрофическим событиям. Оказалось, что мультистабильность также связана с возникновением непредсказуемых аттракторов, которые называются скрытыми аттракторами. Аттрактор называется скрытым, если его область притяжения не пересекается с небольшими окрестностями неустойчивой неподвижной точки. Одной из определяющих причин изучения мультистабильных хаотических систем с различными характеристиками является широкий спектр их потенциальных инженерных приложений – в теории управления, информатике, криптологии, искусственных нейронных сетях, шифровании изображений, защищенной связи и обнаружении слабых сигналов. В последние годы исследователи обратились к разработке методов искусственного конструирования систем с желаемой динамикой. В этом случае основные усилия сосредоточены на создании систем с бесконечным числом сосуществующих аттракторов - экстремально мультистабильных и мегастабильных систем. Оказалось, что такие системы открывают новые возможности для решения некоторых прикладных задач, например, для реализации контроля амплитуды и полярности сигнала в инженерных системах или для создания новых систем шифрования изображений. В этой статье строится новая гладкая трехмерная динамическая система, обратимая во времени, содержащая аналитическое решение и странный мультифрактальный скрытый аттрактор. Бассейн притяжения аттрактора включает почти все трехмерное пространство, а его размерность "почти 3". Путем замены одной из переменных системы на периодическую функцию этой переменной, строится система, обладающая 1-D полосой срытых хаотических аттракторов размерности "почти 3"и одновременно бесконечным числом аналитических решений. Специальное преобразование последней системы позволяет построить систему с 2-D полосой скрытых аттракторов.

Ключевые слова: динамические системы, аналитические решения, хаос, мегастабильность, скрытые аттракторы, показатели Ляпунова, размерность Каплана-Йорке.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
И. М. Буркин, О. И. Кузнецова. Новая мегастабильная система с 2-D полосой скрытых аттракторов и аналитическими решениями // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 360–368.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 4.

UDC 517.9 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-360-368

New megastable system with 2-D strip of hidden attractors and analytical solutions

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova

Burkin Igor' Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Univetsity (Tula).

e-mail: i-burkin@yandex.ru

Kuznetsova Oksana Igorevna — postgraduate student, Tula State Univetsity (Tula).

e-mail: oxxy4893@mail.ru

Abstract

Many real dynamical systems are characterized by the presence of a set coexisting attractors. This property of systems is called multistability. In multistable systems, a sudden transition to unwanted or unknown attractors can occur. Such a transition can lead to catastrophic events. It turned out that multistability is also associated with the emergence of unpredictable attractors, which are called hidden attractors. An attractor is called hidden if its area of attraction does not intersect with small neighborhoods of an unstable fixed point. One of the defining reasons for studying multistable chaotic systems with different characteristics is a wide range of their potential engineering applications - in control theory, computer science, cryptology, artificial neural networks, image encryption, secure communication, and weak signal detection. In recent years, researchers have turned to developing methods for artificially designing systems with desired dynamics. In this case, the main efforts are focused on creating systems with an infinite number of coexisting attractors - extremely multistable and megastable systems. It turned out that such systems open up new possibilities for solving some applied problems, for example, for realizing control of the signal amplitude and polarity in engineering systems or for creating new image encryption systems. In this paper, a new smooth three-dimensional dynamical system is constructed, reversible in time, containing an analytical solution and a strange multifractal hidden attractor. The basin of attraction of the attractor includes almost all three-dimensional space, and its dimension is "almost 3". By replacing one of the variables of the system with a periodic function of this variable, a system is constructed that has a 1-D strip of hidden chaotic attractors of dimension "almost 3"and, at the same time, an infinite number of analytical solutions. A special transformation of the latter system allows us to design a megastable system with a 2-D strip of hidden attractors.

Keywords: dynamical systems, analytical solutions, chaos, megastability, hidden attractors, Lyapunov exponents, Kaplan-Yorke dimension.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova, 2021, "New megastable system with 2-D strip of hidden attractors and analytical solutions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 360–368.

1. Введение

Сложными хаотическими динамическими системами моделируются многие процессы реального мира такие, как климат, ряд экосистем, человеческий мозг , финансовые рынки и многие прикладные инженерные системы [1]. При этом для таких систем характерно наличие множества сосуществующих аттракторов. Это свойство систем называется мультистабильность и относится к системам, которые не являются ни стабильными, ни полностью нестабильными, но в которых наблюдается чередование между двумя или более взаимоисключающими состояниями. Мультистабильные системы очень чувствительны к шуму, начальным условиям и параметрам. При наличии в мультистабильной системе аттракторов с очень маленькими бассейнами притяжения или ранее не идентифицированными аттракторами можно наблюдать внезапный переход к неожиданным нежелательным или неизвестным аттракторам[2]. Такой сдвиг может привести к катастрофическим событиям, начиная от внезапных климатических изменений, серьезных заболеваний и заканчивая финансовыми кризисами и катастрофами технических систем.

Оказалось, что мультистабильность связана также с возникновением непредсказуемых аттракторов, которые были названы скрытыми аттракторами. Аттрактор называется скрытым[3], если его бассейн притяжения не пересекается с малыми окрестностями неустойчивых неподвижных точек. Например, скрытый аттрактор является периодическим или хаотическим аттрактором в системе без равновесий или с единственным устойчивым состоянием равновесия. После того, как впервые был найден скрытый аттрактор в классической системе Чуа [3], многие исследователи сосредоточили усилия на разработке методов обнаружения скрытых аттракторов и поиске систем, обладающих скрытыми аттракторами[4]. Были найдены скрытые аттракторы как в реальных, так и искусственно сконструированных динамических системах, имеющих, например, единственное устойчивое состояние равновесия [5], бесконечное число состояний равновесия [7], не имеющих состояний равновесия [8].

Одной из определяющих причин, побуждающих исследовать мультистабильные хаотические системы с различными характеристиками, является широкий спектр их потенциальных инженерных приложений. В научной литературе последних лет широко представлены приложения хаоса в теории управления, криптологии, искусственных нейронных сетях, шифровании изображений, защищенной связи, обнаружении слабых сигналов, системах радиолокации [1].

Хаос является постоянным и повсеместным предметом научных исследований [6]. В последние годы исследователи обратились к разработке методов искусственного конструирования систем с желаемой динамикой [8-10]. Основные усилия при этом сосредоточены на создании систем с бесконечным числом сосуществующих аттракторов – экстремально мультистабильных и мегастабильных систем [11-15]. Оказалось, что такие системы предоставляют новые возможности для решения некоторых прикладных задач, например, для осуществления амплитудного контроля в инженерных системах, или для создания новых систем хаотического шифрования изображений.

2. Новая хаотическая система

В своей недавней работе [16] Спротт рассмотрел следующую систему с разрывной нелинейностью, являющуюся модификацией известной системы Носе-Хувера [17]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y\,\mathrm{sign}(z), \\ \dot{z} &= y^2 - e^{-x^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом Спротт написал: "Why is this system interesting and worth publishing? It's because it is time-reversible and dissipative with a strange multifractal attractor that is hidden but whose basin includes the whole of the three-dimensional space so that every initial condition goes to the attractor. Even more remarkably, every initial condition apparently lies on the attractor which fills all of space with a highly nonuniform measure and a capacity dimension of 3.0, and it is just one member in a large family of systems with those properties. It violates every expectation that most of us have developed over the years about respectable chaotic attractors."Аттрактор системы (1) имеет показатели Ляпунова $(0.2280, 0, -0.2480)$ и размерность Каплана-Йорке 2.9194, что резко отличает ее от подавляющего большинства трехмерных систем. Спротт заключает свою работу следующим призывом: "In the near-term, I look forward to additional, truly novel examples of chaotic systems in this and other similar journals".

Рассмотрим гладкую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y\,\mathrm{arctg}(50z), \\ \dot{z} &= y^4 - \frac{a}{1+x^8}. \end{aligned} \tag{2}$$

где $a > 0$, которая, так же как система (1) является обратимой. Эта система имеет аналитическое решение $x(t) \equiv y(t) \equiv 0, z = z(0) - at$.

Проанализируем поведение решений системы (2), опираясь на рассуждения, приведенные Г.А Леоновым в работе [18] при исследовании системы Носе-Хувера. Очевидно, что решение $(x(t), y(t), z(t))$ системы (2) удовлетворяет соотношению

$$\ddot{x}(t) + \alpha(t)\dot{x} + x(t), \alpha(t) = \mathrm{arctg}(50z(t)). \tag{3}$$

Если $z(t) < 0$ при всех $t \geq 0$, то выполнено одно из следующих соотношений [18]:

1) $\lim\limits_{t\to\infty} [\dot{x}(t)]^2 = \infty$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} ([\dot{x}(t)]^2 + x(t)^2) = \infty$,

3) существует последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} ([\dot{x}(t)]^2 + x(t)^2) = C < \infty$.

В случае 3) система (2) имеет периодическое решение. Но из (3) следует, что для этого периодического решения выполнено либо 1), либо 2). Значит, случай 3) невозможен. Из третьего уравнения системы (2) и предположения $z(t) < 0$ при $t \geq 0$ также следует, что случаи 1) и 2) невозможны. Поэтому существует число $T > 0$ такое, что $z(T) = 0$.

Пусть теперь $z(t) > 0$ при всех $t \geq 0$. Тогда из (3) следует [18], что $\lim\limits_{t\to\infty} [\dot{x}(t)]^2 = 0$. При этом из третьего уравнения системы (2) вытекает существование $T > 0$, для которого $z(T) = 0$.

Из приведенных рассуждений следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Для любого решения $(x(t), y(t), z(t))$ системы (2), отличного от её аналитического решения, функция $z(t)$ бесконечное число раз меняет знак при $t \to +\infty$.*

С использованием леммы 1 в работе [18] для системы Носе-Хувера доказана теорема, утверждение которой, как можно убедиться, остается справедливым и для системы (2).

Теорема. *Для системы (2) существует число $r(a)$ такое, что любая её траектория с начальными данными $x(0)^2 + y(0)^2 > 0$ имеет предельную точку в множестве $\{x, y, z : z = 0, x^2 + y^2 \leq r(a)\}$.*

Так как система (2) не имеет состояний равновесия, то из приведенных рассуждений вытекает, что в поглощающем множестве $\Omega = \{x, y, z : x^2 + y^2 \leq r(a)\}$ может содержаться аттрактор этой системы, заведомо отличный от ее аналитического решения. Бассейном притяжения этого аттрактора являются почти всё пространство R^3. Действительно, численное интегрирование

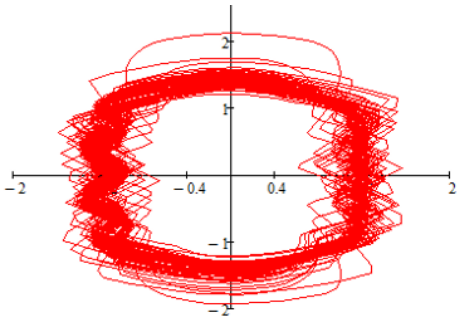


Рис. 1: Проекция аттрактора системы (2) на плоскость (x, y).

системы (2) с $a = 2$ и начальными условиями $(0, 2, 0)$ визуализирует хаотический аттрактор, представленный на рисунке 1.

Показатели Ляпунова этого аттрактора $\Lambda_1 = 0.3270, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = -0.3580$ и размерность Каплана — Йорке $D_{KY} = 2 + \frac{\Lambda_1+\Lambda_2}{|\Lambda_3|} = 2.9134$.

3. Конструирование системы с 2-D полосой хаотических аттракторов

Заметим, что система (2) является смещаемой по переменной y (variable-boostable system [12]). Последнее обстоятельство позволяет сконструировать самовоспроизводящуюся систему, обладающую 1-D полосой идентичных аттракторов, путем подходящей замены переменной y на периодическую функцию этой переменной [12-15]. Произведем в системе (2) замену $y \to \mathrm{tg}(y)$. Система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathrm{tg}(y), \\ \dot{y} &= -x - \mathrm{arctg}(50z)\,\mathrm{tg}(y), \\ \dot{z} &= (\mathrm{tg}(y))^4 - \frac{a}{1+x^8}. \end{aligned} \tag{4}$$

обладает 1-D полосой хаотических аттракторов, фрагмент которой представлен на рисунке 2 ($a = 2$). Аттракторы на рисунке 2 имеют показатели Ляпунова $(1.326, 0, -1.329)$ и размерность Каплана-Йорке 2.998.

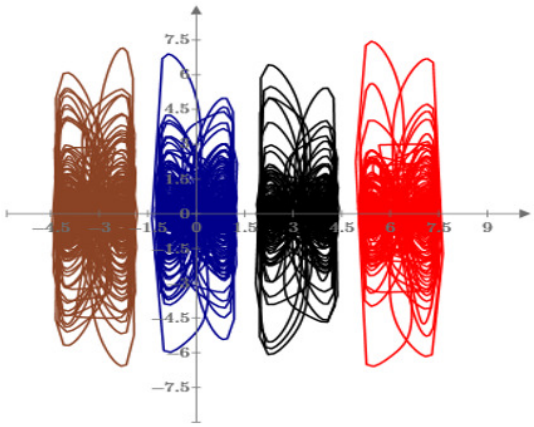


Рис. 2: 1-D полоса аттракторов системы (4) (проекция на плоскость (y, z)).

Любая точка пространства R^3 , кроме точек, прямых $L_k = \{x, y, z : x = 0, y = \pi k, z \in (-\infty; +\infty), k \in Z\}$, принадлежит бассейну притяжения одного из аттракторов, представленных на рисунке 2. Заметим, что система (4) при $a = 2$ имеет бесконечное число аналитических решений $x = 0, y = \pi k, z = z(0) - 2t, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. При этом численным интегрированием, например, методом Рунге-Кутта с адаптированным шагом, удается обнаружить только решение $x(t) = 0, y(t) = 0, z(t) = z(0) - 2t$. При численном интегрировании системы (4) с начальным условием $(0, \pi, 2)$ вместо решения $x(t) = 0, y(t) = \pi, z(t) = 2 - 2t$ после достаточно длительного переходного процесса визуализируется такой же аттрактор, как и при численном интегрировании с начальными условиями $(-0.87, 2.91, -1.26)$. График переходного процесса при численном интегрировании с начальным условием $(0, \pi, 2)$ на промежутке $[0, 160\pi]$ представлен на рисунке 3. Продолжая процесс численного интегрирования, визуализируем хаотический аттрактор.

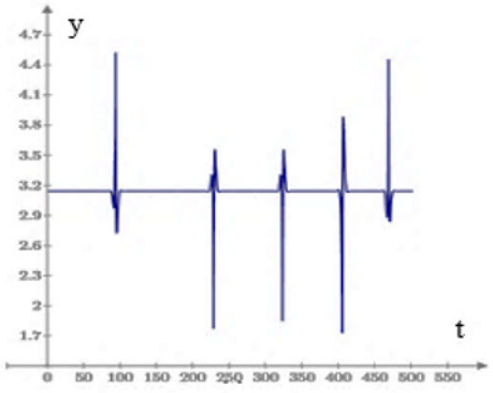


Рис. 3: График переходного процесса при численном интегрировании системы (4) с начальным условием $(0, \pi, 2)$.

Для построения системы, обладающей 2-D полосой хаотических аттракторов, воспользуемся приемом, предложенным в работе [10]. Для этого заметим, что на решении $(x(t), y(t), z(t))$ системы (4) при $a = 2$, принадлежащем любому аттрактору, справедлива оценка $|z(t)| < 10$. Поэтому можно выполнить такое преобразование системы (4), которое одновременно сдвигает все ее аттракторы в полуплоскость $\{x, y, z : z > 0\}$, и генерирует их копию, симметричную относительно плоскости $\{x, y, z : z = 0\}$. В результате получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathrm{tg}(y), \\ \dot{y} &= -x - \mathrm{arctg}(|50z| - 10)\,\mathrm{tg}(y), \\ \dot{z} &= ((\mathrm{tg}(y))^4 - \frac{a}{1 + x^8})\,\mathrm{sign}(z). \end{aligned} \tag{5}$$

Фрагмент 2-D полосы аттракторов системы (5) представлен на рисунке 4.

4. Заключение

В работе построена гладкая трехмерная обратимая система, обладающая аналитическим решением и мультифрактальным хаотическим аттрактором. Бассейн притяжения аттрактора содержит почти все точки фазового пространства, а его размерность Каплана-Йорке близка к 3. На основе этой системы строятся мегастабильная система, обладающая счетным числом хаотических аттракторов и аналитических решений, из которых только одно удается обнаружить численным интегрированием. Благодаря наличию в системе (5) нелинейности $\mathrm{sign}(z)$,

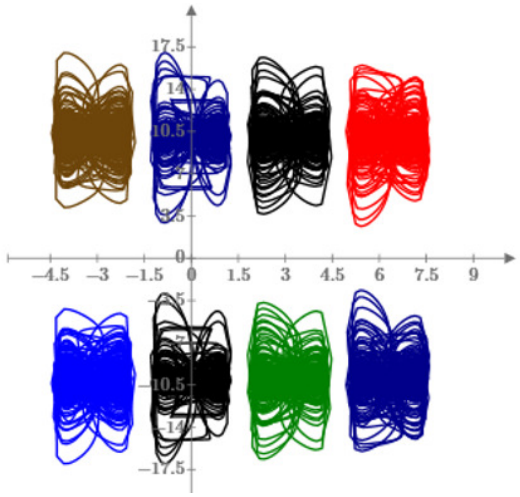


Рис. 4: 2-D полоса аттракторов системы (5) (проекция на плоскость (y, z)).

плоскость $\{x, y, z : z = 0\}$ инвариантна для траекторий этой системы и разделяет области притяжения ее аттракторов, расположенных в полуплоскостях $z > 0$ и $z < 0$. Динамика системы (5) в плоскости $\{x, y, z : z = 0\}$ описывается первыми двумя её уравнениями. Бассейны притяжения аттракторов системы (5) имеют достаточно сложную структуру. Последнее обстоятельство делает потенциально интересным ее использование в инженерных приложениях на основе хаоса, например, для шифрования изображений [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rossler O., Adryaman Y., Shaukat S. and all. Chaos Theory and Applications in applied sciences and engineering // An interdisciplinary journal of nonlinear science. 2020. Vol. 2, №1.

2. Pisarchik A. N., Feudel U. Control of multistability // Phys. Rep. 2014. Vol. 540. P. 167–218.

3. Leonov G., Kuznetsov N. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2013. Vol. 23, №1. art. no. 1330002.

4. Burkin I., Nguen N. K. Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dy-namical Systems // Diff. Equations. 2014. Vol. 50, №13. P. 1695–1717.

5. Wei Z., Zhang W. Hidden Hyperchaotic Attractors in a Modified Lorenz-Stenflo System with Only One Stable Equilibrium // Int. J. Bifurcation Chaos. 2014. Vol. 24, №10. art. no. 1450127.

6. Guanrong C. Chaos Theory and Applications: A New Trend // Chaos Theory and Applications. 2021. Vol. 3, №1. P. 1-2.

7. Буркин И. М. Скрытые аттракторы некоторых мультистабильных систем с бесконечным числом состояний равновесия // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, Вып. 2. С. 18–33.

8. Pham V-T., Volos C., Jafari S., Wei Z., Wang X. Constructing a novel no-equilibrium chaotic system. //Int. J. Bifurcation Chaos.2014. Vol. 24, № 5. Art. no. 1450073.

9. Faghani Z. Nazarimehr F., Jafari S,. Sprott J.C. Simple Chaotic Systems with Specific Analytical Solutions // Int. J. Bifurcation Chaos. 2019. Vol. 29, №9. art. no. 1950116.

10. Li C., Lu T., Chen G., Xing H. Doubling the coexisting attractors // Chaos. 2019. Vol. 29. Art. no.051102.

11. Zhang X., Chen G. Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors // Chaos. 2017. Vol. 27, №7. Art. no. 071101.

12. Li C., Sprott J. C., Hu W., Xu Y. Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system //Int J Bifurc. Chaos. 2017. Vol. 27(10). Art. no. 1750160.

13. Буркин И. М., Кузнецова О. И.. Конструирование мегастабильных систем с многомерной решеткой хаотических аттракторов // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, Вып. 1, С. 105–117.

14. Burkin I. M., Kuznetsova O. I. On some methods for generating extremely multistable systems // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. 1368: 042050.

15. Burkin I. M., Kuznetsova O. I. Generation of Extremely Multistable Systems Based on Lurie Systems // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2019. Vol. 52, №4. P. 342–348.

16. Sprott J. Do We Need More Chaos Examples // Chaos Theory and Applications. 2020. Vol. 2, №2. P. 1–3.

17. Sprott J., Hoover W., Hoover C. Heat Condition, and the Lack Thereof, in Time-Reversible Dynamical Systems: Generalized Nos'e-Hoover Oscillators with a Temperature Gradient // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89. 042914.

18. Leonov G. A. Analytical analysis of a Nose–Hoover generator // Dokl. Phys. 2016. Vol. 6. P. 340–342.

REFERENCES

1. Rossler, O., Adryaman Y., Shaukat S. & all. 2020, "Chaos Theory and Applications in applied sciences and engineering", *An interdisciplinary journal of nonlinear science*, vol. 2, no. 1.

2. Pisarchik, A. N. & Feudel, U. 2014, "Control of multistability", *Phys. Rep.*, vol. 540. pp. 167-218.

3. Leonov, G. A. & Kuznetsov, N. V. 2013, "Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 23, no. 1. art. no. 1330002.

4. Burkin, I. & Nguen, N. K. 2014, "Analytical-Numerical Methods of Finding Hidden Oscillations in Multidimensional Dy-namical Systems", *Diff. Equations*, vol. 50, no. 13, pp. 1695–1717.

5. Wei, Z. & Zhang, W. 2014, "Hidden Hyperchaotic Attractors in a Modified Lorenz-Stenflo System with Only One Stable Equilibrium", *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 24, no. 10. art. no. 1450127.

6. Guanrong, C. 2021, "Chaos Theory and Applications: A New Trend", *Chaos Theory and Application*, vol. 3, no. 1, pp. 1–2.

7. Burkin, I. M. 2017, "Hidden attractors of some multistable systems with infinite number of equilibria", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 18, no. 2, pp. 18–33.

8. Pham, V-T., Volos, C., Jafari, S., Wei, Z. & Wang, X. 2014, "Constructing a novel no-equilibrium chaotic system", *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 24, no. 5, art. no. 1450073.

9. Faghani, Z., Nazarimehr, F., Jafari, S. & Sprott J. C. 2019, "Simple Chaotic Systems with Specific Analytical Solutions", *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 29, no. 9, art. no. 1950116.

10. Li, C., Lu, T., Chen, G. & Xing, H. 2019, "Doubling the coexisting attractors", *Chaos*, vol. 29, art. no. 051102.

11. Zhang, X. & Chen, G. 2017, "Constructing an autonomous system with infinitely many chaotic attractors", *Chaos*, vol. 27, no. 7, art. no. 071101.

12. Li, C., Sprott, J. C., Hu, W. & Xu, Y. 2017, "Infinite multistability in a self-reproducing chaotic system", *Int J Bifurc. Chaos*, vol. 27(10), art. no. 1750160.

13. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2021, "Designing megastable systems with multidimensional lattice of chaotic attractors ", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 1, pp. 105–117.

14. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2109, "On some methods for generating extremely multistable systems", *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1368 042050.

15. Burkin, I. M. & Kuznetsova, O. I. 2019, "Generation of Extremely Multistable Systems Based on Lurie Systems", *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, vol. 52, no. 4, pp. 342–348.

16. Sprott, J. C., 2020, "Do We Need More Chaos Examples", *Chaos Theory and Applications*, vol. 2, no. 2, pp. 1–3.

17. Sprott, J. C., Hoover, W. & Hoover, C. 2014, "Heat Condition, and the Lack Thereof, in Time-Reversible Dynamical Systems: Generalized Nos'e-Hoover Oscillators with a Temperature Gradient", *Phys. Rev. E.*, vol. 89, 042914

18. Leonov, G. A. 2016, "Analytical analysis of a Nose–Hoover generator", *Dokl. Phys.*, vol. 6, pp. 340–342.

Получено 26.07.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 4.

УДК 539.3: 517.958 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-369-383

Математические определяющие уравнения деформирования материалов с двойной анизотропией

А. А. Трещев, Ю. А. Завьялова, М. А. Лапшина, А. Е. Гвоздев,
О. В. Кузовлева, Е. С. Крупицын

Трещев Александр Анатольевич — член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: taa58@yandex.ru
Завьялова Юлия Андреевна — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: zavyalova_yuliya95@mail.ru
Лапшина Мария Александровна — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: mary51296@yandex.ru
Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Кузовлева Ольга Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

Анализируются механические свойства широко распространенных в технике композитных и полимерных материалов. Подтверждено, что абсолютное большинство из них обладают структурной анизотропией разного класса. Кроме того, показано, что эти конструкционные материалы зачастую проявляют чувствительность деформационных характеристик к виду напряженного состояния. Ввиду того, что классические математические модели, описывающие состояния подобных материалов, приводят к грубым ошибкам при расчете элементов конструкций, а известные, специально разработанные для них теории достаточно противоречивы и имеют существенные недостатки, авторами предлагается энергетическая модель определяющих соотношений для сред, имеющих структурную и деформационную анизотропии. Эта модель основана на использовании нормированного тензорного пространства напряжений, которое обладает несомненным преимуществом по сравнению с сингулярными функциями и параметрами, имеющими бесконечный интервал изменения, которые используются в известных вариантах теорий деформирования материалов с двойной анизотропией. В качестве конкретного класса структурной анизотропии приняты ортотропные материалы, для которых постулируется потенциал деформаций, определенный в главных структурных осях. Дифференцированием сформулированного потенциала согласно рекомендация правил Кастильяно установлены уравнения связи двух тензоров второго ранга – деформаций и напряжений. Показано, что эти уравнения имеют нелинейный вид, что усугубляет проблему единственности решений краевых

задач. Для идентификации полученной модели определяющих уравнений рекомендована программа экспериментов, включающая в себя механические испытания на одноосные растяжение и сжатие вдоль главных осей анизотропии материала, а также – на чистый сдвиг в трех плоскостях ортотропии. Приведены основные технические константы ряда широко используемых в технике композитных и полимерных материалов. На основе использования постулата о положительной определенности энергетической поверхности проверена непротиворечивость предложенного потенциала деформаций. С использованием этой проверки доказана теорема единственности решения краевых задач механики деформируемого твердого тела. Принимая во внимание правила преобразования компонентов тензоров второго ранга при повороте осей выбранной системы координат, показано, что напряжения, вычисленные в главных осях ортотропии, пересчитываются в новой системе по традиционным формулам.

Ключевые слова: деформационная анизотропия, структурная ортотропия, потенциал деформаций, тензоры второго ранга, теорема единственности, постулат Друккера, главные оси ортотропии.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
А. А. Трещев, Ю. А. Завьялова, М. А. Лапшина, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева, Е.С. Крупицын. Математические определяющие уравнения деформирования материалов с двойной анизотропией // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 4, с. 369–383.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 4.

UDC 539.3: 517.958 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-369-383

Defining equations of deformation of materials with double anisotropy

A. A. Treschev, Yu. A. Zavyalova, M. A. Lapshina, A. E. Gvozdev,
O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn

Treschev Alexander Anatolyevich — corresponding member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, doctor of technical sciences, professor, Tula State University (Tula).
e-mail: taa58@yandex.ru
Zavyalova Yulia Andreevna — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: zavyalova_ yuliya95@mail.ru
Lapshina Maria Alexandrovna — postgraduate student, Tula State University (Tula).
e-mail: mary51296@yandex.ru
Gvozdev Alexander Evgenievich — doctor of engineering, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula) (Tula).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Kuzovleva Olga Vladimirovna — candidate of technical sciences, docent, Russian State University of Justice (Moscow).
e-mail: kusovleva@yandex.ru
Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

The mechanical properties of composite and polymer materials widely used in engineering are analyzed. It is confirmed that the absolute majority of them have structural anisotropy of different classes. In addition, it is shown that these structural materials often exhibit a sensitivity of the deformation characteristics to the type of stress state. Due to the fact that classical mathematical models describing the states of such materials lead to gross errors in the calculation of structural elements, and the well-known, specially developed theories for them are quite contradictory and have significant drawbacks, the authors propose an energy model of the determining relations for media with structural and deformation anisotropies. This model is based on the use of the normalized stress tensor space, which has an undoubted advantage over the singular functions and parameters having an infinite interval of change, which are used in the known versions of the theories of deformation of materials with double anisotropy. As a specific class of structural anisotropy, orthotropic materials are accepted, for which the strain potential defined in the main structural axes is postulated. By differentiating the formulated potential according to the recommendations of the Castigliano rules, the equations of connection of two tensors of the second rank - strains and stresses - are established. It is shown that these equations have a nonlinear form, which aggravates the problem of uniqueness of solutions to boundary value problems. To identify the resulting model of the defining equations, we recommend an experimental program that includes mechanical tests for uniaxial tension and compression along the main axes of the anisotropy of the material, as well as for a net shift in the three planes of orthotropy. The main technical constants of a number of composite and polymer materials widely used in engineering are given. On the basis of the use of the postulate about the positive certainty of the energy surface, the consistency of the proposed strain potential is verified. Using this test, we prove the uniqueness theorem for solving boundary value problems in the mechanics of a deformable solid. Taking into account the rules of transformation of the components of the second-rank tensors when the axes of the selected coordinate system are rotated, it is shown that the stresses calculated in the main axes of orthotropy are recalculated in the new system according to traditional formulas.

Keywords: deformation anisotropy, structural orthotropy, strain potential, second-rank tensors, uniqueness theorem, Drucker postulate, principal axes of orthotropy.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
A. A. Treschev, Yu. A. Zavyalova, M. A. Lapshina, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn, 2021, "Defining equations of deformation of materials with double anisotropy", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 4, pp. 369–383.

1. Введение

Механические испытания образцов графитовых композитов, боропластиков, стеклопластиков, поликарбоната и других подобных по структуре материалов с направленным или хаотическим армированием подтверждают наличие у них анизотропии жесткостных и прочностных свойств. Кроме того, в этих экспериментах обнаружено явное несовпадение диаграмм деформирования при растяжении и сжатии по одноименным осям [1–10]. Отмеченный фактор заметно сложней, чем не простое несовпадение диаграмм при одних только одноосных растяжениях и сжатиях по главным осям анизотропии материала. Такое поведение материалов особо проявляется при плоских и объемных напряженных состояниях. В инженерной технике преимущественно используются материалы по классу анизотропии относящемуся к ортотропии. Давно известно, что традиционно российский строительный материал, каковым является древесина, которая также широко используется в Канаде и Финляндии, обладает свойствами цилиндрической ортотропии. Конструкционные композиты и материалы с армированием имеют высокие показатели прочности и жесткости, но наряду с структурными усложнениями,

приводят к проявлению чувствительности физико-механических характеристик к виду напряженного состояния, а это не укладывается в традиционные устои классической механики деформируемых сред. Теоретико-экспериментальных исследований по механике анизотропных материалов, обладающих различными диаграммами деформирования при изменении вида напряженного состояния, проведено достаточно мало. Это обусловлено сложностью проблемы. Здесь представляем вариант деформационной модели, применяемого к указанному классу материалов, доказана теорема единственности решений краевых задач МДТТ с определением ограничений на константы потенциала деформаций. Предложенный вариант уравнений состояния не имеет внутренних противоречий и может широко применяться к расчетам конструкций любого назначения многие годы.

2. Основная часть

При постулировании определяющих уравнений и, прежде всего, нелинейных, несомненным преимуществом обладают энергетические потенциальные функции деформаций или напряжений, что продемонстрировано в работах [7, 11].

3. Потенциал деформаций. Уравнения состояния

В материалах работы [1] наряду с другими проблемами проведен анализ имеющихся экспериментальных сведений о механических испытаниях композитов со структурной и деформационной анизотропией [2–10]. Отмечено, что общие зависимости «напряжения – деформации» для этих материалов носят нелинейный характер с нелинейностью различного типа. Основываясь на экспериментальных данных [1–10] предлагается провести построение потенциала деформаций для структурно ортотропных материалов, ограничившись квазиквадратичным разложением функции по характерным для данного класса анизотропии, как это обосновано в работе [11]. В случае ортотропного деформируемого тела потенциал деформаций должен быть представлен функцией:

$$W = W(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}\tau_{21}, \tau_{23}\tau_{32}, \tau_{31}\tau_{13}, \tau_{12}\tau_{23}\tau_{31}), \tag{1}$$

где $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ — нормальные и касательные напряжения в главных осях ортотропии материала, комбинация которых учтена по правилам [11].

В полиномиальном разложении (1) опорные коэффициенты определяются в зависимости от механических свойств материалов, определяемых видом напряженного состояния и вычисляемых из эталонных экспериментов. При квадратичном разложении (1), имеем:

$$W = C_1\sigma_{11}^2 + C_2\sigma_{22}^2 + C_3\sigma_{33}^2 + C_4\sigma_{11}\sigma_{22} + C_5\sigma_{22}\sigma_{33} + C_6\sigma_{33}\sigma_{11} + C_7\tau_{12}\tau_{21} + C_8\tau_{23}\tau_{32} + C_9\tau_{31}\tau_{13}. \tag{2}$$

Если учесть наличие у материалов деформационной анизотропии, то, как предложено в работах [12–14], константы необходимо заменить на функции, зависящие от нормированных напряжений, определенных в главных материальных осях $C_k = C_k(\alpha_{ij})$, где нормированные напряжения определены по указаниям публикаций [12–14] в тензорной форме:

$$\alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{S}; \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{3}$$

где норма тензорного пространства определена в соответствии с указаниями работ [12–14]:

$$S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\tau_{12}^2 + 2\tau_{23}^2 + 2\tau_{13}^2}. \tag{4}$$

Напряжения в нормированном тензорном пространстве связаны условием нормирования [1, 12–14]:

$$\alpha_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{23}^2 + 2\alpha_{13}^2 = 1. \tag{5}$$

С учетом представления констант в виде функций от нормированных напряжений, потенциал (2) расписывается в более подробном виде:

$$\begin{gathered} W = 0,5(A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11}^2 + 0,5(A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22}^2 + \\ +0,5(A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33}^2 + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11}\sigma_{22} + \\ +[A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22}\sigma_{33} + [A_{3311} + B_{3311}(\alpha_{33} + \alpha_{11})]\sigma_{33}\sigma_{11} + \\ +0,5(A_{1212}\tau_{12}^2 + A_{2323}\tau_{23}^2 + A_{3131}\tau_{31}^2). \end{gathered} \tag{6}$$

Нелинейные зависимости между тензорами деформаций и напряжений, имеющие второй ранг, для материалов с двойной анизотропией, рекомендуется определить в главных материальных осях ортотропии, продифференцировав потенциал (2), (6), как предлагал Кастильяно:

$$e_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}}; \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Проведенный в работе [1] анализ, показал, что при учете полной физической нелинейности связей деформаций с напряжениями возникает чрезвычайно большое количество констант, подлежащих экспериментальному определению, что затрудняет их вычисление в полном объеме, когда требуется проведение опытов по сложным напряженным состояниям. Эти эксперименты с необходимостью включают реализацию различных двухосных, трехосных растяжения-сжатия, опыты одновременного сдвига минимум в двух взаимно ортогональных плоскостях ортотропии и испытания по сдвигу при растяжение-сжатии вдоль двух осей. Подобные эксперименты подразумевают наличие уникального экспериментально-специализированного оборудования, которое сложно найти, а во многих случаях, оно просто не существует, а сведения о данных подобных экспериментов в международной литературе отсутствуют. Поэтому для обеспечения необходимой точности деформационно-прочностных расчетов при полной идентификации модели ее представляем квазиквадратичным разложением (6).

Продифференцировав потенциал (6) по правилам (7), получим уравнения состояния структурно ортотропных материалов, проявляющих деформационную анизотропию:

$$\begin{gathered} e_{11} = \{(A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}) + 0,5[B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2) - D_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - \\ -B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{22}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) - \\ -B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})\}\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\ e_{22} = [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + \{(A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}) + 0,5[B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - \\ -B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + \\ +B_{2233}\alpha_{33}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})\}\sigma_{22} + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\ e_{33} = [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22} + \{(A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33}) + \\ +0,5[B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + \\ +B_{1133}\alpha_{11}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{22}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1122}\alpha_{11} + \alpha_{22})\}\sigma_{33}; \\ \gamma_{12} = \{A_{1212} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - 2[B_{1122}\alpha 11\alpha 22(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \\ +B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\}\tau_{12}; \\ \gamma_{23} = \{A_{2323} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3) + B_{3333}\alpha_{33}^3 - 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \\ +B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\}\tau_{23}; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\gamma_{13} = \{A_{1313} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22}) + \\ + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})] + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})\}\tau_{13}.$$

Вид уравнений связи тензора деформаций и напряжений (8) имеет каноническую форму, традиционную для классических соотношений [11] при следующих ненулевых компонентах податливостей C_{ijkm} для материала класса ортотропных: $C_{1111}; C_{2222}; C_{3333}; C_{1313}; C_{2323}; C_{1212}; C_{1122} = C_{2211}; C_{1133} = C_{3311}; C_{2233} = C_{3322}$.

4. Идентификация модели. Теорема единственности решения

Идентификация модели заключается в определении констант потенциала деформаций (6), которые вычисляются по результатам проведенных механических испытаний эталонных образцов материала, вырезанных с соблюдением соосности главным материальным направлениям ортотропии. Проведение экспериментов на одноосные растяжение и сжатие вдоль указанных трех главных осей ортотропии позволяют установить относительные деформации и вычислить нормальные напряжения, а по их соотношениям – определить модули упругости $E_k^{\pm}$ и коэффициенты поперечных деформаций $\nu_{ij}^{\pm}$ (знак «плюс» соответствует испытаниям на растяжение, а «минус» – на сжатие). Эксперименты на сдвиг в главных плоскостях ортотропии дают сведения о модулях сдвига в трех главных материальных плоскостях ортотропии G_{ij}. Таким образом, опыты на одноосные растяжение и сжатие по оси ортотропии x_1, с учетом уравнений (8) приводят к следующим зависимостям:

$$\begin{gathered} 1/E_1^+ = A_{1111} + B_{1111}; \quad 1/E_1^- = A_{1111} - B_{1111}; \\ -\nu_{21}^+ = (A_{1122} + B_{1122})/(A_{1111} + B_{1111}); \\ -\nu_{31}^+ = (A_{1133} + B_{1133})/(A_{1111} + B_{1111}); \\ -\nu_{21}^- = (A_{1122} - B_{1122})/(A_{1111} - B_{1111}); \\ -\nu_{31}^- = (A_{1133} - B_{1133})/(A_{1111} - B_{1111}), \end{gathered} \tag{9}$$

по оси ортотропии x_2:

$$\begin{gathered} 1/E_2^+ = A_{2222} + B_{2222}; \quad 1/E_2^- = A_{2222} - B_{2222}; \\ -\nu_{12}^+ = (A_{1122} + B_{1122})/(A_{2222} + B_{2222}); \\ -\nu_{32}^+ = (A_{2233} + B_{2233})/(A_{2222} + B_{2222}); \\ -\nu_{12}^- = (A_{1122} - B_{1122})/(A_{2222} - B_{2222}); \\ -\nu_{32}^- = (A_{2233} - B_{2233})/(A_{2222} - B_{2222}); \end{gathered} \tag{10}$$

по оси ортотропии x_3:

$$\begin{gathered} 1/E_3^+ = A_{3333} + B_{3333}; \quad 1/E_3^- = A_{3333} - B_{3333}; \\ -\nu_{13}^+ = (A_{1133} + B_{1133})/(A_{3333} + B_{3333}); \\ -\nu_{23}^+ = (A_{2233} + B_{2233})/(A_{3333} + B_{3333}); \\ -\nu_{13}^- = (A_{1133} - B_{1133})/(A_{3333} - B_{3333}); \\ -\nu_{32}^- = (A_{2233} - B_{2233})/(A_{3333} - B_{3333}); \end{gathered} \tag{11}$$

Чистый сдвиг в главных плоскостях из уравнений (8) приводит к значениям следующих констант:

$$1/G_{12} = A_{1212}; \quad 1/G_{23} = A_{2323}; \quad 1/G_{13} = A_{1313} \tag{12}$$

Окончательно уравнения (9)–(12) устанавливают значения констант потенциала (6), выраженные через технические характеристики:

$$A_{\hbar\hbar\hbar\hbar} = (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2; \quad B_{\hbar\hbar\hbar\hbar} = (1/E_k^+ - 1/E_k^-)/2;$$
$$A_{ijij} = 1/G_{ij}; \quad A_{iijj} = -(\nu_{ij}^+/E_j^+ + \nu_{ij}^-/E_j^-)/2;$$
$$B_{iijj} = -(\nu_{ij}^+/E_j^+ - \nu_{ij}^-/E_j^-)/2; \quad \nu_{ij}^+/E_j^+ = \nu_{ji}^+/E_i^+;$$
$$\nu_{ij}^-/E_j^- = \nu_{ij}^-/E_j^-; \quad i,j,k = 1,2,3. \tag{13}$$

Формулировка новых моделей деформирования материалов, проявляющих нелинейные физические свойства, требует решения проблемы обеспечения единственности решений краевых задач, которая вытекает из закона сохранения энергии. Данная проблема распадается на две, первая, из которых связана с устойчивостью потенциала деформаций в малом согласно постулату Друккера [15, 16]:

$$\delta e_{ij}\delta\sigma_{ij} = \frac{\delta^2 W}{\delta\sigma_{km}\delta\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} \geqslant 0. \tag{14}$$

Раскрытие постулата Друккера (14) обеспечивает положительность квадратичной формы, что соответствует выпуклой энергетической поверхности потенциала (6) и устанавливает ограничения на его константы. Расписывая вариации (14) получаем квадратичную форму от компонентов тензора напряжений, определенных в главных осях ортотропии материала. Эта квадратичная форма приводит к неравенству:

$$C_{ij}\delta\zeta_i\delta\zeta_i \geqslant 0; \quad (i,j = 1,2,\ldots,6), \tag{15}$$

где $\zeta_1 = \sigma_{11}; \zeta_2 = \sigma_{22}; \zeta_3 = \sigma_{33}; \zeta_4 = \tau_{13}; \zeta_5 = \tau_{23}; \zeta_6 = \tau_{12}$ — параметры разложения симметричной матрицы с компонентами:

$$C_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{11}^2} = A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11} + 0,5[B_{1111}\alpha_{11}(1-\alpha_{11}^2) - B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 -$$
$$-B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{22}(1-\alpha_{11}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(1-\alpha_{11}^2-\alpha_{11}\alpha_{33}) -$$
$$-B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33}) + \alpha_{11}\{(1-\alpha_{11}^2)[B_{1111} + 0,5B_{1111}(1-3\alpha_{11}^2) - B_{1122}\alpha_{22}(2\alpha_{11}+\alpha_{22}) -$$
$$-B_{1133}\alpha_{33}(2\alpha_{11}+\alpha_{33})] + 1,5\alpha_{11}(B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3) -$$
$$-\alpha_{11}[B_{1122}\alpha_{22}(1-\alpha_{11}^2-2\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(1-\alpha_{11}^2-2\alpha_{11}\alpha_{33}) - 3B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})]\} +$$
$$+B_{1122}\alpha_{22}(1-\alpha_{11}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(1-\alpha_{11}^2-\alpha_{11}\alpha_{33}); \tag{16}$$

$$C_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{11}\partial\sigma_{22}} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{22}\partial\sigma_{11}} = A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11}+\alpha_{22}) + B_{1122}\alpha_{22}(1-\alpha_{22}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}) -$$
$$-B_{1133}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33}) - \alpha_{11}\{1,5B_{1111}\alpha_{11}\alpha_{22}(1-\alpha_{11}^2) + 1,5\alpha_{22}[B_{2222}\alpha_{22}(1-\alpha_{22}^2) -$$
$$-B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}[(1-\alpha_{22}^2)(1-\alpha_{11}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}) -$$
$$-\alpha_{11}\alpha_{22}(1-2\alpha_{22}^2-2\alpha_{11}\alpha_{22})] - B_{1133}\alpha_{22}\alpha_{33}(1-3\alpha_{11}^2-3\alpha_{11}\alpha_{33}) -$$
$$-B_{2233}\alpha_{33}[(\alpha_{22}+\alpha_{33})(1-2\alpha_{22}^2) + \alpha_{22}(1-\alpha_{22}^2-\alpha_{22}\alpha_{33})]\};$$

$$C_{13} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{11}\partial\sigma_{33}} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{33}\partial\sigma_{11}} = A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11}+\alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2-\alpha_{11}\alpha_{33}) -$$
$$-B_{1122}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{22}) - \alpha_{11}\{1,5B_{1111}\alpha_{11}\alpha_{33}(1-\alpha_{11}^2) + 1,5\alpha_{33}[B_{3333}\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2) - B_{2222}\alpha_{22}^3 -$$
$$-B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1133}[(1-\alpha_{33}^2)(1-\alpha_{11}^2-\alpha_{11}\alpha_{33}) - \alpha_{11}\alpha_{33}(1-2\alpha_{33}^2 -$$

$$-2\alpha_{11}\alpha_{33})] - B_{1122}\alpha_{22}\alpha_{33}(1-3\alpha_{11}^2-3\alpha_{11}\alpha_{22}) - B_{2233}\alpha_{22}[(\alpha_{22}+\alpha_{33})(1-2\alpha_{22}^2)+$$
$$+\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2-\alpha_{22}\alpha_{33})]\};$$

$$C_{14} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{11}\partial\tau_{13}} = \frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{13}\partial\sigma_{11}} = \alpha_{11}\alpha_{13}\{3[B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 -$$
$$-0,5B_{1313}\alpha_{13}(1-2\alpha_{13}^2) - B_{1111}\alpha_{11}(1-\alpha_{11}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{22}(1-3\alpha_{11}^2-3\alpha_{11}\alpha_{22})+ \qquad (16)$$
$$+B_{1133}\alpha_{33}(1-3\alpha_{11}^2-3\alpha_{11}\alpha_{33})] + 6B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})\} -$$
$$-2\alpha_{13}[B_{1122}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})];$$

$$C_{15} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{11}\partial\tau_{23}} = \frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{23}\partial\sigma_{11}} = \alpha_{11}\alpha_{23}\{3[B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3 -$$
$$-0,5B_{2323}\alpha_{23}(1-2\alpha_{23}^2) - B_{1111}\alpha_{11}(1-\alpha_{11}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{22}(1-3\alpha_{11}^2-3\alpha_{11}\alpha_{22})+$$
$$+B_{1133}\alpha_{33}(1-3\alpha_{11}^2-3\alpha_{11}\alpha_{33})] + 6B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})\} -$$
$$-2\alpha_{23}[B_{1122}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})];$$

$$C_{16} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{11}\partial\tau_{12}} = \frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{12}\partial\sigma_{11}} = \alpha_{11}\alpha_{12}\{3[B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 -$$
$$-0,5B_{1212}\alpha_{12}(1-2\alpha_{12}^2) - B_{1111}\alpha_{11}(1-\alpha_{11}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{22}(1-3\alpha_{11}^2-3\alpha_{11}\alpha_{22})+$$
$$+B_{1133}\alpha_{33}(1-3\alpha_{11}^2-3\alpha_{11}\alpha_{33})] + 6B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})\} -$$
$$-2\alpha_{12}[B_{1122}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22}) + B_{1133}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})];$$

$$C_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{22}^2} = A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22} + 0,5[B_{2222}\alpha_{22}(1-\alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 -$$
$$-B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{11}(1-\alpha_{22}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{33}(1-\alpha_{22}^2-\alpha_{22}\alpha_{33}) -$$
$$-B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33}) + \alpha_{22}\{(1-\alpha_{22}^2)[B_{2222}+0,5B_{2222}(1-3\alpha_{22}^2) - B_{1122}\alpha_{11}(2\alpha_{22}+\alpha_{11}) -$$
$$-B_{1133}\alpha_{33}(2\alpha_{22}+\alpha_{33})] + 1,5\alpha_{22}(B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 + B_{1313}\alpha_{13}^3) -$$
$$-\alpha_{22}[B_{1122}\alpha_{11}(1-\alpha_{22}^2-2\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{33}(1-\alpha_{22}^2-2\alpha_{22}\alpha_{33}) - 3B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\} +$$
$$+B_{1122}\alpha_{11}(1-\alpha_{22}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{33}(1-\alpha_{22}^2-\alpha_{22}\alpha_{33});$$

$$C_{23} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{22}\partial\sigma_{33}} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{33}\partial\sigma_{22}} = A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22}+\alpha_{33}) + B_{2233}\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2-\alpha_{22}\alpha_{33}) -$$
$$-B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{22}) - \alpha_{22}\{1,5B_{2222}\alpha_{22}\alpha_{33}(1-\alpha_{22}^2) + 1,5\alpha_{33}[B_{3333}\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2) -$$
$$-B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{2233}[(1-\alpha_{33}^2)(1-\alpha_{22}^2-\alpha_{22}\alpha_{33}) -$$
$$-\alpha_{22}\alpha_{33}(1-2\alpha_{33}^2-2\alpha_{22}\alpha_{33})] - B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{33}(1-3\alpha_{22}^2-3\alpha_{11}\alpha_{22}) -$$
$$-B_{1133}\alpha_{11}[(\alpha_{11}+\alpha_{33})(1-2\alpha_{33}^2) + \alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2-\alpha_{11}\alpha_{33})]\};$$

$$C_{24} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{22}\partial\tau_{13}} = \frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{13}\partial\sigma_{22}} = \alpha_{22}\alpha_{13}\{3[B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3 + B_{1212}\alpha_{12}^3 + B_{2323}\alpha_{23}^3 -$$
$$-0,5B_{1313}\alpha_{13}(1-2\alpha_{13}^2) - B_{2222}\alpha_{22}(1-\alpha_{22}^2)] - 2[B_{1122}\alpha_{11}(1-3\alpha_{22}^2-3\alpha_{11}\alpha_{22})+ \qquad (16)$$
$$+B_{2233}\alpha_{33}(1-3\alpha_{22}^2-3\alpha_{22}\alpha_{33})] + 6B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})\} -$$

$$-2\alpha_{13}[B_{1122}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+B_{1133}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})];$$

$$C_{25}=\frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{22}\partial\tau_{23}}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{23}\partial\sigma_{22}}=\alpha_{22}\alpha_{23}\{3[B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3+B_{1212}\alpha_{12}^3+B_{1313}\alpha_{13}^3-$$
$$-0,5B_{2323}\alpha_{23}(1-2\alpha_{23}^2)-B_{2222}\alpha_{22}(1-\alpha_{22}^2)]-2[B_{1122}\alpha_{11}(1-3\alpha_{22}^2-3\alpha_{11}\alpha_{22})+$$
$$+B_{2233}\alpha_{33}(1-3\alpha_{22}^2-3\alpha_{22}\alpha_{33})]+6B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})\}-$$
$$-2\alpha_{23}[B_{1122}\alpha_{11}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+B_{2233}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})];$$

$$C_{26}=\frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{22}\partial\tau_{12}}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{12}\partial\sigma_{22}}=\alpha_{22}\alpha_{12}\{3[B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3+B_{2323}\alpha_{23}^3+B_{1313}\alpha_{13}^3-$$
$$-0,5B_{1212}\alpha_{12}(1-2\alpha_{12}^2)-B_{2222}\alpha_{22}(1-\alpha_{22}^2)]-2[B_{1122}\alpha_{11}(1-3\alpha_{22}^2-3\alpha_{11}\alpha_{22})+$$
$$+B_{2233}\alpha_{33}(1-3\alpha_{22}^2-3\alpha_{22}\alpha_{33})]+6B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})\}-$$
$$-2\alpha_{12}[B_{1122}\alpha_{11}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+B_{2233}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})];$$

$$C_{33}=\frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{33}^2}=A_{3333}+B_{3333}\alpha_{33}+0,5[B_{3333}\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2)-B_{1111}\alpha_{11}^3-B_{2222}\alpha_{22}^3-B_{1212}\alpha_{12}^3-$$
$$-B_{2323}\alpha_{23}^3-B_{1313}\alpha_{13}^3]+B_{1133}\alpha_{11}(1-\alpha_{33}^2-\alpha_{11}\alpha_{33})+B_{2233}\alpha_{22}(1-\alpha_{33}^2-\alpha_{22}\alpha_{33})-$$
$$-B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+\alpha_{33}\{(1-\alpha_{33}^2)[B_{3333}+0,5B_{3333}(1-3\alpha_{33}^2)-B_{1133}\alpha_{11}(2\alpha_{33}+\alpha_{11})-$$
$$-B_{2233}\alpha_{22}(2\alpha_{33}+\alpha_{22})]+1,5\alpha_{33}(B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{1212}\alpha_{12}^3+B_{2323}\alpha_{23}^3+B_{1313}\alpha_{13}^3)-$$
$$-\alpha_{33}[B_{1133}\alpha_{11}(1-\alpha_{33}^2-2\alpha_{11}\alpha_{33})+B_{2233}\alpha_{22}(1-\alpha_{33}^2-2\alpha_{22}\alpha_{33})-3B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})]\}+$$
$$+B_{1133}\alpha_{11}(1-\alpha_{33}^2-\alpha_{11}\alpha_{33})+B_{2233}\alpha_{22}(1-\alpha33^2-\alpha_{22}\alpha_{33});$$

$$C_{34}=\frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{33}\partial\tau_{13}}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{13}\partial\sigma_{33}}=\alpha_{33}\alpha_{13}\{3[B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{1212}\alpha_{12}^3+B_{2323}\alpha_{23}^3-$$
$$-0,5B_{1313}\alpha_{13}(1-2\alpha_{13}^2)-B_{3333}\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2)-2[B_{1133}\alpha_{11}(1-3\alpha_{33}^2-3\alpha_{11}\alpha_{33})+ \qquad (16)$$
$$+B_{2233}\alpha_{22}(1-3\alpha_{33}^2-3\alpha_{22}\alpha_{33})]+6B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})\}-$$
$$-2\alpha_{13}[B_{1133}\alpha_{11}(\alpha_{11}+\alpha_{33})+B_{2233}\alpha_{22}(\alpha_{22}+\alpha_{33})];$$

$$C_{35}=\frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{33}\partial\tau_{23}}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{23}\partial\sigma_{33}}=\alpha_{33}\alpha_{23}\{3[B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{1212}\alpha_{12}^3+B_{1313}\alpha_{13}^3-$$
$$-0,5B_{2323}\alpha_{23}(1-2\alpha_{23}^2)-B_{3333}\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2)]-2[B_{1133}\alpha_{11}(1-3\alpha_{33}^2-3\alpha_{11}\alpha_{33})+$$
$$+B_{2233}\alpha_{22}(1-3\alpha_{33}^2-3\alpha_{22}\alpha_{33})]+6B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})\}-$$
$$-2\alpha_{23}[B_{1133}\alpha_{11}(\alpha_{11}+\alpha_{33})+B_{2233}\alpha_{22}(\alpha_{22}+\alpha_{33})];$$

$$C_{36}=\frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{33}\partial\tau_{12}}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{12}\partial\sigma_{33}}=\alpha_{33}\alpha_{12}\{3[B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{1313}\alpha_{13}^3+B_{2323}\alpha_{23}^3-$$
$$-0,5B_{1212}\alpha_{12}(1-2\alpha_{12}^2)-B_{3333}\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2)]-2[B_{1133}\alpha_{11}(1-3\alpha_{33}^2-3\alpha_{11}\alpha_{33})+$$
$$+B_{2233}\alpha_{22}(1-3\alpha_{33}^2-3\alpha_{22}\alpha_{33})]+6B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})\}-$$
$$-2\alpha_{12}[B_{1133}\alpha_{11}(\alpha_{11}+\alpha_{33})+B_{2233}\alpha_{22}(\alpha_{22}+\alpha_{33})];$$

$$C_{44}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{13}^2}=A_{1313}-\{B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3+2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+$$

$$+B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})+B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\}(1-6\alpha_{13}^2);$$

$$C_{45}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{13}\partial\tau_{23}}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{23}\partial\tau_{13}}=6\alpha_{13}\alpha_{23}\{B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3+$$
$$+2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})+B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\};$$

$$C_{46}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{13}\partial\tau_{12}}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{12}\partial\tau_{13}}=6\alpha_{12}\alpha_{13}\{B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3+$$
$$+2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha 11+\alpha_{22})+B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})+B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\};$$

$$C_{55}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{23}^2}=A_{2323}-\{B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3+ \tag{16}$$
$$+2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})+B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\}(1-6\alpha_{23}^2);$$

$$C_{56}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{23}\partial\tau_{12}}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{12}\partial\tau_{23}}=6\alpha_{12}\alpha_{23}\{B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3+$$
$$+2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})+B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\};$$

$$C_{66}=\frac{\partial^2 W}{\partial\tau_{12}^2}=A_{1212}-\{B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3+2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+$$
$$+B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})+B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\}(1-6\alpha_{12}^2).$$

Симметрия матрицы $[C]$ позволяет утверждать, что ее положительная определенность по критерию Сильвестра обеспечивается положительностью всех ее главных миноров:

$$C_{11}>0;\quad C_{22}>0;\quad \ldots;\quad C_{66}>0;$$
$$\det\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{12} & C_{22}\end{bmatrix}>0;\quad \det\begin{bmatrix} C_{11} & C_{13}\\ C_{13} & C_{33}\end{bmatrix}>0;\quad \det\begin{bmatrix} C_{22} & C_{23}\\ C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}>0;\quad \ldots; \tag{17}$$
$$\det\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{12} & C_{22} & C_{23}\\ C_{13} & C_{23} & \end{bmatrix}>0;\quad \ldots;\det[C_{pq}]>0,\quad (p,q=1,2,\ldots,6),$$

где $C_{pq}=\dfrac{\delta^2 W}{\delta\sigma_{km}\delta\sigma_{ij}}$; $p,q=1,2,\ldots,6$; $i,j,k,m=1,2,3$.

Вторая составная часть проблемы обеспечения единственности решений при наличии устойчивого потенциала деформаций в малом согласно постулату Друккера [15, 16] представляет собственно доказательство теоремы единственности. Для этого запишем полную систему уравнений механики для ортотропных деформационно анизотропных материалов. Уравнения статики имеют вид: $\sigma_{ij,j}+F_i=0$. Связь тензоров деформаций и напряжений определим по формулам Кастильяно (7): $e_{ij}=\partial W/\partial\sigma_{ij}$, которые в конечном виде представлены зависимостями (8). Останавливаясь на уровне геометрически линейной теории, приведем зависимости компонентов тензора деформаций от малых перемещений в соответствии с формулами Коши: $e_{ij}=0,5(u_{i,j}+u_{j,i})$.

Представим, что контурная поверхность объекта A образована двумя составляющими: $A=A_U+A_T$, а в некоторой точке с координатами x_i поверхности имеем:

$$u_i=u_i^*,\quad x_i\in A_U;\quad \sigma_{ij}n_j=T_i^*,\quad x_i\in A_T. \tag{18}$$

Допустим теперь, что одни и те же объемные силы при совпадении граничных условий принадлежат двум различным решениям $\sigma'_{ij}, e'_{ij}, u'_i$ и $\sigma''_{ij}, e''_{ij}, u''_i$. Одиночными и двойными штрихами обозначены состояния объекта бесконечно близкие. Очевидно, что при этом величины $\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$, $e_{ij} = e'_{ij} - e''_{ij}$, $u_i = u'_i - u''_i$ также бесконечно малы и удовлетворяют уравнениям равновесия при $F_i = 0$ и нулевых напряжениям на границах: $\sigma_{ij}n_j = 0$, $x_i \in A_T$; $u_i = 0$, $x_i \in A_U$. Ввиду того, что σ_{ij}, e_{ij} бесконечно малы и допуская обнуление величин второго и высших порядков малости, приходим к очевидным зависимостям:

$$e_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{km}\partial\sigma_{ij}}\sigma_{km}. \tag{19}$$

Примем, что в уравнениях равновесия объемные силы $F_i = 0$. Тогда умножение их на u_i и интегрирование по объему, приводят к уравнению:

$$\int\limits_V \sigma_{ij,j}u_i dV = \int\limits_V (\sigma_{ij}u_i)_{,j}\, dV - \int\limits_V \sigma_{ij}e_{ij}dV = 0. \tag{20}$$

Из-за нулевых граничных условий на контуре $\sigma_{ij}n_j = 0$, $x_i \in A_T$; $u_i = 0$, $x_i \in A_U$ интеграл $\int\limits_V (\sigma_{ij}u_i)_{,j}\, dV = \int\limits_A \sigma_{ij}n_j u_i dA$ по формуле Остроградского–Гаусса будет равен нулю. Тогда, принимая во внимание зависимости (19), получим

$$\int\limits_V \sigma_{ij}e_{ij}dV = \int\limits_V \frac{\partial^2 W}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{km}}\sigma_{ij}\sigma_{km}dV. \tag{21}$$

Соблюдение постулата Друккера, эквивалентного неравенству (14), (15), позволяет утверждать, что подынтегральное выражение становится неотрицательным когда $\sigma_{km} \neq 0$, а нулевое значение интеграла достигается только при нулевых σ_{ij}, а это позволяет утверждать, что теорема единственности доказана и уравнения состояния (8) применимы для решения краевых задач. Однако, учитывая многогранность свойств конструкционных композитов, обладающих широким спектром механических параметров, прежде, чем рассчитывать конкретные конструкции, требуется проверить соблюдение условий (14)–(17).

Приведем в табл. 1 и 2 механические характеристики некоторых ши-роко применяемых в технике конструкционных материалов. Здесь кроме технических параметров $E_k^{\pm}, \nu_{ij}^{+}$ и G_{ij} представлены имеющиеся в литературе данные о модулях упругости на растяжение и сжатие, полученные при испытании образцов, вырезанных под углом 45° к главным осям ортотропии $E_{ij}^{\pm}$.

Таблица 1: Механические характеристики композитных материалов

Константы	Материалы [литературные источники]				
	Композит T300/5208 [2]	Композит AR [3]	Композит PR [3]	Композит 16K9-27/ ATJ-S [4]	Композит AVCO Mod3a [2]
1	2	3	4	5	6
E_1^+	147,5 ГПа	3,58 ГПа	0,617 ГПа	16,56 МПа	11,7 ГПа
E_1^-	147,5 ГПа	0,012 ГПа	0,369 ГПа	12,42 МПа	10,3 ГПа
E_2^+	9,3 ГПа	0,009 ГПа	0,008 ГПа	—	—
E_2^-	14,3 ГПа	0,012 ГПа	0,01 ГПа	—	—
E_3^+	—	—	—	10,35 МПа	92,4 ГПа

E_3^-	—	—	—	8,28 МПа	16,5 ГПа
ν_{12}^+	0,25	0,416	0,475	0,12	0,11
ν_{12}^-	0,52	0,205	0,185	0,12	0,11
ν_{13}^+	—	—	—	—	0,05
ν_{13}^-	—	—	—	—	0,05
ν_{32}^+	—	—	—	0,14	—
ν_{32}^-	—	—	—	0,095	—
E_{12}^+	—	—	—	—	9,95 ГПа
E_{12}^-	—	—	—	—	9,31 ГПа
E_{13}^+	—	—	—	11,04 МПа	8,69 ГПа
E_{13}^-	—	—	—	9,315 МПа	5,52 ГПа
G_{12}	29,36 ГПа	0,0073 ГПа	0,116 ГПа	6,34 ГПа	4,39 ГПа
G_{13}	—	—	—	7,32 ГПа	3,726 ГПа
G_{23}	—	—	—	4,126 ГПа	7,203 ГПа

Таблица 2: Механические характеристики полимерных материалов

Константы	Материалы [литературные источники]					
	П32-57 [17]	П36-50 [17]	П41-42 [17]	Графит ATJ-S [18]	Стекло-пластик [19]	Стекло-пластик [20]
E_1^+	12,75 ГПа	10,3 ГПа	8,09 ГПа	11,85 ГПа	140 ГПа	60 ГПа
E_1^-	14,03 ГПа	11,77 ГПа	10,79 ГПа	10,48 ГПа	70 ГПа	20 ГПа
E_2^+	16,425 ГПа	17,6 ГПа	16,09 ГПа	11,85 ГПа	280 ГПа	30 ГПа
E_2^-	20,60 ГПа	18,54 ГПа	16,97 ГПа	10,48 ГПа	140 ГПа	15 ГПа
E_3^+	—	—	—	9,45 ГПа	—	—
E_3^-	—	8,34 ГПа	—	7,95 ГПа	—	—
ν_{12}^+	0,176	0,188	0,28	0,1	0,2	0,2
ν_{12}^-	—	—	—	0,09	0,3	0,3
ν_{13}^+	0,126	0,115	0,1	0,14	—	—
ν_{13}^-	—	—	—	0,1	—	—
E_{12}^+	—	—	—	—	170 ГПа	—
E_{12}^-	—	—	—	—	875 ГПа	—
G_{12}	3,98 ГПа	3,14 ГПа	2,92 ГПа	5,08 ГПа	52,06 ГПа	10,23 ГПа
G_{13}	3,28 ГПа	3,49 ГПа	4,02 ГПа	4,47 ГПа	—	—
G_{23}	2,63 ГПа	2,55 ГПа	2,45 ГПа	4,41 ГПа	—	—

Поворот системы координат на определенный угол Ψ приводит к изменению напряжения в новой системе, пересчет которых производится по известным формулам преобразования [11]:

$$\sigma'_{11} = \sigma_{11}\cos^2\Psi + \sigma_{22}\sin^2\Psi - 2\tau_{12}\sin\Psi\cos\Psi;$$

$$\sigma\_22 = \sigma_{11}\cos^2\Psi + \sigma_{22}\sin^2\Psi + 2\tau_{12}\sin\Psi\cos\Psi; \quad (22)$$

$$\tau'_{12} = (\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin\Psi\cos\Psi + \tau_{12}(\cos^{\Psi} - \sin^2\Psi). \quad (23)$$

Компоненты нормированного тензора напряжений α_{ij} преобразуются с поворотом осей по тем же формулам (22).

5. Заключение

Предложенные потенциальные соотношения между тензорами второго ранга деформаций и напряжений с учетом определенных из экспериментов констант для ортотропных композитных материалов [1–10, 17–20] обладают энергетической непротиворечивостью, соответствуют теореме единственности решения краевых задач и могут быть рекомендованы для использования в деформационно-прочностных расчетах элементов конструкций, аппаратов, приборов и деталей машин.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трещев А. А. Теория деформирования и прочности разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещев // Тула: ТулГУ, 2020. – 359 с.

2. Schmueser D. W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells / D.W. Schmueser // AIAA Journal. – 1983. – Vol. 21. – №12. – pp. 1742 – 1747.

3. Reddy L. N. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / L.N. Reddy, C.W. Bert // ZAMM. – 1982. – Vol. 62. – № 6. – pp. 213 – 219.

4. Jones R. M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – № 10. – pp. 1436 – 1443.

5. Jones R. M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. - № 8. – pp. 995 – 1001.

6. Jones R. M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9. – № 5. – pp. 917 – 923.

7. Крегерс А. Ф. Нелинейная ползучесть тканевого стеклопластика при некоторых видах сложного напряженного состояния / А.Ф. Крегерс, Р.Д. Максимов, Р.П. Турциныш // Механика полимеров. – 1973. – №2. – С. 212 – 218.

8. Амелина Е. В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е.В. Амелина [и др.] // ИВТ СО РАН: Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20. – №5. – С. 27–52.

9. Каюмов Р. А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов / Р.А. Каюмов, С.А. Луканкин, В.Н. Паймушин, С.А. Холмогоров // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157. – кн. 4. – С. 112–132.

10. Shafigullin L. N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reiforced polyurethanes for vehicle parts / L.N. Shafigullin, A.A. Bo-brishev, V.T. Erofeev, A.A. Treshchev, A.N. Shafigullina // International Jour-nal of Applied Engineering Research. – 2015. – Vol. 10. – №23. – pp. 43758-43762.

11. Грин А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс. – М.: Мир, 1965. – 456 с.

12. Treschev A. A. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilin-earapproximation of the deformation law / A.A. Treschev, A.A. Bobrishev, L.N. Shafigullin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 481 (2019) UNSP012014. – Doi: 10.1088/ 1757-899X/481/1/ 012014. – pp. 1 – 7.

13. Трещев А. А. Определяющие соотношения для нелинейных анизотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния / А.А. Трещев, Д.А. Ромашин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – №4. Часть 4. – С. 1740-1742.

14. Трещев А. А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов / А.А. Трещев // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2017. – № 4-1 (324). – С. 71 – 74.

15. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 779 с.

16. Турсунов Б. С. О свойствах потенциала напряжений упругих тел / Б.С. Турсунов // ПММ. – 1970. – Т. 34. – Вып. 1. – С. 15–22.

17. Розе А. В. Трехармированные тканые материалы / А.В. Розе, И.Г. Жигун, М.Н. Душин // Механика полимеров. – 1970. – №3. – с. 471–476.

18. Jones R. M., Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M. Jones, D.A.R. Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14 – №10. – pp. 1427–1435.

19. Jones R. M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M. Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №1. – pp. 16–25.

20. Золочевский А. А. Расчет анизотропных оболочек из разномодульных материалов при неосесимметричном нагружении / А.А. Золочевский, В.Н. Кузнецов // Динамика и прочность тяжелых машин. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 84–92.

REFERENCES

1. Treschev A. A. 2020, *Theory of deformation and strength of different resistant materials.* Tula: TulSU. 359 p.

2. Schmueser D. W. 1983, «Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells», *AIAA Journal*, Vol. 21. № 12. pp. 1742–1747.

3. Reddy L. N., Bert C. W. 1982, «On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials», *ZAMM*, Vol. 62. № 6. pp. 213–219.

4. Jones R. M. 1977, «A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials», *AIAA Journal*, Vol. 15. № 10. pp. 1436–1443.

5. Jones R. M. 1980, «Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material», *AIAA Journal*, Vol. 18. № 8. pp. 995–1001.

6. Jones R. M. 1971, «Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression», *AIAA Journal*, Vol. 9. № 5. pp. 917–923.

7. Kregers A. F., Maksimov R. D., Turtsinysh R. P. 1973, «Nonlinear creep of fabric fiberglass under some types of complex stress state», *Mechanics of polymers*, № 2. pp. 212–218.

8. Amelina E. V. 2015, «On nonlinear deformation of carbon fiber plastics: experiment, model, calculation», IVT SB RAS: *Computational Technologies*, Vol. 20. № 5. pp. 27–52.

9. Kayumov R. A., Lukankin S. A., Paimushin V. N., Kholmogorov S. A. 2015, «Identification of mechanical characteristics of fiber-reinforced composites», *Scientific Notes of the Kazan University. Physical and mathematical sciences*, Vol. 157. Book 4. pp. 112–132.

10. Shafigullin L. N., Bobrishev A. A., Erofeev V. T., Treshchev A. A., Shafig-ullina A. N. 2015, «Development of the recommendations on selection of glass-fiber reiforced polyurethanes for vehicle parts», *International Journal of Applied Engineering Research*, Vol. 10. № 23. pp. 43758–43762.

11. Green A., Adkins J. 1965, *Large elastic deformations and nonlinear mechanics of a continuous medium*, M.: Mir. 456 p.

12. Treschev A. A., Bobrishev A. A., Shafigullin L. N. 2019, «Constitutive rela-tions for isotropic materials allowing quasilinearapproximation of the defor-mation law», *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 481. UNSP012014. Doi: 10.1088/ 1757-899X/481/1/ 012014. pp. 1–7.

13. Treschev A. A., Romashin D. A. 2011, «Defining relations for nonlinear anisotropic materials sensitive to the type of stress state», *Vestnik Nizhegorodskogo university*, N.Novgorod: Publishing House of the Lobachevsky National Research University. № 4. Part 4. pp. 1740–1742.

14. Treschev A. A. 2017, «Potential dependence between deformations and stresses for orthotropic physically nonlinear materials», *Fundamental and applied Problems of Engineering and Technology*, № 4-1 (324). pp. 71–74.

15. Kauderer G. 1961, *Nonlinear mechanics*, Moscow: Publishing house of foreign literature. 779 p.

16. Tursunov B. S. 1970, «On the properties of the stress potential of elastic bod-ies», *AMM*, Vol. 34. Issue 1. pp. 15–22.

17. Rose A. V., Zhigun I. G., Dushin M. N. 1970, «Three-reinforced woven mate-rials», *Mechanics of polymers*, № 3. pp. 471–476.

18. Jones R. M., Nelson D.A.R. 1976, «Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite», *AIAA Journal*, Vol. 14. № 10. pp. 1427–1435.

19. Jones R. M. 1977, «Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression», *AIAA Journal*. Vol. 15. № 1. pp. 16–25.

20. Zolochevsky A. A., Kuznetsov V. N. 1989, «Calculation of anisotropic shells made of different-modulus materials under non-axisymmetric loading», *Dynamics and strength of heavy machines*. Dnepropetrovsk: DSU. pp. 84–92.

Получено 13.07.2021 г.
Принято в печать 6.12.2021 г.

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-384-386

Памяти Валентина Фёдоровича Бутузова

Некролог



23 ноября 1939 — 1 июня 2021

1 июня 2021 в результате заболевания, вызванного коронавирусной инфекцией, скончался выдающийся российский математик, заслуженный профессор Московского государственного университета Валентин Фёдорович Бутузов.

Его биография могла бы уместиться в нескольких строках, так как фактически целиком связана с единственным местом работы — физическим факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, куда в 1957 году он пришел студентом, в 1963 году — аспирантом и в 1966 году — преподавателем.

Однако вся жизнь Валентина Фёдоровича была наполнена напряженным трудом и значимыми достижениями в работе. Ещё будучи студентом, В. Ф. Бутузов начал заниматься научной работой при кафедре математики физического факультета МГУ. Кафедрой руководил Андрей Николаевич Тихонов — основатель теории сингулярных возмущений. В рамках нового направления А. Б. Васильевой (ученицей А. Н. Тихонова) был разработан метод пограничных функций для получения асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. Профессор А. Б. Васильева становится научным руководителем В. Ф. Бутузова, который в 1966 году успешно защитил кандидатскую диссертацию по теме «Асимптотика решений некоторых задач для интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производных».

В результате дальнейших исследований В. Ф. Бутузовым был разработан новый метод угловых пограничных функций, который позволяет строить асимптотические разложения решений уравнений с частными производными в областях с негладкими границами. В 1979 году состоялась защита докторской диссертации по теме «Сингулярно возмущенные краевые задачи с угловым пограничным слоем».

На протяжении всей своей жизни В. Ф. Бутузов руководил научным семинаром по асимптотическим методам. Им подготовлено большое число специалистов, кандидатов наук, четверо учеников стали докторами наук. Подводя итоги и обобщая результаты научной школы, В. Ф. Бутузов совместно с А. Б. Васильевой издают две монографии: в 1973 г. — «Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений», а в 1978 г. — «Сингулярно

возмущенные уравнения в критических случаях». Уравнениям с частными производными посвящена третья монография А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова — «Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений», вышедшая в 1990 году.

Параллельно с напряженной научной работой В. Ф. Бутузов занимался и большой педагогической деятельностью. В 1982 году он утвержден в ученом звании профессора, а в 1993 году возглавил кафедру математики физического факультета МГУ, которой руководил 21 год. Валентин Фёдорович читал общие курсы лекций по математическому анализу, а также специальные курсы по асимптотическим методам. Под его руководством написана книга «Математический анализ в вопросах и задачах» (изд. Высшая школа, 1986, 1988, 1993), переведенная на английский и испанский языки.

Особое место в деятельности Валентина Федоровича Бутузова занимала работа по улучшению школьного образования. Он преподавал геометрию в школе-интернате МГУ. Начиная с 1979 г. В. Ф. Бутузов вместе с коллегами принимал активное участие в создании школьных учебников по геометрии. В 1988 г. эти учебники (для 7-9 классов и 10-11классов) заняли 1 место на Всесоюзном конкурсе школьных учебников. Впоследствии под руководством В. Ф. Бутузова был разработан полный комплект учебных материалов по геометрии для 7, 8, 9, 10 и 11 классов, включающий базовые учебники, тематические тесты, дидактические материалы и рабочие тетради.

В. Ф. Бутузов вел разнообразную научно-общественную деятельность. Он являлся членом многих диссертационных советов, членом Президиума научно-методического совета по математике при Министерстве высшего образования, членом экспертного совета по математике при Министерстве просвещения РСФСР. В 2018 году был членом программного комитета Всероссийского съезда преподавателей и учителей математики. Валентин Фёдорович являлся участником многих научных конференций, на которых выступал с докладами, состоял в редколлегиях журналов «Вычислительная математика и математическая физика» и «Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия».

Успехи В. Ф. Бутузова отмечены рядом наград и премий:

- Почетная грамота Министерства просвещения РСФСР за создание пробных учебников по математике для средней школы (1981),
- Отличник народного просвещения РСФСР (1985),
- Медаль «За трудовое отличие» (1986),
- Диплом Государственного комитета СССР по народному образованию (1989),
- Премия им. М. В. Ломоносова за педагогическую деятельность (1993),
- Медаль «В память 850-летия Москвы» (1997),
- «Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации» (1999),
- Премия им. М. В. Ломоносова за научную работу 1-ой степени (2003),
- Заслуженный профессор Московского университета (2005),
- Медаль ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени (2016).

В течение 25 лет В. Ф. Бутузов играл за сборную МГУ по футболу, из них 17 лет в составе 1-ой сборной МГУ. В. Ф. Бутузов трехкратный чемпион и многократный призер первенства Москвы среди ВУЗов. Участник Всесоюзных и Международных ВУЗовских игр по футболу.

Кроме футбола Валентин Федорович увлекался поэзией, хорошо известны его стихотворные экспромты на торжественных и дружеских встречах.

Многогранная деятельность В. Ф. Бутузова была связана и с Тулой. Ранее для Тульского государственного педагогического университета им был подготовлен доктор физико-математических наук И. В. Денисов. Однако первый приезд Валентина Фёдоровича в Тулу состоялся только в начале октября 2011 года в рамках конференции «Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии», на которой он выступил с блестящим докладом. Затем последовали встречи с учителями по линии Института повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования Тульской области.

Коллеги, ученики и редакция «Чебышевского сборника» выражают искренние соболезнования родным и близким В. Ф. Бутузова в связи с его кончиной.

Чубариков В. Н., Добровольский Н. М., Денисов И. В., Нестеров А. В., Нефедов Н. Н.

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Том 22 Выпуск 4

Главный редактор

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Заместители главного редактора

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Михалев Александр Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы РФ.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Ответственные секретари

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики Тульского государственного университета; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук; декан факультета математики, физики и информатики; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Члены редколлегии

Боровков Алексей Иванович — доктор технических наук, профессор, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
e-mail: borovkov@spbstu.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора по научной работе Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИПМ ДВО РАН), директор Хабаровского отделения ИПМ ДВО РАН.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета, президент фонда им. Л. Эйлера.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологии и сервиса Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Георгиевский Дмитрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Горбачёв Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: vigorby@mail.ru

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики 1-го Финансового университета при Правительстве РФ; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Демидов Сергей Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета; заведующий кабинетом истории и методологии математики и механики, заведующий отделом истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники РАН; главный редактор журнала «Историко-математические исследования»; президент Международной академии истории науки.
e-mail: serd42@mail.ru

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации Ярославского государственного университета.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Зубков Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; заведующий отделом дискретной математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Иванов Александр Олегович — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Карташов Владимир Константинович — кандидат физико-математических наук, профессор, Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Матиясевич Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Нестеренко Юрий Валентинович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой теории чисел механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАЕН, действительный член академии информатизации образования, ректор Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.
e-mail: tgpu@tula.net

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.
e-mail: urusbi@rambler.ru

Семёнов Алексей Львович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, академик Российской академии образования, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: alsemno@ya.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет; профессор механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Термезского государственного университета (Узбекистан).
e-mail: iallakov@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич — доктор физико-математических наук, федеральный профессор математики, профессор университета Бар-Илана (Израиль).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Берник Василий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси (Белоруссия).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Касьянов Павел Олегович — доктор физико-математических наук, профессор Учебно-научного комплекса «Институт прикладного системного анализа» НТУ «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» МОН и НАН Украины (Украина).
e-mail: kasyanov@i.ua

Лауринчикас Антанас — доктор физико-математических наук, профессор, действительный член АН Литвы, заведующий кафедрой теории вероятностей и теории чисел Вильнюсского университета (Литва).
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Лю Юнпин — доктор наук, профессор, руководитель Исследовательского центра современного математического анализа Пекинского педагогического университета (Китай).
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Мисир Джумаил оглы Марданов — доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Азербайджан).
e-mail: rmi@lan.ab.az

Мусин Олег Рустамович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Техасского университета в Браунсвилле (США).
e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Рахмонов Зарулло Хусейнович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, директор Института математики Таджикской АН (Таджикистан).
e-mail: zarullo_r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз (Ливан).
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Табари Абдулло Хабибулло — доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент Академии наук Таджикистана; ректор Кулябского государственного университета имени Абуабдуллаха Рудаки (Таджикистан).
e-mail: rektor@kgu.tj

Фукшанский Леонид Евгеньевич — доктор математических наук, профессор, Колледж Клермонт Маккенна (США).
e-mail: lenny@cmc.edu

Шяучюнас Дарюс — профессор, доктор математических наук, старший научный сотрудник Научного института Шяуляйского университета (Литва).
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

THE EDITORIAL BOARD

Volume 22 Issue 4

The main editor

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis, President of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

The assistants of the main editor:

Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Mihalev Alexander Vasilyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Nijnikov Alexander Ivanovich — Dr. Sci. in Pedagogy, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University», Honored Worker of Higher Education of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru

Executive secretaries

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — PhD in Physics and Mathematics, Junior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University; Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — PhD in Physics and Mathematics, Dean of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Associate Professor of the Chair of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Editorial Board

Borovkov Aleksey Ivanovich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University.
e-mail: borovkov@spbstu.ru

Bykovsky Victor Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Deputy Director for Research, Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (IAM FEB RAS), Director of the Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division.
e-mail: vab@iam.khv.ru

Vostokov Sergey Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Algebra and Number Theory, St. Petersburg State University, President of Euler Foundation.
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Gvozdev Alexander Evgenievich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Georgievsky Dmitry Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Elasticity Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Gorbachev Vladimir Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: vigorby@mail.ru

Gritsenko Sergey Alexandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Mathematics, Financial University; Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: s.gritsenko@gmail.com

Demidov Sergey Sergeyivich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Chair of Probability Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department of History and Methodology of Mathematics and Mechanics, Head of the Department of History of Physics and Mathematics, S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS (IHST RAS); Editor-in-chief of the journal «Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya»; President of the International Academy of the History of Science.
e-mail: serd42@mail.ru

Durnev Valery Georgievich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Computer Security and Mathematical Methods of Information Processing, P.G. Demidov Yaroslavl State University.
e-mail: durnev@univ.uniyar.ac.ru

Zubkov Andrey Mihailovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Mathematical Statistics and Random Processes, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Department Department of Discrete Mathematics, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: zubkov@mi.ras.ru

Ivanov Aleksandr Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Ivanov Valery Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Kartashov Vladimir Konstantinovich — PhD in Physics and Mathematics, Professor, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Volgograd State Socio-Pedagogical University».
e-mail: kartashovvk@yandex.ru

Korolev Maxim Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: korolevma@mi.ras.ru

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Dr. Sci. in Engineering, Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.
e-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru

Matiyasevich Yuri Vladimirovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Adviser at the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, President of the St. Petersburg Mathematical Society.
e-mail: yumat@pdmi.ras.ru

Mishchenko Sergey Petrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Nesterenko Yury Valentinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of the Chair of Number Theory, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: nester@mi.ras.ru

Panin Vladimir Alexeyevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Natural Sciences, Full Member of the Academy of Informatization of Education, Rector of Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: tgpu@tula.net

Pachev Urusbi Mukhamedovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Algebra and Differential Equations, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov».
e-mail: urusbi@rambler.ru

Semenov Alexey Lvovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Education, Head of the Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: alsemno@ya.ru

Tolokonnikov Lev Alekseevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Tula State University.
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Algebra of the Moscow Pedagogical State University.

Chirsky Vladimir Grigoryevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Moscow Pedagogical State University»; Professor of the Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Allakov Ismail — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of Termez Davlat University (Uzbekistan).
e-mail: iallakov@mail.ru

Belov Alexey Yakovlevich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Federal Professor of Mathematics, Professor, Bar-Ilan University (Israel).
e-mail: Kanelster@gmail.com

Bernik Vasily Ivanovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Principal Researcher of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Belarus).
e-mail: bernik@im.bas-net.by

Kasyanov Pavel Olegovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Educational-scientific complex «Institute for applied system analysis», National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» of MES and NAS of Ukraine (Ukraine).
e-mail: kasyanov@i.ua

Laurinchikas Antanas — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Full Member of the Lithuanian Academy of Sciences, Head of the Chair of Probability Theory and Number Theory, Vilnius University (Lithuania).
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Liu Yongping — Dr. Sci., Professor, Head of the Research Center for Modern Mathematical Analysis (School of Mathematical Sciences), Beijing Normal University (China).
e-mail: ypliu@bnu.edu.cn

Mardanov Misir Jumayil oglu — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Science (Azerbaijan).
e-mail: rmi@lan.ab.az

Musin Oleg Rustamovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, University of Texas Rio Grande Valley (UTRGV) (USA)
e-mail: oleg.musin@utb.edu, omusin@gmail.com

Rahmonov Zarullo Huseinovich — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the Institute of Mathematics, Tajik Academy of Sciences (Tajikistan).
e-mail: zarullo_ r@tajik.net, zarullo-r@rambler.ru

Mansour Saliba Holem — PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Faculty of Natural and Applied Sciences, Notre Dame University–Louaize (Lebanon).
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Habibullo Abdullo — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of the Academy of Sciences of Tajikistan; Rector of Higher education institution «Kulob State University named after Abuabdulloh Rudaki» (Tajikistan).
e-mail: rektor@kgu.tj

Fukshansky Leonid — Dr. Sci. in Mathematics, Professor, Claremont McKenna College (USA).
e-mail: lenny@cmc.edu

Šiaučiūnas Darius – Professor, Dr. Sci. in Mathematics, Senior Researcher, Institute of Regional Development, Šiauliai University (Lithuania).
e-mail: darius.siauciunas@su.lt

TABLE OF CONTENTS

Volume 22 Issue 4

From the editorial board 5

I. M. Vinogradov. Gaussian sums and their application to the proof of quadratic reciprocity law 6

V. N. Bezverkhnii, N. B. Bezverkhnyaya. On the problem of conjugacy of words in a certain class of subgroups of Artin groups 87

D. V. Gorbachev. Nikol'skii constants for compact homogeneous spaces 99

V. I. Ivanov. Riesz potential for $(k, 1)$-generalized Fourier transform 113

V. I. Ivanov. Properties and application of a positive translation operator for $(k, 1)$-Generalized Fourier transform 135

A. Y. Kanel-Belov, M. O. Komatovskiy, S. A. Tishchenko. Dynamic processes in the economics of multilateral network platforms 152

A. N. Kormacheva, N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii. On the hyperbolic parameter of a two-dimensional lattice of comparisons 167

V. B. Poplavski. Partial Orders and Idempotents of Monoids 182

Z. Kh. Rakhmonov. Estimates of short exponential sums with primes in major arcs 199

S. A. Skobel'tsyn, N. Y. Peshkov. Sound waves diffraction by an elastic cylinder with inhomogeneous anisotropic outer layer near the plane 224

S. Y. Soloviev. On a class of factors of the Chebyshev polynomials 240

V. I. Subbotin. On the existence of RR-polyhedra associated with the icosahedron 252

A. M. Tropin. On the bifurcation of the solution of the Fermat–Steiner problem under 1-parameter variation of the boundary in $H(\mathbb{R}^2)$ 264

V. M. Chikin. The relation between the continuity of the lengths of curves and the continuity of distances in the case of boundedly compact metric spaces 288

V. N. Chubarikov. On multiple rational trigonometric sums over a field of algebraic numbers 305

HISTORY OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

E. V. Manokhin, N. O. Kozlova, V. E. Komov. Kharkiv school of M. I. Kadets and mathematics of Tula 323

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov. Diffraction of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous transversal isotropic layer 331

BRIEF MESSAGE

N. N. Avdeev. On diameter bounds for planar integral point sets in semi-general position 343

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, S. N. Kutepov, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva. Mathematical effective equation of unloading of porous metal composite materials 351

I. M. Burkin, O. I. Kuznetsova. New megastable system with 2-D strip of hidden attractors and analytical solutions 360

A. A. Treschev, Yu. A. Zavyalova, M. A. Lapshina, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, E. S. Krupitsyn. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy ...369

MEMORABLE DATES

To the memory of Valentin Fedorovich Butuzov 384

РЕДКОЛЛЕГИЯ 387

THE EDITORIAL BOARD 391

TABLE OF CONTENTS 395