МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Институт механики МГУ
Механико-математический факультет

ПРЕПРИНТ

В. Н. Белотелов, А. А. Голован, А. А. Гришин, Д. Н. Жихарев, А. В. Ленский, В. Б. Пахомов

Математические модели и алгоритмы управления движением мобильного робота

Москва – 2001

В. Н. Белотелов, А. А. Голован, А. А. Гришин, Д. Н. Жихарев, А. В. Ленский, В. Б. Пахомов
Математические модели и алгоритмы управления движением мобильного робота. - М.: Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова. Препринт №, 2001, - 52 стр.

В препринте описываются математические модели и алгоритмы управления движением мобильных роботов, специально разрабатываемых для участия в международных робототехнических соревнованиях.

Рассматриваются две задачи управления: управление движением робота по заданной траектории и управление движением при перемещении робота в заданную точку.

Первая задача сводится к задаче стабилизации программного режима движения, вторая - к построению оптимального по быстродействию управления.

Алгоритмы, реализованные на практике, основаны на результатах представляемого теоретического анализа.

© Институт механики МГУ

Содержание

Введение

С 1994 г. во Франции проводятся соревнования мобильных роботов в рамках Международного фестиваля наук и технологий [1]. В России начиная с 1998 г. аналогичные соревнования проводятся в Москве в МГУ им. М.В. Ломоносова. Студенческие команды механико-математического факультета и Института механики МГУ регулярно принимают в них участие. Команды МГУ были лидерами этих соревнований: Гран-при в Москве в 1999 г., первые места в 1996 и 1998 гг. во Франции и другие призовые места.

Успешные выступления наших команд в значительной степени связаны с разработанными эффективными алгоритмами управления движением мобильного робота. Настоящий препринт посвящен некоторым вопросам построения этих алгоритмов.

Мобильный робот (рис. 1) представляет собой трехколесную тележку.

Два колеса расположены на одной оси и являются ведущими и независимыми, третье - пассивное свободно вращающееся рояльное колесо. Отметим некоторые публикации, посвященные этим машинам: А.А. Голованом с соавторами [4] рассмотрены задачи навигации мобильных роботов, Е.А. Девяниным [2] построена математическая модель робота, исследована устойчивость его движения для некоторых частных случаев, построены фазовые траектории разомкнутой системы, А.И. Кобриным и Ю.Г. Мартыненко [3] также получены уравнения движения робота и предложены некоторые принципы управления им.

Регламент соревнований подробно описан в [4]. Среди задач управления движением можно выделить две основные задачи:

1. Управление движением по заданной траектории (трассе), нарисованной на полигоне соревнований.

2. Управление движением при перемещении робота в заданную точку, местоположение которой определяется установленным на полигоне отражающим или излучающим маяком.

При решении первой задачи будем использовать общепринятый подход [7], при котором строится опорный программный режим и рассматривается стабилизация возмущенного относительно него движения.

Вторая задача сводится к построению оптимального по быстродействию управления, для ее решения воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [6]. В препринте рассматриваются две постановки оптимальной задачи: кинематическая и динамическая. При кинематической постановке в качестве управлений используются продольная и угловая скорости робота, которые могут испытывать разрывы. Фактически это означает, что считается малым изменение конфигурационных координат робота за время, пока его скорости выходят на установившиеся значения.

В кинематической постановке для большинства случаев, возникающих во время соревнований, в задаче быстродействия удается аналитически построить управления, удовлетворяющие принципу максимума. Для полной динамической постановки решение удается найти только численно.

Алгоритмы управления движением мобильного робота, реализованные на практике, основаны на результатах проведенного теоретического анализа.

Авторы выражают благодарность А.М. Формальскому за ценные обсуждения.
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 01-01-00200.

1 Уравнения движения робота

Рассмотрим движение робота по ровной горизонтальной поверхности полигона соревнований. Выведем уравнения движения пользуясь формализмом Лагранжа. Поскольку колесный робот является неголономной системой, то для простоты выведем сначала уравнения движения робота "свободно скользящего"по поверхности под действием сил реакции опоры, а затем наложим связи, отвечающие условию непроскальзывания колес.

Пусть мобильный робот (рис. 1), состоит из корпуса с неподвижно закрепленными на нем элементами системы управления, двух ведущих колес, расположенных на одной оси, перпендикулярной продольной оси робота, и пассивного колеса. Каждое ведущее колесо снабжено приводом, представляющим собой электродвигатель с редуктором. Пренебрежем влиянием пассивного колеса на движение робота, то есть положим массу колеса равной нулю и будем считать, что сила, приложенная к нему со стороны опоры направлена строго вверх. Соответственно, в дальнейшем слово "колесо"будет относится только к ведущим колесам.

Введем неподвижную систему координат OXY, связанную с полигоном соревнований (рис. 1). Робот имеет пять степеней свободы. Введем пять обобщенных координат: координаты x, y центра масс робота, курсовой угол α, отсчитанный от оси OX до продольной оси корпуса аппарата против часовой стрелки, углы поворота φ_R и φ_L правого и левого ведущего колеса (индекс $_R \longrightarrow right$, правое; $_L \longrightarrow left$, левое). Введем следующие обозначения инерционно-массовых характеристик робота: $_0$ - его полная масса, включая массу двигателей и колес; J_0 - момент инерции робота относительно вертикальной оси, проходящей через его центр масс; J_{dr} - момент инерции ротора электродвигателя, приведенный к выходному валу редуктора (двигатели предполагаются одинаковыми). Выражение для кинетической энергии робота K таково:

$$K = \frac{1}{2}\left[M_0\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+J_0\dot{\alpha}^2+J_{dr}\dot{\varphi}_R^2+J_{dr}\dot{\varphi}_L^2\right]$$

Отметим, что в этом выражении используется упрощенная модель кинетической энергии приводов, которая не учитывает члены вида $\dot{\alpha}\dot{\varphi}_R$, $\dot{\alpha}\dot{\varphi}_L$. Это связано с тем, что для рассматриваемого класса мобильных роботов коэффициент редукции привода является значительной величиной и угловой скоростью робота $\dot{\alpha}$ можно пренебречь в сравнении с угловой скоростью вращения ротора электродвигателя. Обозначим внешние силы и моменты, действующие на робот: F_{Rt}, F_{Rn}, F_{Lt}, F_{Ln}, – соответственно тангенциальные и нормальные составляющие сил реакций опоры, действующих на правое и левое колесо; M_R, M_L – моменты, развиваемые правым и левым приводом на выходных валах редукторов. Обозначим геометрические параметры робота (рис. 1): a – расстояние от его центра масс до оси вращения колес, a положительно, если центр масс находится перед ведущими колесами; b – половина расстояния между центрами колес; R – радиус колеса.

Виртуальная работа внешних сил δW равна

$$\begin{aligned}\delta W &= \left[(F_{Rt}+F_{Lt})\cos\alpha-(F_{Rn}+F_{Ln})\sin\alpha\right]\delta x+\\ &+ \left[(F_{Rt}+F_{Lt})\sin\alpha+(F_{Rn}+F_{Ln})\cos\alpha\right]\delta y+\\ &+ \left[b\,(F_{Rt}-F_{Lt})-a\,(F_{Rn}+F_{Ln})\right]\delta\alpha+\\ &+ (M_R-RF_{Rt})\,\delta\varphi_R+(M_L-RF_{Lt})\,\delta\varphi_L \qquad (1)\end{aligned}$$

Пользуясь формализмом Лагранжа, получим уравнения движения робота, не ограниченные условиями связи:

$$\begin{aligned} M_0\ddot{x} &= (F_{Rt}+F_{Lt})\cos\alpha-(F_{Rn}+F_{Ln})\sin\alpha \\ M_0\ddot{y} &= (F_{Rt}+F_{Lt})\sin\alpha+(F_{Rn}+F_{Ln})\cos\alpha \\ J_0\ddot{\alpha} &= b\,(F_{Rt}-F_{Lt})-a\,(F_{Rn}+F_{Ln}) \\ J_{dr}\ddot{\varphi}_R &= M_R-RF_{Rt}, \qquad J_{dr}\ddot{\varphi}_L=M_L-RF_{Lt} \end{aligned} \tag{2}$$

Запишем условия непроскальзывания колес: скорости нижних точек правого и левого колеса должны быть равны нулю

$$\begin{aligned} \dot{x}_R &- R\dot{\varphi}_R\cos\alpha=0, \qquad \dot{x}_L-R\dot{\varphi}_L\cos\alpha=0 \\ \dot{y}_R &- R\dot{\varphi}_R\sin\alpha=0, \qquad \dot{y}_L-R\dot{\varphi}_L\sin\alpha=0 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь x_R, y_R, x_L, y_L, - координаты центров правого и левого колеса. Поскольку

$$\begin{aligned} x_R &= x-a\cos\alpha+b\sin\alpha, \qquad y_R=y-a\sin\alpha-b\cos\alpha \\ x_L &= x-a\cos\alpha-b\sin\alpha, \qquad y_L=y-a\sin\alpha+b\cos\alpha, \end{aligned} \tag{4}$$

то

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V\cos\alpha-a\omega\,\sin\alpha, \qquad \dot{y}=V\sin\alpha+a\omega\,\cos\alpha \\ \dot{\varphi}_R &= \frac{V}{R}+\frac{b}{R}\omega, \qquad \dot{\varphi}_L=\frac{V}{R}-\frac{b}{R}\omega \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь введены обозначения $V=\frac{R}{2}(\dot{\varphi}_R+\dot{\varphi}_L)$ – продольная скорость робота, $\omega=\dot{\alpha}$ – угловая скорость.

Приведем выражение для компонент $\dot{x}_L$, $\dot{y}_L$ скорости "датчика трассы" – точки L (рис. 1), расположенной на продольной оси робота на расстоянии h от линии колес:

$$\begin{aligned} \dot{x}_L &= V\cos\alpha-h\omega\,\sin\alpha \\ \dot{y}_L &= V\sin\alpha+h\omega\,\cos\alpha \\ \dot{\alpha} &= \omega \end{aligned} \tag{6}$$

Воспользуемся общепринятой моделью электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением [8]

$$M_{dr}=c_1u-c_2\omega_{dr} \tag{7}$$

где M_{dr} – момент, развиваемый двигателем; ω_{dr} – угловая скорость вращения ротора; u – напряжение на обмотке; c_1 и c_2 – постоянные коэффициенты.

Эта модель не учитывает трение внутри двигателя и индуктивность его обмотки. Примем такую же модель для привода в целом (вместе с редуктором) и выразим коэффициенты c_1 и c_2 через следующие параметры привода: u_n – номинальное напряжение питания двигателя; F_n – сила, приложенная к ободу колеса и удерживающая его в состоянии покоя при номинальном напряжении на обмотке; V_n

– установившаяся скорость точек обода колеса при его свободном вращении при номинальном напряжении на обмотке. Тогда:

$$M_{R(L)} = RF_n \left(\frac{u_{R(L)}}{u_n} - \frac{R\dot{\varphi}_{R(L)}}{V_n} \right) \tag{8}$$

Здесь u_R, u_L – напряжения на обмотке правого и левого двигателя соответственно. Преобразуя (2) с учетом (5) и (8), получим

$$\begin{aligned}
&M_0 \left(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{y}\sin\alpha\right) = F_{Rt} + F_{Lt} \\
&-M_0 \left(\ddot{x}\sin\alpha - \ddot{y}\cos\alpha\right) = F_{Rn} + F_{Ln} \\
&J_0\ddot{\alpha} = b\left(F_{Rt} - F_{Lt}\right) - a\left(F_{Rn} + F_{Ln}\right) \\
&\frac{J_{dr}}{R^2}\dot{V} = F_n \left(\frac{u_R + u_L}{2u_n} - \frac{V}{V_n} \right) - \frac{F_{Rt} + F_{Lt}}{2} \\
&\frac{bJ_{dr}}{R^2}\dot{\omega} = F_n \left(\frac{u_R - u_L}{2u_n} - \frac{b\omega}{V_n} \right) - \frac{F_{Rt} - F_{Lt}}{2}
\end{aligned} \tag{9}$$

Дифференцируя (5) и заменяя в системе (9) переменные x, y на их выражения через V и ω, получим

$$\begin{aligned}
F_{Rt} &= \frac{1}{2}\left[M_0\dot{V} + \frac{1}{b}\left(J_0 + M_0a^2\right)\dot{\omega} - M_0a\omega^2 + \frac{M_0a}{b}V\omega\right] \\
F_{Lt} &= \frac{1}{2}\left[M_0\dot{V} - \frac{1}{b}\left(J_0 + M_0a^2\right)\dot{\omega} - M_0a\omega^2 - \frac{M_0a}{b}V\omega\right] \\
F_{Rn} + F_{Ln} &= M_0a\dot{\omega} + M_0V\omega
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
M\dot{V} &= -2\frac{F_n}{V_n}V + M_0a\omega^2 + 2\frac{F_n}{u_n}u_S \\
J\dot{\omega} &= -\left(2\frac{b^2F_n}{V_n} + M_0aV\right)\omega + 2\frac{bF_n}{u_n}u_D
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
M &= M_0 + 2\frac{J_{dr}}{R^2}, \qquad J = J_0 + a^2M_0 + 2\frac{J_{dr}b^2}{R^2} \\
u_S &= \frac{u_R + u_L}{2}, \qquad u_D = \frac{u_R - u_L}{2}
\end{aligned} \tag{12}$$

Система (11) вместе с кинематическими уравнениями (6) представляет собой полную систему уравнений движения робота. Система (10) позволяет найти силы реакции опоры при известной зависимости скоростей V и ω от времени. Заметим, что поскольку ведущие колеса расположены на одной оси, то поперечные составляющие сил реакций опоры F_{Rn} и F_{Ln} входят в систему (10) только с виде суммы.

Осуществим процедуру нормализации уравнений движения (6) , (11). В качестве нормировочного коэффициента по времени возьмем постоянную времени τ первого уравнения системы (11), по расстоянию – величину τV_n, по напряжению – u_n. Для соответствующих безразмерных переменных будем использовать акцент "волна":

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{x}_L = \frac{x_L}{l_\tau}, \quad \tilde{y}_L = \frac{y_L}{l_\tau}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_n}, \quad \tilde{\omega} = \omega\tau, \\ \tilde{u}_S &= \frac{u_S}{u_n}, \quad \tilde{u}_D = \frac{u_D}{u_n}, \quad \tau = \frac{MV_n}{2F_n}, \quad l_\tau = \tau V_n \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда, преобразуя (6) , (11), получим

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_L &= \tilde{V}\cos\alpha - k_0\tilde{\omega}\sin\alpha \\ \dot{\tilde{y}}_L &= \tilde{V}\sin\alpha + k_0\tilde{\omega}\cos\alpha \\ \dot{\alpha} &= \tilde{\omega} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}} &= -\tilde{V} + k_1k_2\tilde{\omega}^2 + \tilde{u}_S \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -k_3\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\tilde{V}\right)\tilde{\omega} + \frac{k_3}{k_1}\tilde{u}_D \end{aligned} \tag{15}$$

Точкой здесь обозначены производные по безразмерному времени $\tilde{t}$.
Введем безразмерные коэффициенты k:

$$k_0 = \frac{h}{l_\tau}, \quad k_1 = \frac{b}{l_\tau}, \quad k_2 = \frac{M_0 a}{Mb}, \quad k_3 = \frac{Mb^2}{J} \tag{16}$$

Конструктивные параметры робота таковы:

$$\begin{aligned} M_0 &\sim 15,\ J_0 \sim 0,6 \cdot {}^2,\ J_{dr} \sim 0.05 \cdot {}^2,\ a \sim 0.1, \\ b &\sim 0.3,\ R \sim 0.075,\ h \sim 0.5,\ F_n \sim 200,\ V_n \sim 1.5/. \end{aligned} \tag{17}$$

При этих значениях:

$$\tau \sim 0,12,\ l_\tau \sim 0.19,\ k_0 \sim 2.6,\ k_1 \sim 1.6,\ k_2 \sim 0.15,\ k_3 \sim 1.2. \tag{18}$$

Все четыре коэффициента k имеют порядок единицы, за исключением относительно малого коэффициента k_2, фигурирующего при нелинейных членах системы (15).

2 Задача стабилизации движения робота по трассе

Опишем содержание задачи стабилизации движения мобильного робота по трассе. На полигоне соревнований нарисована трасса, по которой должен проехать мобильный робот. На роботе установлен датчик трассы (точка L, рис. 1), доставляющий информацию о смещении робота относительно трассы. Трасса состоит из отрезков прямых и дуг окружностей. Используются также датчики колес, доставляющие информацию о скорости вращения и угле поворота каждого ведущего колеса. Разобьем задачу построения алгоритма управления движением робота на два этапа [7]:

1. Построение опорного программного движения мобильного робота.

2. Стабилизация возмущенного движения относительно заданного программного - построение алгоритма управления, обеспечивающего близость реального и программного движений.

Рассмотрим кинематические и динамические уравнения движения (14),(15). Эта система имеет решение, отвечающее движению робота вдоль оси OX с постоянной скоростью $\tilde{V} = V_0$:

$$\tilde{x}_L = V_0\tilde{t},\ \tilde{y}_L = 0,\ \alpha = 0,\ \tilde{V} = V_0,\ \tilde{\omega} = 0,\ \tilde{u}_S = V_0,\ \tilde{u}_D = 0 \tag{19}$$

Запишем систему в вариациях относительно этого решения:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= \hat{V}, \quad \dot{\hat{V}} = -\hat{V} + \hat{u}_S \\
\dot{\hat{y}} &= V_0\hat{\alpha} + k_0\hat{\omega}, \quad \dot{\hat{\alpha}} = \hat{\omega} \\
\dot{\hat{\omega}} &= -k_3\left(1 + \frac{k_2}{k_1}V_0\right)\hat{\omega} + \frac{k_3}{k_1}\hat{u}_D
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь для обозначения соответствующей вариации использован акцент "крышка":

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \tilde{x}_L - V_0\tilde{t}, \quad \hat{y} = \tilde{y}_L, \quad \hat{\alpha} = \alpha \\
\hat{V} &= \tilde{V} - V_0, \quad \hat{\omega} = \tilde{\omega}, \quad \hat{u}_S = \tilde{u}_S - V_0, \quad \hat{u}_D = \tilde{u}_D
\end{aligned} \tag{21}$$

Система (20) разделяется на две независимые подсистемы. Первые два уравнения описывают продольное движение робота, три последних – поперечные и угловые перемещения. Заметим, что первая подсистема асимптотически устойчива по скорости при $\hat{u}_S \equiv 0$ (см. также [2]). Поскольку точное значение продольной координаты как функции времени не существенно для целей соревнования - важно только быстрее проехать по трассе, – то задачу стабилизации для первой подсистемы можно не рассматривать.

2.1 Стабилизация движения робота по прямой

Рассмотрим движение робота по прямолинейному участку трассы. Без ограничения общности будем считать, что трасса совпадает с осью OX и робот движется по ней в сторону увеличения абсциссы. Отклонением робота от трассы ε будем считать ординату y_L точки L.

Запишем три последних уравнения системы (20), описывающие отклонения робота от трассы, в матричной форме:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= Az + B\hat{u}_D \\
z &= \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\omega} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & V_0 & k_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_3\left(1 + \frac{k_2}{k_1}V_0\right) \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_3}{k_1} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{22}$$

Характеристический многочлен разомкнутой системы $\dot{z} = Az$:

$$\lambda^3 + k_3\left(1 + \frac{k_2}{k_1}V_0\right)\lambda^2 = 0$$

имеет два нулевых корня, то есть разомкнутая система неустойчива.

Проверим управляемость замкнутой системы (22) по Калману [7]. Поскольку в данном случае матрица управляемости ($B\ AB\ A^2B$) квадратная, то для проверки равенства ее ранга максимальному, достаточно вычислить определитель:

$$
\begin{aligned}
|B\,AB\,A^2B| &= \frac{k_3^3}{k_1^3}\cdot det\begin{pmatrix} 0 & k_0 & V_0 - k_0k_3\left(1+\frac{k_2}{k_1}V_0\right) \\ 0 & 1 & -k_3\left(1+\frac{k_2}{k_1}V_0\right) \\ 1 & -k_3\left(1+\frac{k_2}{k_1}V_0\right) & k_3^2\left(1+\frac{k_2}{k_1}V_0\right)^2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{k_3^2}{k_1^3}V_0
\end{aligned}
$$

Поскольку коэффициенты k_1 и k_3 не могут равняться нулю, то система управляема при $V_0 \neq 0$. Другими словами, при ненулевой продольной скорости робота можно построить закон управления в виде линейной обратной связи по всем фазовым переменным:

$$\hat{u}_D = k_\varepsilon \hat{y} + k_\alpha \hat{\alpha} + k_\omega \hat{\omega} \tag{23}$$

который делает нулевое решение системы (22) асимптотически устойчивым.

Отклонение робота от трассы ε ($\varepsilon = y_L$) измеряется датчиком трассы, угловая скорость ω измеряется датчиками колес. Курсовой угол α может быть измерен с помощью видеосистемы, либо определен с помощью навигационных алгоритмов [4] счисления пути и ориентации. Из трех величин, необходимых для реализации алгоритма управления (23), информация об угле α представляется наименее точной.

Поэтому рассмотрим частный случай $k_\alpha = 0$, когда информация о курсовом угле не используется в алгоритме управления (23). Характеристический многочлен системы (22) при этом имеет вид:

$$\lambda^3 + k_3\left(1+\frac{k_2}{k_1}V_0 - \frac{k_\omega}{k_1}\right)\lambda^2 - \frac{k_0k_3k_\varepsilon}{k_1}\lambda - \frac{k_3k_\varepsilon}{k_1}V_0 = 0 \tag{24}$$

Исходя из критерия Гурвица, получим:

$$
\begin{gathered}
-\frac{k_3k_\varepsilon}{k_1}V_0 > 0, \qquad -\frac{k_0k_3k_\varepsilon}{k_1} > 0 \\
\frac{k_3k_\varepsilon}{k_1}\left[V_0 - k_0k_3\left(1+\frac{k_2}{k_1}V_0 - \frac{k_\omega}{k_1}\right)\right] > 0
\end{gathered}
\tag{25}
$$

Следовательно, для асимптотической устойчивости системы (22) при необходимо и достаточно, чтобы

1. Коэффициент обратной связи по отклонению от трассы k_ε был отрицательным при движении вперед и положительным при движении назад: $k_\varepsilon V_0 < 0$.

2. Точка расположения датчика трассы должна быть вынесена вперед по ходу движения относительно линии ведущих колес: $k_\varepsilon k_0 < 0$, следовательно, с учетом п. 1 и (16), $V_0 h > 0$.

3. Коэффициент обратной связи по угловой скорости аппарата k_ω удовлетворял условию: $k_\omega < k_1 + \left(k_2 - \frac{k_1}{k_0 k_3}\right) V_0$, или, возвращаясь к размерным переменным (см. (13), (16)), $k'_\omega < u_n \left[\frac{b}{V_n} + \frac{V_0 V_n}{2F_n b}\left(M_0 a - \frac{J}{h}\right)\right]$, где $k'_\omega = u_n \tau k_\omega$ – размерный коэффициент обратной связи по угловой скорости.

Таким образом, показано, что стабилизация движения робота по прямой может быть обеспечена без привлечения информации о курсовом угле α. При этом скорость аппарата и его инерционно-массовые характеристики могут быть любыми. Вместе с тем, как показывают результаты численного моделирования и натурные эксперименты, для улучшения качества регулирования предпочтительно строить обратную связь по всем фазовым переменным, включая и α.

Замечание. Вынос ведущих колес вперед по ходу движения относительно центра масс аппарата ($a < 0$) ухудшает устойчивость системы. Из условия Гурвица (25) следует, что при $k_\omega = 0$ и $a \geq \frac{J}{M_0 h}$ система устойчива при любой положительной скорости V_0 (см. также [2]), тогда как при $a < \frac{J}{M_0 h}$ и достаточно большой скорости V_0 система становится неустойчивой. Поэтому желательно, чтобы центр масс робота располагался перед линией ведущих колес.

2.2 Стабилизация движения робота по окружности

Рассмотрим движение робота по дуге окружности радиуса r. Условно будем считать, что при повороте налево значение параметра r положительно ($r > 0$) и отрицательно ($r < 0$) при повороте направо. Найдем решение систем (14), (15), при котором точка L движется точно по этой траектории.

Пусть робот движется со скоростью $V = \tilde{V} V_n$, зависящей, вообще говоря, от времени. Найдем соответствующие программные значения курсового угла α_{pr} , угловой скорости $\tilde{\omega}_{pr}$ и программное значение $\tilde{u}_{pr}$ величины $\tilde{u}_D$, представляющей собой полуразность напряжений на двигателях (12).

При движении по окружности скорость точки L направлена по касательной к окружности. Введем угол β между касательной и осью OX (см. рис. 1). Тогда из кинематических соотношений (14) для программной угловой скорости $\tilde{\omega}_{pr}$ получим:

$$\tilde{\omega}_{pr} = \frac{1}{k_0} \tilde{V} tg(\beta - \alpha) \tag{26}$$

Для модуля скорости V_L датчика трассы справедливо

$$V_L = \sqrt{V^2 + h^2\omega^2} = \sqrt{\tilde{V}^2 V_n^2 + \frac{h^2}{\tau^2}\tilde{\omega}_{pr}^2} = \frac{\tilde{V} V_n}{\cos(\beta - \alpha)}$$

Поскольку $r\frac{d\beta}{dt} = V_L$, то производная β по безразмерному времени $\tilde{t}$ равна:

$$\dot{\beta} = \frac{l_\tau \tilde{V}}{r \cos(\beta - \alpha)} \tag{27}$$

Дифференцируя (26) по безразмерному времени и подставляя во второе уравнение системы (15), получим выражение для величины $\tilde{u}_{pr}$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{pr} \quad &= \quad \frac{b}{h} \frac{tg(\beta - \alpha)}{k_3} \dot{\tilde{V}} + \frac{l_\tau}{h} \left[\frac{\frac{b}{r} - \frac{b}{h}\sin(\beta - \alpha)}{k_3 \cos^3(\beta - \alpha)} + k_2 tg(\beta - \alpha) \right] \tilde{V}^2 + \\ &+ \quad \frac{b}{h} \operatorname{tg}(\beta - \alpha) \tilde{V} \end{aligned} \tag{28}$$

Интегрируя (26) и (27), получим

$$\begin{aligned}
\alpha_{pr} &= \alpha_0 + \frac{l_\tau}{\tau h}\int\limits_0^t \tilde{V} tg(\beta-\alpha)dt = \alpha_0 + \frac{1}{h}\int\limits_0^t V tg(\beta-\alpha)dt \\
\beta_{pr} &= \beta_0 + \frac{l_\tau}{\tau r}\int\limits_0^t \frac{\tilde{V}}{\cos(\beta-\alpha)}dt = \beta_0 + \frac{1}{r}\int\limits_0^t \frac{V}{\cos(\beta-\alpha)}dt
\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь α_0 и β_0 – значения программных углов α и β при $t = 0$.
Таким образом, получены выражения (26), (28) и (29) для программных значений величин α, β и $\tilde{u}_D$, описывающих движение робота по окружности с некоторой скоростью $\tilde{V}$. Ускорение $\dot{\tilde{V}}$, которое входит в выражение (28), может быть вычислено путем численного дифференцирования показаний датчиков углов вращения ведущих колес.
Дальнейший анализ задачи предполагает процедуру линеаризации уравнений движения (14), (15) в окрестности построенного опорного программного движения и сведение задачи стабилизации к линейной задаче управления. Осуществление этой процедуры приводит к достаточно сложной нестационарной модели задачи управления, анализ которой затруднителен. Поэтому для решения этой задачи был использован упрощенный подход. В качестве алгоритма управления использовалась структура и значения параметров алгоритма стабилизации движения робота по прямолинейным участкам (23). Отличие состоит в том, что вместо значений курсового угла α, угловой скорости $\tilde{\omega}$ и напряжения $\tilde{u}_D$ использовались отклонения этих величин от их программных значений α_{pr}, $\tilde{\omega}_{pr}$, $\tilde{u}_{pr}$:

$$\tilde{u}_D = k_\varepsilon \tilde{\varepsilon} + k_\alpha(\alpha - \alpha_{pr}) + k_\omega(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_{pr}) + \tilde{u}_{pr} \tag{30}$$

Здесь $\tilde{\varepsilon}$ - нормализованное отклонение точки L от трассы, его программное значение равно нулю.
Замечание 1. Для простоты можно положить значения величин α_{pr}, ω_{pr}, $\tilde{u}_{pr}$ равными нулю, что приведет к статической ошибке, тем меньшей, чем больше коэффициент при отклонении от трассы k_ε.
Замечание 2. При движении с большой скоростью по криволинейным участкам трассы силы трения ведущих колес с полом могут выйти из конусов трения, в результате чего робот начнет заносить. Чтобы не допустить подобную ситуацию, можно в процессе движения контролировать значения сил реакции опоры с помощью модели (10), соответственно, снижая скорость движения при приближении допустимому пределу.
Замечание 3. Существенным геометрическим параметром, влияющим на траекторию движения робота по окружности, является отношение длины h выноса датчика трассы относительно линии колес к радиусу кривизны трассы r. Если $h/r > 1$, то для обеспечения непрерывного движения датчика трассы по полосе необходимо вводить интервалы попятного движения робота ($V < 0$), что усложняет систему управления. При большом отношении h/r движение робота по круговой траектории напоминает движение шатуна в кривошипно- шатунном механизме.
Рассмотрим режим, при котором датчик трассы (точка L) движется по окружности радиуса r с постоянной по абсолютной величине скоростью ν. Тогда $\beta = \nu\, t/r$ и из

(26), (27), возвращаясь к размерным переменным (13), имеем:

$$V = \nu \cos\left(\frac{\nu t}{r} - \alpha\right), \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\nu}{h} \sin\left(\frac{\nu t}{r} - \alpha\right) \tag{31}$$

Если $h/r \le 1$, то система (31) имеет решение, при котором ось корпуса составляет постоянный угол γ с касательной к траектории в точке L: $\gamma = \alpha - \beta$, а именно $\sin\gamma = h/r$ и $V = \nu\sqrt{1 - h^2/r^2}$.

Если $h/r > 1$, то стационарное по скорости решение отсутствует, причем при постоянном движении датчика трассы по окружности скорость V будет менять знак, что нежелательно, поскольку приводит к возвратным движениям мобильного робота. Отсюда следует рекомендация по выбору точки установки датчика трассы: расстояние от датчика трассы до линии колес h не должно превышать радиус кривизны трассы r.

Если в силу конструктивных ограничений датчик трассы должен располагаться снаружи робота, то при больших размерах робота это означает, что желательно ехать ведущими колесами впереди, что, в свою очередь, несколько усложняет задачу обеспечения устойчивости движения (см. раздел 2.1).

На рис. 2а и рис. 2б показаны результаты численного интегрирования системы (31) . Моделировался режим, при котором робот двигаясь по прямой со скоростью $V = 1/$ $(\omega = 0)$ въезжает по касательной на круговой участок трассы с радиусом кривизны $r = 1$ и движется по нему так, что скорость точки L постоянна по абсолютной величине и равна 1/. Интегрирование велось от момента въезда робота на круговой участок траектории до момента, когда точка L совершит полный оборот. Рассмотрены два случая: $h = 0.5$ (рис. 2а) и $h = 2$ (рис. 2б). Показаны зависимости от времени продольной скорости V (I), угловой скорости ω (II) и угла γ между осью робота и касательной к траектории в точке L (III). В первом случае $h/r = 0.5$ и движение робота асимптотически выходит на режим $V = const$, $\omega = const$, $\gamma = const$. Во втором случае $h/r = 2$, продольная скорость сначала положительна, затем становится отрицательной и потом снова положительной. Угловая скорость также меняет знак, а угол γ непрерывно растет и к концу оборота достигает значения около 290°.

3 Задача оптимального по быстродействию выезда мобильного робота в заданную точку

3.1 Содержание задачи

Рассматривается задача перевода мобильного робота из текущего положения в некоторое желаемое за минимальное время. Положение робота определяется координатами x_L, y_L некоторой точки L и курсовым углом α. В качестве точки L возьмем положение датчика трассы, расположенного на продольной оси робота на расстоянии h от центра базы колес (рис. 1).

Желаемое положение задается либо маяком, установленным над продолжением трассы после ее разрыва, либо одним или двумя маяками, определяющими очередной пункт следования. В случае двух маяков конечное положение задается точкой, находящейся посередине между маяками. Ориентация корпуса робота в конечной точке может быть либо произвольной – требуется только доехать, либо заданной, когда после завершения маневра робот должен продолжить движение в определенном направлении.

Координаты и ориентация робота (если она фиксируется) в конечной точке предполагаются известными. Эта информация может быть определена из регламента соревнований, либо путем использования навигационных алгоритмов счисления пути и ориентации робота с привлечением показаний угломерного датчика [4].

Совокупную математическую модель соответствующей задачи оптимального управления составляют:

1. Используемые уравнения движения мобильного робота.
2. Математические модели управляющих воздействий - управлений.
3. Начальное значение фазового вектора математической модели движения робота и его конечное значение.
4. Критерий оптимальности.

Принципиально можно выделить две постановки рассматриваемой задачи управления. Первая использует кинематические уравнения движения мобильного робота, где в качестве управлений используются либо скорости вращения левого и правого колеса, либо линейная комбинация этих параметров - продольная V и угловая ω скорости движения робота. Соответствующую постановку и управление будем называть кинематическим.

Вторая постановка использует кинематические и динамические уравнения движения, где в качестве управляющих воздействий рассматриваются напряжения u_R, u_L, подаваемые на двигатели левого и правого колеса. Эту постановку будем называть динамической.

3.2 Задача быстродействия на основе кинематической модели

Сделаем следующее замечание. Использование кинематической постановки задачи означает, что допускается безинерционное изменение продольной и угловой скорости робота, а также пренебрегается переходными процессами в цепях исполнительных устройств - двигателях колес.

Приведем нормализованные кинематические уравнения движения робота (14):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_L &= \tilde{V}\cos\alpha - k_0\tilde{\omega}\sin\alpha \\ \dot{\tilde{y}}_L &= \tilde{V}\sin\alpha + k_0\tilde{\omega}\cos\alpha \\ \dot{\alpha} &= \tilde{\omega} \end{aligned} \qquad (32)$$

В качестве управлений для этой динамической системы будем рассматривать продольную $\tilde{V}$ и угловую $\tilde{\omega}$ скорости мобильного робота. По мнению авторов такой выбор управляющих воздействий (а не отдельно скоростей вращения левого и правого колес) удобен тем, что позволяет декомпозировать систему управления роботом на каналы управления продольным и боковым движением.

Для управляющих воздействий примем следующую модель:

$$0 \leq \tilde{V} \leq 1, \qquad |\tilde{\omega}| \leq \omega_0 = const \tag{33}$$

Тем самым не допускается движение робота назад. Ограниченность управлений сверху определяется конечной мощностью двигателей колес.

Будем считать функции $\tilde{V}$ и $\tilde{\omega}$ кусочно-непрерывными, значения которых могут претерпевать разрывы, оставаясь внутри заданных выше пределов.

Без ограничения общности будем считать, что в начальный момент точка L находится в начале координат и ось корпуса робота совпадет с осью OX (см. рис. 3):

$$x_L(0) = y_L(0) = \alpha(0) = 0 \tag{34}$$

Зададим координаты конечной точки:

$$x_L(T) = x_1, \qquad y_L(T) = y_1 \tag{35}$$

Если ориентация робота в конечной точке фиксируется, то:

$$\alpha(T) = \alpha_1 \tag{36}$$

Здесь T - время достижения роботом финальной точки.

Требуется построить допустимое управление $\tilde{V}(\tilde{t})$, $\tilde{\omega}(\tilde{t})$, переводящее систему (32) из начального положения (34) в заданное (35), (36) за минимальное время. Это – задача построения оптимального по быстродействию управления.

Для решения этой задачи воспользуемся принципом максимума Л.С.Понтрягина [6], [7]. Запишем функцию H и сопряженную к (32) систему

$$\begin{aligned} H &= \psi_x \left(\tilde{V}\cos\alpha - k_0\tilde{\omega}\sin\alpha\right) + \psi_y \left(\tilde{V}\sin\alpha + k_0\tilde{\omega}\cos\alpha\right) + \psi_\alpha\tilde{\omega} \\ \dot{\psi}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{\psi}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ \dot{\psi}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \psi_x \left(\tilde{V}\sin\alpha + k_0\tilde{\omega}\cos\alpha\right) - \psi_y \left(\tilde{V}\cos\alpha - k_0\tilde{\omega}\sin\alpha\right) \end{aligned} \tag{37}$$

Если ориентация корпуса робота в конечной точке не фиксируется, то для сопряженной переменной ψ_α справедливо следующее условие трансверсальности

$$\psi_\alpha(T) = 0 \tag{38}$$

Из (37) следует, что ψ_x и ψ_y являются константами. Если ψ_x и ψ_y не равны нулю одновременно, то их можно представить в виде

$$\psi_x = \cos\alpha^*, \qquad \psi_y = \sin\alpha^*, \qquad \psi_x^2 + \psi_y^2 = 1 \tag{39}$$

поскольку сопряженные функции определены с точностью до общего множителя.

С учетом (39) система (37) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} H &= \tilde{V}\cos(\alpha - \alpha^*) + [\psi_\alpha - k_0\sin(\alpha - \alpha^*)]\,\tilde{\omega} \\ \dot{\psi}_\alpha &= \tilde{V}\sin(\alpha - \alpha^*) + k_0\cos(\alpha - \alpha^*)\,\tilde{\omega} \end{aligned} \tag{40}$$

3.2.1 Вид оптимальных управлений

Исходя из принципа максимума Понтрягина, получим следующий вид оптимальных управлений

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{opt} &= 0 \qquad \cos(\alpha-\alpha^*)<0 \\ \tilde{V}^{opt} &= 1 \qquad \cos(\alpha-\alpha^*)>0 \\ \tilde{\omega}^{opt} &= sign(\psi_\alpha - k_0\sin(\alpha-\alpha^*)) \end{aligned} \tag{41}$$

Рассмотрим вопрос о существовании особых управлений [9]. Здесь сразу отметим, что невозможен особый режим, при котором в течение конечного интервала времени продольная скорость $\tilde{V}^{opt}$ лежит внутри допустимой области значений $0<\tilde{V}<1$. Действительно, если допустить это, то коэффициент при $\tilde{V}$ в функции Понтрягина H должен равняться нулю: $\cos(\alpha-\alpha^*)=0$. Тогда $\dot{\alpha}=\tilde{\omega}=0$ и $\sin(\alpha-\alpha^*)=\pm 1$. Следовательно, угловая скорость также лежит не на границе допустимой области. Поэтому коэффициент $\psi_\alpha - k_0\sin(\alpha-\alpha^*)$ также должен равняться нулю, то есть $\psi_\alpha=\pm k_0$. Тогда из второго уравнения(40) следует, что $\tilde{V}^{opt}=0$. Это - полная остановка. Очевидно, что такой режим не может быть частью оптимальной траектории. Отсюда, в частности следует, что $\tilde{V}^{opt}$ кусочно-постоянная функция.

Пусть $\tilde{\omega}^{opt}$ – особое управление. Тогда необходимым условием оптимальности является [9]:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right)=0, \quad \ldots, \quad \frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right)=0 \tag{42}$$

где $2q$ – порядок производной в которой в первой раз аргумент $\tilde{\omega}$ появляется в явном виде.

В нашем случае $q=1$. Должно также выполняться условие Келли

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = 0, \qquad (-1)^q\frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left(\frac{\partial H}{\partial \omega}\right)\right] \le 0 \tag{43}$$

Условия (42), (43) примут вид

$$\begin{aligned} \psi_\alpha - k_0\sin(\alpha-\alpha^*) &= 0, \qquad \tilde{V}\sin(\alpha-\alpha^*)=0 \\ \tilde{V}\cos(\alpha-\alpha^*)\tilde{\omega} &= 0, \qquad \tilde{V}\cos(\alpha-\alpha^*)\ge 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Если $\tilde{V}=0$, то из (40) и (44) следует $H=0$, что для задачи быстродействия невозможно. Следовательно $\tilde{V}=1$. Тогда

$$\alpha=\alpha^*+2\pi n, \quad \psi_\alpha=0, \quad \tilde{\omega}^{opt}=0, \quad \tilde{V}^{opt}=1, \tag{45}$$

что соответствует движению с максимальной скоростью по прямой в направлении, заданным углом α^*.

Итак, решение сформулированной выше задачи оптимального управления сводится к решению систем (32), (37) с условиями на управление (41) или (45), начальными условиями (34), граничными условиями (35) и (36) и, возможно, условием трансверсальности (38).

Полученные выше структуры (41), (45) оптимальных управлений $\tilde{V}^{opt}$, $\tilde{\omega}^{opt}$ позволяют выделить три допустимых оптимальных режима движения мобильного робота, которые имеют простую геометрическую интерпретацию (далее акцент ^{opt} опускаем):

1. Разворот робота на месте: $\tilde{V} = 0$, $|\tilde{\omega}| = \omega_0$. В этом случае точка C пересечения линии колес с осью корпуса (центр базы колес) неподвижна, а точка L движется вокруг этой точки по окружности радиуса h.

2. Разворот с одновременным движением вперед: $\tilde{V} = 1$, $|\tilde{\omega}| = \omega_0$. При этом центр базы колес движется по окружности радиуса $r = l_\tau/\omega_0$ с центром, расположенным на линии колес слева или справа от аппарата. Точка L движется по окружности радиуса $r_L = \sqrt{r^2 + h^2}$ с центром в той же точке.

3. Движение по прямой с максимальной допустимой скоростью: $\tilde{V} = 1$, $\tilde{\omega} = 0$.

Далее будем строить траектории выезда робота в конечную точку путем "склейки"описанных выше допустимых оптимальных траекторий, показывая при этом, что полученные решения также удовлетворяют принципу максимума. Определяемые решения зависят от взаимного начального и конечного положения робота.

3.2.2 Конечная точка находится перед роботом, финальная ориентация корпуса робота не фиксирована

Без ограничения общности будем считать, что конечная точка движения – точка A с координатами x_1, y_1 (рис. 3), находится в верхней полуплоскости: $y_1 \geq 0$. Рассмотрим случай, когда точка A находится перед роботом и достаточно удалена от него. Под этим будем понимать (см. рис. 3), что

- конечная точка A лежит вне окружности, описываемой точкой L при движении робота в сторону точки A с максимальной продольной и экстремальной угловой скоростью.

- точка А находится справа от вертикальной касательной к окружности, описываемой центром C базы колес при указанном выше движении. Это означает, что угол α^* между продольной осью робота и касательной, проведенной из точки A к этой окружности не превосходит по модулю 90°.

Тогда

$$x_1 \geq r - h, \qquad r = \frac{l_\tau}{\omega_0} \tag{46}$$

Построим траекторию, соединяющую начальную и финальную точки путем "склейки"двух допустимых оптимальных траекторий (п. 3.2.1): разворота в сторону точки A с одновременным движением вперед и движения по прямой на точку A, когда продольная ось робота точно направлена на эту точку.

Геометрическое решение задачи таково. Построим две концентрические окружности радиусом r и r_L с центром в точке с координатами $(-h, r)$ (см. рис. 3).

Меньшая окружность, радиуса r, проходит через центр базы колес, а большая, радиуса r_L, проходит через точку L. Как уже отмечалось, точка A лежит вне окружности большего радиуса. Проведем касательную из точки A к меньшей окружности, как показано на рис. 3. Эта касательная пересекает большую окружность в точке B. Если $\tilde{V} = 1$ и $\tilde{\omega} = \omega_0$, то точка L движется из центра координат по окружности большего радиуса против часовой стрелки в сторону точки A. В момент попадания точки L в точку B продольная ось робота совпадает с прямой BA. Если в этот момент переключиться на особую траекторию (45), то аппарат продолжит движение по прямой BA до попадания в финальную точку.

Траектория точки L показана на рис. 3 жирной линией. Покажем, что предлагаемое решение удовлетворяет принципу максимума.

Положим $\psi_x = \cos\alpha^*$, $\psi_y = \sin\alpha^*$, где α^* - угол наклона прямой BA к оси OX:

$$\alpha^* = arcsin\frac{r}{\sqrt{(x_1+h)^2+(y_1-r)^2}} + arctg\frac{y_1-r}{x_1+h} \tag{47}$$

Зададим начальные условия для сопряженной переменной ψ_α так, чтобы $\psi_\alpha = 0$ в момент, когда точка L находится в точке B. Тогда движение робота по прямой BA со скоростью $\tilde{V} = 1$ является особым режимом (45), удовлетворяющим принципу максимума. Это движение удовлетворяет также граничным условиям на правом конце (35) и условию трансверсальности (38).

Рассмотрим теперь движение робота до попадания точки L в точку B. По предположению точка A находится справа или принадлежит правой вертикальной касательной к окружности меньшего радиуса. Значит, $0 \le \alpha^* \le \pi/2$. Кроме того, при движении до точки B выполняется условие $0 \le \alpha \le \alpha^*$. Следовательно, $|\alpha - \alpha^*| \le \pi/2$, причем равенство может достигаться только в точке старта.

Если коэффициент при $\tilde{V}$ в функции Понтрягина H (40) равен нулю (при $|\alpha - \alpha^*| = \pi/2$), то допустимо любое возможное значение скорости. Следовательно, из (41) можно заключить, что значение $\tilde{V} = 1$ удовлетворяет принципу максимума на всем рассматриваемом интервале движения.

Покажем, что на этом интервале значение $\tilde{\omega} = \omega_0$ также удовлетворяет принципу максимума. Для этого надо определить знак коэффициента при угловой скорости $\tilde{\omega}$ в функции H. Возьмем производную от этого коэффициента:

$$\frac{d}{d\tilde{t}}\left[\psi_\alpha - k_0\sin(\alpha - \alpha^*)\right] = \tilde{V}\sin(\alpha - \alpha^*) \tag{48}$$

Поскольку на участке траектории от старта до попадания точки L в точку B значение $\tilde{V} = 1$ и $-\pi/2 \le \alpha - \alpha^* \le 0$, то производная отрицательна внутри рассматриваемого интервала. В конце интервала значение коэффициента равно нулю, поскольку в этот момент $\alpha = \alpha^*$ и $\psi_\alpha = 0$. Значит внутри интервала коэффициент $[\psi_\alpha - k_0\sin(\alpha - \alpha^*)] > 0$ и величина $\tilde{\omega} = \omega_0$ удовлетворяет принципу максимума.

Проверим также, что на построенной траектории функция H (40) положительна. Проверку достаточно провести в одной точке, например в момент, когда точка L находится в точке B. Легко видеть, что в этот момент значение функции H равно 1. Таким образом доказано, что построенная траектория удовлетворяет необходимому условию оптимальности.

Подчеркнем, что для рассмотренного случая решена и задача синтеза: аппарат должен разворачиваться в сторону "цели"одновременно с движением вперед до момента, когда конечная точка окажется на оси корпуса аппарата и затем двигаться по прямой до попадания в эту точку.

3.2.3 Конечная точка находится сзади, финальная ориентация корпуса робота не фиксирована

По-прежнему, будем считать, что конечная точка A (x_1, y_1) находится в верхней полуплоскости и достаточно удалена от робота в начальный момент (рис. 4). Пусть

$$x_1 < r - h, \qquad r = \frac{l_\tau}{\omega_0} \tag{49}$$

то есть конечная точка находится "сзади". (Указанное взаимное расположение конечной точки и корпуса робота будет дополнительно детализировано ниже).
Напомним, что для построения оптимальной траектории выезда робота в конечную точку предлагается использовать "склейку"допустимых оптимальных траекторий (41), (45), показывая при этом, что определяемое интегральное решение удовлетворяет принципу максимума.
Естественно предположить, что для рассматриваемой задачи комбинированная траектория будет выглядеть следующим образом:

1. Поскольку не допускается движение робота назад ($0 \le \tilde{V} \le 1$), то движение начинается с разворота на месте корпуса робота в сторону конечной точки. Признаком окончания этого маневра служит условие, когда эта точка станет видна под углом $90°$ относительно продольной оси робота. Последнее означает, что выполнится условие $x_1 = r - h$ в системе координат, связанной с роботом.

2. Далее происходит переключение на траекторию, построенную в предыдущем параграфе, поскольку в момент переключения конечная точка будет уже располагаться перед роботом. Именно этому случаю и соответствует предлагаемый фрагмент траектории.

Таким образом, вся траектория будет состоять из трех участков: разворота на месте, разворота с движением вперед и движения по прямой.
Приведем геометрическое построение траектории.
Построим окружность радиусом h с центром в точке O_1 – середине базы колес (рис. 4). По этой окружности движется точка L при развороте корпуса робота на месте. Назовем эту окружность Ω_1.
После переключения на режим разворота с движением вперед аппарат будет вращаться вокруг точки, расположенной на линии колес слева от аппарата на расстоянии r от середины базы колес. Таким образом, геометрическое место точек, в которых может располагаться центр вращения, представляет собой окружность радиуса r с центром в точке O_1 – окружность Ω_2.
Построим верхнюю касательную к Ω_2 из точки A. Пусть B – точка касания.
Построим окружность Ω_3 радиусом r, проходящую через точку O_1 и касающуюся прямой AB в точке, расположенной между точками A и B. Обозначим центр этой окружности O_2.

Построим окружность Ω_4 радиусом r_L, с центром в точке O_2.
Верхняя точка пересечения окружностей Ω_1 и Ω_4 – точка C (можно показать, что при условии (49) окружность Ω_4 пересекает окружность Ω_1, причем точка пересечения C лежит на прямой O_1B). Точка пересечения окружности Ω_4 с прямой AB, ближняя к точке A – точка E.
Конкретизируем условие удаленности конечной точки от робота в момент старта: точка A должна находиться вне окружности Ω_4.
Прямая O_1B составляет с осью OX угол β:

$$\beta = arcsin\frac{r}{\sqrt{y_1^2 + (x_1+h)^2}} - arctg\frac{x_1+h}{y_1} \tag{50}$$

Прямая AB составляет с осью OX угол α^*:

$$\alpha^* = \beta + \frac{\pi}{2} \tag{51}$$

При движении по описанной выше траектории точка L движется из начала координат по дуге окружности OC, затем по дуге CE окружности Ω_4, при этом центр базы колес движется по дуге O_1D окружности Ω_3. На последнем участке точка L движется по прямой EA до попадания в конечную точку. Траектория точки L отмечена на рис. 4 жирной линией.
Покажем, что построенная таким образом траектория удовлетворяет принципу максимума. Построенный режим содержит две точки переключения. В момент первого переключения датчик трассы робота находится в точке C, ось робота расположена на прямой O_1B. Конечная точка A "видна"из точки B – точки, расположенной на оси робота и отстоящей от линии колес на r, – под углом 90°. Таким образом, в системе координат, связанной с роботом, выполняется условие (46). Следовательно, траектория, построенная в предыдущем параграфе и состоящая из разворота с движением вперед и движения по прямой, удовлетворяет необходимому условию оптимальности. Покажем, что вся траектория, включая начальный разворот на месте, удовлетворяет этому условию.
Зададим сопряженные функций также, как и в разделе 3.2.2: $\psi_x = \cos\alpha^*$, $\psi_y = \sin\alpha^*$, а начальное условие по ψ_α таково, что $\psi_\alpha = 0$, в момент, когда точка L робота находится в точке переключения на движение по прямой – в точке E.
Рассмотрим участок разворота на месте – интервал времени, при котором точка L движется по дуге OC. Легко показать, что при этом $\pi/2 \le \alpha^* - \alpha \le 3\pi/2$, то есть $\cos(\alpha^* - \alpha) < 0$.
Тогда, в соответствии с (41), значение $\tilde{V} = 0$ удовлетворяет принципу максимума. При $\tilde{V} = 0$ производная от коэффициента при угловой скорости в $\tilde{\omega}$ функции H (48) равна нулю, а значение коэффициента положительно, как и в начале следующего интервала движения. Следовательно, на этом интервале максимальная угловая скорость $\tilde{\omega} = \omega_0$ удовлетворяет принципу максимума, что и требовалось доказать.

3.2.4 Финальная ориентация корпуса робота задана. Конечная точка находится перед роботом

Пусть после перемещения в заданную точку мобильный робот должен продолжить движение в определенном направлении, например, по трассе, которая начинается в этой точке. Тогда финальная ориентация корпуса робота будет определяться направлением касательной к трассе в данной точке.

Рассмотрим соответствующую задачу оптимального управления.

Приводимое ниже построение оптимальной траектории соответствует случаю, когда конечная точка находится спереди от робота, на достаточном расстоянии (расстояние до конечной точки больше характерных размеров робота), и когда финальная ориентация робота не существенно отличается от финальной ориентации при выезде в конечную точку по оптимальной траектории, описанной в п. 3.2.2. В соревнованиях этот случай типичен.

Если выполнены некоторые условия (о которых будет сказано в дальнейшем) на взаимное положение начальной и конечной точек, финальную ориентацию робота, то траекторию, удовлетворяющую принципу максимума, можно построить из трех участков:

- разворота с движением вперед;
- движения по прямой;
- второго участка разворота в ту же сторону с движением вперед.

Как и ранее, приведем геометрическое построение этой траектории. Пусть конечная точка A с координатами x_1, y_1 (рис. 5) находится в верхней полуплоскости. Курсовой угол в момент попадания точки L в точку A задан и равен α_1. Проведем через финальную точку A прямую под углом α_1 к оси OX. Отложим на этой прямой отрезок AE длиной h как показано на рис. 5. В конечный момент времени центр базы колес робота расположен в точке E. Проведем окружность Ω_1 радиусом r, касающуюся прямой AE в точке E. Центр окружности Ω_1 расположен в точке O_1 с координатами x_2, y_2:

$$x_2 = x_1 - h\cos\alpha_1 - r\sin\alpha_1, \quad y_2 = y_1 - h\sin\alpha_1 + r\cos\alpha_1 \tag{52}$$

Построим окружность Ω_2 радиусом r с центром в точке O_2 с координатами $(-h, r)$. Проведем общую касательную к окружностям Ω_1 и Ω_2, как показано на рис. 5. Обозначим точки касания окружностей Ω_1, Ω_2 через F и G соответственно. Угол α^* наклона прямой FG равен

$$\alpha^* = arctg\frac{y_2 - r}{x_2 + h} \tag{53}$$

Координаты (x_3, y_3) точки F таковы:

$$x_3 = x_2 + r\sin\alpha^*, \quad y_3 = y_2 - r\cos\alpha^* \tag{54}$$

Проведем две окружности Ω_3 и Ω_4 с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусом $r_L = \sqrt{h^2 + r^2}$. Обозначим точки пересечения окружностей Ω_3, Ω_4 с прямой FG, расположенные ближе к точке A через C и B соответственно.

Пусть выполнены следующие условия:

1). Точка C находится вне окружности Ω_4:

$$r_L < \sqrt{(x_3 + h\cos\alpha^* + h)^2 + (y_3 + h\sin\alpha^* - r)^2} \tag{55}$$

2).

$$0 \le \alpha^* \le \frac{\pi}{2} \tag{56}$$

3).

$$\alpha^* \le \alpha_1 \le \alpha^* + \frac{\pi}{2} \tag{57}$$

Покажем, что движение робота с максимальной продольной скоростью, при котором точка L описывает траекторию, состоящую из дуги окружности OB, отрезка прямой BC и дуги окружности CA, удовлетворяет принципу максимума. Эта траектория показана на рис. 5. жирной линией. На всех трех участках траектории $\tilde{V} = 1$, на первом и последнем участках $\tilde{\omega} = \omega_0$, на среднем – $\tilde{\omega} = 0$. По построению траектория точки L проходит через точку старта и финальную точку и в финальной точке $\alpha = \alpha_1$, значит это движение удовлетворяет граничным условиям (34), (35), (36). Положим, как и ранее, $\psi_x = \cos\alpha^*$, $\psi_y = \sin\alpha^*$ (см. (53)). Поскольку на всей траектории $0 \le \alpha \le \alpha_1$, то из (56) следует, что $\cos(\alpha - \alpha^*) \ge 0$. Если неравенство выполняется строго, то согласно (41) значение $\tilde{V} = 1$ удовлетворяет принципу максимума. При $\cos(\alpha - \alpha^*) = 0$ возможно любое допустимое значение скорости, следовательно, максимальное значение продольной скорости удовлетворяет принципу максимума на всех трех участках траектории. Зададим начальное значение функции ψ_α так, чтобы $\psi_\alpha = 0$ при попадании точки L в точку B. Тогда, аналогично ранее рассмотренным случаям, $\tilde{\omega} = \omega_0$ удовлетворяет условию (41) на первом участке траектории, а $\tilde{\omega} = 0$ удовлетворяет условию (45) при движении точки L по отрезку BC.

Поскольку на последнем участке разворота (при движении точки L по дуге CA) $\alpha^* \le \alpha_1 \le \alpha^* + \frac{\pi}{2}$, то производная от коэффициента при $\tilde{\omega}$ в функции H (48) положительна (за исключением только начальной и, может быть, конечной точки). Так как в начальной точке коэффициент равен нулю, то внутри рассматриваемого интервала он положителен, значит $\tilde{\omega} = \omega_0$ удовлетворяет условию (41). Следовательно, все построенное движение удовлетворяет принципу максимума. Таким образом, если выполняются условия (55)-(57), то аппарат все время до попадания в желаемую точку должен двигаться с максимальной продольной скоростью $V = V_n$. Сначала следует разворачиваться в сторону "цели"с максимальной угловой скоростью $\omega = \omega_0/\tau$ до момента, когда курсовой угол станет равным α^* (53). Затем нужно двигаться по прямой ($\omega = 0$) до момента, когда центр базы колес попадет в точку F (см. 54), при этом точка L попадет в точку C, принадлежащую окружности Ω_3. В этот момент следует снова начать разворачиваться в ту же сторону ($\omega = \omega_0/\tau$) и двигаться в этом режиме до попадания в желаемую точку.

Для других сочетаний финальной ориентации робота и взаимного расположения начальной и конечной точек, определяемые решения могут качественно отличаться друг от друга. Так, если начальная и конечная точки достаточно близки, то решение возможно не будет содержать участка прямолинейного движения. Если финальная ориентация сильно отличается от общего направления выезда робота в конечную точку, то оптимальная траектория может содержать участок разворота робота на месте в конечной точке и т.п.

В данной работе не ставилась цель рассмотрения всех возможных сочетаний начальных, конечных условий и соответствующих им оптимальных траекторий. Последовательное их рассмотрение достаточно трудоемко и может составить предмет отдельного научного исследования. Было важно рассмотреть типовой случай, встречающийся в практике робототехнических соревнований, который и был рассмотрен.

3.3 Сравнение решения одной задачи быстродействия на основе кинематической и динамической моделей

В предыдущем разделе рассматривалась кинематическая постановка задачи. Все результаты были получены при двух допущениях:

1. Предполагалось, что можно пренебречь временем выхода скоростей вращения колес на установившиеся значения. Фактически это означает, что считается малым изменение конфигурационных координат робота за время, пока его скорости выходят на установившиеся значения.

2. Предполагалось, что ограничены независимо продольная и угловая скорости аппарата.

При динамической постановке задачи управления следует накладывать ограничения на напряжения, подаваемые на двигатели ведущих колес. При этом оказывается, что максимальная угловая скорость возникает при нулевой продольной скорости и наоборот, максимальная продольная скорость – при нулевой угловой.
Поэтому интересно оценить, насколько полученные результаты для кинематической модели соответствуют более реалистичной динамической модели движения мобильного робота.
Ограничимся случаем, когда финальная ориентация робота не фиксирована и на скорость робота в конечной точке не накладывается никаких ограничений.
Рассмотрим систему уравнений движения робота (13)-(15). Заменим в (15) напряжения $\tilde{u}_S$, $\tilde{u}_D$ на нормированные напряжения на двигателях колес $\tilde{u}_R$, $\tilde{u}_L$:
$\tilde{u}_R = u_R/u_n$, $\tilde{u}_L = u_L/u_n$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{V}} &= -\tilde{V} + k_1 k_2 \tilde{\omega}^2 + \frac{\tilde{u}_R}{2} + \frac{\tilde{u}_L}{2} \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -k_3 \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\tilde{V}\right)\tilde{\omega} + \frac{k_3}{2k_1}\tilde{u}_R - \frac{k_3}{2k_1}\tilde{u}_L \end{aligned} \qquad (58)$$

Введем ограничения на управление

$$|\tilde{u}_R| \le 1, \qquad |\tilde{u}_L| \le 1 \qquad (59)$$

Будем считать функции $\tilde{u}_R$, $\tilde{u}_L$ кусочно-непрерывными.
Пусть, как и раньше, в начальный момент времени точка L находится в начале координат и аппарат ориентирован по оси OX. Рассмотрим случай, когда в конце

траектории задано только положение точки L, а ориентация аппарата и его скорость могут быть любыми. Тогда граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} x_L(0) &= y_L(0) = \alpha(0) = 0, \qquad V(0) = V_0, \qquad \omega(0) = \omega_0 \\ x_L(T) &= x_1, \qquad y_L(T) = y_1 \end{aligned} \tag{60}$$

Здесь V_0 и ω_0 - начальная продольная и угловая скорости робота, x_1, y_1 - координаты конечной точки, T - время попадания в эту точку.
Требуется построить допустимое управление $\tilde{u}_R$, $\tilde{u}_L$, переводящее систему (14), (58) из начального положения в заданное (60) за минимальное время.
Как и раньше, для решения этой задачи воспользуемся принципом максимума Л.С.Понтрягина [6]. Запишем функцию H и сопряженную систему к системе (14), (58):

$$\begin{aligned} H &= \left(\tilde{V}\cos\alpha - k_0\tilde{\omega}\sin\alpha\right)\psi_x + \left(\tilde{V}\sin\alpha + k_0\tilde{\omega}\cos\alpha\right)\psi_y + \tilde{\omega}\psi_\alpha + \\ &+ \left(-\tilde{V} + k_1k_2\tilde{\omega}^2 + \frac{\tilde{u}_R}{2} + \frac{\tilde{u}_L}{2}\right)\psi_V + \\ &+ k_3\left[-\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\tilde{V}\right)\tilde{\omega} + \frac{\tilde{u}_R}{2k_1} - \frac{\tilde{u}_R}{2k_1}\right]\psi_\omega \end{aligned} \tag{61}$$

Поскольку H по-прежнему не зависит от x и y, обозначим, как и раньше, $\psi_x = \cos\alpha^*$ $\psi_y = \sin\alpha^*$. Тогда

$$\begin{aligned} H &= \tilde{V}\cos(\alpha-\alpha^*) + \left[\psi_\alpha - k_0\sin(\alpha-\alpha^*)\right]\tilde{\omega} - \tilde{V}\psi_V + k_1k_2\tilde{\omega}^2\psi_V - \\ &- k_3\left(1 + \frac{k_2}{k_3}\tilde{V}\right)\tilde{\omega}\psi_\omega + \frac{\tilde{u}_R}{2}\left(\psi_V + \frac{k_3}{k_1}\psi_\omega\right) + \tilde{u}_L\left(\psi_V - k_1k_3\psi_\omega\right) \\ \dot{\psi}_\alpha &= \tilde{V}\sin(\alpha-\alpha^*) + k_0\tilde{\omega}\cos(\alpha-\alpha^*) \\ \dot{\psi}_V &= -\cos(\alpha-\alpha^*) + \psi_V + \frac{k_2k_3}{k_1}\tilde{\omega}\psi_\omega \\ \dot{\psi}_\omega &= -\psi_\alpha + k_0\sin(\alpha-\alpha^*) - 2k_1k_2\tilde{\omega}\psi_V + k_3(1 + \frac{k_2}{k_1}\tilde{V})\psi_\omega \end{aligned} \tag{62}$$

Исходя из принципа максимума, получим

$$\tilde{u}_R = sign\left(\psi_V + \frac{k_3}{k_1}\psi_\omega\right), \qquad \tilde{u}_L = sign\left(\psi_V - \frac{k_3}{k_1}\psi_\omega\right) \tag{63}$$

Таким образом, мы приходим к краевой задаче для системы (14), (58), (62) с условиями на управление (63) и граничными условиями (60), которые должны быть дополнены условиями трансверсальности на правом конце:

$$\psi_\alpha(T) = 0, \qquad \psi_V(T) = 0, \qquad \psi_\omega(T) = 0 \tag{64}$$

Эта задача решалась численно при параметрах аппарата (17), (18).
Решение отыскивалось на классе управлений с одним переключением. На внешнее по отношению к повороту колесо (правое) постоянно "подавалось"максимальное напряжение: $\tilde{u}_R = 1$, на внутреннее (левое) колесо сначала

"подавалось"минимальное напряжение: $\tilde{u}_L = -1$, а затем – максимальное: $\tilde{u}_L = 1$.
Начальные значения фазовых координат задавались следующим образом:

$$x_L(0) \;=\; y_L(0) = \alpha(0) = 0, \qquad \tilde{V}(0) = 1, \qquad \tilde{\omega}(0) = 0 \tag{65}$$

Это наиболее часто встречающийся случай во время соревнований, когда очередной этап проезда заканчивается движением по прямой с максимальной скоростью.
Были построены две траектории с координатами финальных точек $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Финальная ориентация не фиксировалась. Задача была сведена к поиску нуля 6-ти мерной функции невязки, зависящей от 6 аргументов. Компонентами функции невязки являлись: отклонение робота от желаемого по координатам x и y; значения сопряженных функций ψ_α, ψ_V , ψ_ω в конце интегрирования и значение коэффициента $\psi_V - \frac{k_3}{k_1}\psi_\omega$ в момент переключения.
Аргументами функции невязки являлись: время интегрирования; время переключения,; начальные значения сопряженных переменных ψ_α, ψ_V, ψ_ω и значение угла α^*.
Затем для найденного решения проверялось, что коэффициент $\psi_V + \frac{k_3}{k_1}\psi_\omega$ неотрицателен на всей траектории, а коэффициент $\psi_V - \frac{k_3}{k_1}\psi_\omega$ неположителен до момента переключения и не отрицателен после.
На рис. 6, рис. 6 тонкой линией показаны построенные траектории точки L для двух указанных положений финальной точки. Жирной линией нарисованы аналогичные траектории, полученные при кинематической постановке задачи.
На рис. 7 приведены зависимости от времени курсового угла (), продольной () и угловой скорости (), а также коэффициентов при $\tilde{u}_R$ (I) и $\tilde{u}_L$ (II) в функции H (62) (). Жирной линией нарисованы кривые, относящиеся к траектории с координатами конечной точки $(0, 1)$, тонкой – $(1, 1)$. Время и скорости - безразмерные.
Для траектории, заканчивающейся в точке $(0, 1)$ безразмерное время переключения и попадания в финальную точку равны соответственно 0.57 и 1.59, а для второй траектории - 0.26 и 2.07 соответственно. Соответствующие промежутки времени при кинематической постановке задачи составляют 0.58 и 0.95 для первой точки и 0.27, 1.77 для второй.
Видно, что для обеих траекторий время переключения меньше постоянной времени τ и скорость аппарата не успевает выйти на установившейся режим. В частности поэтому, количественно решение для динамической модели нашего робота отличается от решения при кинематической постановке задачи. Например, в случае финальной точки $(0, 1)$ курсовой угол α, при котором происходит переключение управления, равен 39° для динамической модели и 76° – для кинематической, а в случае финальной точки $(1, 1)$ - 10° и 36° соответственно. Заметим, впрочем, что время переключения оказалось близким для обеих моделей.
Таким образом, качественно, оптимальные траектории для рассмотренных частных случаев в кинематической и динамической постановке оказались близки.

4 Некоторые аспекты программно-аппаратной реализации системы управления мобильным роботом

4.1 Аппаратная реализация системы управления

Система управления включает микропроцессорную плату, составляющую нижний уровень системы и универсальный компьютер (во время соревнований - Notebook), составляющий верхний уровень. Нижний уровень предназначен для сбора сенсорной информации и формирования широтно-модулированных сигналов для управления электродвигателями. Вся обработка сигналов происходит на верхнем уровне.

Длительность цикла управления задается на нижнем уровне и составляет $5-7$. С таким промежутком времени нижний уровень посылает на верхний информацию об углах поворота и скоростях вращения ведущих колес. В ответ на это сообщение верхний уровень выполняет вычисления, составляющие один цикл управления, и посылает на нижний уровень значения напряжений, которые надо подать на двигатели. Нижний уровень посылает информацию о показаниях других датчиков асинхронно с меньшей частотой при обновлении соответствующей информации.

4.1.1 Измерительная система

Робот оборудован импульсными датчиками вращения ведущих колес. Разрешающая способность датчиков - 2000 или 400 градаций на оборот колеса, что при радиусе колеса 75 соответствует приблизительно 1.1 или 5.5 пройденного пути. Кроме числа импульсов, измеряется также промежуток времени, за который колесо поворачивается на угол между соседними рисками импульсного датчика, тем самым, измеряется скорость вращения колеса. При номинальной скорости вращения точность измерения скорости не хуже 1%.

Угол направления на излучающий или отражающий маяк относительно продольной оси аппарата измеряется с помощью вращающейся оптической системы - "глаза". "Глаз"представляет собой спаренные излучатель и детектор излучения. Излучатель - это светодиод, расположенный в фокусе линзы, приемник - фотодиод, расположенный в фокусе такой же линзы. Угловое разрешение глаза равно приблизительно 1°.

"Глаз"непрерывно вращается со скоростью $3-5/$, при этом с частотой около 2 включается и выключается излучатель. Сигнал фотоприемника опрашивается до и после включения излучателя. Если сигнал достаточно велик до включения, значит "глаз"видит активный маяк, если есть заметная реакция на включение излучателя, – значит "глаз"направлен на светоотражающий маяк. После того, как обнаружен маяк, нижний уровень посылает значение угла визирования на верхний уровень.

Для измерения величины отклонения аппарата от трассы в настоящее время используется малогабаритная видеокамера. Камера закреплена неподвижно на роботе, видимая область на полигоне представляет собой трапецию, обращенную малым основанием к роботу. Первичная обработка видеосигнала производится на нижнем уровне. С помощью специализированного аналогового блока из сигнала выделяются кадровые и строчные синхроимпульсы и сигнал яркости, который поступает на вход порогового детектора. В результате, формируются три логических (цифровых) сигнала: сигнал начала кадра, сигнал начала очередной строки и сигнал, указывающий яркость точек строки: белое/черное. Эти три логических сигнала поступают на вход микропроцессора, который их непрерывно опрашивает. Из всего кадра анализируются только несколько строк - от 1 до 6. Определяется цвет фона (значение яркости в начале строки), а также число переключений яркости и время переключений, отсчитанное от начала строки. Измеренные величины по каждой из анализируемых строк передаются на верхний уровень. Значение времени переключения пропорционально расстоянию до границы полосы, отсчитанному от стороны трапеции - области видения вдоль линии, соответствующей данной строке. Точность определения расстояния составляет около 1% от длины отрезка – строки. Период обновления информации равен периоду следования полукадров в видеосигнале – 20. В будущем предполагается проводить обработку видеосигнала на более мощном микропроцессоре, что позволит решать более сложные задачи анализа сцены и использовать видеокамеру не только для детектирования полосы (трассы). Кроме перечисленных, на роботе могут быть расположены другие датчики, например, датчик захвата шара, если ставится задача сбора шаров.

4.2 Алгоритмы управления реального времени

4.2.1 Следящая система

В разделе 2 отмечается, что система уравнений движения аппарата в линейном приближении относительно решения, соответствующего движению с постоянной скоростью по прямой, распадается на две подсистемы, одна из которых описывает продольные перемещения, а вторая - угловые и поперечные перемещения механизма. Первая подсистема при постоянном управлении является асимптотически устойчивой по скорости движения. Кроме того, не существенно точное значение продольной скорости и продольной координаты робота для решения задачи проезда (желательно только, чтобы скорость была максимально возможной в каждом конкретном случае). В связи с этим, при управлении аппаратом продольная скорость задается только установкой соответствующего значения суммарного напряжения на двигателях $\tilde{u}_S$, обратная связь ни по координате x (предполагается, что аппарат движется вдоль оси OX), ни по скорости V не предусмотрена.

Несколько упрощая результаты п. 3, можно сказать, что для наискорейшего проезда продольная скорость аппарата должна равняться максимальной, если курсовой угол α отличается от направления на "цель"менее, чем на 90°, и нулю при большем отклонении. Поэтому при больших отклонениях угла α от программного значения вводится ограничение на суммарное напряжение $\tilde{u}_S$, задающее продольную скорость:

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_S &= u_0 && |\alpha - \alpha_{pr}| \le \alpha_0 \\
\tilde{u}_S &= u_0 \frac{\pi/2 - |\alpha - \alpha_{pr}|}{\pi/2 - \alpha_0} && \alpha_0 < |\alpha - \alpha_{pr}| < \frac{\pi}{2} \\
\tilde{u}_S &= 0 && |\alpha - \alpha_{pr}| \ge \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Здесь u_0 – некоторая константа, определяющая скорость движения по прямой, $0 < u_0 \le u_{max}/u_n$. Максимально допустимое напряжение u_{max} может, вообще говоря, превысить полученное напряжение u_n (см. раздел 4.2.2).

Кусочно-линейная непрерывная функция (66) заменяет ступенчатую ради плавности движения, величина угла α_0, при котором начинается снижение суммарного напряжения $\tilde{u}_S$, подбирается экспериментально, мы остановились на значении 60°.

В подсистеме (22), описывающей поперечные перемещения робота, управлением является разность напряжений на двигателях правого и левого колеса $\tilde{u}_D$. Она вычисляется по формуле (30) как линейная обратная связь по всем фазовым переменным системы: расстоянию ε точки L до полосы (трассы), курсовому углу α и его производной ω.

Возможны различные способы вычисления величин ε, α, ω, α_{pr} и ω_{pr}, u_{pr}, фигурирующих в выражении (23), в зависимости от текущей задачи проезда, состава датчиков и пр. В качестве примера опишем алгоритм "выезда на маяк испытанный на нашем роботе во время Московских соревнований 1999г. При выполнении этого маневра робот должен двигаться непосредственно в точку, указанную очередным зажженным маяком (либо парой маяков), то есть он не должен двигаться по полосе. Входной информацией алгоритма управления является текущее направление на маяк и показания датчиков вращения колес. Информация о направлении на маяк обновляется сравнительно редко - с частотой вращения "глаза поэтому управление аппаратом строится на основании автономного счисления пути. Автономное счисление пути [4] состоит в численном интегрировании уравнений (6). В результате, во время движения при поступлении информации об углах поворота и скоростях вращения ведущих колес вычисляются координаты x_L, y_L точки L и курсовой угол α. Накопление ошибок интегрирования происходит в течение времени обновления информации о направлении на маяк - это время меньше секунды, поэтому никакие алгоритмы коррекции не используются. В алгоритме управления также фигурируют координаты "глаза". Если он расположен на оси аппарата позади точки L на расстоянии l от нее, то его координаты x_e, y_e равны:

$$x_e = x_L - l\cos\alpha, \qquad y_e = y_L - l\sin\alpha \tag{67}$$

После прихода сообщения с нижнего уровня о направлении на маяк строится программная траектория, аппарат следует этой траектории до прихода очередного сообщения о направлении на маяк. Программная траектория представляет собой прямую, проходящую через точку (x_0, y_0), в которой находился "глаз"в момент "засечки"маяка. Угол φ прямой с осью OX равен $\varphi = \gamma + \alpha$, где γ – угол визирования маяка, отсчитанный от оси робота. Расстояние ε от точки L до этой прямой равно:

$$\varepsilon = (y_L - y_0)\cos\varphi - (x_L - x_0)\sin\varphi \tag{68}$$

Программные значения курсового угла, угловой скорости и напряжения задаются следующим образом: $\alpha_{pr} = \varphi$, $\omega_{pr} = u_{pr} = 0$. Так вычисляются все величины, необходимые для определения $\tilde{u}_D$ по формуле (30).

После того, как по формулам (66) и (30) вычислены значения $\tilde{u}_S$ и $\tilde{u}_D$, определяются напряжения, подаваемые на правый и левый двигатели:

$$u_R = u_n(\tilde{u}_S + \tilde{u}_D), \qquad u_L = u_n(\tilde{u}_S - \tilde{u}_D) \tag{69}$$

Если какое-либо из напряжений u_R, u_L выйдет за допустимый диапазон $\pm u_{max}$, то оба значения смещаются так, чтобы разность между ними сохранилась и оба напряжения удовлетворяли условию $-u_{max} \leq u_R, u_L \leq u_{max}$ (это возможно при $|\tilde{u}_D| \leq 2\frac{u_{max}}{u_n}$). Например, при $\tilde{u}_D > 0$ и $u_R > u_{max}$, новые значения будут следующими: $u_R = u_{max}$, $u_L = u_{max} - u_n\tilde{u}_D$. Тем самым, поддерживается максимально близкое к желаемому при заданных условиях суммарное напряжение, а разность напряжений определяется формулой (30).

4.2.2 Ограничение тока двигателя

Рассмотрим одну часто встречающуюся причину неисправности робота, которую легко устранить алгоритмически. Если напряжение u_{max} превышает номинальное напряжение питания двигателя, то необходимо предохранять двигатель от перегрузки. Наиболее частая причина выхода двигателя из строя – перегрузка по току, при которой может перегреться обмотка, размагнититься магнит у двигателей с постоянным возбуждением и выйти из строя механическая система из-за превышения момента на валу допустимого уровня.

Пусть аппарат снабжен двигателями постоянного тока с независимым возбуждением. Пусть известны следующие характеристики двигателя: номинальное напряжение питания u_n, пусковой ток I_S, номинальная частота вращения ω_n (приведенная к выходному валу редуктора) и номинальный ток I_n. Тогда, пренебрегая индуктивностью обмотки, получим зависимость тока двигателя I от напряжения на обмотке u и угловой скорости колеса ω:

$$I = I_S\left(\frac{u}{u_n} - \frac{I_S - I_n}{I_S}\frac{\omega}{\omega_n}\right) \tag{70}$$

Ограничим ток двигателя по модулю некоторым предельно допустимым значением, например, величиной пускового тока I_S. Тогда получим следующее ограничение на напряжение в зависимости от текущей угловой скорости:

$$u_n\frac{I_S - I_n}{I_S}\frac{\omega}{\omega_n} - u_n \leq u \leq u_n\frac{I_S - I_n}{I_S}\frac{\omega}{\omega_n} + u_n \tag{71}$$

Это ограничение также использовалось в алгоритмах управления движением робота.

Заключение

В препринте описаны результаты исследования двух задач управления движением робота, возникающих в соревнованиях мобильных роботов. Это задача управлением движением робота по заданной траектории-трассе и задача оптимального по быстродействию перемещения робота в заданную точку.

Первая задача была сведена к задаче стабилизации программных движений.

При исследовании второй задачи использовался принцип максимума.

Рассматривались две постановки: кинематическая и динамическая. В рамках кинематической постановки для типовых сочетаний граничных условий удалось получить аналитические решения, имеющие наглядный геометрический смысл.

Для одного варианта динамической постановки численно было получено решение, качественно близкое к соответствующему кинематическому решению.

Реализованные на практике алгоритмы управления движением конкретного мобильного робота были основаны на представленных в препринте теоретических исследованиях.

Список литературы

[1] Буданов В.М., Савицкий К.В. Соревнования роботов во Франции. Информатика и образование, 6, 1995.

[2] Девянин Е.А. О движении колесных роботов. Доклады научной школы - конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы Москва, 1-3 декабря 1998.

[3] Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г. Неголономная динамика мобильных роботов и ее моделирование в реальном времени. Доклады научной школы - конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы Москва, 1-3 декабря 1998.

[4] Голован А.А., Гришин А.А., Жихарев С.Д., Ленский А.В. Алгоритмы решения задачи навигации мобильных роботов. Препринт N 57-99, Институт механики МГУ, Москва, 1999.

[5] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. "Наука М.: , 1978, 522 стр.

[6] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Гос. изд-во физико- математической литературы, Москва, 1961.

[7] Оптимизация динамики управляемых систем: Учебное пособие, Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. М.: Изд-во МГУ, 2000.

[8] Чиликин М.Г., Сандлер А.С. Общий курс электропривода. -М.: Энергомаш, 1981. -576 с.

[9] Габасов Р.Н., Кирилова Ф.Н. Особые оптимальные управления. -М., Наука, 1973.