Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Штейнер Павел Михайлович

Мажоризации матриц и их эндоморфизмы

1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика
(01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел)

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Гутерман Александр Эмилевич

Москва 2022

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Матричные мажоризации являются важнейшим и динамично развивающимся направлением линейной алгебры, как представляющим самостоятельный интерес, так и имеющим приложения в экономике, математической статистике, комбинаторном анализе и других областях математики.

Развитие теории началось с исследований векторной мажоризации — способа формально определить возникающее во множестве различных контекстов представление о том, что элементы одного вектора менее разбросаны между собой, чем элементы другого. Пусть $v^{\downarrow}$ — вектор, полученный из вектора v перестановкой координат в порядке невозрастания.

Определение. *Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ говорим, что y* мажорируется x *($y \preceq x$), если*

$$\sum_{j=1}^{k} y_j^{\downarrow} \leq \sum_{j=1}^{k} x_j^{\downarrow} \quad \text{для } k = 1, \ldots, n-1 \text{ и } \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Первое условие, эквивалентное современной векторной мажоризации, возникло в работе Мюрхеда [33] о неравенствах симметрических многочленов. Другой важной предпосылкой к возникновению теорий мажоризаций стали исследования в области экономики. Сравнение различных распределений совокупного дохода лежит в основе экономики благосостояния. Идеи Далтона [15], Лоренца [28] и Пижу (Пигу) [34] вплотную связаны с понятием мажоризации векторов, введенным Харди, Литлвудом и Пойа (Полиа) [19]. Аткинсон [3] и Колм [23] ввели математическое понятие мажоризации в обиход экономической теории. Многие другие авторы внесли свой вклад в развитие этого направления. Однако они рассматривали только одномерный индикатор экономического статуса, а именно, доход. В современных теориях общественного выбора в большинстве случаев рассматривается множество различных показателей, таких как образование, свободное время, здоровье, жилье, финансовые активы. Это привело к тому, что мажоризации векторов стали обобщаться на случай матриц. Существует множество видов таких обобщений, приведем некоторые из них.

Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ — вектор, все координаты которого равны 1. Множество действительных матриц размера $n \times m$ обозначается $M_{n,m}$, пишем M_n при $m = n$. Матрица $R \in M_n$ называется *строчно-стохастической*, если все ее элементы неотрицательны и $Re = e$. Множество всех таких матриц обозначается Ω_n^{row}. Если, к тому же, $e^t R = e^t$, то R называется дважды стохастической. Множество дважды стохастических матриц обозначается Ω_n.

Определение. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$.*

- Сильная мажоризация*: $A \preceq^s B$, если существует такая $D \in \Omega_n$, что $A = DB$.*
- Мажоризация по направлению*: $A \preceq^d B$, если $Av \preceq Bv$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$.*
- Слабая мажоризация*: $A \preceq^w B$, если существует такая $R \in \Omega_n^{row}$, что $A = RB$.*
- Строчная мажоризация*: $A \preceq^r B$, если существует такая $R \in \Omega_m^{row}$, что $A = BR$.*

Мажоризации матриц стали важным инструментом в экономике, математической статистике и других областях математики. Экономические аспекты, связанные с мажоризациями матриц рассматривались Арнольдом [2], Аткинсоном и Бургиньоном [4], Бхандари [7], Кольмом [24], Кошевым [25], Маасуми [29], Мозлером [31], Ритвелдом [37] и другими. Кроме того, мажоризации матриц играют важную роль в исследованиях стохастических матриц, см. [38].

Некоторые виды мажоризаций матриц, например, строчная мажоризация, уходят корнями в функциональный подход к базовым понятиям статистики, связанным с теорией статистических экспериментов [40]. Такие виды мажоризаций и их геометрические свойства были исследованы в [13] и [14].

В данной диссертации вводится новое понятие мажоризации классов матриц, обобщающее мажоризацию на случай множеств матриц.

Определение. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — два конечных класса (множества) действительных матриц из $M_{n,m}$. Тогда класс $\mathcal{A}$ мажорируется классом $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$), если для любой $A \in \mathcal{A}$ найдется такая $B \in \mathcal{B}$, что $A \preceq B$.*

Мотивацией к изучению такого понятия служат прикладные вопросы теории статистических экспериментов. Следующий пример иллюстрирует эти приложения.

Пример. Рассмотрим два медицинских прибора для измерения давления. Приборы имеют простую шкалу: низкое (L), среднее (M) и высокое (H) давление. Из-за качества приборов показания могут быть неточны. Вероятности разных ответов для разных исходных значений можно описать строчно-стохастическими матрицами, в которых и строки, и столбцы отвечают L, M, и H. Приборы можно задавать квадратными матрицами следующим образом: (i, j)-й элемент матрицы есть вероятность того, что прибор покажет j, если правильный ответ — i. Предположим, два эксперимента заданы матрицами E и F,

$$E = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.39 & 0.06 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим прибор, задаваемый матрицей E. Предположим, что он предсказал j. Если $j = 1$ (т. е. L), мы можем точно заключить, что верное значение параметра i есть 1, а если $j = 3$, то возможно только $i = 3$. Если, однако, $j = 2$, то i может быть как 1, так и 2. Поскольку прибор говорит, что $j = 2$ с вероятностью 0.3, если $i = 1$ и всегда, когда $i = 2$, мы можем заключить, что $i = 2$ более вероятно, хотя это зависит от априорных вероятностей $i = 1$ и $i = 2$.

Таким образом, эксперимент E дает много информации о неизвестном параметре i, и прибор можно считать хорошим. Что же касается прибора, заданного матрицей F, то здесь ситуация другая: для любой реализации j существует по крайней мере два возможных значения i, и вероятности разных истинных ответов достаточно близки. Итак, прибор/эксперимент E кажется лучше, чем F. На самом деле, можно проверить, что E более информативен, чем F, используя следующий метод.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что X также строчно-стохастическая. Кроме того, легко проверить, что

$EX = F$. Из этого следует, что $F \preceq^r E$. Так называемый, *рандомизационный критерий* в теории статистических экспериментов говорит, что (относительно некоторых слабых предположений, выполненных в этом случае) эксперимент E более информативен, чем эксперимент F тогда и только тогда, когда $F \preceq^r E$, см. [13].

Теперь мы расширим описанное упорядочивание пар экспериментов до сравнения *множеств* экспериментов. Пусть $\mathcal{A} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_p\}$ и $\mathcal{B} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_q\}$ — два множества приборов, исследующих одну и ту же величину. Предположим, что статистик А выбирает прибор из множества $\mathcal{A}$, а другой статистик В из множества $\mathcal{B}$. Кто из них может получить больше информации о неизвестном параметре? Мы можем ввести следующее понятие, чтобы смоделировать эту ситуацию: говорим, что $\mathcal{B}$ *более информативно*, чем $\mathcal{A}$, если для любого $\mathcal{E}_j$ $(j \le p)$, существует такое $i \le q$, что $\mathcal{F}_i$ более информативен, чем $\mathcal{E}_j$. Другими словами, какой бы эксперимент статистик А ни выбрал из $\mathcal{A}$, статистик В может найти более информативный из $\mathcal{B}$, то есть В имеет больше информации для принятия решений. Таким образом, естественной интерпретацией большего качества $\mathcal{B}$ по сравнению с $\mathcal{A}$ является отношение $\mathcal{A} \trianglelefteq^r \mathcal{B}$.

Подробное изложение теории статистических экспериментов, включающее теорию игр, выпуклый и функциональный анализ, приведено в [41]. Роль мажоризаций матриц в этой теории описана в [12] и [40].

В диссертации исследуются свойства введенного понятия. В частности, поставлена и решена задача нахождения минимального покрывающего класса для различных типов мажоризации. Значительную роль в этих исследованиях играют геометрические методы.

В данной диссертации также исследуются мажоризации $(0,1)$-матриц, то есть матриц, все элементы которых равны 0 или 1. Такое ограничение зачастую позволяет найти новые критерии исследуемых мажоризаций. Они позволяют лучше понять мажоризации действительных матриц. Кроме того, $(0,1)$-матрицы играют ключевую роль в задании многих комбинаторных объектов. Таким образом, представляет особенный интерес отношение мажоризации двух комбинаторных объектов (заданных $(0,1)$-матрицами). В работе [13] впервые был поставлен вопрос существования комбинаторных интерпретаций мажоризаций $(0,1)$-матриц. В частном случае $(0,1)$-матриц с ровно двумя единицами в каждой строке был найден критерий строчной мажоризации в терминах теории графов. Общий случай оставался открытым.

В диссертации получены характеризации сильной, по направлению, слабой и строчной мажоризаций $(0,1)$-матриц. Были найдены новые приложения мажоризаций $(0,1)$-матриц в теории графов, в частности, связь мажоризаций таких матриц с паросочетаниями в двудольных и произвольных графах.

В теории мажоризаций важно строить новые упорядоченные в смысле разных типов мажоризации пары матриц. Одним из подходов к нахождению новых пар является использование линейных операторов, сохраняющих мажоризацию матриц или конвертирующих одну мажоризацию матриц в другую. Это позволяет по уже известным упорядоченным парам строить новые. Такой подход к исследованию функций и отношений на векторных и матричных пространствах применяется во множестве разделов линейной алгебры и функционального анализа. Так сформировалась теория линейных отображений, сохраняющих инварианты (Linear Preserver Problems). Начало этой теории положил Фробениус в 1897 году, дав полное описание линейных операторов, сохраняющих определители комплексных матриц [17].

Теорема. *Пусть Φ — линейный оператор на пространстве $M_n(\mathbb{C})$. Тогда $\det(\Phi(A)) = \det(A)$ для любого $A \in M_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда существуют такие $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, что $\det(MN) = 1$ и выполнено одно из условий:*

1. $\Phi(X) = MXN$;
2. $\Phi(X) = MX^tN$.

Также одним из первых результатов в этой области является характеризация биективных линейных операторов, сохраняющих вырожденные матрицы, полученная Дьедонне [16].

Теорема. *Пусть Φ — биективный линейный оператор на пространстве $M_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда Φ переводит вырожденные матрицы в вырожденные тогда и только тогда, когда существуют такие $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, что $\det(MN) \neq 0$ и выполнено одно из условий:*

1. $\Phi(X) = MXN$;

2. $\Phi(X) = MX^tN$*.*

Теория линейных операторов, сохраняющих инварианты, продолжает активно развиваться. Можно выделить три основных типа задач. Пусть V — пространство $n \times m$ матриц над полем $\mathbb{F}$.

A Изучение линейных операторов, сохраняющих некоторую функцию f, определенную на V. То есть таких операторов ϕ на V, что $\phi(f(A)) = f(A)$ для любого $A \in V$;

B Изучение линейных операторов, сохраняющих некоторое множество $S \subseteq V$. То есть таких операторов ϕ на V, что $\phi(S) \subseteq S$;

C Изучение линейных операторов, сохраняющих некоторое бинарное отношение $\prec$ на V. То есть таких операторов ϕ на V, что из $A \prec B$ следует $\phi(A) \prec \phi(B)$ для любых $A, B \in V$.

Первое такое исследование в теории мажоризаций можно встретить в статье Андо 1989 года [1], в которой была найдена характеризация линейных отображений, сохраняющих векторную мажоризацию.

Пусть $P(n)$ обозначает множество матриц перестановки порядка n, а J обозначает $n \times n$ матрицу, все элементы которой равны 1, т. е. $J = ee^t$.

Теорема. *[1, следствие 2.7] Пусть Φ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. Φ *сохраняет векторную мажоризацию.*

2. Выполнено одно из следующих условий:

(a) $\Phi(x) = (e^t x)s$ *для некоторого* $s \in \mathbb{R}^n$*.*

(b) $\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ *для некоторых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *и* $P \in P(n)$*.*

Этот результат положил начало исследованиям линейных отображений, сохраняющих мажоризацию матриц. В прикладных задачах рассматривается много различных типов мажоризаций, и для большинства из них задачи характеризации линейных отображений, сохраняющих конкретный тип мажоризации, были решены. В решении этих задач участвовали многие выдающиеся математики, например, Бисли [5, 6], Кошевой [26], Ли, Пун [27], Раджабалипур [20, 21].

В тех разделах математики, в которых возникают семейства функций или отношений, становится актуальным исследование линейных операторов, конвертирующих одну функцию (отношение) этого семейства в другую. Такие исследования особенно востребованы в случае, когда разные объекты такого семейства, с одной стороны, наделены общими свойствами, а с другой, существенно отличаются по методам работы с ними. Таким образом, задачи A, B, C можно обобщить следующим образом:

A$'$ Для функций f_1, f_2, определенных на V, исследовать такие операторы ϕ на V, что $\phi(f_1(A)) = f_2(A)$ для любого $A \in V$;

B$'$ Для множеств $S_1, S_2 \subseteq V$ исследовать такие операторы ϕ на V, что $\phi(S_1) \subseteq S_2$;

C$'$ Для бинарных отношений $\prec_1, \prec_2$ на V исследовать такие операторы ϕ на V, что из $A \prec_1 B$ следует $\phi(A) \prec_2 \phi(B)$ для любых $A, B \in V$.

Например, задачу нахождения линейных конвертеров из перманента в определитель поставил Пойа в 1913 году, [35], см. также [10]. Существует множество типов мажоризаций матриц, поэтому естественным образом возникает задача характеризации соответствующих конвертеров. Разные типы мажоризаций отличаются по методам исследования, однако имеют множество общих свойств. Один из таких конвертеров был получен в статье Ли и Пуна [27].

В данной диссертационной работе была поставлена и решена задача характеризации линейных конвертеров между сильной, слабой, столбцовой мажоризациями и мажоризацией по направлению.

В диссертации введено новое понятие мажоризации кортежей матриц, обобщающее матричный случай.

Определение. *Пусть* $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_k), \mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_k)$ *— два кортежа матриц из* $M_{n,m}$*. Тогда* $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$*, если* $A_i \preceq B_i$ *для любого* $i \leq k$*.*

В диссертации получены характеризации линейных операторов, сохраняющих различные типы мажоризаций кортежей матриц. Кроме того, получены характеризации линейных операторов, сохраняющих комбинаторные матричные множества, в том числе, линейные операторы, сохраняющие множество $(0,1)$-матриц, играющее существенную роль в теории мажоризаций.

Цели и задачи работы

1. Исследовать мажоризацию классов матриц.
2. Исследовать мажоризации $(0,1)$-матриц.
3. Найти характеризации линейных отображений, меняющих тип мажоризации.
4. Найти характеризации линейных отображений, сохраняющих мажоризации кортежей матриц.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

1. Новое понятие мажоризации классов матриц и решение задачи нахождения минимального покрывающего класса для слабой мажоризации и мажоризации по направлению.
2. Характеризации слабой, по направлению, сильной и строчной мажоризаций $(0,1)$-матриц.
3. Исследование линейных операторов, конвертирующих мажоризации матриц. В частности,
   - Характеризация линейных конвертеров из векторной мажоризации в слабую мажоризацию и усиление классического результата Андо о линейных отображениях, сохраняющих векторную мажоризацию.
   - Характеризация линейных операторов, конвертирующих сильную мажоризацию в слабую и усиление теоремы Ли-Пуна о линейных отображениях, сохраняющих мажоризации матриц.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются мажоризации действительных матриц и связанные с ними линейные операторы.

Предметом исследования являются мажоризации кортежей матриц, мажоризации специальных матриц и линейные конвертеры мажоризаций.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Автором диссертации введено новое понятие мажоризации классов матриц и решена задача нахождения минимальных покрывающих классов в смысле слабой мажоризации и мажоризации по направлению. Впервые даны полные характеризации различных типов мажоризации $(0, 1)$-матриц. Получены характеризации линейных отображений, меняющих типы мажоризаций и линейных отображений, сохраняющих мажоризацию кортежей матриц. В частности, были усилены некоторые классические результаты теории линейных операторов, сохраняющих мажоризации.

Методы исследования

В диссертации используются методы линейной алгебры, теории линейных операторов, сохраняющих инварианты, комбинаторные методы и выпуклый анализ. Предложенные в диссертации методы позволяют доказывать некоторые известные результаты теории мажоризаций в значительно более слабых предположениях.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в абстрактной и линейной алгебре, теории операторов, математической статистике, теории оптимизации и их приложениях.

Степень достоверности и апробация результатов

Соискатель имеет 10 опубликованных работ, в том числе 6 статей по теме диссертации [42, 43, 44, 45, 46, 47], из них 6 опубликованы в научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- на «Научно-исследовательском семинаре по алгебре» (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова) в 2022 году.
- на научном семинаре «Кольца, модули и матрицы» (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова) в 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022 годах.
- на научном семинаре «Algebra», Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Будапешт, Венгрия, 2019, 2021.
- на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», МГУ имени М.В. Ломоносова в 2016, 2018, 2019, 2020, 2021 годах.
- на конференции «A Tropical Panorama», Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Лейпциг, Германия, 2018.
- на международной алгебраической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018.
- на международной алгебраической конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019.
- на конференции «Preserver Weekend in Szeged», Сегед, Венгрия, 2019.
- на конференции международных математических центров мирового уровня, Сириус, Сочи 2021.

Структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Общий объем работы составляет 127 страниц. Список литературы включает 51 наименование.

Содержание работы

Введение посвящено краткой истории вопроса, актуальности рассматриваемых проблем, изложению цели работы, методов и основных результатов.

В **главе 1** собраны основные понятия теории мажоризаций матриц и теории линейных операторов, сохраняющих мажоризации. Приводятся известные результаты этих теорий, которые используются в диссертации.

В **главе 2** рассматривается новое понятие мажоризации классов матриц, введенное в данной диссертации и обобщающее различные типы мажоризаций матриц.

Определение 2.1. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два конечных класса матриц из $M_{n,m}$. Говорим, что $\mathcal{A}$* мажорируется *$\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$), если для любой $A \in \mathcal{A}$ существует такая матрица $B_A \in \mathcal{B}$, что $A \preceq B_A$.*

Раздел 2.1 посвящен статистическим приложениям мажоризаций матриц, в рамках которых возникает потребность в изучении введенного понятия мажоризации классов матриц. Раздел 2.2 содержит основные свойства мажоризаций классов матриц, обобщающих многие свойства мажоризаций матриц. В разделе 2.3 формулируются и решаются задачи 2.24, 2.40 нахождения минимального по числу элементов покрывающего класса. В случае слабой мажоризации эта задача решена геометрическими методами, в частности, изложенными в теореме 2.23. Доказана теорема 2.37, позволяющая свести задачу нахождения минимального покрывающего класса в случае мажоризации по направлению к случаю слабой мажоризации.

Теорема 2.37. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс матриц из $M_{n,m}$. Предположим, что существует такая матрица $B \in M_{n,m}$, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \{B\}$ и векторы столбцовых сумм всех $A_i \in \mathcal{A}$ совпадают, то есть $e^t A_i = e^t A_j$ для любых i, j. Тогда существует такая $C \in M_{n,m}$, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^d \{C\}$.*

В **главе 3** изучаются мажоризации $(0,1)$-матриц. В разделе 3.1 доказаны

Теорема 3.2. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$A \preceq^w B$,*

2. *$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, где $\mathcal{R}(X)$ — множество строк X,*

3. *$A = RB$ для некоторой $(0,1)$-матрицы $R \in \Omega_n^{row}$.*

Теорема 3.4; следствие 3.5. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$. Тогда*

1. *$A \preceq^d B$, если и только если A — перестановка строк матрицы B, т. е. $A = PB$ для некоторой $P \in P(n)$,*

2. *$\preceq^d$ есть отношение эквивалентности на $M_{n,m}(0,1)$.*

3. *Для $(0,1)$-матриц отношения $\preceq^d$ и $\preceq^s$ эквивалентны.*

Таким образом, в разделе 3.1 получены характеризации слабой, по направлению и сильной мажоризаций $(0,1)$-матриц. Кроме того, показано, что сильная мажоризация и мажоризация по направлению на множестве $(0,1)$-матриц совпадают между собой и являются простыми отношениями эквивалентности.

В разделе 3.2 изучается строчная мажоризация $(0,1)$-матриц. Приводятся различные необходимые и различные достаточные условия такой мажоризации. Многие из них имеют комбинаторный смысл. Например, лемма 3.16 показывает связь строчной мажоризации $(0,1)$-матриц с двудольными графами. В Теореме 3.24 получен геометрический критерий строчной мажоризации $(0,1)$-матриц.

Также доказан следующий критерий:

Следствие 3.30. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$. Тогда $A \preceq^r B$, если и только если*

$$\sum_{i,j \,:\, a_{ij}=1} y_{ij} \leq \sum_j \max_k \Big(\sum_{i \,:\, b_{ij}=1} y_{ik} \Big).$$

для любых $Y \in M_{n,m}$.

В **главе 4** исследуются вопросы теории линейных операторов, сохраняющих и конвертирующих мажоризации матриц. В разделе 4.1 исследуются важные для этой теории свойства мажоризаций матриц. В частности, леммы 4.9 и 4.10 позволяют обобщить на случай матриц произвольного размера $n \times m$, $n \geq 4$, $m \geq 2$

контрпример [32, пример 2], показывающий, что сильная мажоризация и мажоризация по направлению не совпадают.

В разделе 4.2 получена характеризация линейных операторов, конвертирующих мажоризацию по направлению в сильную мажоризацию.

Теорема 4.17. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, где $n > 3$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ конвертирует мажоризацию по направлению в сильную.*
2. *Выполнено одно из условий:*
   (a) *Существуют такие $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$, что $\Phi(X) = \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$.*
   (b) *Существуют такие $S \in M_m$, $P \in P(n)$ и $R \in M_m$, что $\mathrm{rank}\, R \leq 1$ и $\Phi(X) = PXR + JXS$.*

Теорема 4.22 раздела 4.3 дает характеризацию линейных операторов, конвертирующих слабую мажоризацию в сильную мажоризацию и мажоризацию по направлению. В разделе 4.4 решается задача характеризации конвертеров в слабую мажоризацию. Теорема 4.38 дает ответ в векторном случае. Оказывается, все такие операторы должны сохранять векторную мажоризацию.

Теорема 4.38. *Пусть ϕ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *ϕ сохраняет векторную мажоризацию.*
2. *ϕ конвертирует векторную мажоризацию в слабую.*
3. *Выполнено одно из условий:*
   (a) *$\phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$.*
   (b) *$\phi(x) = \alpha P x + \beta J x$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $P \in P(n)$.*

Теорема 4.44 дает полную характеризацию в матричном случае.

Теорема 4.44. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ сохраняет сильную мажоризацию.*

2. *Φ сохраняет мажоризацию по направлению.*

3. *Φ конвертирует сильную мажоризацию в мажоризацию по направлению.*

4. *Φ конвертирует сильную мажоризацию в слабую.*

5. *Φ конвертирует мажоризацию по направлению в слабую.*

6. *Выполнено одно из условий:*

   (a) $\Phi(X) = \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$ *для некоторых* $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$.

   (b) $\Phi(X) = PXR + JXS$ *для некоторых* $R, S \in M_m$ *и* $P \in P(n)$.

Раздел 4.5 исследует конвертеры столбцовой мажоризации. Теорема 4.50 дает полную характеризацию линейных конвертеров из столбцовой мажоризации. В секции 4.5.3 найдены первые примеры линейных конвертеров, не сохраняющих конвертируемые мажоризации.

В разделе 4.6 исследуются линейные операторы, сохраняющие мажоризацию кортежей матриц. Теорема 4.81 дает соответствующий результат для слабой мажоризации, теорема 4.78 — для сильной и по направлению. В разделе 4.7 изучаются линейные операторы, сохраняющие матрицы с коэффициентами из заданного множества. В частности, в теореме 4.112 дается полный ответ для любого конечного подмножества $\mathbb{R}$.

Основные результаты диссертации

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Решена задача нахождения минимального покрывающего класса для слабой мажоризации и мажоризации по направлению. В частности, доказано, что класс матриц с одинаковыми столбцовыми суммами, слабо мажорирующийся одной матрицей, мажорируется одной матрицей по направлению.

2. Получены характеризации слабой, по направлению, сильной и строчной мажоризаций $(0,1)$-матриц. Доказано, что если $A, B \in M_{n,m}(0,1)$, то

   - $A \preceq^w B \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, где $\mathcal{R}(X)$ — множество строк X.

- $A \preceq^s B \Leftrightarrow A \preceq^d B \Leftrightarrow A = PB$ для некоторой $P \in P(n)$.
- $A \preceq^r B \Leftrightarrow \sum\limits_{i,j \,:\, a_{ij}=1} y_{ij} \leq \sum\limits_{j} \max\limits_{k}(\sum\limits_{i \,:\, b_{ij}=1} y_{ik})$ для любых $Y \in M_{n,m}$.

3. Исследованы линейные операторы, конвертирующие мажоризации матриц. В частности,

    - Доказано, что любой линейный конвертер из векторной мажоризации в слабую должен сохранять векторную мажоризацию. Тем самым, усилен классический результат Андо о линейных отображениях, сохраняющих векторную мажоризацию.
    - Получена характеризация линейных операторов, конвертирующих сильную мажоризацию в слабую. Доказано, что все такие отображения сохраняют сильную мажоризацию.
    - Теорема Ли-Пуна о линейных отображениях, сохраняющих сильную мажоризацию, доказана в более слабых предположениях.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.Э. Гутерману за постановку задач, поддержку и постоянное внимание к работе.

Автор благодарен всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за творческую и доброжелательную атмосферу на кафедре.

Глава 1

Основные понятия

Обозначения

- $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.
- $M_{n,m}$ — множество всех действительных $n \times m$ матриц.

- M_n — множество всех действительных $n \times n$ матриц.
- $M_{n,m}(X)$ — множество $n \times m$ матриц с коэффициентами из множества X.
- GL_n — множество обратимых матриц из M_n.
- a_{ij} — элемент i-й строки, j-го столбца матрицы A.
- $A^{(j)}$ — j-й столбец матрицы A.
- $A_{(i)}$ — i-я строка матрицы A.
- $A^{(\mathcal{J})}$ — подматрица A, составленная из столбцов с индексами из $\mathcal{J}$.
- $A_{(\mathcal{I})}$ — подматрица A, составленная из строк с индексами из $\mathcal{I}$.
- $A^{(\mathcal{J})}_{(\mathcal{I})}$ — подматрица A, составленная из строк с индексами из $\mathcal{I}$ и столбцов с индексами из $\mathcal{J}$.
- $A \geq B$ — $a_{ij} \geq b_{ij}$ для любых i, j.
- $\mathcal{R}(A)$ — множество строк матрицы A.
- $\mathcal{C}(A)$ — множество столбцов матрицы A.
- A^t — транспонированная матрица матрицы A.
- I — единичная матрица.
- O — нулевая матрица.
- E_{ij} — матричная единица. Матрица с 1 в позиции (i, j) и 0 в остальных позициях.
- $P(n)$ — множество матриц перестановки порядка n.
- $P_{(ij)}$ — матрица транспозиции (ij), то есть $P_{(ij)} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.
- $|X|$ — мощность множества X
- $\max(v)$ — максимальная координата вектора v.

- $\min(v)$ — минимальная координата вектора v.
- $v^{\downarrow}$ — вектор, полученный из вектора v перестановкой координат в порядке невозрастания.
- e — вектор-столбец, все координаты которого равны единице.
- J — квадратная матрица, все элементы которой равны единице.
- $[\Phi]$ — матрица оператора Φ в стандартном базисе.
- Ω_n — множество дважды стохастических матриц порядка n.
- Ω_n^{row} — множество строчно-стохастических матриц порядка n.
- Ω_n^{col} — множество столбцово-стохастических матриц порядка n.

1.1 Мажоризация матриц и векторов

Определение 1.1. Матрица $X \in M_n$ называется *строчно-стохастической*, если все ее элементы неотрицательны и $Xe = e$. Множество всех строчно-стохастических матриц порядка n обозначим Ω_n^{row}.

Определение 1.2. Матрица $X \in M_n$ называется *столбцово-стохастической*, если все ее элементы неотрицательны и $e^t X = e^t$. Множество всех столбцово-стохастических матриц порядка n обозначим Ω_n^{col}.

Определение 1.3. Матрица $X \in M_n$ называется *дважды стохастической*, если она строчно-стохастическая и столбцово-стохастическая. Множество всех дважды стохастических матриц порядка n обозначим Ω_n.

Теорема Биркгофа — фон Ноймана дает описание множества Ω_n.

Теорема 1.4. *[30, теорема I.2.A.2] Множество Ω_n есть выпуклая оболочка множества $P(n)$.*

Определение 1.5. Вектор $a \in \mathbb{R}^n$ *мажорируется* вектором $b \in \mathbb{R}^n$ ($a \preceq b$), если

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^{\downarrow} \leq \sum_{j=1}^{k} b_j^{\downarrow} \text{ для } k = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ и } \sum_{j=1}^{n} a_j^{\downarrow} = \sum_{j=1}^{n} b_j^{\downarrow}.$$

Существует множество эквивалентных условий для векторной мажоризации. Например, теорема Харди, Литлвуда и Пойа дает критерий мажоризации в терминах дважды стохастических матриц.

Теорема 1.6. *[30, теорема I.2.B.2], [19, теорема 46]*

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $a \preceq b$, если и только если $a = Db$ для некоторой $D \in \Omega_n$.

В различных задачах математики и ее приложений рассматривается множество подходов к обобщению мажоризации векторов на случай матриц. Приведем некоторые из них.

Определение 1.7. Пусть $A, B \in M_{n,m}$.

- *Сильная мажоризация*: $A \preceq^s B$, если существует такая $D \in \Omega_n$, что $A = DB$.
- *Мажоризация по направлению*: $A \preceq^d B$, если $Av \preceq Bv$ для любых $v \in \mathbb{R}^m$.
- *Слабая мажоризация*: $A \preceq^w B$, если существует такая $R \in \Omega_n^{row}$, что $A = RB$.
- *Дважды-стохастическая мажоризация*: $A \preceq^{ds} B$, если существует такая $D \in \Omega_m$, что $A = BD$.
- *Строчная мажоризация*: $A \preceq^r B$, если существует такая $R \in \Omega_m^{row}$, что $A = BR$.

Классическая векторная мажоризация — частный случай сильной мажоризации и мажоризации по направлению, когда матрицы A и B имеют лишь один столбец. Векторная мажоризация также является частным случаем строчной мажоризации, когда матрицы A и B состоят из двух строк, причем первые строки равны e^t, см. [13].

Между собой введенные типы мажоризаций матриц соотносятся следующим образом, см [13] и [32].

Теорема 1.8. *[42, теорема 3.1] Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Тогда*

- *$A \preceq^s B$ тогда и только тогда, когда $A^t \preceq^{ds} B^t$,*

- *Из* $A \preceq^s B$ *следует* $A \preceq^d B$, *а из* $A \preceq^d B$ *следует* $A \preceq^w B$. *Ни одна из обратных импликаций, вообще говоря, не верна.*

- *Из* $A \preceq^{ds} B$ *следует* $A \preceq^r B$.

Лемма 1.9. *Пусть* $A, B \in M_{n,m}$ *и* $A \preceq B$, *где* $\preceq$ *— один из типов мажоризации из определения 1.7. Тогда* $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} B$.

Доказательство. По теореме 1.8 из $A \preceq B$ следует, что существует такая строчно-стохастическая X, что $A = XB$ или $A = BX$. □

В работе будут использованы следующие характеризации мажоризаций матриц.

Теорема 1.10. *[32, предложение 3.3] Пусть* $A, B \in M_{n,m}$. *Тогда* $A \preceq^w B$, *если и только если* $\mathcal{R}(A) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B))$.

Для матрицы $A \in M_{n,m}$ и целого числа k, обозначим за $\overline{A}(k)$ матрицу размера $\binom{n}{k} \times n$, где строки $\overline{A}(k)$ есть средние арифметические всевозможных комбинаций из k строк A.

Теорема 1.11. *([32, следствие 3.13]) Пусть* $A, B \in M_{n,m}$. *Тогда* $A \preceq^d B$ *тогда и только тогда, когда*

$$\overline{A}(k) \preceq^w \overline{B}(k) \quad (k \in \{1, 2, \ldots, [\frac{n}{2}], n\}).$$

Частный случай $k = n$ дает следующее необходимое условие мажоризации по направлению.

Следствие 1.12. *Пусть* $A, B \in M_{n,m}$ *и* $A \preceq^d B$. *Тогда* $e^t A = e^t B$.

Следующая теорема была доказана Далем в [13]. Мы приводим другую ее формулировку, которую можно найти в [32].

Теорема 1.13. *[32, теорема 3.9] Пусть* $A, B \in M_{n,m}$. *Тогда* $A \preceq^s B$, *если и только если для любой выпуклой функции* $f : V \to \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\sum_{j=1}^{n} f(A_{(j)}) \leq \sum_{j=1}^{n} f(B_{(j)}),$$

где $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *— такое выпуклое множество, что* $\mathcal{R}(A) \cup \mathcal{R}(B) \subseteq V$. *Здесь пространство строк матрицы рассматривается как подпространство* $\mathbb{R}^m$.

1.2 Линейные операторы, сохраняющие мажоризацию матриц

Изучение линейных операторов, сохраняющих инварианты, началось с работ Фробениуса [17], Шура [39] и Дьедонне [16]. Такие операторы играют важную роль в теории мажоризаций. Они, в частности, позволяют строить новые пары, упорядоченные в смысле мажоризации, из других уже известных упорядоченных пар.

Определение 1.14. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, а $\prec$ — бинарное отношение на пространстве V. Линейный оператор ϕ на V *сохраняет отношение* $\prec$, если для любых $a, b \in V$ из $a \prec b$ следует $\phi(a) \prec \phi(b)$.

Теория линейных операторов, сохраняющих мажоризации матриц, стала активно развиваться, начиная с работы Андо [1].

Теорема 1.15. *[1, следствие 2.7] Пусть Φ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ сохраняет векторную мажоризацию.*

2. *Выполнено одно из следующих утверждений*

   (a) *$\Phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$.*

   (b) *$\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и некоторой $P \in P(n)$.*

После работы Андо многие авторы внесли свой вклад в нахождение операторов, сохраняющих различные типы мажоризаций матриц, см. [5, 6, 27, 20, 21, 36, 44] и содержащиеся в них ссылки. Приведем некоторые из этих результатов.

Теорема 1.16. *[27, теорема 2] Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ сохраняет мажоризацию по направлению.*

2. *Φ сохраняет сильную мажоризацию.*

3. *Для любых $A, B \in M_{n,m}$ из $A \preceq^s B$ следует $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$.*

4. Выполнено одно из следующих утверждений:

(a) $\Phi(X) = \sum\limits_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$ *для некоторых* $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$.

(b) $\Phi(X) = PXR + JXS$ *для некоторых* $R, S \in M_m$ *и* $P \in P(n)$.

Теорема 1.17. *[20] Пусть* Φ *— линейный оператор на* $M_{n,m}$*. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. Φ *сохраняет слабую мажоризацию.*

2. Выполнено одно из следующих утверждений:

(a) $\Phi(X) = PXL$ *для некоторых* $L \in M_m$ *и* $P \in P(n)$.

(b) $n = 2$ *и* $\Phi(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} XL$ *для некоторых* $L \in M_m$ *и* $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leq 0$.

Характеризация линейных операторов, сохраняющих строчную мажоризацию была найдена в [21].

Существует множество типов мажоризаций, которые можно определить на пространстве матриц. Естественным образом возникает задача характеризации отображений, конвертирующих один тип мажоризации в другой.

Определение 1.18. Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, а $\preceq^x$, $\preceq^y$ — два типа мажоризации. Тогда Φ конвертирует мажоризацию $\preceq^x$ в мажоризацию $\preceq^y$, если для любых $A, B \in M_{n,m}$ из $A \preceq^x B$ следует $\Phi(A) \preceq^y \Phi(B)$.

Заметим, что один из типов таких отображений, а именно, конвертеры из сильной мажоризации в мажоризацию по направлению найден в теореме 1.16, пункт 3.

Глава 2

Мажоризация классов матриц

В этой главе мы вводим понятие мажоризации классов матриц и изучаем свойства этого отношения.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два конечных класса матриц из $M_{n,m}$. Говорим, что $\mathcal{A}$ *мажорируется* $\mathcal{B}$, если

$$\text{для любой } A \in \mathcal{A} \text{ существует такая матрица } B_A \in \mathcal{B}, \text{ что } A \preceq B_A. \tag{1}$$

Если это условие выполнено, пишем $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$, и называем такое отношение *мажоризацией классов матриц*. Мы также используем обозначение $\trianglelefteq^s$, когда $\preceq$ есть $\preceq^s$, и аналогично для других типов мажоризации.

Пример 2.2.

1. Если $\mathcal{A} = \{A\}$ и $\mathcal{B} = \{B\}$, то $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ означает, что $A \preceq B$. Таким образом, мажоризация классов матриц обобщает мажоризацию матриц и векторную мажоризацию.

2. Предположим, что $\mathcal{B} = \{B\}$. Тогда $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ означает, что $A \preceq B$ для любых $A \in \mathcal{A}$.

3. Предположим, что $\mathcal{A} = \{A\}$. Тогда $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ означает, что $A \preceq B$ для некоторой $B \in \mathcal{B}$.

2.1 Приложения

Понятия, вводимые в этой главе, мотивированы некоторыми базовыми вопросами математической статистики. Ниже мы коротко их опишем.

Основная идея *теории статистических экспериментов* — сравнивать два статистических эксперимента по отношению к понятию “риска”. Наиболее полное изложение этой теории можно прочитать в монографии Торгерсена [40]. Первоначальное развитие этой области происходило в 1950-х годах, и появилось в работах Халмоса и Бахадура [18], Блэквела [8] и ЛеКама [11].

Рассмотрим пример использования мажоризаций матриц в теории статистических экспериментов.

Пример 2.3. Рассмотрим два медицинских прибора для измерения давления. Приборы имеют простую шкалу: низкое (L), среднее (M) и высокое (H) давление. Из-за качества приборов показания могут быть неточны. Вероятности разных ответов для разных исходных значений можно описать строчно-стохастическими матрицами, в которых и строки, и столбцы отвечают L, M, и H. Приборы можно задавать квадратными матрицами следующим образом: (i,j)-й элемент матрицы есть вероятность того, что прибор покажет j, если правильный ответ — i. Предположим, два эксперимента заданы матрицами E и F,

$$E = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.39 & 0.06 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим прибор, задаваемый матрицей E. Предположим, что он предсказал j. Если $j = 1$ (т. е. L), мы можем точно заключить, что верное значение параметра i есть 1, а если $j = 3$, то возможно только $i = 3$. Если, однако, $j = 2$, то i может быть как 1, так и 2. Поскольку прибор говорит, что $j = 2$ с вероятностью 0.3, если $i = 1$ и всегда, когда $i = 2$, мы можем заключить, что $i = 2$ более вероятно, хотя это зависит от априорных вероятностей $i = 1$ и $i = 2$.

Таким образом, эксперимент E дает много информации о неизвестном параметре i, и прибор можно считать хорошим. Что же касается прибора, заданного матрицей F, то здесь ситуация другая: для любой реализации j существует по крайней мере два возможных значения i, и вероятности разных истинных ответов достаточно близки. Итак, прибор/эксперимент E кажется лучше, чем F. На самом деле, можно проверить, что E более информативен, чем F, используя следующий метод.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что X также строчно-стохастическая. Кроме того, легко проверить, что $EX = F$. Из этого следует, что матрица E строчно мажорирует матрицу F. Так называемый, *рандомизационный критерий* в теории статистических экспериментов говорит, что (относительно некоторых слабых предположений, выполненных в этом случае) E более информативен, чем F тогда и только тогда, когда существует строчно-стохастическая матрица X, такая, что $EX = F$. □

Теперь мы расширим описанное упорядочивание пар экспериментов до сравнения *множеств* экспериментов. Пусть $\mathcal{A} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p\}$ и $\mathcal{B} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_q\}$ — два множества приборов, исследующих одну и ту же величину. Предположим, что статистик А выбирает прибор из множества $\mathcal{A}$, а другой статистик В из множества $\mathcal{B}$. Кто из них может получить больше информации о неизвестном параметре? Мы можем ввести следующее понятие, чтобы смоделировать эту ситуацию: говорим, что $\mathcal{B}$ *более информативно*, чем $\mathcal{A}$, если для любого $\mathcal{E}_j$ $(j \leq p)$, существует такое $i \leq q$, что $\mathcal{F}_i$ более информативен, чем $\mathcal{E}_j$. Другими словами, какой бы эксперимент статистик А ни выбрал из $\mathcal{A}$, статистик В может найти более информативный из $\mathcal{B}$, то есть В имеет больше информации для принятия решений. Таким образом, естественной интерпретацией большего качества $\mathcal{B}$ по сравнению с $\mathcal{A}$ является отношение $\mathcal{A} \trianglelefteq^r \mathcal{B}$.

2.2 Основные свойства мажоризации классов матриц

Лемма 2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два класса матриц из $M_{n,m}$. Тогда*

- *Из $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$ следует $\mathcal{A} \preceq^d \mathcal{B}$.*
- *Из $\mathcal{A} \preceq^d \mathcal{B}$ следует $\mathcal{A} \preceq^w \mathcal{B}$.*
- *Из $\mathcal{A} \preceq^{ds} \mathcal{B}$ следует $\mathcal{A} \preceq^r \mathcal{B}$.*

Кроме того, ни одна из обратных импликаций, вообще говоря, не верна.

Доказательство. Следует из соответствующего утверждения для матриц, теорема 1.8. □

Рассмотрим подробнее пункт 2 примера 2.2 в случае векторной мажоризации, то есть $\preceq^s$ при $m = 1$.

Предложение 2.5. *Пусть $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^t$ и $a^j = (a_1^j, a_2^j, \ldots, a_n^j)^t$ — векторы в $\mathbb{R}^n$ $(j \leq p)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\{a^1, a^2, \ldots, a^p\} \trianglelefteq^s \{b\}$.
2. $\max\limits_{j \leq p} \sum_{i=1}^{k} a_{[i]}^j \leq \sum_{i=1}^{k} b_{[i]}$ *для любого* $k < n$ *и* $\sum_{i=1}^{n} a_i^j = \sum_{i=1}^{n} b_i$ *для любого* $j \leq p$.
3. *Существуют такие матрицы $X_j \in \Omega_n$, что $a^j = X_j b$ для любого $j \leq p$.*

4. $\{Pa^j : P \in P(n), j \leq p\} \subseteq \operatorname{conv}(Pb : P \in P(n))$.

Доказательство. Это непосредственно следует из общей теории мажоризаций, см., например, Теорему P1 в [32]. $\square$

Рассмотрим два матричных класса $\mathcal{U} \subseteq M_{n,m}$ и $\mathcal{V} \subseteq M_{m,k}$. Определим

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \{AB : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\} \subseteq M_{n,k},$$

множество попарных произведений.

Напомним, что Ω_n^{row} (соответственно, Ω_n) обозначает множество всех строчно-стохастических (соответственно, дважды стохастических) матриц порядка n. Тогда для матричных классов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq M_{n,m}$ имеют место следующие критерии мажоризации классов матриц:

- Дважды-стохастическая мажоризация: $\mathcal{A} \trianglelefteq^{ds} \mathcal{B}$, если и только если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \circ \Omega_m$.
- Строчная мажоризация: $\mathcal{A} \trianglelefteq^{r} \mathcal{B}$, если и только если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \circ \Omega_m^{row}$.
- Слабая мажоризация: $\mathcal{A} \trianglelefteq^{w} \mathcal{B}$, если и только если $\mathcal{A} \subseteq \Omega_n^{row} \circ \mathcal{B}$.
- Сильная мажоризация: $\mathcal{A} \trianglelefteq^{s} \mathcal{B}$, если и только если $\mathcal{A} \subseteq \Omega_n \circ \mathcal{B}$.

Предложение 2.6. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – классы матриц из $M_{n,m}$. Тогда*

1. $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{A}$.
2. *Если* $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ *и* $\mathcal{B} \trianglelefteq \mathcal{C}$, *то* $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{C}$.
3. *Если* $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$, *то*
$$\max_{A \in \mathcal{A}} rank\, A \leq \max_{B \in \mathcal{B}} rank\, B.$$
4. *Если* $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$, *то*
$$\max_{A \in \mathcal{A}} |\det A| \leq \max_{B \in \mathcal{B}} |\det B|.$$

Доказательство. Утверждения 1 и 2 выполнены по определению.

3. По лемме 1.9 из $A \preceq B$ следует, что $\operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} B$. Тогда для любой $A \in \mathcal{A}$ существует такая $B \in \mathcal{B}$, что $\operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} B$.

4. Если X строчно-стохастическая, то $|\det X| \le 1$, поэтому из $A \preceq B$ следует, что $|\det A| \le |\det B|$. Тогда для любой $A \in \mathcal{A}$ существует такая $B \in \mathcal{B}$, что $|\det A| \le |\det B|$. $\square$

Существует аналог предложения 1.10 для классов матриц. Напомним, что $\mathcal{R}(A)$ обозначает множество строк матрицы A. Определим также для класса матриц $\mathcal{A} \subseteq M_{n,m}$ множество $\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \bigcup\{\mathcal{R}(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Аналогично, множество столбцов матрицы или класса матриц обозначается $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, соответственно.

Предложение 2.7. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — классы матриц из $M_{n,m}$. Тогда из $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$, где $\trianglelefteq$ есть $\trianglelefteq^s$, $\trianglelefteq^d$ или $\trianglelefteq^w$, следует, что $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\mathcal{B}))$.*

Доказательство. Для матриц A и B, если $A \preceq B$ для одного из порядков $\preceq^s$ или $\preceq^d$, то $A \preceq^w B$. По предложению 1.10 каждая строка A является выпуклой комбинацией строк B. В итоге, для любого $x^t \in \mathcal{R}(\mathcal{A})$ существует такая $B \in \mathcal{B}$, что $x^t \in \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B))$, то есть $x^t \in \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\mathcal{B}))$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — классы матриц в $M_{n,m}$. Тогда из $\mathcal{R}(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\mathcal{B}))$, вообще говоря, не следует $\mathcal{A} \preceq^w \mathcal{B}$, как показывает следующий пример.

Пример 2.8. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1\} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$ и $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

Тогда $\mathcal{R}(A_1) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\mathcal{B}))$, но $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B_2))$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B_1))$. Из этого следует, что $A_1 \not\preceq^w B_i$, $i = 1, 2$ и, в результате, $\mathcal{A} \ntrianglelefteq^w \mathcal{B}$. $\square$

Пусть $A \in M_{n,m}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $[A, v] \in M_{n,m+1}$ матрицу, в которой первые m столбцов совпадают с A, а последний столбец равен вектору v. Пусть $\left[\begin{smallmatrix} A \\ v^t \end{smallmatrix}\right]$, где $v \in \mathbb{R}^m$, обозначает аналогичную конкатенацию строки.

Для $\mathcal{A} = \{A_i : 1 \le i \le p\}$ и $v \in \mathbb{R}^n$ (соответственно, $v \in \mathbb{R}^m$) класс $[\mathcal{A}, v]$ (соответственно, $\left[\begin{smallmatrix} \mathcal{A} \\ v^t \end{smallmatrix}\right]$) обозначает класс, полученный из расширенных матриц: $\{[A_i, v] : 1 \le i \le p\}$ (соответственно, $\{\left[\begin{smallmatrix} A_i \\ v^t \end{smallmatrix}\right] : 1 \le i \le p\}$). Напомним, что e — вектор из единиц.

Предложение 2.9. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — классы матриц из $M_{n,m}$. Тогда,*

- *Если* $\trianglelefteq$ *есть* $\trianglelefteq^s$, $\trianglelefteq^d$ *или* $\trianglelefteq^w$, *то* $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ *тогда и только тогда, когда* $[\mathcal{A}, e] \trianglelefteq [\mathcal{B}, e]$.

- $\mathcal{A} \trianglelefteq^{ds} \mathcal{B}$ *тогда и только тогда, когда* $\left[\begin{smallmatrix} \mathcal{A} \\ e^t \end{smallmatrix}\right] \trianglelefteq^{ds} \left[\begin{smallmatrix} \mathcal{B} \\ e^t \end{smallmatrix}\right]$.

Доказательство. Напрямую следует из определений. $\square$

Пусть $A \in M_{n,m}$. Напомним, что для $J \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ $A^{(\mathcal{J})}$ обозначает подматрицу A, столбцы которой состоят из столбцов A с индексами из $\mathcal{J}$. Аналогично, для $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ $A_{(\mathcal{I})}$ обозначает подматрицу A, строки которой есть строки A с индексами из $\mathcal{I}$.

Для $\mathcal{A} = \{A_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, p\}\}$ $\mathcal{A}_{(\mathcal{I})}$ обозначает класс, состоящий из соответствующих матриц, $\mathcal{A}_{(\mathcal{I})} = \{A_{i(\mathcal{I})},\ i \in \{1, 2, \ldots, p\}\}$, и аналогично для столбцов.

Лемма 2.10. *Пусть* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *— классы матриц из* $M_{n,m}$, $\mathcal{I} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *и* $\mathcal{J} \subseteq \{1, \ldots, m\}$. *Тогда верны утверждения:*

- *Если* $\trianglelefteq$ *есть* $\trianglelefteq^s$, $\trianglelefteq^d$ *или* $\trianglelefteq^w$, *то из* $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ *следует* $\mathcal{A}^{(\mathcal{J})} \trianglelefteq \mathcal{B}^{(\mathcal{J})}$.

- *Если* $\trianglelefteq$ *есть* $\trianglelefteq^{ds}$ *или* $\trianglelefteq^r$, *то из* $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ *следует* $\mathcal{A}_{(\mathcal{I})} \trianglelefteq \mathcal{B}_{(\mathcal{I})}$.

Доказательство. Эта лемма следует из аналогичного результата для матриц (см. [13, теорема 2.1(iii)] для $\preceq^{ds}$ и $\preceq^r$ и [32, предложение 3.5] для $\preceq^s$, $\preceq^d$ и $\preceq^w$). $\square$

Напомним, что для матрицы $A \in M_{n,m}$ и целого числа k, $\overline{A}(k)$ обозначает матрицу размера $\binom{n}{k} \times m$, где строки $\overline{A}(k)$ есть средние арифметические всевозможных комбинаций из k строк A.

Для $\mathcal{A} = \{A_i,\ i \in \{1, 2, \ldots, p\}\}$ и целого числа k, положим $\overline{\mathcal{A}}(k) = \{\overline{A_i}(k),\ i \in \{1, 2, \ldots, p\}\}$.

Следствие 2.11. *Пусть* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *— два класса матриц из* $M_{n,m}$. *Тогда из* $\mathcal{A} \trianglelefteq^d \mathcal{B}$ *следует* $\overline{\mathcal{A}}(k) \trianglelefteq^w \overline{\mathcal{B}}(k)$ *для* $k = 1, 2, \ldots, [\frac{n}{2}]$ *и* $k = n$.

Доказательство. Получается из аналогичного результата для матриц, теорема 1.11. $\square$

Обратное утверждение неверно, как показывает следующий пример.

Пример 2.12. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1\} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\}$, где $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что $A_1 \preceq^w B_1$ и $e^t A_1 = e^t B_2$, т. е. $\overline{A_1}(1) \preceq^w \overline{B_1}(1)$ и $\overline{A_1}(2) \preceq^w \overline{B_2}(2)$. Тогда $\overline{\mathcal{A}}(k) \trianglelefteq^w \overline{\mathcal{B}}(k)$ для $k = 1, 2$. Но $e^t A_1 \neq e^t B_1$ и $A_1 \not\preceq^w B_2$, то есть $\mathcal{A} \ntrianglelefteq^d \mathcal{B}$. □

Теорема 2.13. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два класса матриц из $M_{n,m}$. Если $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$, где $\trianglelefteq$ есть $\trianglelefteq^s$, $\trianglelefteq^d$ или $\trianglelefteq^w$, то*

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \ker B \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \ker A.$$

Доказательство. Эта теорема следует из того, что $\ker B \subseteq \ker A$ при $A \preceq^w B$. □

2.3 Минимальные покрывающие классы

Идея, лежащая в основе мажоризации классов матриц, мотивирует исследовать вопрос, которому посвящен этот раздел: насколько маленьким может быть множество $\mathcal{B}$ при условии, что $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$. Формально, для заданного класса матриц $\mathcal{A}$ определить

$$\min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}\} \tag{2}$$

и, если возможно, предъявить пример такого класса.

Это один из видов задач покрытия, задача зависит от типа мажоризации $\preceq$. Говорим, что $\mathcal{B}$ — *минимальный покрывающий класс* для $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} \trianglelefteq \mathcal{B}$ и количество матриц в $\mathcal{B}$ минимально (2).

2.3.1 Слабая мажоризация

Вообще говоря, для класса матриц $\mathcal{A}$ может не существовать такой матрицы B, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \{B\}$. Следующий пример это демонстрирует.

Пример 2.14. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\} = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\}$. Тогда для любого $B \in M_2$ множество $\operatorname{conv}(\mathcal{R}(B))$ — отрезок на плоскости, поскольку $\operatorname{conv}(\mathcal{R}(B))$ является выпуклой оболочкой двух точек в двухмерном пространстве. Тогда он не может содержать одновременно $\mathcal{R}(A_1)$ и $\mathcal{R}(A_2)$. Следовательно, по теореме 1.10, не существует такой B, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \{B\}$. $\square$

Замечание 2.15. Конструкция, построенная в примере выше показывает, что для любого p существует такой класс матриц $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$, что $\min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{A} \trianglelefteq^w \mathcal{B}\} = p$.

Чтобы это продемонстрировать, рассмотрим следующий пример.

Пример 2.16. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$, такой, что $A_s = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 1 & s \end{pmatrix}$, $s = 1, \ldots, p$. Тогда, как и в примере выше, по теореме 1.10 не существует такой $\mathcal{B}$, что $|\mathcal{B}| < p$ и $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \mathcal{B}$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$ — такой класс матриц, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \{B\}$ для некоторой матрицы B. Тогда, вообще говоря, может не существовать такой матрицы C, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^s \{C\}$, как показывает следующий пример.

Пример 2.17. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$, где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \{A_1\}$. Предположим, что существует такая матрица C, что $A_1 \preceq^s C$ и $A_2 \preceq^s C$. Из этого следует, что $A_1 = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix} C$ для некоторого x, $0 \leq x \leq 1$, и $A_2 = DC$ для некоторой $D \in \Omega_2$. Тогда $C^{-1} = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$. Из этого следует, что $D = A_2 C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} & \frac{1-x}{2} \\ 1-\frac{x}{2} & \frac{1+x}{2} \end{pmatrix}$. Но тогда $De \neq e$ и $D \notin \Omega_2$, противоречие. $\square$

Классическая векторная мажоризация имеет красивую геометрическую интерпретацию, которая получается из теоремы Радо([30]): для $y, x \in \mathbb{R}^n$, y мажорируется x, если и только если y лежит в выпуклой оболочке всех векторов, полученных перестановками элементов x. Геометрия строчной мажоризации была исследована в [13, 14]. Следующие результаты продолжают геометрический подход к мажоризациям.

Напомним, что мы рассматриваем конечные классы матриц.

Лемма 2.18. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс матриц из $M_{n,m}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- *Существует такая* $B \in M_{n,m}$, *что* $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \{B\}$
- *Все точки* $\mathcal{R}(A_i)$, *соответствующие строкам всех матриц* $A_i \in \mathcal{A}$, *лежат в одной аффинной плоскости размерности не больше* $n-1$.

Доказательство. В силу конечности класса $\mathcal{A}$ утверждение напрямую следует из теоремы 1.10. □

В частности, получаем

Следствие 2.19. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— класс матриц в* $M_{n,m}$, *где* $n > m$. *Тогда*

$$\min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{A} \trianglelefteq^w \mathcal{B}\} = 1.$$

Лемма 2.18 и следствие 2.19 и дают полную характеризацию классов матриц, слабо мажорирующихся одной матрицей. Опишем явный способ нахождения покрывающей матрицы. Задача сводится к нахождению множества не более n вектор-строк, выпуклая оболочка которых содержит все строки матриц класса $\mathcal{A}$.

Центр тяжести (или *барицентр*) множества — центр масс всех его точек.

Определение 2.20. Пусть $\alpha > 0$. Назовем *α-гомотетией множества* $\{v_0, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^m$ множество $\{\alpha v_0 + \frac{1-\alpha}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k} v_i, \dots, \alpha v_k + \frac{1-\alpha}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k} v_i\}$. Другими словами, это точки, получающиеся из исходных α-гомотетией с центром в барицентре $v_0, \dots, v_k$.

Лемма 2.21. *Пусть* $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$ *и* $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. *Тогда* α_1*-гомотетия множества* $\{v_0, \dots, v_k\}$ *содержится в выпуклой оболочке* α_2*-гомотетии этого множества.*

То есть для любого $q \in \{0, \dots, k\}$ *выполнено*

$$\alpha_1 v_q + \frac{1-\alpha_1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} v_i \in \operatorname{conv}\left(\{\alpha_2 v_0 + \frac{1-\alpha_2}{k+1}\sum_{i=0}^{k} v_i, \dots, \alpha_2 v_k + \frac{1-\alpha_2}{k+1}\sum_{i=0}^{k} v_i\}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $q \in \{0, \dots, k\}$. Определим $\beta_0, \dots, \beta_k$ системой $\begin{cases} \beta_q = \frac{k\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2(k+1)} \\ \beta_j = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2(k+1)}, \ j \neq q \end{cases}$. Заметим, что $\beta_0, \dots, \beta_k \geq 0$ поскольку $\alpha_2 > \alpha_1$. Кроме того, $\sum\limits_{j=0}^{k} \beta_j = \frac{k(\alpha_2 - \alpha_1) + k\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2(k+1)} = 1$.

Рассмотрим выпуклую оболочку α_2-гомотетии с коэффициентами $\beta_0, \ldots, \beta_k$. Получаем $\beta_0(\alpha_2 v_0 + \frac{1-\alpha_2}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k} v_i) + \ldots + \beta_k(\alpha_2 v_k + \frac{1-\alpha_2}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k} v_i) = \beta_0\alpha_2 v_0 + \ldots + \beta_k\alpha_2 v_k + \frac{1-\alpha_2}{k+1}\sum\limits_{i=0}^{k} v_i = \sum\limits_{i=0}^{k}(\beta_i\alpha_2 + \frac{1-\alpha_2}{k+1})v_i = (\beta_q\alpha_2 + \frac{1-\alpha_2}{k+1})v_q + \sum\limits_{j\neq q}(\beta_j\alpha_2 + \frac{1-\alpha_2}{k+1})v_j = \frac{k\alpha_1+\alpha_2+1-\alpha_2}{k+1}v_q + \sum\limits_{j\neq q}\frac{\alpha_2-\alpha_1+1-\alpha_2}{k+1}v_j = (\alpha_1 + \frac{1-\alpha_1}{k+1})v_q + \sum\limits_{j\neq q}\frac{1-\alpha_1}{k+1}v_j = \alpha_1 v_q + \frac{1-\alpha_1}{k+1}(v_0 + \ldots + v_k)$, что и требовалось доказать. □

Определение 2.22. Точки $v_0, \ldots, v_k$ аффинной плоскости называются *аффинно зависимыми*, если они лежат в плоскости размерности меньше k, и *аффинно независимыми* в противном случае.

Следующая теорема дает явный способ найти $k+1$ точку k-мерного пространства, выпуклая оболочка которых содержит заданное конечное множество точек этого пространства.

Теорема 2.23. *Пусть $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{R}^m$ лежат в аффинной плоскости P размерности k. Пусть $v_0, \ldots, v_k$ — произвольные аффинно независимые точки плоскости P. Тогда существует такое $\alpha > 0$, что все точки $u_1, \ldots, u_s$ лежат в выпуклой оболочке α-гомотетии $\{v_0, \ldots, v_k\}$.*

Доказательство. Рассмотрим барицентрические координаты произвольной точки $u \in \{u_1, \ldots, u_s\}$, $u = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_k v_k$, $\sum\limits_{i=0}^{k}\lambda_i = 1$. Если все координаты λ_i неотрицательны, то $u \in \operatorname{conv}(v_0, \ldots, v_k)$ и доказывать нечего. В противном случае, не ограничивая общности, предположим, что λ_0 — минимальная координата. Заметим, что $\lambda_0 < 0$.

Пусть $\alpha = 1 - \lambda_0(k+1)$. Тогда $u = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_k v_k = (\lambda_1 - \lambda_0)v_1 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_0)v_k + \lambda_0(\sum\limits_{i=0}^{k} v_i) = \frac{\lambda_1-\lambda_0}{\alpha}\alpha v_1 + \ldots + \frac{\lambda_k-\lambda_0}{\alpha}\alpha v_k + \lambda_0(\sum\limits_{i=0}^{k} v_i) = \frac{\lambda_1-\lambda_0}{1-\lambda_0(k+1)}\alpha v_1 + \ldots + \frac{\lambda_k-\lambda_0}{1-\lambda_0(k+1)}\alpha v_k + \lambda_0(\sum\limits_{i=0}^{k} v_i)$. Заметим, что $\frac{\lambda_i-\lambda_0}{1-\lambda_0(k+1)} \geq 0$ для любого $i \in \{0, \ldots, k\}$, поскольку $\lambda_i \geq \lambda_0$. Кроме того, $\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i-\lambda_0}{1-\lambda_0(k+1)} = \sum\limits_{i=0}^{k}\frac{\lambda_i-\lambda_0}{1-\lambda_0(k+1)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k}\lambda_i-\lambda_0(k+1)}{1-\lambda_0(k+1)} = 1$ и $\lambda_0 = \frac{1-\alpha}{k+1}$.

В итоге, $u = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i - \lambda_0}{1-\lambda_0(k+1)} \alpha v_i + \frac{1-\alpha}{k+1} \sum\limits_{l=0}^{k} v_l = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i - \lambda_0}{1-\lambda_0(k+1)} (\alpha v_i + \frac{1-\alpha}{k+1} \sum\limits_{l=0}^{k} v_l)$ лежит в выпуклой оболочке α-гомотетии $\{v_0, \dots, v_k\}$.

В силу произвольности u, для любого u_i, $i = 1, \dots, s$ существует такое $\alpha_i > 0$, что u_i лежит в выпуклой оболочке α_i-гомотетии $\{v_0, \dots, v_k\}$. Пусть $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$. Тогда, по лемме 2.21, множество $\{u_1, \dots, u_s\}$ лежит в выпуклой оболочке α-гомотетии множества $\{v_0, \dots, v_k\}$.

$\square$

Лемма 2.18 позволяет решить задачу нахождения минимального покрывающего класса в случае слабой мажоризации.

Задача 2.24. *Для произвольного конечного класса $\mathcal{A}$ в $M_{n,m}$ найти минимальный покрывающий класс в смысле слабой мажоризации.*

Решение.

1. Перебираем возможные размеры минимального покрывающего класса $s = 1, \dots, |\mathcal{A}|$.

2. Рассмотрим все возможные разбиения $\mathcal{A}$ на s. подмножеств

3. С помощью критерия в лемме 2.18 для каждого подмножества проверяем, существует ли такая $B \in M_{n,m}$, что $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_q}\} \trianglelefteq^w B$. Если существует, то соответствующую матрицу можно найти по теореме 2.23. Действительно, по лемме 2.18 все точки $\{\mathcal{R}(A_{i_1}), \dots, \mathcal{R}(A_{i_q})\}$ лежат в одной аффинной плоскости размерности $k \leq n-1$. Тогда теорема 2.23 позволит найти $k+1 \leq n$ точек $v_1, \dots, v_{k+1} \in \mathbb{R}^m$ (рассматриваемых как вектор-строки), в выпуклой оболочке которых содержатся все строки матриц $A_{i_1}, \dots, A_{i_q}$. Тогда матрица $B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ мажорирует класс $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_q}\}$.

$\square$

Таким образом, в случае слабой мажоризации, решена задача нахождения минимального покрывающего класса $\mathcal{B}$ для произвольного класса $\mathcal{A} \subseteq M_{n,m}$.

Замечание 2.25. Если точки $\mathbb{R}^m$, соответствующие строкам матрицы $A_1 \in M_{n,m}$, аффинно независимы, то гиперплоскость, содержащая выпуклую оболочку строк A_1 определяется однозначно. Предположим, что строки $A_2 \in M_{n,m}$ тоже аффинно независимы. Тогда существует такая B, что $A_i \preceq^w B$, если и только если гиперплоскости, содержащие A_1 и A_2 совпадают.

2.3.2 Мажоризация по направлению

Перейдем к рассмотрению мажоризации по направлению.

Предложение 2.26. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс матриц из $M_{n,m}$. Тогда*

$$\min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{A} \trianglelefteq^d \mathcal{B}\} \geq \Sigma_{\mathcal{A}},$$

где $\Sigma_{\mathcal{A}}$ — количество матриц в $\mathcal{A}$ с различными столбцовыми суммами.

Доказательство. Если $A \preceq^d B$, то столбцовые суммы A и B совпадают по следствию 1.12, т. е. $e^tA = e^tB$. Из этого следует, что для любой $A_i \in \mathcal{A}$ существует такая $B_j \in \mathcal{B}$, что $e^tA_i = e^tB_j$, тогда $\min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{A} \trianglelefteq^d \mathcal{B}\} \geq \Sigma_{\mathcal{A}}$. □

Как показывает следующий пример, неравенство в предложении выше может быть строгим.

Пример 2.27. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $e^tA_1 = e^tA_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$, то есть $\Sigma_{\mathcal{A}} = 1$. Однако, по теореме 1.10, не существует такой матрицы B, что $A_1 \preceq^w B$ и $A_2 \preceq^w B$, а поскольку из $\preceq^d$ следует $\preceq^w$, не существует такой матрицы B, что $A_1 \preceq^d B$ и $A_2 \preceq^d B$, что и требовалось доказать. □

Напомним, что для заданной матрицы $A \in M_{n,m}$, матрица $\overline{A}(k) \in M_{\binom{n}{k},m}$ — это матрица, строки которой есть средние арифметические всевозможных комбинаций из k строк A.

Определение 2.28. Для любой матрицы $X \in M_{n,m}$, P_X обозначает политоп в $\mathbb{R}^m$ с n вершинами, отвечающими строкам X. Для удобства предположим, что вершин у P_X ровно n, даже если некоторые из них совпадают.

Лемма 2.29. *Пусть $X \in M_{n,m}$. Тогда $\frac{1}{n}e^tX$ — барицентр P_X.*

Доказательство. По определению, P_X имеет ровно n вершин. $\square$

Заметим, что лемма 2.29, вообще говоря, неверна для $\operatorname{conv}(\mathcal{R}(X))$, как показывает следующий пример:

Пример 2.30. Пусть $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\operatorname{conv}(\mathcal{R}(X))$ — отрезок с началом в $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ и концом в $\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$, а P_X — политоп с тремя вершинами $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$. Из этого следует, что барицентр $\operatorname{conv}(\mathcal{R}(X))$ отличается от $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}e^tX$.

$\square$

Рассмотрим следующее достаточное условие покрытия класса одной матрицей в смысле мажоризации по направлению.

Лемма 2.31. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс матриц из $M_{n,m}$. Предположим, что существует такая матрица $B \in M_{n,m}$, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \{B\}$ и $e^tB = e^tA_i$ для любой $A_i \in \mathcal{A}$.*

Если существует такая $C \in M_{n,m}$, что

$$e^tB = e^tC \text{ и } \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B)) \subseteq \bigcap_{k=1,\dots,[\frac{n}{2}]} \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\overline{C}(k))),$$

то $\mathcal{A} \trianglelefteq^d \{C\}$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что для любого $X \in M_{n,m}$ и всех $k \leq n$ выполнено $\mathcal{R}(\overline{X}(k)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(X))$, поскольку строки $\overline{X}(k)$ есть выпуклые комбинации строк X.

Рассмотрим произвольную $A_i \in \mathcal{A}$. По условию, $e^tC = e^tB = e^tA_i$ и $A_i \preceq^w B$. Последнее означает, что $\mathcal{R}(A_i) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B))$. В итоге, для любого $k \leq [\frac{n}{2}]$:

$$\mathcal{R}(\overline{A_i}(k)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(A_i)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\overline{C}(k))).$$

Получается, $e^tA_i = e^tC$ и $\overline{A_i}(k) \preceq^w \overline{C}(k)$ для любого $k \leq [\frac{n}{2}]$. Значит $A_i \preceq^d C$ по теореме 1.11. В силу произвольности i получаем $\mathcal{A} \trianglelefteq^d \{C\}$. $\square$

Пусть $D \in M_{n,m}$. Для $k \leq [\frac{n}{2}]$ обозначим вершины $P_{\overline{D}(k)}$ через $D^k_{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, \binom{n}{k}$. Вершины P_D обозначаются $D_{(i)}$. Пусть точка O — барицентр P_D.

Лемма 2.32. *Пусть $D \in M_{n,m}$, $k \leq [\frac{n}{2}]$. Тогда барицентры P_D и $P_{\overline{D}(k)}$ совпадают.*

Доказательство. Следует из определения $\overline{D}(k)$. $\square$

Лемма 2.33. *Пусть $D \in M_{n,m}$, $k \leq [\frac{n}{2}]$. Тогда векторы $\overrightarrow{OD^k_{(i)}}$, $i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{k}$, линейно выражаются через векторы $\overrightarrow{OD_{(q)}}$, $q = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. По определению $\overline{D}(k)$, для любого $i \in \{1, 2, \ldots, \binom{n}{k}\}$ выполнено

$$\overrightarrow{OD^k_{(i)}} = \frac{1}{k}\Big(\overrightarrow{OD_{(i_1)}} + \cdots + \overrightarrow{OD_{(i_k)}}\Big) \tag{3}$$

для некоторых различных $i_1, \ldots, i_k \leq n$.

Тогда для произвольного $j = 1, 2, \ldots, n$ существует ровно $\binom{n-1}{k-1}$ вершин $D^k_{(i)}$, таких, что соответствующее выражение (3) содержит $D_{(j)}$. Такие вершины обозначим ${}_jD^k_{(u)}$, $u = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{k-1}$. Следовательно таких вершин $D^k_{(i)}$, что соответствующее им выражение (3) не содержит $D_{(j)}$ ровно $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}$. Обозначим их ${}_{\not{j}}D^k_{(v)}$, $v = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{k}$. Просуммируем все векторы $\overrightarrow{O\,{}_jD^k_{(u)}}$ и выразим их через (3). Тогда получается

$$\sum_{u=1}^{\binom{n-1}{k-1}} \overrightarrow{O\,{}_jD^k_{(u)}} = s\overrightarrow{OD_{(j)}} + t(\overrightarrow{OD_{(1)}} + \cdots + \overrightarrow{OD_{(j-1)}} + \overrightarrow{OD_{(j+1)}} + \cdots + \overrightarrow{OD_{(n)}}) \tag{4}$$

для некоторых s и t. Заметим, что $s > t$, поскольку разложение (3) каждого $\overrightarrow{O\,{}_jD^k_{(i)}}$ содержит $\overrightarrow{OD_{(j)}}$. Теперь просуммируем все векторы $\overrightarrow{O\,{}_{\not{j}}D^k_{(v)}}$, чтобы получить

$$\sum_{v=1}^{\binom{n-1}{k}} \overrightarrow{O\,{}_{\not{j}}D^k_{(v)}} = l\left(\overrightarrow{OD_{(1)}} + \cdots + \overrightarrow{OD_{(j-1)}} + \overrightarrow{OD_{(j+1)}} + \cdots + \overrightarrow{OD_{(n)}}\right) \tag{5}$$

для некоторого l.

Таким образом, домножая (4) на l, а (5) на t, получаем

$$s \cdot l \cdot \overrightarrow{OD_{(j)}} = l \cdot \sum_{u=1}^{\binom{n-1}{k-1}} \overrightarrow{O\,{}_jD^k_{(u)}} - t \cdot \sum_{v=1}^{\binom{n-1}{k}} \overrightarrow{O\,{}_{\not{j}}D^k_{(v)}}. \tag{6}$$

$\square$

Теперь найдем s, l и t из равенства (6).

Лемма 2.34. *Параметры s, l и t леммы 2.33 удовлетворяют равенствам:*

$$s = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k}, \quad t = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{k} \text{ и } l = \binom{n-2}{k-1}.$$

Доказательство. Как было отмечено в доказательстве леммы 2.33, векторов $\overrightarrow{O_{\,j}D^k_{(u)}}$ ровно $\binom{n-1}{k-1}$. Тогда вектор $\overrightarrow{OD_{(j)}}$ появляется в левой части равенства (4) $\binom{n-1}{k-1}$ раз с множителем $1/k$, то есть $s = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k}$.

Фиксируем $i \neq j, i \leq n$. Таких векторов $\overrightarrow{O_{\,j}D^k_{(u)}}$, в разложение (3) которых входят $\overrightarrow{OD_{(i)}}$ и $\overrightarrow{OD_{(j)}}$ ровно $\binom{n-2}{k-2}$, поскольку мы выбираем $(k-2)$ векторов $\overrightarrow{OD_{(q)}}$ среди $(n-2)$ оставшихся векторов. Таким образом, $t = \frac{\binom{n-2}{k-2}}{k}$.

Наконец, векторов $\overrightarrow{O_{\cancel{j}}D^k_{(i)}}$ ровно $\binom{n-1}{k}$. Тогда из равенства (5) получаем $k\binom{n-1}{k} = l(n-1)$. Следовательно $l = \binom{n-2}{k-1}$. □

Лемма 2.35. *Пусть $D \in M_{n,m}$ и точка O — барицентр P_D. Положим $\alpha = \max\limits_{k=1,\ldots,[\frac{n}{2}]}(k + \frac{(k-1)}{k}(\binom{n}{k} - 1))$. Пусть $C \in M_{n,m}$ — такая матрица, что P_C получается из P_D α-гомотетией с центром O. Тогда*

$$\operatorname{conv}(\mathcal{R}(D)) \subseteq \bigcap_{k=1,\ldots,[\frac{n}{2}]} \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\overline{C}(k))).$$

Доказательство. Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{\binom{n}{k}} \overrightarrow{OD^k_{(i)}} = \overrightarrow{OO} = 0$, поскольку O — барицентр P. Тогда $-\overrightarrow{OD^k_{(j)}} = \sum\limits_{i \neq j} \overrightarrow{OD^k_{(i)}}$.

В таком случае, из равенства (6) следует

$$\overrightarrow{OD_{(j)}} = \tfrac{1}{s} \sum \overrightarrow{O_{\,j}D^k_{(i)}} + \tfrac{t}{sl} \sum_{q \in Q} \sum_{i \neq q} \overrightarrow{OD^k_{(i)}},$$

где Q — множество всех таких индексов q, что $\overrightarrow{OD^k_{(q)}}$ есть $\overrightarrow{O_{\cancel{j}}D^k_{(v)}}$ для некоторого $v \in \{1, 2, \ldots, \binom{n-1}{k}\}$.

Тогда $\overrightarrow{OD_{(j)}}$ — линейная комбинация векторов $\overrightarrow{OD^k_{(i)}}$ с положительными скалярами. Сумма всех скаляров равна

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{s} + \frac{t}{sl}\binom{n-1}{k}(\binom{n}{k} - 1) =: \alpha(k).$$

Подставив значения s, l, t, найденные в лемме 2.34, получим

$$\alpha(k) = k + \frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-1}} \frac{n-1}{k} \binom{n-2}{k-1} (\binom{n}{k} - 1) =$$

$$= k + \frac{(k-1)\binom{n-2}{k-2}}{(n-1)\binom{n-2}{k-2}} \frac{n-1}{k} (\binom{n}{k} - 1) = k + \frac{(k-1)}{k} (\binom{n}{k} - 1).$$

Пусть $\alpha = \max\limits_{k=1,\ldots,[\frac{n}{2}]} \alpha(k)$. Тогда

$$\overrightarrow{OD_{(j)}} = \frac{\frac{1}{s}\sum \alpha \overrightarrow{O\ _jD^k_{(i)}} + \frac{t}{sl} \sum\limits_{q\in Q} \sum\limits_{i\neq q} \alpha \overrightarrow{OD^k_{(i)}}}{\alpha}$$

$$\overrightarrow{OD_{(j)}} = \frac{\frac{1}{s}\sum \overrightarrow{O\ _jC^k_{(i)}} + \frac{t}{sl} \sum\limits_{q\in Q} \sum\limits_{i\neq q} \overrightarrow{OC^k_{(i)}}}{\alpha}$$

для любого $j \leq n$. Заметим, что сумма коэффициентов в числителе равна $\alpha(k) \leq \alpha$.

Из этого следует, что каждый $\overrightarrow{OD_{(j)}}$ есть выпуклая комбинация векторов $\overrightarrow{OC^k_{(j)}}$. В самом деле, мы уже показали, что это линейная комбинация с положительными коэффициентами, и, по определению α, сумма этих коэффициентов не больше 1. Если она равна 1, то утверждение доказано, иначе можем добавить к линейной комбинации $\sum\limits_i \overrightarrow{OC^k_{(i)}} = 0$ с подходящим коэффициентом. Итак, $\operatorname{conv}(\mathcal{R}(D)) \subseteq \bigcap\limits_{k=1,\ldots,[\frac{n}{2}]} \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\overline{C}(k)))$.

$\square$

Лемма 2.36. *Пусть $B \in M_{n,m}$ и $v \in \mathbb{R}^m$. Если $v^t \in \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B))$, то существует такая матрица $D \in M_{n,m}$, что $\frac{1}{n}e^tD = v^t$ и $B \preceq^w D$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицы $D_i = \begin{pmatrix} B_{(1)} \\ \vdots \\ B_{(i-1)} \\ (n+1)B_{(i)} - \sum\limits_{i=1}^{n} B_{(i)} \\ B_{(i+1)} \\ \vdots \\ B_{(n)} \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$. Заметим, что $\frac{1}{n}e^tD_i = B_{(i)}$.

Поскольку $v^t \in \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B))$, имеем $v_t = \alpha_1 B_{(1)} + \ldots + \alpha_n B_{(n)}$, где $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$ и $\alpha_j \geq 0$ для любого j. Пусть $D = \alpha_1 D_1 + \ldots \alpha_n D_n$. Тогда $\frac{1}{n} e^t D = \frac{1}{n}(\alpha_1 e^t D_1 + \ldots + \alpha_n e^t D_n) = \alpha_1 B_{(1)} + \ldots + \alpha_n B_{(n)} = v^t$.

Осталось доказать, что $B \preceq^w D$. По теореме 1.10 достаточно показать, что $P_B \subseteq P_D$. Пусть точка O — барицентр P_B, т. е. $O = \frac{1}{n}(B_{(1)} + \ldots + B_{(n)})$. Фиксируем произвольное $i \leq n$. Заметим, что

$$D_{(i)} = \alpha_i((n+1)B_{(i)} - \sum_{i=1}^{n} B_{(i)}) + (1-\alpha_i)B_{(i)},$$

причем $(n+1)B_{(i)} - \sum\limits_{i=1}^{n} B_{(i)} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} B_{(i)} + (n+1)(B_{(i)} - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} B_{(i)}) = O + (n+1)\overrightarrow{OB_{(i)}}$. Таким образом, $D_{(i)} = O + \lambda\overline{OB_{(i)}}$ для некоторого $\lambda \in [1, n+1]$. Следовательно, в силу произвольности i, получаем $P_B \subseteq P_D$, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.37. *Пусть $\mathcal{A}$ — класс матриц из $M_{n,m}$. Предположим, что существует такая матрица $B \in M_{n,m}$, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \{B\}$ и векторы столбцовых сумм всех $A_i \in \mathcal{A}$ совпадают, то есть $e^t A_i = e^t A_j$ для любых i, j. Тогда существует такая $C \in M_{n,m}$, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^d \{C\}$.*

Доказательство. Пусть $A_1 \in \mathcal{A}$. Поскольку $e^t A_1 \in \operatorname{conv}(\mathcal{R}(A_1)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B))$, то лемма 2.36 позволяет найти такую матрицу $D \in M_{n,m}$, что $B \preceq^w D$ и $e^t A_1 = e^t D$.

Таким образом, $\mathcal{A} \trianglelefteq^w \{D\}$. Тогда лемма 2.35 позволяет найти такую матрицу C, что $e^t C = e^t D$ и $\operatorname{conv}(\mathcal{R}(D)) \subseteq \bigcap\limits_{k=1,\ldots,[\frac{n}{2}]} \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\overline{C}(k)))$. В итоге, для любой $A_i \in \mathcal{A}$ и для любого $k \in \{1, \ldots, [\frac{n}{2}]\}$ имеем

$$\mathcal{R}(\overline{A_i}(k)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(A_i)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(D)) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(\overline{C}(k))).$$

Таким образом, $\mathcal{A} \trianglelefteq^d \{C\}$ по теореме 1.11.

□

Лемма 2.38. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ — такой класс, что $e^t A_1 \neq e^t A_2$. Тогда не существует такой B, что $\mathcal{A} \trianglelefteq^d \{B\}$.*

Доказательство. Предположим, что такая матрица B существует, т. е. $\mathcal{A} \trianglelefteq^d \{B\}$. Тогда $A_1 \preceq^d B$, $A_2 \preceq^d B$. Значит $e^t A_1 = e^t B = e^t A_2$ по следствию 1.12, противоречие. □

Замечание 2.39. Чтобы найти матрицу C в доказательстве теоремы 2.37 мы практически не используем класс $\mathcal{A}$. Достаточно знать матрицу B, слабо мажорирующую класс $\mathcal{A}$, и $e^t A_{(1)}$.

Теорема 2.37 позволяет решить задачу нахождения минимального покрывающего класса для $\mathcal{A} \subseteq M_{n,m}$ в случае мажоризации по направлению.

Задача 2.40. *Для произвольного конечного класса $\mathcal{A}$ в $M_{n,m}$ найти минимальный покрывающий класс в смысле мажоризации по направлению.*

Решение.

1. Разделим класс $\mathcal{A}$ на классы эквивалентности $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s$ по значениям столбцовых сумм. То есть для $X \in \mathcal{A}_i$, $Y \in \mathcal{A}_j$ имеем $e^t X = e^t Y$ тогда и только тогда, когда $i = j$.

   По лемме 2.38 минимальный покрывающий класс для класса $\mathcal{A}$ — объединение минимальных покрывающих классов для $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s$.

2. Для каждого класса эквивалентности $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, s$ найдем минимальный покрывающий класс $\mathcal{B}_i = \{B_i^1, \ldots, B_i^k\}$ в смысле слабой мажоризации, задача 2.24.

3. Получаем разбиение класса $\mathcal{A}_i$ на подклассы, слабо мажорируемые одной матрицей. То есть $\mathcal{A}_i = \{A_{i_1^1}, \ldots, A_{i_q^1}\} \cup \ldots \cup \{A_{i_1^k}, \ldots, A_{i_q^k}\}$, где $\{A_{i_1^j}, \ldots, A_{i_q^j}\} \trianglelefteq^w \{B_i^j\}$, $j = 1, \ldots, k$.

4. Используя теорему 2.37, для каждого класса $\{A_{i_1^j}, \ldots, A_{i_q^j}\}$, $j = 1, \ldots, k$ находим такую $C_i^j \in M_{n,m}$, что $\{A_{i_1^j}, \ldots, A_{i_q^j}\} \trianglelefteq^d \{C_i^j\}$.

5. Минимальный покрывающий класс для класса $\mathcal{A}$ в смысле мажоризации по направлению есть $\mathcal{C} = \{C_i^j \mid i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, k\}$.

$\square$

Следующее свойство позволяет найти минимальный покрывающий класс в случае сильной мажоризации для класса $\mathcal{A}$, если строки любой матрицы $A \in \mathcal{A}$ являются вершинами симплекса.

Предложение 2.41. *([32, следствие 3.21]) Пусть $A, B \in M_{n,m}$, такие, что строки A — вершины симплекса. Тогда, если $A \preceq^w B$ и $e^t A = e^t B$, то $A \preceq^s B$.*

Частные случаи, в которых из слабой мажоризации следует сильная, описаны в [32, параграф 3.2]. Следующая теорема показывает, когда сильная мажоризация следует из мажоризации по направлению.

Теорема 2.42. *Пусть $A, B \in M_n$, где B обратима. Тогда $A \preceq^d B$, если и только если $A \preceq^s B$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что из $A \preceq^d B$ следует $A \preceq^s B$. Предположим, что $A \preceq^d B$. Из этого следует, что $Ax \preceq Bx$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$. Поскольку B обратима, то $y = Bx$ пробегает все $\mathbb{R}^m$, если x пробегает все $\mathbb{R}^m$. Тогда $Ax = AB^{-1}y \preceq y$ для любого $y \in \mathbb{R}^m$, что, по теореме Островского (см. теорему 2.A.4 в [30]), означает, что $AB^{-1} \in \Omega_n$. Тогда $AB^{-1} = D$ для некоторой $D \in \Omega_n$, то есть $A = DB$. Это значит, что $A \preceq^s B$, что и требовалось. □

Замечание 2.43. Если $A, B \in M_n$, A обратима и $A \preceq^d B$, то B тоже обратима.

Как следствие теоремы 2.42 получается следующий результат.

Лемма 2.44. *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — матричные классы из M_n, причем $\mathcal{A} \trianglelefteq^d \mathcal{B}$,*

$$|\mathcal{B}| = \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{A} \trianglelefteq^d \mathcal{C}\}$$

и каждая $B \in \mathcal{B}$ обратима. Тогда $|\mathcal{B}| = \min\{|\mathcal{C}| : \mathcal{A} \trianglelefteq^s \mathcal{C}\}$.

Замечание 2.45. В общем случае, для некоторой $A \in M_n$ может не существовать обратимой $B \in M_n$, такой, что $A \preceq^w B$. □

Пример 2.46. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ обратима и $A \preceq^w B$. Из этого следует, что существует такая строчно-стохастическая матрица $R = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{pmatrix}$, что $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1-x \\ y & 1-y \end{pmatrix} B$. Тогда R вырождена. Из этого следует, что $x = y$ и строки R равны. С другой стороны, строки A различны, противоречие. □

Результаты, приведенные в этой главе, были опубликованы в [42].

Глава 3

Мажоризация $(0, 1)$-матриц

В этой главе мы рассматриваем различные типы мажоризаций $(0, 1)$-матриц. Напомним, что множество $(0, 1)$-матриц размера $n \times m$ обозначается $M_{n,m}(0, 1)$.

3.1 Слабая мажоризация, мажоризация по направлению и сильная мажоризация $(0, 1)$-матриц

Лемма 3.1. *Пусть* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *и* $w_1, w_2, \ldots, w_m$ *—* $(0, 1)$*-векторы одного размера, такие, что* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \operatorname{conv}(\{w_1, w_2, \ldots, w_m\})$*. Тогда* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$*.*

Доказательство. Используем математическую индукцию по размеру векторов. Если векторы размера 1, то результат очевиден. Предположим, что утверждение верно для векторов длины k. Перейдем к векторам длины $k + 1$. Рассмотрим первую координату v_i для произвольного i. Поскольку v_i — выпуклая комбинация w_j, то $v_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$. Легко видеть, что если первая координата некоторого w_j отличается от первой координаты v_i, то $\lambda_j = 0$. Из этого следует, что v_i есть выпуклая комбинация векторов с одинаковой первой координатой. Для остальных координат можно воспользоваться предположением индукции. Итак, $v_i \in \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. □

Это позволяет получить простой критерий слабой мажоризации $(0, 1)$-матриц.

Теорема 3.2. *Пусть* $A, B \in M_{n,m}(0, 1)$*. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $A \preceq^{w} B$,
2. $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$,
3. $A = RB$ *для некоторой* $(0, 1)$*-матрицы* $R \in \Omega_n^{row}$*.*

Доказательство. Если выполнено условие 1, то $\mathcal{R}(A) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B))$ по теореме 1.10. Тогда, по лемме 3.1, $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, то есть выполнено условие 2, из которого очевидно следует условие 3 Наконец, из условия 3 следует условие 1, поскольку R строчно-стохастическая. □

Теперь перейдем к мажоризации по направлению.

Лемма 3.3. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$ и $A \preceq^d B$. Тогда количество 0 (соответственно, 1) в $A^{(j)}$ совпадает с количеством 0 (соответственно, 1) в $B^{(j)}$ для каждого $j \leq m$.*

Доказательство. Следует из следствия 1.12. □

Ниже мы даем характеризацию отношения $A \preceq^d B$ для $(0,1)$-матриц A и B, используя исключительно комбинаторные методы.

Теорема 3.4. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$. Тогда:*

1. *$A \preceq^d B$, если и только если A — перестановка строк матрицы B, т. е. $A = PB$ для некоторой $P \in P(n)$.*

2. *$\preceq^d$ есть отношение эквивалентности на $M_{n,m}(0,1)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \{0,1\}^m$. Обозначим $x_A = |\{1 \leq i \leq n : A_{(i)} = x^t\}|$ и $x_B = |\{1 \leq i \leq n : B_{(i)} = x^t\}|$, то есть количество строк, равных x^t в A и в B, соответственно. Тогда количество строк в матрицах A и B равно

$$n = \sum_{x \in \{0,1\}^m} x_A = \sum_{x \in \{0,1\}^m} x_B. \tag{7}$$

Для того чтобы доказать, что $x_A = x_B$ для любого $x \in \{0,1\}^m$, достаточно доказать, что $x_A \leq x_B$ для любого $x \in \{0,1\}^m$.

Для произвольного $x \in \{0,1\}^m$ определим вектор $v_x \in \mathbb{R}^n$ системой

$$\begin{cases} (v_x)_i = 1, \text{ если } x_i = 1 \\ (v_x)_i = -1, \text{ если } x_i = 0 \end{cases}.$$

Пусть $y \in \{0,1\}^m$. Легко видеть, что $yv_x \leq xv_x$ и $yv_x = xv_x = e^t x$, если и только если $x = y$. Отсюда следует, что наибольшие элементы Av_x и Bv_x равны $e^t x$, а их количество в Av_x (соответственно,, Bv_x) равно x_A (соответственно,, x_B). Поскольку $Av_x \preceq Bv_x$, то $x_A \leq x_B$. Действительно, в противном случае $\sum\limits_{i=1}^{x_A}(Av_x)_i^{\downarrow} > \sum\limits_{i=1}^{x_A}(Bv_x)_i^{\downarrow}$, противоречие.

Из равенства (7) следует, что $x_A = x_B$ для любого $x \in \{0,1\}^m$. Значит матрицы A и B совпадают с точностью до перестановки строк.

Обратно, если $A = PB$ для некоторого $P \in P(n)$, то $A \preceq^s B$ и, в частности, $A \preceq^d B$. Таким образом, утверждение 1 полностью доказано.

Наконец, поскольку матрицы перестановки обратимы, из утверждения 1 следует, что $A \preceq^d B$, если и только если $B \preceq^d A$, то есть мажоризация по направлению является отношением эквивалентности на множестве $M_{n,m}(0,1)$. □

Следствие 3.5. *Для* $(0,1)$*-матриц отношения* $\preceq^d$ *и* $\preceq^s$ *эквивалентны.*

Для матриц из трех и более элементов такие критерии неверны, как показывает следующий пример.

Пример 3.6. Рассмотрим $M_{n,m}(-1,0,1)$. Пусть $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда легко видеть, что $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \preceq B$ для любого типа мажоризации из определения 1.7. В самом деле, $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

□

3.2 Строчная мажоризация $(0,1)$-матриц

Перейдем к рассмотрению строчной мажоризации $\preceq^r$. Этот тип мажоризации был предложен Далем в работе [13] 1999 года. Там же содержатся различные критерии того, что $A \preceq^r B$, когда A и B — $(0,1)$-матрицы либо с ровно двумя единицами в каждой строке, либо ровно двумя единицами в каждом столбце. Строчная мажоризация в случае $(0,1)$-матриц устроена гораздо сложнее, чем слабая, по направлению и сильная мажоризации.

Строчная мажоризация не имеет аналогов приведенных выше критериев, как показывают следующие примеры.

Пример 3.7. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $A = BR$, т. е. $A \preceq^r B$. Как можно видеть, $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{C}(B)$. Более того, $B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \emptyset$, т. е. $A \not\preceq^w B$. □

Пример 3.8. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $Ae = Be$ и $\mathcal{C}(A) \subseteq \mathcal{C}(B)$. Но $A \not\preceq^r B$. В самом деле, предположим, что существует такая $R = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots \\ d & e & \dots & \dots \\ g & h & \dots & \dots \\ j & k & \dots & \dots \end{pmatrix}$, что $A = BR$. Поскольку

$$BR = \begin{pmatrix} a+g & b+h & \dots & \dots \\ a+d & b+e & \dots & \dots \\ a+d+g+j & b+h+e+k & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

получается, что $a + g = a + d = a + d + g + j = 1$. Тогда $d = g = j = 0$ и $a = 1$. Из аналогичных соображений, $b = 1$, но тогда R не строчно-стохастическая матрица. □

Следующий пример показывает, что существуют такие $A, B \in M_{n,m}(0,1)$, что $A \preceq^r B$, но не существует $(0,1)$-матрицы $R \in \Omega_m^{row}$, для которой $A = BR$.

Пример 3.9. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Если $A = BR$ для некоторой $R \in M_3$, то $R = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$. В итоге, $A \preceq^r B$ и не существует такой $(0,1)$-матрицы $R \in \Omega_3^{row}$, что $A = BR$. □

Следующий пример показывает, что возможен случай $A \preceq^r B$, $A = BR$, где B и R — $(0,1)$-матрицы, но A не $(0,1)$-матрица.

Пример 3.10. Пусть $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $A = BR = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Дважды стохастическая мажоризация — частный случай строчной мажоризации. По теореме 1.8 дважды стохастическая мажоризация эквивалентна сильной мажоризации транспонированных матриц. Поэтому из следствия 3.5 получаем, что $A \preceq^{ds} B$, если и только если $A = BP$ для некоторой $P \in P(m)$. Таким образом, далее мы можем рассматривать пары матриц $A, B \in M_{n,m}$, для которых $A \preceq^r B$, но $A \not\preceq^{ds} B$.

3.2.1 Необходимые условия

Лемма 3.11. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$. Если $A \preceq^r B$, то, для любого i, количество единиц в $A_{(i)}$ и $B_{(i)}$ совпадает.*

Доказательство. Аналогично лемме 3.3 получаем, что если $A = BR$ для некоторого $R \in \Omega_m^{row}$, то $Ae = BRe = Be$. □

Лемма 3.12. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$. Предположим, что $A \preceq^r B$, но $A \not\preceq^{ds} B$. Тогда:*

1. *Существует такая $R \in \Omega_m^{row}$, что:*
   (a) *$A = BR$.*
   (b) *Хотя бы один столбец R нулевой.*
   (c) *В каждом столбце R сумма элементов либо равна 0, либо не меньше 1.*
2. *Если B не содержит нулевого столбца, то пункты (b) и (c) выполнены для всех $R \in \Omega_m^{row}$, удовлетворяющих $A = BR$.*
3. *A содержит нулевой столбец.*

Доказательство. Пусть $A = BR$. Тогда $A^{(j)}$ есть линейная комбинация столбцов B с коэффициентами из $R^{(j)}$. Поскольку $R \in \Omega_m^{row}$, то сумма всех элементов R равна m. По предположению, $A \not\preceq^{ds} B$. Тогда существуют такие $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, что $e^t R^{(j)} < 1$ и $e^t R^{(k)} > 1$.

Если $e^t R^{(j)} < 1$ то $A^{(j)} = 0$. Действительно, каждый элемент $A^{(j)}$ не превосходит $e^t R^{(j)}$. Значит $A^{(j)} = 0$.

1. Построим такую матрицу $R' \in \Omega_m^{row}$, что $A = BR'$ и $R'^{(j)} = 0$. Фиксируем такое k, что $e^t R^{(k)} > 1$. Предположим, что $r_{pj} \neq 0$. Поскольку $0 = A^{(j)} = \sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij} B^{(i)} \geq r_{pj} B^{(p)}$, получаем $B^{(p)} = 0$. Отсюда следует, что A не зависит от $R_{(p)}$. В самом деле, рассмотрим произвольное a_{xy}. Поскольку $A = BR$, получаем $a_{xy} = \sum\limits_{z=1}^{m} b_{xz} r_{zy} = \sum\limits_{z \neq p} b_{xz} r_{zy} + b_{xp} r_{py} = \sum\limits_{z \neq p} b_{xz} r_{zy}$.

Рассмотрим матрицу R', где $r'_{pk} = r_{pk} + r_{pj}$, $r'_{pj} = 0$, а остальные элементы R' и R совпадают. Напомним, что k — некоторый фиксированный индекс, для которого $e^t R^{(k)} > 1$. При этом $R' \in \Omega_m^{row}$, $A = BR'$, $e^t R'^{(k)} > 1$ $e^t R'^{(j)} < 1$, а остальные столбцы R и R' совпадают.

Аналогичную процедуру проделаем для любого ненулевого элемента $R^{(j)}$. В итоге, получим такую матрицу $R' \in \Omega_m^{row}$, что $A = BR'$, $R'^{(j)} = 0$, $e^t R'^{(k)} > 1$ и $R^{(l)} = R'^{(l)}$ при $l \neq j, k$.

Аналогичным образом мы можем преобразовать все столбцы $R^{(q)}$, для которых $e^t R^{(q)} < 1$. В итоге, получим такую матрицу $R' \in \Omega_m^{row}$, что $A = BR'$, хотя бы один столбец R' нулевой, и сумма элементов в любом столбце R' либо равна 0, либо не меньше 1. Таким образом, утверждение 1 доказано.

2. Предположим, что ни один столбец B не нулевой. Пусть $j \leq m$ — такой индекс, что $e^t R^{(j)} < 1$. Как и в доказательстве пункта 1 получаем, что $A^{(j)} = 0$. Поскольку $A^{(j)} = \sum\limits_{i=1}^{m} r_{ij} B^{(i)}$ и все слагаемые неотрицательные, получаем, что $r_{ij} = 0$ для любого $i \leq m$.

В итоге, если $e^t R^{(j)} < 1$, то $R^{(j)} = 0$. Кроме того, хотя бы один столбец R нулевой.

3. Следует из утверждения 1.

$\square$

Замечание 3.13. Заметим, что, вообще говоря, если в B есть нулевой столбец, то утверждение 2 леммы 3.12 может не выполняться для некоторой $R \in \Omega_m^{row}$, удовлетворяющей $A = BR$. Например, пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A = B \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Лемма 3.14. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$ и R — такая неотрицательная матрица, что $A = BR$ и $r_{ij} \neq 0$ для некоторых i, j. Тогда $A^{(j)} \geq B^{(i)}$.*

Доказательство. Заметим, что $A^{(j)} = r_{ij}B^{(i)} + v$, где v — некоторый неотрицательный вектор. Действительно, v есть линейная комбинация столбцов B с неотрицательными коэффициентами r_{kj}. □

Лемма 3.15. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$, $R \in \Omega_m^{row}$ и $A = BR$. Кроме того, предположим, что $A_{(i)} = B_{(i)} = \sum\limits_{j=1}^{k} e_j^t$ для некоторых $i \leq n$, $k \leq m$. Тогда $r_{pj} = 0$, если $p \leq k$ и $j > k$.*

Доказательство. Имеем $a_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{m} b_{ip}r_{pj} = \sum\limits_{p=1}^{k} b_{ip}r_{pj} = \sum\limits_{p=1}^{k} r_{pj} = 0$ при $j > k$. □

Для $B \in M_{n,m}(0,1)$ через $\mathrm{supp}(B_{(i)})$ обозначим носитель i-й строки B, рассматриваемый как подмножество $\{1, 2, \ldots, m\}$. Напомним, что для матрицы $A \in M_{n,m}$ и множества $\mathcal{J} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $A^{(\mathcal{J})}$ обозначает матрицу, составленную из столбцов A с индексами из $\mathcal{J}$.

Лемма 3.16. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$, такие, что $A \preceq^r B$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$ существует такая матрица перестановки P, что $A^{(\mathrm{supp}(A_{(i)}))} \geq B^{(\mathrm{supp}(B_{(i)}))}P$.*

Доказательство. Пусть в $A_{(i)}$ ровно k единиц. По лемме 3.11 в $B_{(i)}$ тоже ровно k единиц. Пусть $\mathcal{K} = \{1, \ldots, k\}$ и $P_1, P_2 \in P(m)$ — такие матрицы, что $A^{(\mathrm{supp}(A_{(i)}))} = (AP_1)^{(\mathcal{K})}$ и $B^{(\mathrm{supp}(B_{(i)}))} = (BP_2)^{(\mathcal{K})}$. Обозначим $A' \coloneqq AP_1$ и $B' = BP_2$.

Заметим, что $A \preceq^r B$, если и только если $A' \preceq^r B'$, то есть $A' = B'R$ для некоторой $R \in \Omega_m^{row}$. Рассмотрим D, подматрицу матрицы R размера $k \times k$, состоящую из первых k строк и k столбцов R. Мы можем записать B' и R как блочные матрицы: $B' = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$, где X размера $n \times k$ и её i-я строка состоит из единиц, а Y размера $n \times (m-k)$ и её i-я строка состоит из нулей. По лемме 3.15 $R = \begin{pmatrix} D & O \\ U & V \end{pmatrix}$, где D — квадратная матрица порядка k, O — нулевая матрица размера $k \times (m-k)$. Заметим, что для любого $j \leq k$ выполнено $a'_{ij} = A'_{(1)} R^{(j)} = e^t D^{(j)} = 1$. Значит матрица D дважды стохастическая.

Наконец, по лемме 3.14, из $r_{js} > 0$ следует $A'^{(s)} \geq B'^{(j)}$. По теореме 1.4 $D = \lambda P + Q$ для некоторой $P \in P(m)$ и неотрицательной $Q \in M_m$. Из этого следует, что $A^{(\mathrm{supp}(A_{(i)}))} = A'^{(\mathcal{K})} \geq B'^{(\mathcal{K})} P = B^{(\mathrm{supp}(B_{(i)}))} P$. □

Следующий пример показывает, что в утверждении леммы 3.16 можно рассматривать только столбцы с единицами в некоторой строке i.

Пример 3.17. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что $A \preceq^r B$. В этом случае $\mathrm{supp}(A_{(i)}) = \{1\}$, $\mathrm{supp}(B_{(i)}) = \{i\}$. При этом $A^{(1)} \geq B^{(i)}$, но $A^{(2)} \not\geq B^{(j)} P$ ни для какой $P \in P(3)$.

□

Замечание 3.18. Существует полиномиальный алгоритм проверки необходимого условия из леммы 3.15. Дело в том, что выполнение этого условия сводится к проверке существования максимального паросочетания в двудольном графе.

1. Рассмотрим необходимое условие для произвольной строки $B_{(i)}$.

2. Построим граф: рассмотрим столбцы B с единицами в выбранной строке i как вершины первой доли графа, а столбцы A с единицами в строке i как вершины второй доли.

3. Соединяем ребром вершины $A^{(q)}$ и $B^{(j)}$, если $A^{(q)} \geq B^{(j)}$.

4. Необходимое условие для строки i выполнено тогда и только тогда, когда размер максимального паросочетания равен $|supp(B_{(i)})|$.

Покажем, что необходимые условия, приведенные в леммах 3.11, 3.12 и 3.16, выполненные одновременно, все равно не являются достаточными.

Пример 3.19. Покажем, что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \not\preceq^r B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что существует такая строчно-стохастическая $R = (r_{ij})$, что $A = BR$. Из этого равенства следует, что:

- $r_{11} + r_{21} = r_{11} + r_{41} = 1$ и $r_{21} + r_{31} = r_{31} + r_{41} = 0$. Получается, $r_{11} = 1$ и $r_{21} = r_{31} = r_{41} = r_{12} = r_{13} = r_{14} = 0$.
- $r_{12} + r_{22} = 1$, т. е. $r_{22} = 1$. Также $r_{22} + r_{32} = 1$, т. е. $r_{32} = 0$. Кроме того, $r_{32} + r_{42} = 1$. Из этого следует, что $r_{42} = 1$ и $a_{42} = r_{12} + r_{42} = 1$, противоречие.

$\square$

Пусть $A, B \in M_{n,m}$. определим $(0,1)$-матрицу $Z = Z(A,B) = (z_{ij}) \in M_m(0,1)$ следующим образом: $z_{kj} = 0$, если $k \in \bigcup\limits_{i: a_{ij}=0} \operatorname{supp}(B_{(i)})$ $(j \leq m)$; остальные элементы Z положим равными 1. Другими словами, $z_{kj} = 0$, если $\begin{cases} a_{ij} = 0 \\ b_{ik} = 1 \end{cases}$ для некоторого $i \leq n$ и $z_{kj} = 1$ иначе.

Лемма 3.20. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$ и предположим, что $A \preceq^r B$. Тогда для любой такой $R = (r_{ij}) \in \Omega_m^{row}$, что $A = BR$ выполнено*

$$R \leq Z.$$

В частности, все строки Z ненулевые.

Доказательство. Фиксируем произвольные $k, j \leq m$.

Предположим, что $z_{kj} = 0$. Тогда для некоторого $i \leq n$ выполнено $a_{ij} = 0$, $b_{ik} = 1$. Значит из $A = BR$ следует, что $a_{ij} = B_{(i)} R^{(j)} = \sum\limits_{p \in \operatorname{supp}(B_{(i)})} r_{pj} = 0$. Поскольку R неотрицательна и $k \in \operatorname{supp}(B_{(i)})$, получаем $r_{kj} = 0$.

Если $z_{kj} = 1$, то $r_{kj} \le z_{kj}$, поскольку R строчно-стохастическая. Итак $R \le Z$. Кроме того, из строчной стохастичности R в этом случае следует, что никакая строка Z не нулевая. $\square$

В некоторых случаях лемма 3.20 позволяет легко проверить, что A не мажорируется B, как показывает следующий пример.

Пример 3.21. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $Z = Z(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Итак, Z имеет нулевую строку, и, по лемме 3.20, $A \not\preceq^r B$.

$\square$

Пример 3.22. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Тогда } Z = Z(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Например, $a_{13} = 0$, и $\operatorname{supp}(B_{(1)}) = \{1, 2\}$, то есть $z_{13} = z_{23} = 0$. Итак, строчно-стохастическая матрица $R = (r_{ij})$, для которой $A = BR$, должна иметь вид

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a' & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $0 \le a \le 1$ и $a' = 1 - a$. Но если $a > 0$, то $(BR)_{22} > 1$, а если $a' > 0$, то $(BR)_{33} > 1$, противоречие. Следовательно $A \not\preceq^r B$. $\square$

3.2.2 Комбинаторные и геометрические критерии

Определение 3.23. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $N_m := \{1, 2, \dots, m\}$. *Упорядоченным m-разбиением* называется m-кортеж $\pi = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ множеств, где $S_1, S_2, \dots, S_m$ — попарно не пересекающиеся, возможно пустые подмножества N_m и $\bigcup_{i=1}^{m} S_i = N_m$. Пусть $\mathcal{P}_m$ обозначает множество всевозможных m-разбиений.

Например, в $\mathcal{P}_3$ ровно 27 разбиений, в частности, $\pi_1 = (\{1,3\}, \emptyset, \{2\})$ и $\pi_2 = (\emptyset, \emptyset, \{1,2,3\})$.

Пусть $B = (B^{(1)} B^{(2)} \cdots B^{(m)})$ — $n \times m$ матрица, а $\pi = (S_1, S_2, \dots, S_m) \in \mathcal{P}_m$. Определим $n \times m$ матрицу

$$B_\pi = \left(\sum_{j \in S_1} B^{(j)} \quad \sum_{j \in S_2} B^{(j)} \quad \cdots \quad \sum_{j \in S_m} B^{(j)} \right),$$

где считаем сумму по S_i нулевым вектором, если S_i пусто.

Свяжем эти понятия со строчной мажоризацией. Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Определим $(0,1)$-строчную мажоризацию: A $(0,1)$-*строчно мажорируется* B ($A \preceq^r_{0,1} B$), если существует целочисленная $R \in \Omega^{row}_m$, для которой $A = BR$. Очевидно, такая R есть $(0,1)$-матрица с ровно одной единицей в каждой строке.

Пусть $\pi = (S_1, S_2, \dots, S_m), \pi' = (S'_1, S'_2, \dots, S'_m) \in \mathcal{P}_m$. Пишем $\pi \succeq \pi'$, если π' есть доразбиение π, т. е. оно получено доразбиением некоторых подмножеств. Иными словами, для любого непустого S'_i существует единственное S_j с условием $S'_i \subseteq S_j$. Это частичный порядок на $\mathcal{P}_m$, максимальные элементы которого есть разбиение $(N_m, \emptyset, \dots, \emptyset)$ и его перестановки, а минимальные элементы — разбиение $(\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\})$ и его перестановки.

Теорема 3.24. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Тогда верны утверждения:*

1. *Если $A \preceq^r_{0,1} B$, то $A \preceq^r B$.*

2. *$A \preceq^r_{0,1} B$, если и только если $A = B_\pi$ для некоторого $\pi \in \mathcal{P}_m$.*

3. *$A \preceq^r B$, если и только если $A \in \operatorname{conv}(\{B_\pi : \pi \in \mathcal{P}_m\})$.*

4. *Если $\pi \succeq \pi'$, то $B_\pi \preceq^r B_{\pi'}$.*

Доказательство. Утверждение 1 очевидно.

2. Предположим, что $A \preceq^r_{0,1} B$, т. е. $A = BR$ для целочисленной строчно-стохастической $R = (r_{ij})$. Пусть $S_j = \{i : r_{ij} = 1\}$ $(j \le m)$. Поскольку R — строчно-стохастическая, множества S_j $(j \le m)$ попарно не пересекаются, и $\pi = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ есть упорядоченное m-разбиение. Кроме того, $BR^{(j)} = \sum\limits_{k \in S_j} B^{(k)}$. Значит $BR = B_\pi$, что и требовалось. Обратное утверждение следует из тех же рассуждений.

Утверждение 3 было доказано в [13, следствие 3.2].

4. Предположим, что $\pi, \pi' \in \mathcal{P}_m$ и $\pi \succeq \pi'$, и пусть $\pi = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$, $\pi' = (S'_1, S'_2, \ldots, S'_m)$. Поскольку $\pi \succeq \pi'$, для любого непустого S'_i существует единственное S_j с условием $S'_i \subseteq S_j$. Определим матрицу $R \in M_m$ следующим образом. Если $S'_i = \emptyset$, то $R_{(i)} = e^t_1$. Если $\emptyset \ne S'_i \subseteq S_j$, то $R_{(i)} = e^t_j$. Тогда $R \in \Omega^{row}_m$ и $B_\pi = B_{\pi'} R$. □

Заметим, что пример 3.9 показывает, что утверждение, обратное к утверждению 1 теоремы 3.24, вообще говоря, неверно.

Следствие 3.25. *Пусть $B \in M_{n,m}(0,1)$. Множество таких $n \times m$ $(0,1)$-матриц A, что $A \preceq^r_{0,1} B$ состоит из всех матриц*

$$A = B_\pi,$$

где $\pi = (S_1, S_2, \ldots, S_m) \in \mathcal{P}_n$ — такое разбиение, что для любого $(i \le m)$ столбцы $B^{(j)}$ для $j \in S_i$ имеют попарно непересекающиеся носители.

Доказательство. Если $A \preceq^r_{0,1} B$, то B_π для некоторого $\pi \in \mathcal{P}_m$ по утверждению 2 теоремы 3.24. Заметим, что B и B_π — $(0,1)$-матрицы тогда и только тогда, когда для любого $(i \le m)$ столбцы $B^{(j)}$ для $j \in S_i$ имеют попарно непересекающиеся носители. □

Следующий пример показывает комбинаторное значение следствия 3.25.

Пример 3.26. Пусть $G = (V, E)$ — граф, а B — его матрица инцидентности вершин ребрам. То есть столбцы B отвечают ребрам G, и каждый столбец имеет два ненулевых элемента, оба равных 1, они находятся в строках, отвечающих вершинам, которые это ребро соединяет.

Рассмотрим следствие 3.25. Пусть A — $(0,1)$-матрица, удовлетворяющая $A \preceq^r_{0,1} B$. Тогда ненулевые столбцы A соответствуют разбиению множества ребер E на паросочетания $\mathcal{M}_k$ $(k \le t)$ так, что столбец, отвечающий $\mathcal{M}_k$ содержит единицы в строках, отвечающих $V(\mathcal{M}_k)$, т. е. в вершинах, покрытых паросочетанием $\mathcal{M}_k$. $\square$

Утверждение 3 теоремы 3.24 можно использовать следующим образом.

Следствие 3.27. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$ и $\pi = (S_1, S_2, \ldots, S_m) \in \mathcal{P}_m$. Предположим, что каждое подмножество S_i отвечает $|S_i|$ столбцам A: $A^{(i_1)} = \cdots = A^{(i_k)} = \frac{1}{k}\sum_{j \in S_i} B^{(j)}$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, |S_i|\}$ и $A^{(i_x)} = 0$ при $x = k+1, \ldots, |S_i|$. Здесь все индексы $i_y \in \{1, \ldots, m\}$ для различных $i \in \{1, \ldots, m\}, y \in \{1, \ldots, |S_i|\}$ различны.*

Тогда $A \preceq^r B$.

Пример 3.28. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, пусть

$$R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда легко видеть, что $A = BR$. В этом случае $\{B^1, B^2, B^3\}$ отвечает $\{A^1, A^2, A^3\}$, поскольку $A^1 = A^2 = \frac{1}{2}(B^1 + B^2 + B^3)$ и $A^3 = 0$. $\{B^4, B^5\}$ отвечает $\{A^4, A^5\}$, поскольку $B^4 + B^5 = A^4$ и $A^5 = 0$. $\square$

Следующая характеризация была получена в [13]. Для $n \times m$ матриц $U = (u_{ij})$ и $V = (v_{ij})$ обозначим $\langle U, V\rangle = \sum\limits_{i,j} u_{ij}v_{ij}$. Определим также

$$\rho(U) = \sum_j \max_i u_{ij}.$$

Теорема 3.29. *[13, теорема 3.6] Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Тогда $A \preceq^r B$, если и только если*

$$\langle A, Y \rangle \le \rho(Y^T B) \tag{8}$$

для любых $Y \in M_{n,m}$.

Ограничивая этот результат на $(0,1)$-матрицы, получаем следующий критерий.

Следствие 3.30. *Пусть $A, B \in M_{n,m}(0,1)$. Тогда $A \preceq^r B$, если и только если*

$$\sum_{i,j\ :\ a_{ij}=1} y_{ij} \le \sum_j \max_k \Big(\sum_{i\ :\ b_{ij}=1} y_{ik} \Big). \tag{9}$$

для любых $Y \in M_{n,m}$.

Пример 3.31. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $B \preceq^r A$, поскольку $B = A_\pi$, где $\pi = (\{1,2\}, \emptyset)$. Однако $A \not\preceq^r B$ по следствию 3.30. Действительно, в этом случае условие (9) означает

$$y_{11} + y_{22} \le \max\{y_{11} + y_{21}, y_{12} + y_{22}\},$$

что неверно для $y_{11} = y_{22} = 1$, $y_{12} = y_{21} = 0$. Аналогичный вывод можно было получить из леммы 3.20, поскольку первая строка $Z(A, B)$ нулевая. □

Результаты, приведенные в этой главе, были опубликованы в [43].

Глава 4

Линейные эндоморфизмы матричных мажоризаций

4.1 Свойства мажоризаций матриц

Замечание 4.1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $a \preceq^d b$, если и только если $a \preceq^s b$.

Теорема 1.8 показывает, что из сильной мажоризации следует мажоризация по направлению, а из мажоризации по направлению следует слабая. Следующий пример показывает, что обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 4.2. [32, примеры 1 и 2] Пусть $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \\ -3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Тогда $X \preceq^w I$ и $E \preceq^d F$, но $X \not\preceq^d I$ и $E \not\preceq^s F$.

Однако, если $n \leq 3$, то сильная мажоризация и мажоризация по направлению эквивалентны.

Лемма 4.3. *[32, следствие 3.22] Пусть $A, B \in M_{n,m}$ и $1 \leq n \leq 3$. Тогда $A \preceq^d B$, если и только если $A \preceq^s B$.*

Из теоремы 1.10 получается следующая характеризация слабой мажоризации векторов.

Следствие 4.4. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $a \preceq^w b$, если и только если* $\max(a) \leq \max(b)$ *и* $\min(a) \geq \min(b)$.

Лемма 4.5. *Пусть $A, B \in M_{1,m}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

- *$A = B$,*
- *$A \preceq^w B$,*
- *$A \preceq^d B$,*
- *$A \preceq^s B$.*

Доказательство. Из $A \preceq^w B$ следует $A = B$, поскольку $\Omega_1^{row} = \{1\}$. Оставшиеся импликации следуют из теоремы 1.8. □

Таким образом, сильная, по направлению и слабая мажоризации совпадают на $M_{1,m}$ и любой линейный оператор на $M_{1,m}$ их сохраняет. В дальнейшем мы всегда предполагаем, что $n > 1$. Заметим, что случай $m = 1$ из рассмотрения не исключается.

Лемма 4.6. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Тогда верны утверждения:*

1. *Если $A \preceq^w B$, то $AX \preceq^w BX$ для любой $X \in M_{m,k}$.*

2. *Если $A \preceq^d B$, то $AX \preceq^d BX$ для любой $X \in M_{m,k}$.*

3. *Если $A \preceq^s B$, то $AX \preceq^s BX$ для любой $X \in M_{m,k}$.*

Доказательство. По определению слабой и сильной мажоризаций, $A \preceq^w B$ ($A \preceq^s B$), если $A = RB$ для некоторой $R \in \Omega_n^{row}$ ($R \in \Omega_n$). Тогда $AX = RBX$ и утверждения 1, 3 выполнены.

По определению мажоризации по направлению, $A \preceq^d B$, если $Au \preceq Bu$ для любого $u \in \mathbb{R}^m$. Пусть $v \in \mathbb{R}^k$. Тогда $(AX)v = A(Xv) \preceq B(Xv) = (BX)v$, поскольку $Xv \in \mathbb{R}^m$, что доказывает утверждение 2. $\square$

Следующий пример показывает, что обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 4.7. Пусть $O' \in M_{m,k}$ и $O'' \in M_{n,k}$ — нулевые матрицы. Предположим, что $A, B \in M_{n,m}$ и $A \not\preceq^w B$. Тогда $A \not\preceq^d B$ и $A \not\preceq^s B$. Но $AO' = BO' = O''$ и, как следствие, $AO' \preceq^w BO'$, $AO' \preceq^d BO'$ и $AO' \preceq^s BO'$.

Следствие 4.8. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1. *$A \preceq^w B$, если и только если $AY \preceq^w BY$ для любой обратимой $Y \in M_m$.*

2. *$A \preceq^d B$, если и только если $AY \preceq^d BY$ для любой обратимой $Y \in M_m$.*

3. *$A \preceq^s B$, если и только если $AY \preceq^s BY$ для любой обратимой $Y \in M_m$.*

Доказательство. Предположим, что $A, B \in M_{n,m}$ и $A \preceq B$, где $\preceq$ — один из типов мажоризации $\preceq^w$, $\preceq^d$ или $\preceq^s$. Тогда, по лемме 4.6, $AY \preceq BY$. Следовательно $A = (AY)Y^{-1} \preceq (BY)Y^{-1} = B$. $\square$

Лемма 4.9. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$ и $A', B' \in M_{n,m+r}$ — матрицы, полученные, соответственно, из A и B присоединением r нулевых столбцов. Тогда $A \preceq B$, если и только если $A' \preceq B'$ для любой мажоризации $\preceq$ из множества $\{\preceq^w, \preceq^d, \preceq^s\}$.*

Доказательство. Для любой $X \in M_n$ выполнено $A = XB$, если и только если $A' = XB'$. Таким образом, для слабой и сильной мажоризаций требуемый результат получается из определений. Пусть $v = (v_1, \ldots, v_m)^t \in \mathbb{R}^m$ — произвольный вектор. Положим $v' = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+r})^t \in \mathbb{R}^{m+r}$, где $v_{m+1}, \ldots, v_{m+r} \in \mathbb{R}$ произвольны. Тогда $Av = A'v'$ и $Bv = B'v'$. Из этого следует, что $A'v' \preceq B'v'$ для любого $v' \in \mathbb{R}^{m+r}$, если и только если $Av \preceq Bv$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$. Тогда, по определению мажоризации по направлению, мы получаем требуемый результат. $\square$

Рассмотрим аналог леммы 4.9 для строк.

Лемма 4.10. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Пусть $A', B' \in M_{n+r,m}$ — матрицы, полученные, соответственно, из A и B добавлением r нулевых строк. Тогда верны утверждения:*

1. *Если $A \preceq^w B$, то $A' \preceq^w B'$.*

2. *$A \preceq B$, если и только если $A' \preceq B'$ для $\preceq^d$ и $\preceq^s$.*

Доказательство. Предположим, что $A = XB$ для некоторого $X \in M_n$. Положим $X' = \left(\begin{smallmatrix} X & O_{n,r} \\ O_{r,n} & I_r \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $A' = X'B'$. Кроме того, $X \in \Omega_n^{row}$, если и только если $X' \in \Omega_{n+r}^{row}$ и $X \in \Omega_n$, если и только если $X' \in \Omega_{n+r}$. Таким образом, из $A \preceq B$ следует $A' \preceq B'$ для $\preceq^w$ и $\preceq^s$. Обратная импликация для сильной мажоризации следует из теоремы 1.13.

Теперь рассмотрим мажоризацию по направлению. По определению, $A \preceq^d B$, если и только если $Av \preceq Bv$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$, то есть $Av \preceq^s Bv$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$ по теореме 1.6. Поскольку $A'v = \left(\begin{smallmatrix} Av \\ 0_r \end{smallmatrix}\right)$ и $B'v = \left(\begin{smallmatrix} Bv \\ 0_r \end{smallmatrix}\right)$, то из доказанной эквивалентности для сильной мажоризации получается, что $Av \preceq^s Bv$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$, если и только если $A'v \preceq^s B'v$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$, если и только если $A' \preceq^d B'$. $\square$

Оказывается, что обратное к первому утверждению леммы 4.10, вообще говоря, неверно.

Пример 4.11. По теореме 1.10 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \not\preceq^w \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, но $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \preceq^w \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Лемма 4.12. *Пусть $n > 3$ и $R \in M_m$. Тогда следующие условия эквиваленты.*

1. *$rank\, R \leq 1$.*

2. *Для любых $A, B \in M_{n,m}$ из $A \preceq^d B$ следует $AR \preceq^s BR$.*

Доказательство. Если $m = 1$, то мажоризация по направлению и сильная мажоризация эквивалентны по замечанию 4.1. В этом случае $\operatorname{rank} R \leq 1$, поскольку $R \in M_1$. Предположим, что $m > 1$.

Пусть $\operatorname{rank} R \leq 1$. Если $\operatorname{rank} R = 0$, то $AR = BR = O \in M_{n,m}$. Предположим, что $\operatorname{rank} R = 1$. Тогда $R = r_1 r_2^t$ для некоторых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим произвольные $A, B \in M_{n,m}$ с условием $A \preceq^d B$. Тогда $Ar_1 \preceq Br_1$. По теореме 1.6 существует такая $Q \in \Omega_n$, что $Ar_1 = QBr_1$. Из этого следует, что $AR = (Ar_1)r_2^t = (QBr_1)r_2^t = QBR$, то есть $AR \preceq^s BR$.

Теперь докажем, что из условия 2 следует условие 1. Предположим, что существует такая $R \in M_m$, что $\operatorname{rank} R \geq 2$ и для любых $A, B \in M_{n,m}$ из $A \preceq^d B$ следует $AR \preceq^s BR$. Пусть $A \preceq^d B$. Тогда, по лемме 4.6, $AX \preceq^d BX$ для любой $X \in M_m$. Тогда, по предположению, $(AX)R \preceq^s (BX)R$. В этом случае из леммы 4.6 следует, что $AXRY \preceq^s BXRY$ для любой $Y \in M_m$. Рассмотрим такие $X, Y \in GL_m$, что $XRY = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,m-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r} \end{pmatrix}$, где $r = \operatorname{rank} R \geq 2$.

Положим $A = \begin{pmatrix} E & O_{4,m-2} \\ O_{n-4,2} & O_{n-4,m-2} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} F & O_{4,m-2} \\ O_{n-4,2} & O_{n-4,m-2} \end{pmatrix}$, где $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \\ -3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что $A(XRY) = A$ и $B(XRY) = B$.

В примере 4.2 показывается, что $E \preceq^d F$, но $E \not\preceq^s F$. По лемме 4.9 из этого следует, что $(E\ O_{4,m-2}) \preceq^d (F\ O_{4,m-2})$, но $(E\ O_{4,m-2}) \not\preceq^s (F\ O_{4,m-2})$. Итак, по лемме 4.10 получается, что $A \preceq^d B$, но $A \not\preceq^s B$, противоречие. $\square$

Лемма 4.13. *Пусть $\preceq^x$ и $\preceq^y$ — два типа мажоризаций на $M_{n,m}$ и из $\preceq^y$ следует $\preceq^x$.*

Предположим, что линейный оператор Φ на $M_{n,m}$ конвертирует более слабую мажоризацию $\preceq^x$ в более сильную мажоризацию $\preceq^y$. Тогда Φ сохраняет и $\preceq^x$, и $\preceq^y$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные $A, B \in M_{n,m}$. Предположим, что $A \preceq^y B$. Тогда $A \preceq^x B$ и, как следствие, $\Phi(A) \preceq^y \Phi(B)$. Тогда $\Phi(A) \preceq^x \Phi(B)$. В частности, из $A \preceq^x B$ следует $\Phi(A) \preceq^x \Phi(B)$, и из $A \preceq^y B$ следует $\Phi(A) \preceq^y \Phi(B)$. $\square$

Заметим, что теорема 1.16 дает характеризацию линейных конвертеров из сильной мажоризации в мажоризацию по направлению. Следующий пример демонстрирует существование нелинейного конвертера из сильной мажоризации в мажоризацию по направлению, не сохраняющего сильную мажоризацию.

Пример 4.14. Пусть $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \\ -3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ — матрицы из примера 4.2. Пусть Φ — оператор на $M_{4,2}$, определяемый равенством

$\Phi(X) = \begin{cases} F, & \text{если } \operatorname{rank} X = 2, \\ E, & \text{иначе.} \end{cases}$. Тогда Φ не является линейным и

- Φ сохраняет мажоризацию по направлению.
- Φ не сохраняет сильную мажоризацию.
- Φ конвертирует сильную мажоризацию в мажоризацию по направлению.

Доказательство. Оператор Φ не является линейным, поскольку $\Phi(O) \neq O$. Предположим, что $A \preceq^d B$ для некоторых $A, B \in M_{4,2}$. Существует три возможности:

- Если $\operatorname{rank} A = 2$, то $\operatorname{rank} B = 2$ то по лемме 1.9. Тогда $\Phi(A) = \Phi(B)$.
- Если $\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B \leq 1$, то $\Phi(A) = \Phi(B)$.
- Если $\operatorname{rank} B = 2$, а $\operatorname{rank} A \leq 1$, то $\Phi(A) = E \preceq^d F = \Phi(B)$.

Таким образом, Φ сохраняет мажоризацию по направлению, и, как следствие, Φ конвертирует сильную мажоризацию в мажоризацию по направлению.

Предположим, что $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $A \preceq^s B$, но $\Phi(A) = E \not\preceq^s F = \Phi(B)$. Таким образом, Φ не сохраняет сильную мажоризацию. □

4.2 Линейные операторы, конвертирующие мажоризацию по направлению в сильную мажоризацию

Замечание 4.15. По лемме 4.13 любой линейный оператор, конвертирующий мажоризацию по направлению в сильную мажоризацию, сохраняет обе мажоризации.

Лемма 4.16. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$ и $A \preceq^d B$. Тогда $JAS = JBS$ для любой $S \in M_m$.*

Доказательство. Если $A \preceq^d B$, то $e^tA = e^tB$ по следствию 1.12. Тогда $JAS = ee^tAS = ee^tBS = JBS$. $\square$

Напомним, что при $n \leq 3$ мажоризация по направлению и сильная мажоризация эквивалентны по лемме 4.3. Следующая теорема дает характеризацию линейных конвертеров из мажоризации по направлению в сильную мажоризацию при $n > 3$.

Теорема 4.17. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, где $n > 3$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ конвертирует мажоризацию по направлению в сильную мажоризацию.*

2. *Выполнено одно из условий:*

   (a) *Существуют такие $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$, что $\Phi(X) = \sum\limits_{j=1}^{m}(e^tX^{(j)})S_j$.*

   (b) *Существуют такие $S \in M_m$, $P \in P(n)$ и $R \in M_m$, что $\operatorname{rank} R \leq 1$ и $\Phi(X) = PXR + JXS$.*

Доказательство. Предположим, что Φ конвертирует мажоризацию по направлению в сильную. Тогда Φ сохраняет обе эти мажоризации по лемме 4.13. Тогда, по теореме 1.16, одно из следующих условий выполнено: или Φ имеет вид (a), или Φ имеет вид (b) для произвольного $R \in M_m$. Таким образом, достаточно доказать, что во втором случае $\operatorname{rank} R \leq 1$.

Предположим, что $\Phi(X) = PXR + JXS$. Покажем, что для любых $A, B \in M_{n,m}$ из $A \preceq^d B$ следует $AR \preceq^s BR$. В самом деле, если $A \preceq^d B$, то $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$ и, по определению сильной мажоризации, существует такая $Q \in \Omega_n$, что $PAR + JAS = QPBR + QJBS$. Поскольку $QJ = J$, то по лемме 4.16 имеем $JAS = JBS = QJBS$. Следовательно $PAR = QPBR$. Тогда $AR = P^{-1}QP(BR)$. Поскольку $P^{-1}QP \in \Omega_n$, получаем, что $AR \preceq^s BR$ по определению сильной мажоризации.

Тогда, по лемме 4.12, $\operatorname{rank} R \leq 1$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что Φ имеет вид (a). Тогда для любых $A, B \in M_{n,m}$ с условием $A \preceq^d B$ получаем $\Phi(A) = \Phi(B)$ по следствию 1.12.

Наконец, пусть Φ имеет вид (b). Предположим, что $A \preceq^d B$ для некоторых $A, B \in M_{n,m}$. Тогда, по лемме 4.12, $AR \preceq^s BR$, то есть $AR = DBR$ для некоторой

$D \in \Omega_n$. Напомним, что $JAS = JBS$ по лемме 4.16. Тогда $\Phi(A) = PAR + JAS = PDBR + JBS = (PDP^{-1})PBR + (PDP^{-1})JBS$. Из этого следует, что $\Phi(A) = (PDP^{-1})\Phi(B)$ и, таким образом, $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$, так как $P^{-1}DP \in \Omega_n$. $\square$

Заметим, что теорема 4.17 позволяет строить пары, упорядоченные в смысле сильной мажоризации, используя пары, упорядоченные в смысле мажоризации по направлению.

Пример 4.18. Пусть $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \\ -3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ — матрицы из примера 4.2. Пусть $\Phi(X) = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда, по теореме 4.17, Φ конвертирует мажоризацию по направлению в сильную мажоризацию. В частности, $\Phi(E) \preceq^s \Phi(F)$. Таким образом, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \\ -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \preceq^s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -7 & -7 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

4.3 Линейные конвертеры из слабой мажоризации

Лемма 4.19. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, определяемый равенством $\Phi(X) = PXL$ для некоторых $P \in P(n)$ и $L \in M_m$. Предположим, что Φ конвертирует слабую мажоризацию в мажоризацию по направлению.*

Тогда $\Phi(X) = O$ для любой $X \in M_{n,m}$.

Доказательство. Пусть $B \in M_{n,m}$ и $R \in \Omega_n^{row}$ произвольны. Рассмотрим $A = RB$. Тогда $A \preceq^w B$ и $PAL = \Phi(A) \preceq^d \Phi(B) = PBL$. Тогда из следствия 1.12 получается, что $e^tRBL = e^tAL = e^tPAL = e^tPBL = e^tBL$.

Рассмотрим $B = E_{1k}$ для произвольного $k \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда BL — матрица, первая строка которой равна $(l_{k1}, l_{k2}, \ldots, l_{km})$, а остальные строки нулевые. Для любого $j \in \{1, \ldots, m\}$ имеем $(e^tRBL)_j = (e^tBL)_j$ и, таким образом, $l_{kj}(\sum\limits_{i=1}^{n} r_{ij}) = l_{kj}$ для любой $R \in \Omega_n^{row}$.

Тогда выберем такую $R \in \Omega_n^{row}$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} r_{ij} \neq 1$. Получается, что $l_{kj} = 0$, причем $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ произвольны. Таким образом, $\Phi(X) = O$. $\square$

Лемма 4.20. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, где $n > 2$. Предположим, что Φ конвертирует слабую мажоризацию в мажоризацию по направлению. Тогда $\Phi(X) = O$ для любой $X \in M_{n,m}$.*

Доказательство. По лемме 4.13 Φ сохраняет слабую мажоризацию. Поскольку $n > 2$, то по теореме 1.17 получаем, что $\Phi(X) = PXL$ для некоторых $P \in P(n)$ и $L \in M_m$. Наконец, по лемме 4.19, $\Phi(X) = O$. $\square$

Лемма 4.21. *Пусть $n = 2$ и Φ — линейный оператор на $M_{2,m}$. Предположим, что Φ конвертирует слабую мажоризацию в мажоризацию по направлению. Тогда существует такая $L \in M_m$, что $\Phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) XL$.*

Доказательство. По лемме 4.13 Φ сохраняет слабую мажоризацию. Тогда, по теореме 1.17, $\Phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) XL'$ для некоторых $L' \in M_m$, $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leq 0$. Если $ab = 0$, то $\Phi(X) = PXL$ для некоторой $P \in P(2)$ и $L \in M_m$. В этом случае $\Phi(X) = O$ по лемме 4.19. В частности, $\Phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) XO$.

Предположим, что $ab < 0$, то есть $a, b \neq 0$. Пусть $L = -bL'$ и положим $s = -\frac{a}{b} > 0$. Тогда $\Phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{smallmatrix}\right) XL$.

Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (если $m = 1$, то $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$). Тогда $A \preceq^w B$, поскольку $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) B$. Тогда $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$ и, по следствию 1.12, имеем $e^t\Phi(A) = e^t\Phi(B)$. С одной стороны, $e^t\Phi(A) = (s-1)e^tAL$. С другой стороны, $e^t\Phi(B) = (s-1)e^tBL$. Таким образом, $(s-1)e^tAL = (s-1)e^tBL$. Из этого следует, что либо $s = 1$, либо $e^tAL = e^tBL$. Если $s \neq 1$, то $e^tAL = 2L_{(1)} = e^tBL = L_{(1)}$. Таким образом, $L_{(1)} = 0$. Повторяя те же рассуждения для $A' = AP_{(1j)}$ и $B' = BP_{(1j)}$, получаем, что $L_{(j)} = 0$ для любого $j \in \{1, \ldots, m\}$.

В итоге, или $s = 1$, или $L = O$. Если $s = 1$, то $\Phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) XL$. Если $L = O$, то $\Phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) XO$. $\square$

Теорема 4.22. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ конвертирует слабую мажоризацию в сильную мажоризацию.*

2. *Φ конвертирует слабую мажоризацию в мажоризацию по направлению.*

3. *Выполнено одно из условий:*

   (a) *$\Phi(X) = O$.*

   (b) *$n = 2$ и существует такая $L \in M_m$, что $\Phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) XL$.*

Доказательство. Импликация ($1 \Rightarrow 2$) верна, поскольку из сильной мажоризации следует мажоризация по направлению.

Импликация ($2 \Rightarrow 3$) следует из леммы 4.21 при $n = 2$ и из леммы 4.20 при $n > 2$.

Докажем импликацию ($3 \Rightarrow 1$) Если $\Phi(X) = O$, то условие 1 выполнено. Таким образом, достаточно рассмотреть $\Phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) XL$.

Пусть $A, B \in M_{2,m}$ — такие, что $A \preceq^w B$, то есть $A = \left(\begin{smallmatrix} r_1 & 1-r_1 \\ r_2 & 1-r_2 \end{smallmatrix}\right) B$, где $0 \le r_1, r_2 \le 1$.
Тогда $\Phi(A) = \left(\begin{smallmatrix} r_1-r_2 & r_2-r_1 \\ r_2-r_1 & r_1-r_2 \end{smallmatrix}\right) BL$. Пусть $D = \left(\begin{smallmatrix} d & 1-d \\ 1-d & d \end{smallmatrix}\right)$, где $d = \frac{1+r_1-r_2}{2}$. Легко убедиться, что $0 \le d \le 1$, поскольку $0 \le r_1, r_2 \le 1$. Как следствие, $D \in \Omega_2$. Кроме того, $D\Phi(B) = \left(\begin{smallmatrix} 2d-1 & 1-2d \\ 1-2d & 2d-1 \end{smallmatrix}\right) BL = \left(\begin{smallmatrix} r_1-r_2 & r_2-r_1 \\ r_2-r_1 & r_1-r_2 \end{smallmatrix}\right) BL = \Phi(A)$. В итоге, $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$. □

Теорема 4.22 позволяет строить пары матриц, упорядоченные в смысле сильной мажоризации или мажоризации по направлению, используя пары, упорядоченные в смысле слабой мажоризации.

Пример 4.23. Пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $A \preceq^w I$, поскольку $A \in \Omega_2^{row}$.

Пусть $\Phi(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) X \left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда, по теореме 4.22, Φ конвертирует слабую мажоризацию в мажоризацию по направлению и в сильную мажоризацию. В частности, $\Phi(A) \preceq^s \Phi(I)$. То есть $\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \preceq^d \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ и $\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \preceq^s \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Следующий пример демонстрирует нелинейный оператор, конвертирующий слабую мажоризацию в сильную мажоризацию.

Пример 4.24. Пусть Φ — оператор на M_2, заданный равенством
$\Phi(X) = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) X, & \text{если } X \in GL_2 \\ O, & \text{иначе.} \end{cases}$. Тогда Φ не является линейным и

- Φ конвертирует слабую мажоризацию в сильную.
- Φ сохраняет слабую мажоризацию.
- Φ сохраняет сильную мажоризацию.

Доказательство. Оператор Φ не является линейным, поскольку $\Phi(I) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq \Phi(E_{11}) + \Phi(E_{22}) = O$. Предположим, что $A \preceq^w B$ для некоторых $A, B \in M_2$. Тогда возможны три случая.

- Если $A \in GL_2$, то $B \in GL_2$ по лемме 1.9 и $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$ по условию 3(b) теоремы 4.22.

- Если $A, B \notin GL_2$, то $\Phi(A) = \Phi(B) = O$.

- Если $B \in GL_2$ и $A \notin GL_2$, то $O = \Phi(A) \preceq^s \Phi(B) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) B$, поскольку $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) B = O$.

Таким образом, Φ конвертирует слабую мажоризацию в сильную. Из тех же рассуждений, что и в лемме 4.13, получается, что Φ сохраняет обе мажоризации. □

4.4 Линейные конвертеры в слабую мажоризацию

Рассмотрим линейные конвертеры из сильной мажоризации или мажоризации по направлению в слабую мажоризацию. Этот случай особенно сложен тем, что такие операторы, вообще говоря, не должны сохранять никакие из конвертируемых мажоризаций (как в лемме 4.13). Таким образом, мы не можем использовать никакие из известных характеризаций линейных операторов, сохраняющих мажоризации.

Вследствие этого рассмотрим сначала мажоризацию векторов. В этом разделе мы докажем, что каждый линейный конвертер из векторной мажоризации в слабую сохраняет векторную мажоризацию.

Обозначим за $M(T)$ и $m(T)$ максимальный и минимальный элементы матрицы $T \in M_{n,m}$, соответственно. Рассмотрим следующие условия:

$$n \le m, \quad m(T) \neq M(T) \quad \text{и} \quad TPb \preceq^w Tb \text{ для любых } P \in P(m),\ b \in \mathbb{R}^m; \tag{10}$$

$$T = se^t \text{ для некоторого } s \in \mathbb{R}^n, \text{ где } e \in \mathbb{R}^m; \tag{11}$$

$$m = n \text{ и } T = \alpha P + \beta J \text{ для некоторых } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ P \in P(n). \tag{12}$$

Наша ближайшая цель — доказать, что если T удовлетворяет (10) при $n = m$, то T удовлетворяет либо (11), либо (12). Это будет сделано в лемме 4.37. Мы рассматриваем более общий случай $n \le m$, поскольку чтобы получить результат для квадратных матриц, мы используем индукцию по числу строк n при произвольном количестве столбцов $m \ge n$.

4.4.1 Свойства столбцов T

В этой секции мы рассматриваем некоторые свойства столбцов матриц, удовлетворяющих условию (10). Для любого $j = 1, \ldots, m$ обозначим $\Lambda_j = \{i, 1 \leq i \leq n \mid t_{ij} = M(T)\}$.

Лемма 4.25. *Пусть $T \in M_{n,m}$ удовлетворяет* (10). *Тогда в каждом столбце матрицы T встречаются и максимальный, и минимальный элементы всей матрицы.*

Доказательство. Рассмотрим условие (10) для $b = e_s$ и $P = P_{(sj)}$ для произвольных $s, j \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда $T^{(j)} = TPb \preceq^w Tb = T^{(s)}$. По следствию 4.4 получаем, что $\min T^{(j)} \geq \min T^{(s)}$ и $\max T^{(j)} \leq \max T^{(s)}$. Меняя местами s и j, получаем, что в любой паре столбцов максимальный и минимальный элементы совпадают, то есть они равны $M(T)$ и $m(T)$, соответственно. $\square$

Следствие 4.26. *Пусть $T \in M_{n,m}$ удовлетворяет* (10). *Тогда* $1 \leq |\Lambda_j| \leq n-1$ *для любого* $j = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Это прямое следствие предыдущей леммы и условия $m(T) \neq M(T)$. $\square$

Лемма 4.27. *Пусть $T \in M_{n,m}$ удовлетворяет* (10). *Предположим, что T содержит два равных столбца. Тогда T удовлетворяет* (11).

Доказательство. Предположим, что $T^{(i)} = T^{(j)}$ для некоторых различных $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Пусть $b = e_i - e_j \in \mathbb{R}^m$. Тогда $Tb = 0$. Следовательно из условия (10) получаем $TPb = 0$ для любой $P \in P(m)$. Рассмотрим произвольное $k \neq i, j$ и $P = P_{(jk)}$. Тогда $TPb = T^{(i)} - T^{(k)} = 0$, т. е. все столбцы T равны. Таким образом, $T = T^{(i)}e^t$ для любого столбца $T^{(i)}$ и T удовлетворяет (11).

$\square$

Мы используем индукцию по n, числу строк матрицы T, чтобы доказать, что из условия (10) следует условие (11) или условие (12). Базой индукции является случай $n = 2$. В следующей секции мы получаем необходимый результат в этом случае.

4.4.2 База индукции

Лемма 4.28. *Пусть $n = 2$ и $T \in M_{n,m}$ удовлетворяет* (10). *Тогда T удовлетворяет* (11) *или* (12).

Доказательство. Заметим, что если $n = 2$, то по лемме 4.25 каждый столбец T равен либо $\begin{pmatrix} m(T) \\ M(T) \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} M(T) \\ m(T) \end{pmatrix}$.

Таким образом, если $m = 2$, то T удовлетворяет (11) или (12).

Теперь предположим, что $m > 2$. Тогда как минимум два столбца T равны. Тогда, по лемме 4.27, T удовлетворяет (11). □

4.4.3 Основные методы индуктивного перехода

В двух следующих леммах мы покажем, как применять предположение индукции. Предположим, что $n > 2$.

Пусть t_{xy} — второй наибольший элемент T после $M(T)$, то есть $t_{ij} > t_{xy}$, если и только если $t_{ij} = M(T)$. Обозначим $\delta = M(T) - t_{xy}$. Заметим, что $\delta > 0$.

Лемма 4.29. *Предположим, что $T \in M_{n,m}$ удовлетворяет* (10) *и существует такое $j \in \{1, \ldots, m\}$, что $\Lambda_j = \{i\}$. Тогда $t_{is} = t_{ip}$ для любых $s, p \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$.*

Доказательство. Положим $\epsilon = \frac{\delta}{2(M(T)-m(T))}$ и рассмотрим $b = e_j + \epsilon e_s$ для произвольного $s \neq j$. Докажем, что $(Tb)_i > (Tb)_q$ для любого $q \neq i$. Действительно,

$$M(T) - t_{qj} \geq \delta > \frac{\delta}{2} = \epsilon(M(T) - m(T)) \geq \epsilon(t_{qs} - t_{is}).$$

Из этого следует, что $M(T) - t_{qj} > \epsilon t_{qs} - \epsilon t_{is}$ и, как следствие, $(Tb)_i = M(T) + \epsilon t_{is} > t_{qj} + \epsilon t_{qs} = (Tb)_q$. Тогда $\max(Tb) = M(T) + \epsilon t_{is}$.

Рассмотрим $v = e_j + \epsilon e_p$ для произвольного $p \neq j$. Легко видеть, что $v = P_{(sp)} \cdot b$ и $b = P_{(sp)} \cdot v$. Поскольку T удовлетворяет (10), то $Tv \preceq^w Tb \preceq^w Tv$. Тогда, по следствию 4.4, $\max(Tv) = \max(Tb) = M(T) + \epsilon t_{is}$. Те же рассуждения, что и выше дают $\max(Tv) = M(T) + \epsilon t_{ip}$. Таким образом, $t_{is} = t_{ip}$ для любых $s, p \neq j$. □

Результат предыдущей леммы может быть обобщен следующим образом.

Лемма 4.30. *Предположим, что $T \in M_{n,m}$ удовлетворяет* (10). *Пусть $j \in \{1, \ldots, m\}$. Обозначим $k := |\Lambda_j|$ и $\mathcal{J} := \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$. Тогда $T' = T^{(\Lambda_j)}_{(\mathcal{J})} \in M_{k,m-1}$ удовлетворяет* (10) *или* (11).

Доказательство. Напомним, что $1 \le k < n$ по следствию 4.26.

Без ограничения общности предположим, что $j = 1$ и $\Lambda_1 = \{1, \ldots, k\}$. Тогда $T = \left(\begin{smallmatrix} a' & T' \\ a'' & T'' \end{smallmatrix}\right)$, где $a' = M(T)e \in \mathbb{R}^k$, $a'' \in \mathbb{R}^{n-k}$, $T' = T^{(\Lambda_j)}_{(\mathcal{J})} \in M_{k,m-1}$ и $T'' \in M_{n-k,m-1}$. Заметим, что $\max(a'') < M(T)$ по определению Λ_1. По условию (10) $TPb \preceq^w Tb$ для любых $P \in P(m)$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Выберем $P = 1 \oplus P'$, $b = \left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ b' \end{smallmatrix}\right)$, где $\gamma \in \mathbb{R}$, $b' \in \mathbb{R}^{m-1}$ и $P' \in P(m-1)$ произвольны. Здесь $A \oplus B$ обозначает блочно-диагональную матрицу с блоками A и B.

Непосредственные вычисления показывают, что, во введенных обозначениях,

$$TPb = \left(\begin{smallmatrix} a' & T' \\ a'' & T'' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ b' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a' & T'P' \\ a'' & T''P' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ b' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} (\gamma M(T))e + T'P'b' \\ \gamma a'' + T''P'b' \end{smallmatrix}\right) \text{ и } Tb = \left(\begin{smallmatrix} (\gamma M(T))e + T'b' \\ \gamma a'' + T''b' \end{smallmatrix}\right).$$

Докажем, что существует такое $\gamma \in \mathbb{R}$, что

$$\max(TPb) = \max((\gamma M(T))e + T'P'b'). \tag{13}$$

Обозначим $\alpha = \max(T''P'b')$ и $\beta = \min(T'P'b')$. Предположим, что $\beta \ge \alpha$. Тогда для любого $\gamma > 0$ равенство (13) выполнено. В самом деле, напомним, что $M(T) > \max(a'')$ по определению Λ_1, а $\max(T'P'b') \ge \beta$ по определению β. Тогда

$$\gamma M(T) + \max(T'P'b') > \gamma \max(a'') + \beta \ge \gamma \max(a'') + \alpha \ge \gamma a''_q + (T''P'b')_q$$

для любого $q \in \{1, \ldots, n-k\}$. Таким образом, $\max(TPb) = \max((\gamma M(T))e + T'P'b')$.

Теперь предположим, что $\beta < \alpha$. Рассмотрим $\gamma = \frac{2\alpha - 2\beta}{\delta} > 0$. Напомним, что $\delta = M(T) - t_{xy}$, где t_{xy} — второй наибольший элемент T. Тогда, поскольку $\gamma > 0$, для произвольных $i \in \{1, \ldots, k\}$ и $q \in \{1, \ldots, n-k\}$ выполнено

$$\gamma(M(T) - a''_q) \ge \gamma\delta = 2(\alpha - \beta) > \alpha - \beta \ge (T''P'b')_q - (T'P'b')_i,$$

где последнее неравенство следует из определений α и β. Таким образом,

$$\gamma(M(T) - a''_q) > (T''P'b')_q - (T'P'b')_i,$$

то есть $\gamma M(T) + (T'P'b')_i > \gamma a''_q + (T''P'b')_q$ для любых i, q. Следовательно равенство (13) выполнено для любых P' и b'.

Заменяя P на I в (13), получаем $\max(Tb) = \max((\gamma M(T))e + T'b')$. По условию (10) получается $\max(TPb) \le \max(Tb)$. Используя (13), получаем

$$\gamma M(T) + \max(T'P'b') = \max(TPb) \le \max(Tb) = \gamma M(T) + \max(T'b').$$

Из этого следует, что $\max(T'P'b') \leq \max(T'b')$ для произвольных P' и b'.

Поскольку b' произвольно, рассмотрим $(-b')$, чтобы получить $\max(-T'P'b') \leq \max(-T'b')$, то есть $\min(T'P'b') \geq \min(T'b')$. Тогда, по следствию 4.4, получаем $T'P'b' \preceq^w T'b'$ для любых P', b'.

Заметим, что T' — матрица размера $k \times (m-1)$. По следствию 4.26 получаем $k \leq (n-1)$. Кроме того, $n \leq m$, поскольку T удовлетворяет (10). Следовательно $k \leq (m-1)$. Таким образом, если $m(T') \neq M(T')$, то T' удовлетворяет (10). Если $m(T') = M(T')$, то $T' = (m(T')e)e^t$ и T' удовлетворяет (11). □

4.4.4 Предположение индукции

Мы действуем индукцией по n. В секции 4.4.2 устанавливается база индукции, $n = 2$ для произвольного $m \geq 2$. Фиксируем $n > 2$. Предположим, что если T — $l \times m$-матрица, удовлетворяющая (10), $l < n$ и $m \geq l$, то T удовлетворяет (11) или (12).

Наша следующая цель — доказать, что если квадратная матрица $T \in M_n$ удовлетворяет (10), то либо T удовлетворяет (12), либо $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$. Мы рассмотрим все возможные значения $|\Lambda_j|$ и докажем соответствующие результаты с использованием различных техник для разных значений $|\Lambda_j|$. В лемме 4.31 рассматривается случай существования такого j, что $1 < |\Lambda_j| < n-1$. В лемме 4.32 рассматривается случай $|\Lambda_j| = 1$ для любого j. В лемме 4.33 рассматривается случай $|\Lambda_j| = n-1$ для любого j. Наконец, в лемме 4.34 рассматривается последний случай, $\Lambda_j \in \{1, n-1\}$ для любого $j = 1, \ldots, m$.

Итак, покажем, что если T не удовлетворяет (12), то $(M(T))e^t$ — строка T.

Лемма 4.31. *Предположим, что $T \in M_n$ удовлетворяет* (10) *и существует такое $j \in \{1, \ldots, n\}$, что $1 < |\Lambda_j| < n-1$. Тогда $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$.*

Доказательство. Обозначим $k \coloneqq |\Lambda_j|$. Предположим, что $(M(T))e^t \notin \mathcal{R}(T)$. Как в лемме 4.30, обозначим $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ и $T' = T^{(\Lambda_j)}_{(\mathcal{J})} \in M_{k,n-1}$. По лемме 4.30 подматрица T' удовлетворяет (10) или (11). Если выполнено условие (10), то, поскольку $k < n-1$, мы можем применить предположение индукции, чтобы получить, что T' удовлетворяет (11) или (12). Кроме того, поскольку $k < n-1$, то подматрица T' не квадратна и единственная возможность — T' удовлетворяет (11). Если некоторый элемент T' равен $M(T)$, то $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$.

Предположим, что никакой элемент T' не равен $M(T)$. Тогда в каждой строке T с индексом из Λ_j содержится единственный элемент, равный $M(T)$ (в столбце j). Поскольку $k > 1$, получаем, что $|\Lambda_{j'}| < n-1$ для любого $j' \in \{1, \ldots, n\}$. Мы можем повторить те же рассуждения для каждого столбца. Используя предположение индукции, получаем, что либо $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$, либо каждая строка T содержит не более одного элемента $M(T)$. Но как минимум в двух строках этот элемент находится в одном столбце $T^{(j)}$. Таким образом, если $(M(T))e^t \notin \mathcal{R}(T)$, то не каждый столбец T содержит $M(T)$, что противоречит лемме 4.25. $\square$

Лемма 4.32. *Предположим, что* $T \in M_n$ *удовлетворяет* (10) *и* $|\Lambda_j| = 1$ *для любого* $j \in \{1, \ldots, n\}$. *Тогда либо* $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$, *либо* T *удовлетворяет* (12).

Доказательство. Предположим, что $(M(T))e^t \notin \mathcal{R}(T)$. Рассмотрим произвольный столбец $T^{(j)}$. Здесь $\Lambda_j = \{i_j\}$ для некоторого $i_j \in \{1, \ldots, n\}$. По лемме 4.29 получаем $t_{i_j s} = t_{i_j t}$ для любых $s, t \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$. Поскольку $(M(T))e^t \notin \mathcal{R}(T)$, мы можем заключить, что в строке $T_{(i_j)}$ ровно один элемент равен $M(T)$. Повторяя эти рассуждения для каждого столбца T, получаем, что существует такая $P \in P(n)$, что $t_{ij} = M(T)$, если и только если $p_{ij} = 1$. Тогда, без ограничения общности, предположим, что $T = \begin{pmatrix} M(T) & a_1 & a_1 \ldots a_1 \\ a_2 & M(T) & a_2 \ldots a_2 \\ a_3 & a_3 & \ldots \ldots a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots \ldots \end{pmatrix}$. Следуя тем же рассуждениям, что и в доказательстве леммы 4.29, рассмотрим $\epsilon = \frac{\delta}{2(M(T)-m(T))}$. Тогда для $b = e_1 + \epsilon e_2$ получаем, что $\max(Tb) = M(T) + \epsilon a_1$. Если $P = P_{(12)}$, то $\max(TPb) = M(T) + \epsilon a_2$. По условию (10) имеем $TPb \preceq^w Tb$ и по следствию 4.4 $M(T) + \epsilon a_1 \geq M(T) + \epsilon a_2$. Но для $b = \epsilon e_1 + e_2$ получаем $M(T) + \epsilon a_1 \leq M(T) + \epsilon a_2$. Таким образом, $a_1 = a_2$. Те же рассуждения показывают, что $a_{i_1} = a_{i_2}$ для любых $i_1, i_2 \leq n$ и, как следствие, T удовлетворяет (12). $\square$

Лемма 4.33. *Предположим, что* $T \in M_n$ *удовлетворяет* (10) *и* $|\Lambda_j| = n-1$ *для любого* $j \in \{1, \ldots, n\}$. *Тогда либо* $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$, *либо* T *удовлетворяет* (12).

Доказательство. По лемме 4.25 получаем, что в каждом столбце T единственный элемент, не равный $M(T)$, равен $m(T)$. Следовательно каждый элемент T это либо $M(T)$, либо $m(T)$.

Если некоторая строка T содержит как минимум два элемента равных $m(T)$, то некоторые два столбца T равны. Тогда, по лемме 4.27, T удовлетворяет (11) и, в частности, $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$.

Иначе в каждой строке и каждом столбце T содержится ровно один элемент, равный $m(T)$, то есть существует такая $P \in P(n)$, что $t_{ij} = m(T)$, если и только если $p_{ij} = 1$ и $t_{ij} = M(T)$, если и только если $p_{ij} = 0$. В итоге, $T = (M(T))J + (m(T) - M(T))P$, что и требовалось. $\square$

Лемма 4.34. *Предположим, что* $T \in M_n$ *удовлетворяет* (10), $|\Lambda_j| = 1$ *и* $|\Lambda_i| = n - 1$ *для некоторых* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. *Тогда* $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$.

Доказательство. Без ограничения общности, $T^{(1)} = \begin{pmatrix} m(T) \\ M(T) \\ \cdots \\ M(T) \end{pmatrix}$ и $\Lambda_2 = \{i\}$.

Если $i \in \Lambda_1$, т. е. $i > 1$, то, применяя лемму 4.29 к $T^{(2)}$, получаем, что $t_{i1} = M(T) = t_{ij}$ для любых $j \in \{3, \ldots, n\}$, то есть $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$.

Иначе $i = 1$ и $t_{12} = M(T)$. В этом случае мы тоже применим лемму 4.29 к $T^{(2)}$, чтобы заключить, что $t_{1j} = m(T)$ для любого $j \in \{1, 3, \ldots, n\}$. Тогда

$$T = \begin{pmatrix} m(T) & M(T) & m(T) & \ldots & m(T) \\ M(T) & & & & \\ \vdots & & T' & & \\ M(T) & & & & \end{pmatrix}.$$

По лемме 4.30 подматрица $T' = T_{(2,\ldots,n)}^{(2,\ldots,n)}$ удовлетворяет (10) или (11). Тогда, по лемме 4.25, $max(T'^{(1)}) = max(T'^{(2)})$. Кроме того, $max(T'^{(1)}) < M(T)$, поскольку $\Lambda_2 = \{1\}$. В этом случае $|\Lambda_3| = 0$, что противоречит лемме 4.25. $\square$

4.4.5 Результат для векторов

В этой секции мы завершаем доказательство того, что если T удовлетворяет (10), то T удовлетворяет (11) или (12).

Лемма 4.35. *Пусть* $T \in M_{n,m}$ *удовлетворяет* (10). *Предположим, что столбцы* T *линейно зависимы, и некоторая строка* T *равна* xe^t, *для некоторого* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. *Тогда* T *удовлетворяет* (11).

Доказательство.

1. Поскольку столбцы T линейно зависимы, то существует такой ненулевой вектор $v \in \mathbb{R}^m$, что $Tv = 0$.

2. Тогда $TPv = 0$ для любой $P \in P(n)$, поскольку $TPv \preceq^w Tv = 0$.

3. Любой v с условием $Tv = 0$ удовлетворяет $e^t v = 0$. Действительно, по предположению, некоторый элемент Tv равен $x(e^t v) = 0$, где $x \neq 0$.

4. Если как минимум два столбца T равны, то T удовлетворяет (11) по лемме 4.27. Предположим, что все столбцы T различны.

5. Пусть $P = P_{(ij)}$ для произвольных i, j. По пункту 2 верны следующие равенства: $TPv = 0$ и $Tv = 0$. Тогда $Tv - TPv = T(I - P_{(ij)})v = 0$, откуда следует, что $v_i T^{(i)} + v_j T^{(j)} - v_i T^{(j)} - v_j T^{(i)} = 0$. То есть $(v_i - v_j)(T^{(i)} - T^{(j)}) = 0$. Поскольку, по предположению, $T^{(i)} \neq T^{(j)}$, то получается, что $v_i = v_j$ для произвольных i, j. Но $e^t v = 0$. Это значит, что $v = 0$, что противоречит линейной зависимости.

$\square$

Лемма 4.36. *Пусть $T \in M_{n,m}$ удовлетворяет* (11) *или* (12). *Тогда каждый столбец T может быть однозначно найден с помощью остальных столбцов T.*

Доказательство. Пусть $j \in \{1, \ldots, m\}$. Если все столбцы $T^{(\{1,\ldots,n\} \setminus \{j\})}$ равны, то T удовлетворяет (11) и $T^{(j)}$ совпадает со всеми остальными столбцами T. Иначе T удовлетворяет (12) и $T = \alpha P + \beta J$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $P \in P(n)$. В этом случае, α, β и P можно однозначно определить по $T^{(\{1,\ldots,n\} \setminus \{j\})}$. $\square$

Лемма 4.37. *Пусть $T \in M_{n,m}$, $n \leq m$ — такая матрица, что для любых $P \in P(m)$ и $b \in \mathbb{R}^m$ выполнено $TPb \preceq^w Tb$. Тогда T удовлетворяет* (11) *или* (12).

Доказательство.

1. Если $M(T) = m(T)$, то T тривиально удовлетворяет (11). Предположим, что $M(T) \neq m(T)$. Тогда T удовлетворяет (10).

2. Предположим, что $(M(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$ и $(m(T))e^t \in \mathcal{R}(T)$. Поскольку $n \leq m$, то столбцы T в этом случае линейно зависимы. Тогда, по лемме 4.35, T удовлетворяет (11), поскольку либо $M(T)$, либо $m(T)$ не равно нулю.

   Таким образом, мы можем предположить, что $(M(T))e^t \notin \mathcal{R}(T)$. Действительно, если верно обратное, то $(m(T))e^t \notin \mathcal{R}(T)$. В этом случае мы можем рассмотреть $(-T)$ вместо T, чтобы получить, что $(M(-T))e^t \notin \mathcal{R}(-T)$.

3. Если T — квадратная матрица и $(M(T))e^t \notin \mathcal{R}(T)$, то из лемм 4.31 — 4.34 следует, что T удовлетворяет (12).

4. Теперь рассмотрим случай $n < m$.

   (a) Сначала покажем, что любая квадратная $n \times n$-подматрица T' матрицы T удовлетворяет (10). В самом деле, пусть $T' = T^{(\mathcal{J})}$, где $\mathcal{J} \subset \{1, \ldots, m\}$ и $|\mathcal{J}| = n$. Тогда $m(T') = m(T) < M(T) = M(T')$ по лемме 4.25. Пусть $b' \in \mathbb{R}^n$ и $P' \in P(n)$ произвольны. Пусть вектор $b \in \mathbb{R}^m$ получен из b' добавлением нулевых элементов в позиции с индексами $\{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{J}$. Тогда $Tb = T'b'$. Пусть $P \in P(n)$ — такая, что $TPb = T'P'b'$. Поскольку T удовлетворяет (10), мы получаем, что $T'P'b' = TPb \preceq^w Tb = T'b'$.

   (b) Таким образом, T' удовлетворяет (10) и, по доказанному в пунктах 2. и 3. мы получаем, что T' удовлетворяет (11) или (12).

   (c) Наконец, докажем, что T удовлетворяет (11), то есть что все столбцы T совпадают. Пусть $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ — произвольные индексы. Выберем $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \{1, \ldots, m\}$, так чтобы $|\mathcal{I} \cap \mathcal{J}| = n - 1$, $\mathcal{I} = \{i\} \bigcup (\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$ и $\mathcal{J} = \{j\} \bigcup (\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$, $|\mathcal{I}| = |\mathcal{J}| = n$. Тогда $T^{(\mathcal{I})}$ и $T^{(\mathcal{J})}$ — квадратные подматрицы T. По пункту 4b. $T^{(\mathcal{I})}$ удовлетворяет (11) или (12) и $T^{(\mathcal{J})}$ удовлетворяет (11) или (12). Поскольку у $T^{(\mathcal{I})}$ и $T^{(\mathcal{J})}$ есть $n - 1$ общий столбец, то, по лемме 4.36, $T^{(i)} = T^{(j)}$. Следовательно T удовлетворяет (11).

$\square$

Напоминаем, что $[\phi]$ обозначает матрицу оператора ϕ в стандартном базисе. Теперь мы можем доказать следующий результат, который усиливает теорему 1.15.

Теорема 4.38. *Пусть ϕ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *ϕ сохраняет векторную мажоризацию.*

2. *ϕ конвертирует векторную мажоризацию в слабую мажоризацию.*

3. *Выполнено одно из условий:*

   (a) $\phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$.

   (b) $\phi(x) = \alpha P x + \beta J x$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $P \in P(n)$.

4. Выполнено одно из условий:

(a) $[\phi] = se^t$ *для некоторого* $s \in \mathbb{R}^n$.

(b) $[\phi] = \alpha P + \beta J$ *для некоторых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *и* $P \in P(n)$.

Доказательство. Эквивалентность условий 1. и 3. следует из теоремы 1.15. Эквивалентность условий 3. и 4. очевидна. Кроме того, из условия 1. следует условие 2, поскольку из сильной мажоризации следует слабая. Таким образом, достаточно доказать, что из условия 2. следует условие 4.

Предположим, что ϕ конвертирует векторную мажоризацию в слабую. Пусть $b \in \mathbb{R}^n$ и $P \in P(n)$. Тогда $Pb \preceq b$. Из условия 2. следует, что $[\phi]Pb \preceq^w [\phi]b$. Тогда условие 4. следует из леммы 4.37.

□

4.4.6 Линейные комбинации векторных конвертеров

В этой секции мы разрабатываем специальные методы для применения теоремы 4.38 в матричном случае. Приведем некоторые эквивалентные условия слабой мажоризации векторов.

Лемма 4.39. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$. *Пусть* $P, Q \in P(n)$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

$$a \preceq^w b. \tag{14}$$

$$\alpha a + \beta e \preceq^w \alpha b + \beta e. \tag{15}$$

$$Pa \preceq^w Qb. \tag{16}$$

$$\max(a) \leq \max(b) \text{ и } \min(a) \geq \min(b). \tag{17}$$

Доказательство. 1. (14) эквивалентно (15). Действительно, пусть $a \preceq^w b$, то есть $a = Rb$ для некоторой $R \in \Omega_n^{row}$. Тогда $R(\alpha b + \beta e) = \alpha a + \beta e$. Таким образом, из $a \preceq^w b$ следует $\alpha a + \beta e \preceq^w \alpha b + \beta e$. Пусть $x = \alpha a + \beta e$ и $y = \alpha b + \beta e$. Тогда из $x \preceq^w y$ следует $\frac{1}{\alpha}x + \frac{-\beta}{\alpha}e \preceq^w \frac{1}{\alpha}y + \frac{-\beta}{\alpha}e$, то есть $a \preceq^w b$.

2. (14) эквивалентно (16). Действительно, пусть $a \preceq^w b$, то есть $a = Rb$ для некоторого $R \in \Omega_n^{row}$. Тогда $Pa = (PRQ^{-1})Qb$, то есть $Pa \preceq^w Qb$, поскольку $PRQ^{-1} \in \Omega_n^{row}$. Следовательно из $a \preceq^w b$ следует $Pa \preceq^w Qb$, откуда следует $P^{-1}(Pa) \preceq^w Q^{-1}(Qb)$. То есть $a \preceq^w b$.

3. (14) эквивалентно (17) по следствию 4.4.

□

Лемма 4.40. *Пусть $P \in P(n), \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \neq 0$, предположим, что:*

1. *$\Phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет $\Phi_1(x) = \alpha_1 Px + \beta_1 Jx$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Линейный оператор Φ_2 на $\mathbb{R}^n$ конвертирует векторную мажоризацию в слабую мажоризацию.*

3. *Для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$ и $Q \in P(n)$ выполнено*

$$\gamma_1\Phi_1(Qy) + \gamma_2\Phi_2(Qy) \preceq^w \gamma_1\Phi_1(y) + \gamma_2\Phi_2(y). \tag{18}$$

Тогда существуют такие $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{S} \in P(n)$, что $\Phi_2(x) = \alpha_2\mathcal{S}x + \beta_2 Jx$.

Доказательство. Предположим, что $\Phi_2(x) = \alpha_2\mathcal{S}x + \beta_2 Jx$ не выполнено. Тогда, по теореме 4.38, $\Phi_2(x) = (e^t x)a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что если $a = \beta e$, то $\Phi_2(x) = (e^t x)a = \beta Jx = 0\mathcal{S}x + \beta Jx$, что дает требуемый результат. Таким образом, мы можем предположить, что a не пропорционален e.

Выбрав $\gamma_2 = 1, \gamma_1 = \operatorname{sign}(\alpha_1), y = e_l$, получаем $\gamma_1\Phi_1(y) = \gamma_1\alpha_1 Pe_l + \gamma_1\beta_1 e$, $\gamma_2\Phi_2(y) = a$. Тогда, подставляя $e_k = Qy$ в выражение (18), получаем

$$\gamma_1\alpha_1 Pe_k + \gamma_1\beta_1 e + a \preceq^w \gamma_1\alpha_1 Pe_l + \gamma_1\beta_1 e + a.$$

Из условия (15) следует, что

$$|\alpha_1|Pe_k + a \preceq^w |\alpha_1|Pe_l + a.$$

Тогда, по условию (16), получаем

$$|\alpha_1|UPe_k + Ua \preceq^w |\alpha_1|UPe_l + Ua,$$

где матрицу $U \in P(n)$ выбираем так, что $Ua = a^{\downarrow}$, а индексы k, l — так, что $UPe_k = e_1$ и $UPe_l = e_n$. Напомним, что $a^{\downarrow}$ обозначает перестановку координат вектора $a \in \mathbb{R}^n$ в порядке невозрастания. Тогда получаем.

$$(a_1^{\downarrow} + |\alpha_1|, \ldots, a_n^{\downarrow})^t \preceq^w (a_1^{\downarrow}, \ldots, a_n^{\downarrow} + |\alpha_1|)^t.$$

Из условия (17) следует, что $a_1^{\downarrow} + |\alpha_1| \leq \max(a_1^{\downarrow}, \ldots, a_{n-1}^{\downarrow}, a_n^{\downarrow} + |\alpha_1|)$, противоречие. Действительно, $a_1^{\downarrow} + |\alpha_1| > a_i^{\downarrow}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и $a_1^{\downarrow} + |\alpha_1| > a_n^{\downarrow} + |\alpha_1|$, поскольку a не пропорционален e.

Таким образом, $\Phi_2(x) = \alpha_2 \mathcal{S}x + \beta_2 Jx$ для некоторых $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{S} \in P(n)$. $\square$

Теперь покажем, что в лемме 4.40 можно выбрать $\mathcal{S} = P$.

Лемма 4.41. *Пусть $P \in P(n), \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \neq 0$, предположим, что:*

1. *$\Phi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет $\Phi_1(x) = \alpha_1 Px + \beta_1 Jx$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Линейный оператор Φ_2 на $\mathbb{R}^n$ конвертирует векторную мажоризацию в слабую мажоризацию векторов.*

3. *Для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n$ и $Q \in P(n)$ выполнено*

$$\gamma_1 \Phi_1(Qy) + \gamma_2 \Phi_2(Qy) \preceq^w \gamma_1 \Phi_1(y) + \gamma_2 \Phi_2(y). \tag{19}$$

Тогда существуют такие $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$, что $\Phi_2(x) = \alpha_2 Px + \beta_2 Jx$.

Доказательство. По лемме 4.40 $\Phi_2(x) = \alpha_2 \mathcal{S}x + \beta_2 Jx$ для некоторого $\mathcal{S} \in P(n)$. Достаточно доказать, что можно выбрать $\mathcal{S} = P$. Если $\alpha_2 = 0$, то $\Phi_2(x)$ не зависит от $\mathcal{S}$ и можно выбрать $\mathcal{S} = P$. Предположим, что $\alpha_2 \neq 0$.

Если $n = 2$, то существует только две матрицы перестановки, а именно I и $J - I$. Поскольку $\alpha(J-I)x + \beta Jx = -\alpha Ix + (\alpha+\beta)Jx$, мы можем выбрать $P = \mathcal{S}$.

Теперь предположим, что $n > 2$.

Пусть $\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_1}$ и $\gamma_2 = \frac{\alpha}{\alpha_2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\gamma_1 \Phi_1(y) = Py + \gamma_1 \beta_1 (ee^t y) = Py + \gamma_1 \beta_1 (e^t y) e$. Заметим также, что $e^t Q = e^t$ для любой $Q \in P(n)$. Тогда условие (19) дает

$$(PQy + \gamma_1\beta_1(e^tQy)e) + (\alpha\mathcal{S}Qy + \gamma_2\beta_2(e^tQy)e) \preceq^w (Py + \gamma_1\beta_1(e^ty)e) + (\alpha\mathcal{S}y + \gamma_2\beta_2(e^ty)e).$$

Откуда получаем

$$PQy + \alpha\mathcal{S}Qy + (\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2)(e^t y)e \preceq^w Py + \alpha\mathcal{S}y + (\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2)(e^t y)e.$$

Из условия (15) следует, что

$$PQy + \alpha\mathcal{S}Qy \preceq^w Py + \alpha\mathcal{S}y.$$

Пусть $U = P^{-1}\mathcal{S}$. По условию (16) мы можем домножить левую часть на $Q^{-1}P^{-1}$, а правую часть на P^{-1}, чтобы получить

$$y + \alpha Q^{-1}UQy \preceq^w y + \alpha Uy. \tag{20}$$

Эта мажоризация выполнена для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$, и $Q \in P(n)$. Если $U = P^{-1}\mathcal{S} \neq I$, то существует три возможности:

Случай (1) $U^2 = I$ и существует такое i, что $Ue_i = e_i$. Без ограничения общности, предположим, что $Ue_1 = e_2$, $Ue_2 = e_1$ и $Ue_3 = e_3$. Положим $Q = P_{(23)}$. Тогда $(Q^{-1}UQ)e_1 = e_3$, $(Q^{-1}UQ)e_3 = e_1$ и $(Q^{-1}UQ)e_2 = e_2$. Выбирая $\alpha = 1$ и $y = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0)^t$ в выражении (20), получаем $(1, -2, 1, 0, \ldots, 0)^t \preceq^w (0, 0, 0, 0, \ldots, 0)^t$, что противоречит следствию 4.4.

Случай (2) $U^2 = I$ и не существует такого i, что $Ue_i = e_i$. Без ограничения общности предположим, что $Ue_1 = e_2$, $Ue_2 = e_1$, $Ue_3 = e_4$ и $Ue_4 = e_3$. Положим $Q = P_{(23)}$. Тогда $(Q^{-1}UQ)e_1 = e_3$, $(Q^{-1}UQ)e_3 = e_1$, $(Q^{-1}UQ)e_2 = e_4$ и $(Q^{-1}UQ)e_4 = e_2$. Выбирая $\alpha = 1$ и $y = (1, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0)^t$ в выражении (20), получаем $(2, 0, 2, 0, 0, \ldots, 0)^t \preceq^w (1, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0)^t$, что противоречит следствию 4.4.

Случай (3) $U^2 \neq I$. Без ограничения общности предположим, что $Ue_1 = e_2$ и $Ue_2 = e_3$. Положим $Q = P_{(12)}$. Тогда $(Q^{-1}UQ)e_1 = e_3$ и $(Q^{-1}UQ)e_2 = e_1$. Выбирая $\alpha = 0.5$ и $y = (2, 1, 0, 0, \ldots, 0)^t$ в выражении (20), получаем $(2.5, 1, 1, 0, \ldots, 0)^t \preceq^w (2, 2, 0.5, 0, \ldots, 0)^t$, что противоречит следствию 4.4.

Таким образом, $U = P^{-1}\mathcal{S} = I$, то есть $S = P$, что и требовалось доказать. $\square$

4.4.7 Матричный случай

Наконец, мы готовы доказать необходимое и достаточное условие того, что линейный оператор на пространстве матриц является конвертером из сильной мажоризации в слабую.

Определим отображение $E_j : R^n \to M_{n,m}$ через $E_j(x) = xe_j^t$ для $j = 1, \dots, m$. Положим $\Phi_i^j = E_i^* \Phi E_j$. Тогда

$$\Phi(X^{(1)}, \ \dots \ , X^{(m)}) = (\sum_{j=1}^{m} \Phi_1^j X^{(j)} \ , \dots , \sum_{j=1}^{m} \Phi_m^j X^{(j)}). \tag{21}$$

Лемма 4.42. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, конвертирующий сильную мажоризацию в слабую. Тогда каждый Φ_i^j конвертирует векторную мажоризацию в слабую.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \preceq b$ и $j \in \{1, \dots, m\}$ — произвольное. Пусть $A = ae_j^t$ и $B = be_j^t$. Тогда $A \preceq^s B$. Следовательно $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$, то есть $(\Phi_1^j(a) \ , \dots , \Phi_m^j(a)) \preceq^w (\Phi_1^j(b) \ , \dots , \Phi_m^j(b))$. Отсюда следует, что $\Phi_i^j(a) \preceq^w \Phi_i^j(b)$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ и каждый Φ_i^j конвертирует векторную мажоризацию в слабую. $\square$

Лемма 4.43. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, конвертирующий сильную мажоризацию в слабую. Тогда выполнено одно из условий:*

$$\textit{Существуют такие } S_1, \dots, S_m \in M_{n,m}, \textit{ что } \Phi(X) = \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j. \tag{22}$$

$$\textit{Существуют такие } R, S \in M_m \textit{ и } P \in P(n), \textit{ что } \Phi(X) = PXR + JXS. \tag{23}$$

Доказательство. Предположим, что Φ конвертирует сильную мажоризацию в слабую. Тогда, по лемме 4.42, каждый Φ_i^j конвертирует векторную мажоризацию в слабую мажоризацию векторов. Тогда, по теореме 4.38, каждый оператор Φ_i^j удовлетворяет $\Phi_i^j(x) = (e^t x) s_i^j$ для некоторого $s_i^j \in \mathbb{R}^n$ или $\Phi_i^j(x) = \alpha_i^j P_i^j x + \beta_i^j Jx$ для некоторых $\alpha_i^j, \beta_i^j \in \mathbb{R}$ и $P_i^j \in P(n)$.

Априори возможны два случая:

Случай 1. Для любых $i, j \in \{1, \dots, m\}$ существует такой вектор $s_i^j \in \mathbb{R}^n$, что $\Phi_i^j(x) = (e^t x) s_i^j$. Покажем, что в этом случае выполнено условие (22).

Пусть $S_j = (s_1^j, \ \dots \ , s_m^j)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi(X^{(1)}, \ \dots \ , X^{(m)}) &= (\sum_{j=1}^{m} \Phi_1^j(X^{(j)}) \ , \dots , \sum_{j=1}^{m} \Phi_m^j(X^{(j)})) \\ &= (\sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) s_1^j \ , \dots , \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) s_m^j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)})(s_1^j \ , \dots , s_m^j) = \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j.\end{aligned}$$

Значит условие (22) выполнено.

Заметим, что если $\Phi_i^j(x) = \beta J x$, то $\Phi_i^j(x) = \beta (e^t x) e$.

Случай 2. Для некоторых $p, q \in \{1, \dots, m\}$ существуют такие $P \in P(n)$, $\alpha_p^q, \beta_p^q \in \mathbb{R}$, $\alpha_p^q \neq 0$, что $\Phi_p^q(x) = \alpha_p^q P x + \beta_p^q J x$. Покажем, что в этом случае выполнено условие (23).

Без ограничения общности предположим, что $p = q = 1$. Покажем, что для любых $1 \leq i, j \leq m$, $(i, j) \neq (1, 1)$, существуют такие $\alpha_i^j, \beta_i^j \in \mathbb{R}$, что $\Phi_i^j(x) = \alpha_i^j P x + \beta_i^j J x$. Возможны три случая.

Случай 2.1. Предположим, что $j = q$. Будем писать Φ_i вместо Φ_i^1. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $y \in R^n$, $Q \in P(n)$. Пусть $v = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_i$, $Y = y e_1^t$, и $X = QY$. Поскольку $X \preceq^s Y$, получаем, что $\Phi(X) \preceq^w \Phi(Y)$. Тогда, по лемме 4.6, $\Phi(X) v \preceq^w \Phi(Y) v$. Используя выражение (21), получаем

$$\gamma_1 \Phi_1(Qy) + \gamma_2 \Phi_i(Qy) \preceq^w \gamma_1 \Phi_1(y) + \gamma_2 \Phi_i(y).$$

Применим лемму 4.41, чтобы заключить, что $\Phi_i^q(x) = \Phi_i(x) = \alpha_i^1 P x + \beta_i^1 J x$ для некоторых $\alpha_i^1, \beta_i^1 \in \mathbb{R}$.

Случай 2.2. Предположим, что $i = p$. Будем писать Φ^j вместо Φ_1^j. Без ограничения общности предположим, что $j = 2$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, y \in R^n, Q \in P(n)$. Пусть $Y = y(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2)^t$ и $X = QY$. Поскольку $X \preceq^s Y$, получаем, что $\Phi(X) \preceq^w \Phi(Y)$. Тогда, по лемме 4.6, $\Phi(X) e_i \preceq^w \Phi(Y) e_i$. Используя выражение (21), получаем

$$\gamma_1 \Phi^1(Qy) + \gamma_2 \Phi^2(Qy) \preceq^w \gamma_1 \Phi^1(y) + \gamma_2 \Phi^2(y).$$

Применим лемму 4.41, чтобы заключить, что $\Phi_p^j(x) = \Phi^j(x) = \alpha_1^j P x + \beta_1^j J x$ для некоторых $\alpha_1^j, \beta_1^j \in \mathbb{R}$.

Случай 2.3. Наконец, предположим, что $i \neq 1$ и $j \neq 1$. Без ограничения общности предположим, что $i = j = 2$. Из двух предыдущих случаев следует, что $\Phi_1^2(x) = \alpha_1^2 Px + \beta_1^2(e^t x)e$ и $\Phi_2^1(x) = \alpha_2^1 Px + \beta_2^1(e^t x)e$. Если хотя бы одно из α_1^2 и α_2^1 ненулевое, то из двух предыдущих случаев следует, что $\Phi_2^2(x) = \alpha_2^2 Px + \beta_2^2(e^t x)e$ (достаточно рассмотреть $(p, q) = (1, 2)$ или $(2, 1)$, соответственно). Предположим, что $\alpha_1^2 = \alpha_2^1 = 0$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, y \in R^n, Q \in P(n)$. Пусть $Y = y(e_1 + e_2)^t, X = QY$, и $v = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$. Поскольку $X \preceq^s Y$, то $\Phi(X) \preceq^w \Phi(Y)$. Тогда, по лемме 4.6, $\Phi(X)v \preceq^w \Phi(Y)v$. Используя выражение (21), получаем

$$\gamma_1 \Phi_1^1(Qy) + \gamma_1 \beta_1^2(e^t Qy)e + \gamma_2 \beta_2^1(e^t Qy)e + \gamma_2 \Phi_2^2(Qy)$$

$$\preceq^w \gamma_1 \Phi_1^1(y) + \gamma_1 \beta_1^2(e^t y)e + \gamma_2 \beta_2^1(e^t y)e + \gamma_2 \Phi_2^2(y).$$

По условию (15) получаем, что

$$\gamma_1 \Phi_1^1(Qy) + \gamma_2 \Phi_2^2(Qy) \preceq^w \gamma_1 \Phi_1^1(y) + \gamma_2 \Phi_2^2(y).$$

Применим лемму 4.41, чтобы заключить, что $\Phi_2^2(x) = \alpha_2^2 Px + \beta_2^2(e^t x)e$ для некоторых $\alpha_2^2, \beta_2^2 \in \mathbb{R}$.

Пусть матрицы $R = (r_{ij}), S = (s_{ij}) \in M_m$ задаются равенствами $r_{ij} = \alpha_j^i$ и $s_{ij} = \beta_j^i$. Тогда

$$\begin{aligned}
\Phi(X^{(1)}, \dots, X^{(m)}) &= (\sum_{j=1}^m \alpha_1^j PX^{(j)} + \beta_1^j JX^{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^m \alpha_m^j PX^{(j)} + \beta_m^j JX^{(j)}) \\
&= P(\sum_{j=1}^m \alpha_1^j X^{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^m \alpha_m^j X^{(j)}) + J(\sum_{j=1}^m \beta_1^j X^{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^m \beta_m^j X^{(j)}) \\
&= PXR + JXS.
\end{aligned}$$

Следовательно условие (23) выполнено. $\square$

Теорема 4.44. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ сохраняет сильную мажоризацию.*

2. *Φ сохраняет мажоризацию по направлению.*

3. *Φ конвертирует сильную мажоризацию в мажоризацию по направлению.*

4. Φ конвертирует мажоризацию по направлению в слабую.

5. Φ конвертирует сильную мажоризацию в слабую.

6. Выполнено одно из условий:

(a) $\Phi(X) = \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$ для некоторых $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$.

(b) $\Phi(X) = PXR + JXS$ для некоторых $R, S \in M_m$ и $P \in P(n)$.

Доказательство. В теореме 1.16 было доказано, что условия 1, 2, 3 и 6 эквивалентны. Кроме того, из условия 2 следует условие 4, поскольку из мажоризации по направлению следует слабая мажоризация. Из условия 4 следует условие 5, поскольку из сильной мажоризации следует мажоризация по направлению. Наконец, по лемме 4.43 из условия 5 следует условие 6. □

Следующий пример демонстрирует существование нелинейного конвертера из сильной мажоризации в слабую, не сохраняющего обе мажоризации.

Пример 4.45. Пусть D и Φ — операторы на M_2, определяемые равенствами $D\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & 0 \\ 0 & x_{12}+x_{22} \end{pmatrix}$ и

$$\Phi(X) = \begin{cases} D(X), & \text{если } X \in GL_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} D(X), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда Φ не является линейным и

- Φ конвертирует сильную мажоризацию в слабую.
- Φ не сохраняет слабую мажоризацию.
- Φ не сохраняет сильную мажоризацию.

Доказательство. Φ не является линейным, поскольку $\Phi(I) = I \neq \Phi(E_{11}) + \Phi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Предположим, что $A \preceq^s B$ для некоторых $A, B \in M_2$. Тогда, в частности, $D(A) = D(B)$ по следствию 1.12. Существует три возможности.

- Если $A \in GL_2$, то $B \in GL_2$ по лемме 1.9. Тогда $\Phi(A) = D(A) = D(B) = \Phi(B)$.

- Если $A \notin GL_2$ и $B \notin GL_2$, то $\Phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} D(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} D(B) = \Phi(B)$.

- Если $B \in GL_2$, но $A \notin GL_2$, то $\Phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Phi(B) \preceq^w \Phi(B)$.

Таким образом, Φ конвертирует сильную мажоризацию в слабую.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Тогда $A \preceq^w I$, но $\Phi(A) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \not\preceq^w I = \Phi(I)$. Таким образом, Φ не сохраняет слабую мажоризацию.

Пусть $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Тогда $A \preceq^s I$, но $\Phi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \not\preceq^s I = \Phi(I)$. Таким образом, Φ не сохраняет сильную мажоризацию. □

Результаты, приведенные в разделах 4.1 — 4.4, были опубликованы в [45].

4.5 Конвертация столбцовой мажоризации

В этом разделе мы исследуем строчную мажоризацию, введенную в [13] и ее "транспонированный" аналог, столбцовую мажоризацию. В этом случае мы характеризуем конвертеры между парами мажоризаций, ни одна из которых не является следствием другой. Кроме того, мы приводим пример линейного конвертера из "более сильной" мажоризации в "более слабую", не сохраняющего конвертируемые мажоризации.

Как видно из определения, сильная и дважды-стохастическая мажоризации совпадают с точностью до транспонирования матриц. Рассмотрим "транспонированную" версию строчной мажоризации.

Определение 4.46. Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Тогда A *столбцово мажорируется* B ($A \preceq^c B$), если существует такая матрица $C \in \Omega_n^{col}$, что $A = CB$.

Замечание 4.47. Пусть $A, B \in M_{n,m}$. Тогда:

1. $A \preceq^c B$, если и только если $A^t \preceq^r B^t$.

2. Из $A \preceq^s B$ следует $A \preceq^c B$.

Для удобства мы используем столбцовую мажоризацию вместо строчной. Дело в том, что векторный случай строчной мажоризации предполагает, что векторы являются матрицами из $M_{1,m}$, а слабая, по направлению, сильная и столбцовая, что векторы — матрицы из $M_{n,1}$. Это особенно существенно при исследовании линейных операторов. Кроме того, столбцовая, слабая и мажоризация по направлению являются следствиями сильной.

4.5.1 Линейные конвертеры в столбцовую мажоризацию

Далее мы рассматриваем столбцовую мажоризацию. Как было показано в замечании 4.47, для любых $A, B \in M_{n,m}$ выполнено $A \preceq^c B$, если и только если $A^t \preceq^r B^t$.

Лемма 4.48. *Пусть $R \in M_m$ — такая матрица, что из $A \preceq^c B$ следует $AR \preceq^w BR$ для любых $A, B \in M_{n,m}$. Тогда $R = O$.*

Доказательство. Предположим, что $R \neq O$. Без ограничения общности предположим, что $R_{(1)} \neq 0^t$. Пусть B — такая матрица, что $B^{(1)} = e$ и $B^{(j)} = 0$ для $j \in \{2, \ldots, m\}$. Пусть матрица $C \in \Omega_n^{col}$ — такая, что $C_{(1)} = e^t$ и $C_{(i)} = 0^t$ для $i \in \{2, \ldots, n\}$. Таким образом, $CB \preceq^c B$.

Тогда мы получаем, что $CBR \preceq^w BR$. Но $(CBR)_{(1)} = nR_{(1)}$, в то время, как $(BR)_{(i)} = R_{(1)}$ для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$. Отсюда следует, что $(CBR)_{(1)} \notin \operatorname{conv}(\mathcal{R}(BR))$ и $CBR \not\preceq^w BR$ по теореме 1.10. $\square$

Лемма 4.49. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$ и $A \preceq^c B$. Тогда $e^tA = e^tB$ и $JA = JB$.*

Доказательство. Если $A \preceq^c B$, то $A = CB$ для некоторой матрицы $C \in \Omega_n^{col}$. Отсюда следует, что $e^tA = e^tCB = e^tB$. Кроме того, $JA = ee^tA = ee^tB = JB$. $\square$

Теорема 4.50. *Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ конвертирует столбцовую мажоризацию в слабую.*
2. *Φ конвертирует столбцовую мажоризацию в мажоризацию по направлению.*
3. *Φ конвертирует столбцовую мажоризацию в сильную.*
4. *Если $A \preceq^c B$, то $\Phi(A) = \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.*
5. *Выполнено одно из следующих условий:*

(a) $\Phi(X) = \sum_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$ *для некоторых* $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$.

(b) $\Phi(X) = JXS$ *для некоторой* $S \in M_m$.

Доказательство. Поскольку из сильной мажоризации следует мажоризация по направлению, а из мажоризации по направлению следует слабая, мы получаем, что из условия 4 следует условие 3, откуда следует условие 2, откуда следует условие 1. Кроме того, условие 5 влечет условие 4 по лемме 4.49. Таким образом, необходимо показать только, что из условия 1 следует условие 5.

Предположим, что условие 1 выполнено. Пусть $A \preceq^s B$. Тогда $A \preceq^c B$. Из последнего следует, что $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$. Таким образом из $A \preceq^s B$ следует $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$, то есть Φ конвертирует сильную мажоризацию в слабую. Но тогда по теореме 4.44 или выполнено условие 5(a), или $\Phi(X) = PXR + JXS$ для некоторых матриц $R, S \in M_m$ и $P \in P(n)$.

Таким образом, достаточно доказать, что если $\Phi(X) = PXR + JXS$, то $R = O$. Пусть $A = CB$ для некоторой матрицы $C \in \Omega_n^{col}$.

Тогда $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$, то есть $PAR + JAS \preceq^w PBR + JBS$,
то есть $PCBR + JBS \preceq^w PBR + JBS$ по лемме 4.49,
то есть $PCBR + JBS = W(PBR) + W(JBS)$ для некоторой матрицы $W \in \Omega_n^{row}$,
то есть $PCBR + JBS = WPBR + JBS$ для некоторой матрицы $W \in \Omega_n^{row}$,
то есть $PCBR = WPBR$ для некоторой матрицы $W \in \Omega_n^{row}$,
то есть $PAR \preceq^w PBR$, то есть $AR \preceq^w BR$.

Таким образом, из $A \preceq^c B$ следует $AR \preceq^w BR$ для любых $A, B \in M_{n,m}$. По лемме 4.48 это значит, что $R = O$. Наконец, $\Phi(X) = JXS$ для некоторой матрицы $S \in M_m$. □

4.5.2 О линейных конвертерах из столбцовой мажоризации

В этой секции мы исследуем отображения векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Для начала исследуем обратимость операторов из Теоремы 1.15. Если оператор определяется формулой $\Phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого вектора $s \in \mathbb{R}^n$, то этот оператор необратим. Если же $\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ для некоторых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и некоторой матрицы $P \in P(n)$, то оператор Φ может быть обратим.

Лемма 4.51. *Пусть $P \in P(n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда матрица $\alpha P + \beta J$ обратима, если и только если $\alpha \neq 0$ и $\alpha + n\beta \neq 0$. Кроме того, $(\alpha P + \beta J)^{-1} = \frac{1}{\alpha} P^{-1} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta n)} J$.*

Доказательство. Матрица βJ вырождена. Кроме того, $(-n\beta P + \beta J)e = -n\beta e + n\beta e = 0$. Таким образом, матрица $\alpha P + \beta J$ вырождена, если $\alpha = 0$ или $\alpha + n\beta = 0$.

Заметим, что $JP = PJ = JP^{-1} = P^{-1}J = J$ и $JJ = nJ$.

Тогда $(\alpha P + \beta J)((\alpha + n\beta)P^{-1} - \beta J) = \alpha(\alpha + n\beta)I + \beta(\alpha + n\beta)J - \alpha\beta J - \beta^2 nJ = \alpha(\alpha + n\beta)I$. Откуда следует, что $(\alpha P + \beta J)^{-1} = \frac{1}{\alpha} P^{-1} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta n)} J$. □

Следствие 4.52. *Для любых $P \in P(n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ с условиями $\alpha \neq 0$ и $\alpha + n\beta \neq 0$ выполнено $(\alpha P + \beta J)^{-1} = \alpha' P' + \beta' J$ для некоторых $P' \in P(n)$, $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ с условиями $\alpha' \neq 0$ и $\alpha' + n\beta' \neq 0$.*

Доказательство. По лемме 4.51 мы можем выбрать такие $P' = P^{-1}$, $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$ и $\beta' = -\frac{\beta}{\alpha(\alpha+n\beta)}$, что, в самом деле, $(\alpha P + \beta J)^{-1} = \frac{1}{\alpha} P^{-1} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta n)} J = \alpha' P' + \beta' J$. Кроме того, $\alpha' \neq 0$ и $\alpha' + n\beta' = \frac{1}{\alpha} - \frac{n\beta}{\alpha(\alpha+n\beta)} = \frac{(\alpha+n\beta)-n\beta}{\alpha(\alpha+n\beta)} = \frac{1}{\alpha+n\beta} \neq 0$. □

Следствие 4.53. *Пусть Φ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Оператор Φ обратим и конвертирует векторную мажоризацию в слабую.*

2. *$\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$ для некоторых $P \in P(n)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ с условиями $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -n\beta$.*

Доказательство. Сначала предположим, что $\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -n\beta$. Тогда оператор Φ обратим по лемме 4.51. Кроме того, по теореме 4.38, оператор Φ конвертирует векторную мажоризацию в слабую.

Далее предположим, что оператор Φ обратим и конвертирует векторную мажоризацию в слабую. Тогда, по теореме 4.38, $[\Phi] = se^t$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$ или $[\Phi] = \alpha P + \beta J$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $P \in P(n)$.

$\Phi(x) \neq (e^t x)s$, поскольку матрица se^t вырождена. Таким образом, $\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -n\beta$ по лемме 4.51.

□

Лемма 4.54. *Пусть Φ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Оператор Φ обратим и конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую.*

2. $\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ *для некоторых* $P \in P(n)$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *где* $\alpha \neq 0$ *и* $\alpha \neq -n\beta$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -n\beta$. Тогда оператор Φ обратим по лемме 4.51. Кроме того, по теореме 1.15 оператор Φ сохраняет векторную мажоризацию, то есть, в частности, Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, см. замечание 4.47.

Далее предположим, что оператор Φ обратим и конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую. Обозначим $T = [\Phi]$.

1) Докажем, что $TQ^tT^{-1} \in \Omega_n^{col}$ для любой $Q \in \Omega_n$. Рассмотрим $TQ^tT^{-1}e_j$ для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$. По теореме 1.6 имеем $Q^tT^{-1}e_j \preceq T^{-1}e_j$, а значит $TQ^tT^{-1}e_j = \Phi(Q^tT^{-1}e_j) \preceq^c \Phi(T^{-1}e_j) = e_j$. Таким образом, существует такая матрица $C \in \Omega_n^{col}$, что $(TQ^tT^{-1})^{(j)} = Ce_j = C^{(j)}$. Отсюда следует, что каждый столбец матрицы TQ^tT^{-1} является столбцом некоторой столбцово-стохастической матрицы. Итак, $TQ^tT^{-1} \in \Omega_n^{col}$.

2) Рассмотрим оператор $\tilde{\Phi}$, заданный формулой $\tilde{\Phi}(v) = (T^{-1})^t v$. Тогда для любой $Q \in \Omega_n$ имеем $\tilde{\Phi}(Qv) = (T^{-1})^t Qv = (T^{-1})^t QT^t (T^{-1})^t v = ((T^{-1})^t QT^t)\tilde{\Phi}(v)$. По пункту 1) матрица $(T^{-1})^t QT^t = (TQ^tT^{-1})^t$ является строчно-стохастической. Отсюда следует, что для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ и для любой матрицы $Q \in \Omega_n$ существует такая матрица $R \in \Omega_n^{row}$, что $\tilde{\Phi}(Qv) = R\tilde{\Phi}(v)$. Тогда оператор $\tilde{\Phi}$ конвертирует векторную мажоризацию в слабую.

3) По следствию 4.53 мы получаем, что $[\tilde{\Phi}] = (T^{-1})^t = \alpha P + \beta J$ для некоторых $P \in P(n)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -n\beta$. Тогда, по следствию 4.52, $T^t = \alpha' P' + \beta' J$ для некоторых $P' \in P(n)$ и $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ с условиями $\alpha' \neq 0$ и $\alpha' \neq -n\beta'$. Наконец, $T = \alpha' P'^t + \beta' J$.

$\square$

Лемма 4.55. *Пусть Φ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$ и $rank[\Phi] < n - 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Оператор Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую мажоризацию.*

2. $\Phi(x) = (e^t x)s$ *для некоторого вектора* $s \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Если линейное отображение задано матрицей $T = se^t$, то оно сохраняет векторную мажоризацию, как показано в теореме 1.15. Из этого следует, что оператор Φ, в частности, конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, см. замечание 4.47.

Теперь предположим, что оператор Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую.

1) Обозначим $T = [\Phi]$. Поскольку $\operatorname{rank} T < n - 1$, существует такой ненулевой вектор $w \in \mathbb{R}^n$, что $Tw = 0$, и хотя бы одна координата вектора w равна нулю. С точностью до перестановки столбцов матрицы T, мы можем предположить, что $w_1, \ldots, w_k \neq 0$ и $w_{k+1} = \ldots w_n = 0$, где $1 \leq k < n$. В итоге, $Tw = w_1 T^{(1)} + \ldots + w_k T^{(k)} = 0$.

2) Поскольку Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ и матрицы $Q \in \Omega_n$ имеем $TQv \preceq^c Tv$. Пусть $v = w$ и $Q = P_{(ij)}$, где $i \leq k$ и $j > k$ произвольны. Тогда $TP_{ij}w \preceq^c Tw = 0$, то есть $TP_{ij}w = 0$. Другими словами, $w_1 T^{(1)} + \ldots + w_k T^{(k)} - w_i T^{(i)} + w_i T^{(j)} = 0$. Тогда, используя $Tw = 0$, получаем $w_i T^{(j)} - w_i T^{(i)} = 0$, то есть $T^{(i)} = T^{(j)}$ для любых $i \leq k$ и $j > k$. Отсюда следует, что $T = se^t$ для некоторого вектора $s \in \mathbb{R}^n$.

$\square$

Лемма 4.56. *Пусть* Φ *— линейный оператор на* $\mathbb{R}^n$. *Обозначим* $T = [\Phi]$. *Если* Φ *конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, то*

1. $T^{(i)} \preceq^c T^{(j)}$ *для любых* i, j.

2. $\frac{1}{n} Te \preceq^c T^{(j)}$ *для любого* j.

Доказательство. Предположим, что оператор Φ — линейный конвертер из векторной мажоризации в столбцовую. Отсюда следует, что $TQe_j \preceq^c Te_j = T^{(j)}$ для любой $Q \in \Omega_n$. Тогда, подставив $Q = P_{(ij)}$, мы получим $T^{(i)} \preceq^c T^{(j)}$, а подставив $Q = \frac{1}{n} J$, получим $\frac{1}{n} Te \preceq^c T^{(j)}$. $\square$

Для $n = 2$ имеет место следующий результат.

Лемма 4.57. *Пусть* Φ *— линейный оператор на* $\mathbb{R}^2$. *Следующие условия эквивалентны.*

1. *Φ сохраняет векторную мажоризацию.*

2. *Φ конвертирует векторную мажоризацию в слабую.*

3. *Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую.*

4. *Выполнено одно из следующих условий:*

   (a) *$\Phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого вектора $s \in \mathbb{R}^2$.*

   (b) *$\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $P \in P(2)$.*

Доказательство. Теорема 4.38 показывает, что условия 1, 2 и 4 эквивалентны. Условие 1 влечет условие 3, см. замечание 4.47. Таким образом, достаточно показать, что из условия 3 следует условие 4 Предположим, что Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую и обозначим $T = [\Phi]$.

1) Предположим, что оператор Φ обратим. Тогда Φ удовлетворяет условию 4(b) по лемме 4.54.

2) Если $T = O$, то оператор Φ удовлетворяет условию 4(a).

3) Наконец, пусть $\operatorname{rank} T = 1$. Если $T^{(1)} = 0$, то $T^{(2)} = 0$ по лемме 4.56, противоречие. Таким образом, мы можем предположить, что столбцы $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ ненулевые. Тогда $T^{(2)} = \alpha T^{(1)}$ для некоторого $\alpha \neq 0$. В частности, $T\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = 0$.

4) Поскольку Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, мы получаем, что $T\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) \preceq^c T\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = 0$. Следовательно $T\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \alpha \end{smallmatrix}\right) = 0$.

5) Наконец, $T^{(2)} = \alpha T^{(1)}$ и $T^{(1)} = \alpha T^{(2)}$. Следовательно $\alpha = \pm 1$. Если $\alpha = 1$, то $T = T^{(2)} e^t$ и оператор Φ удовлетворяет условию 4(a).

6) Пусть $\alpha = -1$. Тогда условие $Te_1 \preceq^c Te_2$ дает $T^{(1)} \preceq^c -T^{(1)}$. В частности, $e^t T^{(1)} = -e^t T^{(1)}$ по лемме 4.49. Таким образом, $e^t T^{(1)} = 0$ и $T = \left(\begin{smallmatrix} l & -l \\ -l & l \end{smallmatrix}\right)$ для некоторого $l \in \mathbb{R}$. Наконец, Φ удовлетворяет условию 4(b). $\square$

Лемма 4.58. *Пусть Φ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, конвертирующий векторную мажоризацию в столбцовую. Обозначим $T = [\Phi]$. Пусть $rank T = n - 1$, где $n > 2$. Тогда*

1. *Все столбцы матрицы T различны.*

2. *Если вектор $v \in \mathbb{R}^n$ — такой, что $Tv = 0$, то v пропорционален e.*

3. $Te = 0$.

4. $e^t T^{(j)} = 0$ *для любого* j.

Доказательство. Предположим, что Φ — линейный конвертер из векторной мажоризации в столбцовую. Тогда для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ с условием $Tv = 0$ имеем $TQv = 0$ для любой $Q \in \Omega_n$.

1. Предположим, что $T^{(i)} = T^{(j)}$. Пусть $v = e_i - e_j$ и $Q = P_{(jk)}$ для произвольного $k \neq i, j$. Тогда $Tv = 0 = TQv = TP_{(jk)}(e_i - e_j)$. Следовательно $T^{(i)} - T^{(k)} = 0$. Таким образом, все столбцы T равны и $\operatorname{rank} T = 1$. Итак, при $n > 2$ все столбцы T различны.

2. Пусть $Tv = 0$. Докажем, что вектор v пропорционален e. Предположим обратное, то есть $v_i \neq v_j$ для некоторых i, j. Тогда рассмотрим $Q = P_{(ij)}$ и условие $TQv = 0$ даст

$$v_1 T^{(1)} + \ldots + v_n T^{(n)} - v_i T^{(i)} - v_j T^{(j)} + v_i T^{(j)} + v_j T^{(i)} = 0 \tag{24}$$

Учитывая в уравнении (24), что $Tv = 0$, получим $(v_i - v_j)(T^{(i)} - T^{(j)}) = 0$. По условию 1 все столбцы T различны. Наконец, $v_i = v_j$, противоречие. Таким образом вектор v пропорционален e и $Te = 0$.

3. Поскольку $\operatorname{rank} T < n$, то существует такой вектор $v \in \mathbb{R}^n$, что $Tv = 0$. Тогда, по условию 2, $Te = 0$.

4. По лемме 4.56 получаем, что $0 = \frac{1}{n} Te \preceq T^{(j)}$ для любого j. Наконец, по лемме 4.49 получаем, что $e^t T^{(j)} = 0$ для любого j. $\square$

Лемма 4.59. *Пусть матрица* $T \in M_n$ *— такая, что* $Te = 0$. *Предположим, что* $TQ\binom{v}{0} \preceq^c T\binom{v}{0}$ *для любой матрицы* $Q \in \Omega_n$ *и любого вектора* $v \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Тогда $TQb \preceq^c Tb$ *для любых* $Q \in \Omega_n$ *и* $b \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $Q \in \Omega_n$ и $b = \binom{v}{b_n} \in \mathbb{R}^n$. Тогда $Qe = e$. Положим $w = b - b_n e$. Тогда $w_n = 0$ и, по условию, существует такая матрица $C \in \Omega_n^{col}$, что $TQw = CTw$. Тогда $TQb = TQw + b_n TQe = TQw + b_n Te = TQw = CTw = CTw + b_n CTe = CTb$. $\square$

Лемма 4.60. *Пусть матрица* $T \in M_n$ *— такая, что* $Te = 0$. *Предположим, что* $TR\binom{v}{0} \preceq^c T\binom{v}{0}$ *для любых* $R \in \Omega_n^{row}$ *и* $v \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Тогда $TRb \preceq^c Tb$ *для любых* $R \in \Omega_n^{row}$ *и* $b \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Как и в лемме 4.59, результат следует из того, что $Re = e$ для любой $R \in \Omega_n^{row}$. $\square$

Лемма 4.61. *Пусть $T \in M_n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $TPb \preceq^c Tb$ для любой $P \in P(n)$.*

Тогда $TQb \preceq^c Tb$ для любой $Q \in \Omega_n$.

Доказательство. Пусть $Q \in \Omega_n$. Тогда, по теореме 1.4, $Q = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k$ для некоторых $P_1, \ldots, P_k \in P(n)$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

По условию, существуют такие матрицы $C_1, \ldots, C_k \in \Omega_n^{col}$, что $TP_ib = C_iTb$.

Легко видеть, что $C \coloneqq \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_k C_k \in \Omega_n^{col}$ и $TQb = T(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k)b = (\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_k C_k)Tb = CTb$. $\square$

Лемма 4.62. *Пусть $T \in M_n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $TDb \preceq^c Tb$ для любого $D \in \Omega_n^{row}(0,1)$.*

Тогда $TRb \preceq^c Tb$ для любого $R \in \Omega_n^{row}$.

Доказательство. Как и в лемме 4.61, результат следует из того, что каждая строчно-стохастическая матрица является выпуклой комбинацией некоторых целочисленных строчно-стохастических матриц. $\square$

4.5.3 Примеры и контрпримеры

В этой секции мы приводим примеры линейных конвертеров, которые не сохраняют конвертируемые мажоризации.

Для начала нам необходимо найти некоторые пары векторов, упорядоченных в смысле столбцовой мажоризации.

Лемма 4.63. *Пусть $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1-b_2 \end{pmatrix}$ для произвольных $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $b \preceq^c -b \preceq^c b$.*

Доказательство. По определению столбцовой мажоризации $-b \preceq^c b$ эквивалентно $b \preceq^c -b$. Кроме того, если одна из координат b нулевая, то $-b = Pb$ для некоторой матрицы перестановки P.

Таким образом, мы можем предположить, что две координаты вектора b положительны. Без ограничения общности предположим, что $b_1, b_2 > 0$. Тогда $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b_1}{b_1+b_2} \\ 0 & 0 & \frac{b_2}{b_1+b_2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Omega_3^{col}$ и $Cb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b_1}{b_1+b_2} \\ 0 & 0 & \frac{b_2}{b_1+b_2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1-b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix} = -b$. □

Лемма 4.64. *Пусть $b = \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$ для произвольных $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $x \preceq^c b$ для любого $x \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ -b_1+b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.*

Доказательство. Прямые вычисления показывают, что $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_2 \\ -b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2-b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$. □

Лемма 4.65. *Пусть Φ — линейный оператор, заданный матрицей $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $TPb \preceq^c Tb$ для любой матрицы $P \in P(3)$ и любого вектора $b \in \mathbb{R}^3$ с условием $b_3 = 0$.*

Доказательство. Пусть $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $Tb = b_1 T^{(1)} + b_2 T^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$.

Пусть $P \in P(3)$. Тогда $TPb = b_1 T^{(i)} + b_2 T^{(j)}$ для некоторых различных индексов i и j. Таким образом, достаточно доказать, что $b_1 T^{(i)} + b_2 T^{(j)} \preceq^c b_1 T^{(1)} + b_2 T^{(2)}$ для любой пары различных индексов i, j. Всего существует шесть вариантов.
1. $b_1 T^{(1)} + b_2 T^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$. 2. $b_1 T^{(1)} + b_2 T^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_2 \\ -b_1+b_2 \end{pmatrix}$.
3. $b_1 T^{(2)} + b_2 T^{(1)} = \begin{pmatrix} -b_1+b_2 \\ b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}$. 4. $b_1 T^{(2)} + b_2 T^{(3)} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_1-b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$.
5. $b_1 T^{(3)} + b_2 T^{(1)} = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ b_1-b_2 \end{pmatrix}$. 6. $b_1 T^{(3)} + b_2 T^{(2)} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ -b_1+b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

В каждом из этих случаев либо $b_1 T^{(i)} + b_2 T^{(j)} = STb$, либо $b_1 T^{(i)} + b_2 T^{(j)} = -STb$ для некоторой матрицы $S \in P(3)$. Тогда, по лемме 4.63, $TPb \preceq^c Tb$ для любых $P \in P(3)$ и $b \in \mathbb{R}^3$ с условием $b_3 = 0$. □

Лемма 4.66. *Пусть Φ — линейный оператор, заданный матрицей $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую.*

Доказательство. По лемме 4.65, $TPb' \preceq^c Tb'$ для любых $P \in P(3)$ и $b' \in \mathbb{R}^3$ с условием $b'_3 = 0$. Тогда, по лемме 4.61, $TQb' \preceq^c Tb'$ для любых $Q \in \Omega_3$ и $b' \in \mathbb{R}^3$

с условием $b'_3 = 0$. Наконец, по лемме 4.59, $TQb \preceq^c Tb$ для любых $b \in \mathbb{R}^3$ и $Q \in \Omega_3$. $\square$

Лемма 4.67. *Пусть Φ — линейный оператор, заданный матрицей $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $TDb \preceq^c Tb$ для любых $D \in \Omega_3^{row}(0,1)$ и $b \in \mathbb{R}^3$ с условием $b_3 = 0$.*

Доказательство. 1) Пусть $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $Tb = b_1T^{(1)} + b_2T^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$.

2) В $\Omega_3^{row}(0,1)$ есть $3^3 = 27$ различных матриц. 6 из них — матрицы перестановки. В лемме 4.65 было показано, что $TPb \preceq^c Tb$ для любой матрицы $P \in P(3)$.

3) В $\Omega_3^{row}(0,1)$ есть 3 матрицы ee_i^t, где $i = 1,2,3$. Напомним, что $Te = 0$. Тогда $Tee_i^tb = 0$. Наконец, $0 \preceq^c Tb$ по лемме 4.64.

4) Теперь осталось рассмотреть такие матрицы из $\Omega_3^{row}(0,1)$, которые имеют столбец, содержащий ровно две единицы. Таких матриц 18. Заметим, что $T(e_1 + e_2) = Te - Te_3 = -Te_3$.

5) Например, $T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} b = T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} b = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2-b_1 \end{pmatrix} = (b_2 - b_1)T^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1-b_2 \\ b_2-b_1 \end{pmatrix}$.

6) Теперь мы можем рассмотреть общий случай. Пусть i_1, i_2, i_3 — перестановка чисел $1,2,3$. Пусть j_1, j_2 — различные числа из множества $\{1,2,3\}$. Предположим, что матрица $D \in \Omega_3^{row}(0,1)$ такая, что $d_{i_1j_1} = d_{i_2j_1} = d_{i_3j_2} = 1$, а остальные элементы нулевые. Пусть D' такая матрица, что $d_{i_3j_1} = -1$, $d_{i_3j_2} = 1$, а остальные элементы нулевые. Тогда $TDb = TD'b = (b_{j_2} - b_{j_1})T^{(i_3)}$.

7) Необходимо показать, что $(b_{j_2} - b_{j_1})T^{(i_3)} \preceq^c Tb$ для любых i_3 и $j_1 \neq j_2$. Поскольку столбцы T совпадают с точностью до перестановки элементов в них, мы без ограничения общности можем предположить, что $i_3 = 1$. Тогда всевозможные различные j_1 и j_2 дают $(b_{j_2} - b_{j_1})T^{(1)} \in \{\pm b_1T^{(1)}, \pm b_2T^{(1)}, \pm(b_1 - b_2)T^{(1)}\}$.

8) Из этого следует, что $(b_{j_2} - b_{j_1})T^{(1)} \preceq^c Tb$ по лемме 4.64. $\square$

Лемма 4.68. *Пусть Φ — линейный оператор, заданный матрицей $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда Φ конвертирует слабую мажоризацию в столбцовую мажоризацию.*

Доказательство. По лемме 4.67, $TDb' \preceq^c Tb'$ для любых $D \in \Omega_3^{row}(0,1)$ и $b' \in \mathbb{R}^3$ с условием $b'_3 = 0$. Тогда, по лемме 4.62, $TRb' \preceq^c Tb'$ для любых $R \in \Omega_3^{row}$ и $b' \in \mathbb{R}^3$ с условием $b'_3 = 0$. Наконец, по лемме 4.60, $TRb \preceq^c Tb$ для любых $b \in \mathbb{R}^3$ и $R \in \Omega_3^{row}$. $\square$

Пусть линейный оператор Φ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда Φ не удовлетворяет необходимым условиям сохранения векторной мажоризации (теорема 1.15), слабой мажоризации ([20, теорема 2.3]) и столбцовой мажоризации ([21, теорема 2.1]). Таким образом, оператор Φ не сохраняет векторную, слабую и столбцовую мажоризации. Покажем это явно.

Следующий пример показывает, что линейный оператор Φ, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, не сохраняет векторную и слабую мажоризации.

Пример 4.69. Пусть $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $a = P_{(12)}b$ и, как следствие, $a \preceq^w b$ и $a \preceq b$.

Но $\Phi(a) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\Phi(b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Тогда, по следствию 4.4, $\Phi(a) \not\preceq^w \Phi(b)$, а значит $\Phi(a) \not\preceq \Phi(b)$.

Следующий пример показывает, что линейный оператор Φ, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не сохраняет столбцовую мажоризацию.

Пример 4.70. Пусть $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Положим $a = Cb$. Тогда $a = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $a \preceq^c b$.

Но $\Phi(a) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ и $\Phi(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Если матрица $X \in \Omega_3^{col}$, то $(X \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})_1 \leq 1$. Как следствие, $\Phi(a) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \not\preceq^c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \Phi(b)$.

Следующий пример демонстрирует существование линейного оператора на M_n, конвертирующего сильную, по направлению и слабую мажоризации в столбцовую, но не сохраняющего никакую из них.

Пример 4.71. Пусть ϕ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть оператор $\Phi : M_3 \to M_3$ определяется следующим образом. Для любой матрицы $X \in M_3$, $\Phi(X)^{(1)} = \phi(X^{(1)})$, а $\Phi(X)^{(j)} = 0$ для любого $j > 1$. Тогда оператор Φ линеен и конвертирует сильную, по направлению и слабую мажоризации в столбцовую. Кроме того, Φ не сохраняет ни одну из этих мажоризаций.

Доказательство. Пусть $A, B \in M_{n,m}$ с условием $A \preceq^w B$. Тогда, в частности, $A^{(1)} \preceq^w B^{(1)}$. По лемме 4.68, ϕ конвертирует слабую мажоризацию в столбцовую. Отсюда следует, что $\Phi(A)^{(1)} = C\Phi(B)^{(1)}$ для некоторой матрицы $C \in \Omega_3^{col}$. Наконец, $\Phi(A) = C\Phi(B)$ в силу определения Φ. Таким образом, Φ конвертирует слабую мажоризацию в столбцовую.

Поскольку из сильной мажоризации следует мажоризация по направлению, а из мажоризации по направлению следует слабая, мы получаем, что оператор Φ конвертирует все три эти мажоризации в столбцовую.

Наконец, в примере 4.69 было показано, что оператор ϕ не сохраняет векторную и слабую мажоризации. Пример 4.70 показывает, что ϕ не сохраняет столбцовую мажоризацию. Как следствие, Φ не сохраняет эти мажоризации. $\square$

Результаты, приведенные в разделе 4.5, были опубликованы в [46].

4.6 Линейные отображения, сохраняющие мажоризацию кортежей матриц

В этом разделе мы рассматриваем кортежи матриц, $\mathcal{A} \in M_{n,m}^k$, если $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_k)$, где $A_i \in M_{n,m}$.

Определение 4.72. Для выбранного типа мажоризации $\preceq^x$ говорим, что кортеж $\mathcal{A} \in M_{n,m}^k$ *мажорируется* кортежем $\mathcal{B} \in M_{n,m}^k$ ($\mathcal{A} \preceq^x \mathcal{B}$), если $A_i \preceq^x B_i$ для всех индексов $i = 1, \ldots, k$.

Целью настоящего раздела является характеризация линейных отображений матричных кортежей (упорядоченных множеств матриц одинакового размера), сохраняющих мажоризации.

4.6.1 Линейные отображения кортежей матриц

Линейное отображение Φ, переводящее кортеж матриц длины l в кортеж матриц длины k, т. е. $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$, может быть однозначно задано своим образом на кортежах вида $(O, \cdots, O, X, O, \cdots, O)$. Если матрица X расположена в i-той позиции в кортеже, напишем

$$\Phi(O, \cdots, O, X, O, \cdots, O) = (\Phi_i^1(X), \cdots, \Phi_i^k(X)).$$

Легко видеть, что отображение Φ линейно, тогда и только тогда, когда каждое отображение Φ_i^j, $1 \le i \le l, 1 \le j \le k$, также линейно. Таким образом, для задания линейного отображения Φ необходимо и достаточно определить все отображения Φ_i^j, $1 \le i \le l, 1 \le j \le k$.

Тогда для линейного отображения $\Phi : M^l_{n,m} \to M^k_{n,m}$ справедливо

$$\Phi(X_1, \cdots, X_l) = (\Phi^1_1(X_1) + \cdots + \Phi^1_l(X_l), \cdots, \Phi^k_1(X_1) + \cdots + \Phi^k_l(X_l)),$$

где все отображения Φ^j_i линейны.

Лемма 4.73. *Пусть $\preceq^x$, $\preceq^y$ — два, возможно одинаковых, типа мажоризаций матриц. Пусть $\Phi : M^l_{n,m} \to M^k_{n,m}$ — линейный конвертер мажоризации $\preceq^x$ в мажоризацию $\preceq^y$. Тогда каждый линейный оператор Φ^j_i конвертирует мажоризацию $\preceq^x$ в мажоризацию $\preceq^y$.*

Доказательство. Для любых $A, B \in M_{n,m}$ неравенство $A \preceq^x B$ справедливо тогда и только тогда, когда $(O, \cdots, O, A, O, \cdots, O) \preceq^x (O, \cdots, O, B, O, \cdots, O)$. Здесь рассмотрены кортежи с единственной ненулевой матрицей на i-том месте для некоторого $i \in \{1, \ldots, l\}$. По условию, получаем, что $(\Phi^1_i(A), \cdots, \Phi^k_i(A)) \preceq^y (\Phi^1_i(B), \cdots, \Phi^k_i(B))$. Это означает, что $\Phi^j_i(A) \preceq^y \Phi^j_i(B)$ для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Таким образом Φ^j_i конвертирует мажоризацию $\preceq^x$ в мажоризацию $\preceq^y$ для любых $i \in \{1, \ldots, l\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$. □

Согласно определению 1.14, будем говорить, что линейное отображение $\Phi : M^l_{n,m} \to M^k_{n,m}$ *сохраняет* мажоризацию кортежей $\preceq^x$, если из $\mathcal{A} \preceq^x \mathcal{B}$ следует, что $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^x \Phi(\mathcal{B})$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M^l_{n,m}$.

Следующие примеры показывают, что утверждение, обратное к лемме 4.73, вообще говоря, неверно. Первый демонстрирует это для сильной мажоризации и мажоризации по направлению, второй — для слабой.

Пример 4.74. Пусть $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Рассмотрим линейное отображение $\Phi : M^3_{3,3} \to M^2_{3,3}$, заданное формулой $\Phi(X_1, X_2, X_3) = (PX_1R + PX_2R + PX_3R\ ,\ O)$. Тогда Φ не сохраняет сильную мажоризацию и мажоризацию по направлению, в то время как все операторы Φ^j_i сохраняют соответствующие отношения.

Действительно, пусть $B_1 = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = A_2 = B_1$ и $A_3 = B_3 = O$. Непосредственная проверка показывает, что $A_i \preceq^s B_i$ и $A_i \preceq^d B_i$.

Тогда $(\Phi(B_1,B_2,B_3))_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, а $(\Phi(A_1,A_2,A_3))_1=\begin{pmatrix}2&4&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Поскольку, например, $(\Phi(A_1,A_2,A_3))_1e_1=(2,0,0)^t\not\preceq(1,1,0)^t=(\Phi(B_1,B_2,B_3))_1e_1$, получаем, что $\Phi(A_1,A_2,A_3)\not\preceq^d\Phi(B_1,B_2,B_3)$ и $\Phi(A_1,A_2,A_3)\not\preceq^s\Phi(B_1,B_2,B_3)$.

Пример 4.75. Пусть $\Phi: M_{2,2}^3\to M_{2,2}^2$ — линейное отображение, заданное формулой $\Phi(X_1,X_2,X_3)=(\begin{pmatrix}5&-5\\-5&5\end{pmatrix}X_1L+\begin{pmatrix}-1&2\\2&-1\end{pmatrix}X_2L+X_3L\ ,\ O)$, где $L=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. Тогда Φ не сохраняет слабую мажоризацию, в то время как все операторы Φ_i^j ее сохраняют.

Действительно, пусть $B_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$,

$A_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, A_2=B_2$ и $A_3=B_3=O$. Непосредственная проверка показывает, что $A_i\preceq^w B_i$.

Тогда $(\Phi(B_1,B_2,B_3))_1=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}L+\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}L+O=O$. Но $(\Phi(A_1,A_2,A_3))_1=$
$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}L+\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}L+O=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}\neq O$.

Это значит, что $\Phi(A_1,A_2,A_3)\not\preceq^w\Phi(B_1,B_2,B_3)$.

4.6.2 Линейные отображения, сохраняющие сильную мажоризацию и мажоризацию по направлению кортежей матриц

Лемма 4.76. *Пусть $\Phi: M_{n,m}^l\to M_{n,m}^k$ — линейное отображение. Предположим, что существуют такие индексы $u,w\in\{1,\dots,l\}$ и $p\in\{1,\dots,k\}$, что*

$$\Phi_u^p(X)=P_1XR_1+JXS_1 \quad \text{и} \quad \Phi_w^p(X)=P_2XR_2+JXS_2$$

для некоторых матриц $P_1,P_2\in P(n)$ и $R_1,R_2\in M_m$. Предположим также, что Φ конвертирует сильную мажоризацию кортежей в мажоризацию по направлению. Тогда выполняется хотя бы одно из равенств $R_1=O$ и $R_2=O$.

Доказательство. С точностью до перестановки матриц в кортеже можно предположить, что $u = 1$, $w = 2$. Тогда, по условию, для любых $X_1, X_2 \in M_{n,m}$ выполняется равенство

$$(\Phi(X_1, X_2, O, \ldots, O))_p = (P_1X_1R_1 + JX_1S_1) + (P_2X_2R_2 + JX_2S_2). \qquad (25)$$

Для произвольных матриц $B_1, B_2 \in M_{n,m}$ и произвольных дважды стохастических матриц $Q_1, Q_2 \in \Omega_n$ рассмотрим кортежи $\mathcal{A} = (Q_1B_1, Q_2B_2, O, \ldots, O) \in M^l_{n,m}$ и $\mathcal{B} = (B_1, B_2, O, \ldots, O) \in M^l_{n,m}$. По определению имеем $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$. Тогда $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^d \Phi(\mathcal{B})$.

Используя представление (25), получаем, по определению мажоризации по направлению и теореме 1.6, что для любого $v \in \mathbb{R}^m$ существует такая дважды стохастическая матрица Q, что $((P_1Q_1B_1R_1 + JQ_1B_1S_1) + (P_2Q_2B_2R_2 + JQ_2B_2S_2))v = Q((P_1B_1R_1 + JB_1S_1) + (P_2B_2R_2 + JB_2S_2))v$. Поскольку $JQ_1 = JQ_2 = QJ = J$, из этого следует, что

$$(P_1Q_1B_1R_1 + P_2Q_2B_2R_2)v = Q(P_1B_1R_1 + P_2B_2R_2)v. \qquad (26)$$

Допустим, что обе матрицы R_1 и R_2 ненулевые. Если существует такой индекс $j \in \{1, \ldots, m\}$, что столбцы $R_1^{(j)}$ и $R_2^{(j)}$ ненулевые, то положим $v = e_j$. Иначе положим $v = e_{j_1} + e_{j_2}$, где $R_1^{(j_1)}$ и $R_2^{(j_2)}$ ненулевые, $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, m\}$. В обоих случаях векторы R_1v и R_2v являются ненулевыми.

Заметим, что равенство (26) выполняется для произвольных матриц B_1, B_2 и произвольных дважды стохастических матриц Q_1, Q_2. Выберем такие B_1, B_2, что $P_iB_iR_iv = e_i$, $i = 1, 2$. Это возможно, так как векторы R_1v и R_2v являются ненулевыми. Пусть Q'_1, Q'_2 — такие дважды стохастические матрицы, что $Q'^{(1)}_1 = Q'^{(2)}_2 = e_1$. Тогда положим $Q_i = P_i^{-1}Q'_iP_i$, $i = 1, 2$.

В этом случае равенство (26) принимает вид $(Q'_1P_1B_1R_1 + Q'_2P_2B_2R_2)v = Q(P_1B_1R_1 + P_2B_2R_2)v$, откуда $Q'_1e_1 + Q'_2e_2 = Q(e_1 + e_2)$. Итак, существует такая $Q \in \Omega_n$, что $Q'^{(1)}_1 + Q'^{(2)}_2 = Q^{(1)} + Q^{(2)}$. Но по выбору Q'_1 и Q'_2 получается, что сумма элементов первой строки матрицы Q не меньше 2, т. е. Q не является дважды стохастической.

Таким образом, хотя бы одна из матриц R_1 и R_2 должна быть нулевой.

□

Заметим, что в примере 4.74 выполняется $\Phi^1_1(X) = \Phi^1_2(X) = PXR$, где $R \neq O$, и рассуждения в этом примере иллюстрируют доказательство предыдущей леммы.

Лемма 4.77. *Пусть* $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ *— линейное отображение. Предположим, что существуют такие индексы* $u, w \in \{1, \ldots, l\}$ *и* $p \in \{1, \ldots, k\}$*, что*

$$\Phi_u^p(X) = PXR + JXS \quad \text{и} \quad \Phi_w^p(X) = \sum_{j=1}^m (e^t X^{(j)}) S_j$$

для некоторых $P \in P(n)$*, ненулевой* $R \in M_m$ *и* $S_j \in M_{n,m}$*,* $j = 1, \ldots, m$*.*

Предположим также, что Φ *конвертирует сильную мажоризацию кортежей в мажоризацию по направлению. Тогда* $|\mathcal{R}(S_j)| = 1$ *для любого* j*.*

Доказательство. С точностью до перестановки матриц в кортеже можно предположить, что $u = 1$, $w = 2$. Тогда, по условию, для любых $X_1, X_2 \in M_{n,m}$ выполняется равенство

$$(\Phi(X_1, X_2, O, \ldots, O))_p = (PX_1R + JX_1S) + \sum_{j=1}^m (e^t X_2^{(j)}) S_j. \tag{27}$$

Для произвольных матриц $B_1, B_2 \in M_{n,m}$ и произвольных дважды стохастических матриц $Q_1, Q_2 \in \Omega_n$ рассмотрим кортежи $\mathcal{A} = (Q_1B_1, Q_2B_2, O, \ldots, O) \in M_{n,m}^l$ и $\mathcal{B} = (B_1, B_2, O, \ldots, O) \in M_{n,m}^l$. По определению имеем $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$. Тогда $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^d \Phi(\mathcal{B})$.

Используя представление (27), получаем, по определению мажоризации по направлению и теореме 1.6, что для любого $v \in \mathbb{R}^m$ существует такая дважды стохастическая матрица Q', что

$$PQ_1B_1Rv + JQ_1B_1Sv + (\sum_{j=1}^m (e^t Q_2 B_2^{(j)}) S_j) v =$$
$$Q'PB_1Rv + Q'JB_1Sv + Q'(\sum_{j=1}^m (e^t B_2^{(j)}) S_j) v.$$

Поскольку $JQ_1 = Q'J = J$ и $e^t Q_2 = e^t$, последнее равенство равносильно

$$PQ_1B_1R + \sum_{j=1}^m (e^t B_2^{(j)}) S_j \preceq^d PB_1R + \sum_{j=1}^m (e^t B_2^{(j)}) S_j.$$

Фиксируем произвольную B_2 и обозначим $K = (k_{ij}) \coloneqq \sum_{j=1}^m (e^t B_2^{(j)}) S_j \in M_{n,m}$.

Тогда $PQ_1B_1R + K \preceq^d PB_1R + K$. Рассмотрим $B = PB_1$ и $Q = PQ_1P^{-1}$. Тогда мы получаем, что $QBR + K \preceq^d BR + K$, т. е. $(QBR + K)v \preceq (BR + K)v$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$.

1) Рассмотрим произвольное j, для которого $R^{(j)} \neq 0$ и положим $v = e_j$. Пусть l — такой индекс, что $k_{lj} \leq k_{ij}$ для всех индексов i, $1 \leq i \leq n$, т.е. $k_{lj} = \min K^{(j)}$.

Поскольку столбец $R^{(j)}$ ненулевой, мы можем выбрать такую матрицу B, что $BR^{(j)} = \lambda e_l$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам $\lambda \geq k_{ij} - k_{lj}$ для любого $1 \leq i \leq n$. Тогда мы получим, что $(\lambda Q e_l + K^{(j)}) \preceq (\lambda e_l + K^{(j)})$.

Пусть $Q = P_{(lq)}$ для некоторого произвольного q. Тогда, по определению векторной мажоризации, $\max(\lambda e_q + K^{(j)}) \leq \max(\lambda e_l + K^{(j)})$. Но по выбору λ имеем $\lambda + k_{qj} \geq \lambda + k_{lj} \geq k_{ij}$ для всех индексов $i = 1, \ldots, n$. Откуда следует, что $\max(\lambda e_q + K^{(j)}) = \lambda + k_{qj}$, а $\max(\lambda e_l + K^{(j)}) = \lambda + k_{lj}$. Значит $k_{qj} \leq k_{lj}$, но по предположению $k_{qj} \geq k_{lj}$. Итак, $k_{lj} = k_{ij}$ для любого i.

2) Теперь рассмотрим произвольное h, для которого $R^{(h)} = 0$. Поскольку матрица R ненулевая, существует такое $g \in \{1, \ldots, m\}$, что $R^{(g)} \neq 0$. Положим $v = e_h + e_g$ и будем рассуждать аналогично пункту 1). Получим, что $k_{lh} + k_{lg} = k_{ih} + k_{ig}$ для любого i. По доказанному выше, $k_{lg} = k_{ig}$, а значит $k_{lh} = k_{ih}$.

Таким образом, $|\mathcal{R}(K)| = 1$ для любой матрицы B_2. Напомним, что $K = \sum\limits_{j=1}^{m}(e^t B_2^{(j)}) S_j$. Для каждого индекса $j \in \{1, \ldots, m\}$ выберем B_2 так, что $B_2^{(j)} = e_1$ и $B_2^{(q)} = 0$ при $q \neq j$. В этом случае $K = S_j$ и мы получаем, что $|\mathcal{R}(S_j)| = 1$ для каждого индекса $j \in \{1, \ldots, m\}$. $\square$

Теорема 4.78. *Пусть отображение $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ является линейным. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ сохраняют мажоризацию по направлению кортежей матриц.*

2. *Φ сохраняют сильную мажоризацию кортежей матриц.*

3. *Φ конвертирует сильную мажоризацию кортежей в мажоризацию по направлению.*

4. *Для каждого отображения Φ_i^j выполнено одно из следующих условий:*

(a) Существуют такие $S_1, \dots, S_m \in M_{n,m}$*, что* $|\mathcal{R}(S_p)| = 1$ *для любого* p *и* $\Phi_i^j(X) = \sum\limits_{p=1}^{m}(e^t X^{(p)})S_p$*.*

(b) Существует такая $S \in M_m$*, что* $\Phi_i^j(X) = JXS$*.*

(c) Существуют такие $S_1, \dots, S_m \in M_{n,m}$*, что* $|\mathcal{R}(S_p)| > 1$ *для некоторого* p *и* $\Phi_i^j(X) = \sum\limits_{p=1}^{m}(e^t X^{(p)})S_p$*.*

(d) Существуют $R, S \in M_m$ *и* $P \in P(n)$*, такие, что* $R \neq O$ *и* $\Phi_i^j(X) = PXR + JXS$*.*

Кроме того, если Φ_i^j *имеет вид* (d)*, то* Φ_q^j *могут быть только вида* (a) *или* (b) *для любого* $q \neq i$*.*

Доказательство. 1) Покажем, что из условия 4 следует условие 1. Действительно, если некоторый оператор T на $M_{n,m}$ имеет вид (a), (b) или (c), то, по следствию 1.12, $T(A) = T(B)$ при $A \preceq^d B$. Более того, если T имеет вид (a) или (b), то $T(X) = QT(X)$ для любых $X \in M_{n,m}$ и $Q \in \Omega_n$.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in M_{n,m}^l$ и $\mathcal{A} \preceq^d \mathcal{B}$. Фиксируем произвольное $j \in \{1, \dots, k\}$. Положим $A = \mathcal{A}_j$, $B = \mathcal{B}_j$. Если каждое отображение Φ_i^j имеет вид $(a), (b)$ или (c), то $(\Phi(\mathcal{A}))_j = (\Phi(\mathcal{B}))_j$. Если же Φ_i^j имеет вид (d) для некоторого i, то все отображения Φ_q^j могут быть только вида (a) или (b) для любого $q \neq i$. В этом случае $(\Phi(\mathcal{A}))_j = \Phi_i^j(A) + F$, а $(\Phi(\mathcal{B}))_j = \Phi_i^j(B) + F$, где $A \preceq^d B$ и $F \in M_{n,m}$ — такая, что $QF = F$ для любой матрицы $Q \in \Omega_n$. По условию, $\Phi_i^j(A) \preceq^d \Phi_i^j(B)$, если $A \preceq^d B$. Тогда, по определению мажоризации по направлению и теореме 1.6, получаем, что для любого $v \in \mathbb{R}^m$ существует такая $Q' \in \Omega_n$, что $\Phi_i^j(A)v = Q'\Phi_i^j(B)v$. Поскольку $F = Q'F$, получаем $(\Phi(\mathcal{A}))_j v = \Phi_i^j(A)v + Fv = Q'\Phi_i^j(B)v + Fv = Q'(\Phi_i^j(B) + F)v = Q'(\Phi(\mathcal{B}))_j v$. Это значит, что $(\Phi(\mathcal{A}))_j \preceq^d (\Phi(\mathcal{B}))_j$ и условие 1 выполнено.

2) Покажем, что из условия 4 следует условие 2 Рассуждая аналогично пункту 1), получаем, что если $\mathcal{A} \preceq^s \mathcal{B}$, то существует такая $Q' \in \Omega_n$, что $\Phi_i^j(A) + F = Q'(\Phi_i^j(B) + F)$, и, как следствие, $\Phi_i^j(A) \preceq^s \Phi_i^j(B)$, если $A \preceq^s B$, и условие 2 действительно выполнено.

3) Условие 3 следует и из условия 1, и из условия 2, поскольку из сильной мажоризации следует мажоризация по направлению.

4) Остается показать, что из условия 3 следует условие 4. Из леммы 4.73 следует, что каждое отображение Φ_i^j удовлетворяет условию 3. теоремы 1.16. Тогда каждое отображение Φ_i^j имеет вид (a), (b), (c) или (d). Остается доказать, что если некоторое отображение Φ_i^j имеет вид (d), то Φ_q^j могут быть только вида (a) или (b) для любого $q \neq i$. Предположим, что некоторое Φ_i^j имеет вид (d). Тогда, по лемме 4.77, отображение Φ_w^j имеет вид, отличный от вида (c) для любого $w \neq i$, а по лемме 4.76 — отличный от вида (d) для любого $w \neq i$. Значит, выполнено условие 4. □

4.6.3 Линейные отображения, сохраняющие слабую мажоризацию кортежей матриц

Лемма 4.79. *Пусть $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ — линейное отображение. Предположим, что существуют такие индексы $u, w \in \{1, \ldots, l\}$ и $p \in \{1, \ldots, k\}$, что*

$$\Phi_u^p(X) = P_1 X L_1 \quad \text{и} \quad \Phi_w^p(X) = P_2 X L_2.$$

для некоторых матриц $P_1, P_2 \in P(n)$ и $L_1, L_2 \in M_m$. Предположим также, что Φ сохраняет слабую мажоризацию кортежей матриц. Тогда выполняется хотя бы одно из равенств $L_1 = O$ или $L_2 = O$.

Доказательство. С точностью до перестановки матриц в кортеже можно предположить, что $u = 1$, $w = 2$. Тогда, по условию, для любых $X_1, X_2 \in M_{n,m}$ выполняется равенство

$$(\Phi(X_1, X_2, O, \ldots, O))_p = (P_1 X_1 L_1) + (P_2 X_2 L_2). \tag{28}$$

Для произвольных матриц $B_1, B_2 \in M_{n,m}$ и произвольных строчно-стохастических матриц $R_1, R_2 \in \Omega_n^{row}$ рассмотрим кортежи $\mathcal{A} = (R_1 B_1, R_2 B_2, O, \ldots, O) \in M_{n,m}^l$ и $\mathcal{B} = (B_1, B_2, O, \ldots, O) \in M_{n,m}^l$. По определению имеем $\mathcal{A} \preceq^w \mathcal{B}$. Тогда $\Phi(\mathcal{A}) \preceq^w \Phi(\mathcal{B})$.

Используя представление (28), получаем по определению слабой мажоризации, что существует такая строчно-стохастическая матрица R, что

$$P_1 R_1 B_1 L_1 + P_2 R_2 B_2 L_2 = R(P_1 B_1 L_1 + P_2 B_2 L_2). \tag{29}$$

Допустим, обе матрицы L_1, L_2 ненулевые. Тогда, как и в доказательстве леммы 4.76, мы можем выбрать такие B_1, B_2 и $v \in \mathbb{R}^m$, что $P_i B_i L_i v = e_i$, $i = 1, 2$. Тогда, домножив обе стороны (29) справа на v, получим $R_1^{(1)} + R_2^{(2)} = R^{(1)} + R^{(2)}$ для некоторой строчно-стохастической матрицы R, что также, как и в доказательстве леммы 4.76, приводит к противоречию. Итак, хотя бы одна из матриц L_1, L_2 является нулевой. $\square$

Лемма 4.80. *Пусть $\Phi : M_{2,m}^l \to M_{2,m}^k$ — линейное отображение. Предположим, что существуют такие индексы $u, w \in \{1, \ldots, l\}$ и $p \in \{1, \ldots, k\}$, что*

$$\Phi_u^p(X) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} X L_1 \quad \text{и} \quad \Phi_w^p(X) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} X L_2.$$

для некоторых матриц $L_1, L_2 \in M_m$ и действительных чисел a_s, b_s, где $a_s b_s \leq 0$, $s = 1, 2$.

Предположим также, что Φ сохраняет слабую мажоризацию кортежей матриц. Тогда выполняется хотя бы одно из равенств $\Phi_u^p = O$ и $\Phi_w^p = O$.

Доказательство. С точностью до перестановки матриц в кортеже можно предположить, что $u = 1$, $w = 2$. Тогда мы получим, что для любых $B_1, B_2 \in M_{2,m}$ и $R_1, R_2 \in \Omega_2^{row}$ существует такая $R \in \Omega_2^{row}$, что

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} R_1 B_1 L_1 + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} R_2 B_2 L_2 = R(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} B_1 L_1 + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} B_2 L_2).$$

Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. Предположим, что $a_i^2 \neq b_i^2$, $i = 1, 2$. Тогда матрицы $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ обратимы. В этом случае заменим B_i на $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}^{-1} B_i$ и положим $R_1 = I$, $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, мы получим

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}^{-1} B_1 L_1 + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}^{-1} B_2 L_2 = R(B_1 L_1 + B_2 L_2).$$

Поскольку $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$, мы можем переписать это уравнение в виде

$$B_1 L_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_2 L_2 = R(B_1 L_1 + B_2 L_2). \tag{30}$$

Выберем $v \in \mathbb{R}^2$ так, что $v = e_i$, если существует такое i, что оба столбца $L_1^{(i)}$ и $L_2^{(i)}$ ненулевые, и $v = e$ иначе. Предполагаем, что L_1 и L_2 ненулевые, иначе все доказано. Тогда существуют такие матрицы B_i, что $B_i L_i v = e_i$. В этом случае, домножив равенство (30) на v, мы получаем $e_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e_2 = 2e_1 = R(e_1 + e_2) = Re = e$, противоречие.

Осталось рассмотреть случаи, когда $a_1^2 = b_1^2$. Более того, $a_1 = -b_1$, поскольку $a_1 b_1 \leq 0$. Отметим, что если $a_1 = 0$, то $\Phi_1^p = O$.

Случай 2. $a_1^2 = b_1^2$, но $a_2^2 \neq b_2^2$. Без ограничения общности, предположим, что $a_1 = 1$. Иначе можно заменить B_1 на $(\frac{1}{a_1})B_1$. Тогда получается, что

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} R_1 B_1 L_1 + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} R_2 B_2 L_2 = R(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} B_1 L_1 + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} B_2 L_2) \tag{31}$$

Выбираем $v \in \mathbb{R}_2$ из тех же соображений, что и выше, так чтобы $L_1 v, L_2 v \neq 0$. Поскольку $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$ обратима, мы можем подобрать B_1 и B_2, так чтобы $B_1 L_1 v = e_1$ и $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} B_2 L_2 v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e_2$.

Домножим обе части равенства (31) на v. Тогда правая часть обратится в ноль. Действительно, $R(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (e_1 + e_2)) = 0$. Пусть $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R_2 = I$. Тогда левая часть станет равна $0 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, противоречие.

Случай 3 $a_1 = -b_1$, $a_2 = -b_2$. В этом случае получается, что $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (R_1 B_1 L_1 + R_2 B_2 L_2) = R \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (B_1 L_1 + B_2 L_2)$. Доказательство этого случая полностью повторяет доказательство предыдущего. Достаточно лишь рассмотреть такую матрицу B_2, что $B_2L_2v = e_2$ вместо $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e_2$.

□

Заметим, что в примере 4.74 отображения Φ_1^1 и Φ_2^1 на $M_{2,m}$ оба не тождественно равны нулю, и рассуждения в этом примере иллюстрируют доказательство предыдущей леммы.

Теорема 4.81. *Пусть* $\Phi : M_{n,m}^l \to M_{n,m}^k$ *— линейное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Φ *сохраняет слабую мажоризацию кортежей матриц.*

(2) Каждый линейный оператор Φ_i^j *сохраняет слабую мажоризацию. Кроме того, если* $\Phi_i^j \neq O$ *для некоторых* i, j*, то* $\Phi_q^j = O$ *для любого* $q \neq i$*.*

Доказательство. По лемме 4.73 достаточно доказать, что если $\Phi_i^j \neq O$ для некоторых i, j, то $\Phi_q^j = O$ для любого $q \neq i$. Это уже было доказано в предыдущих леммах: случай $n \neq 2$ рассмотрен в лемме 4.79, а случай $n = 2$ в лемме 4.80. □

Результаты, приведенные в разделе 4.6, были опубликованы в [44].

4.7 Линейные отображения, сохраняющие комбинаторные матричные множества

Напомним, что $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ обозначают множество целых, рациональных и действительных чисел, соответственно. Через $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$ обозначим соответствующие множества неотрицательных чисел. Для множества $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$ обозначим за $\mathcal{M}^n$ множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ с координатами из $\mathcal{M}$. $|\mathcal{M}|$ обозначает мощность множества $\mathcal{M}$. $-\mathcal{M}$ обозначает множество $\{-x \,|x \in \mathcal{M}\}$.

Ограничение мажоризаций на матрицы с коэффициентами из некоторого специального множества, как, например, $(0, 1)$-матрицы, может приводить к интересным комбинаторным результатам, см. [9, 13, 43]. Возникает естественный вопрос, как устроены линейные операторы, сохраняющие такие классы матриц? Линейный оператор на множестве действительных $n \times m$ матриц можно рассматривать как линейный оператор на пространстве $\mathbb{R}^{nm}$. Это значит, что для характеризации линейных операторов, сохраняющих классы матриц, достаточно изучить линейные операторы, сохраняющие классы векторов.

Определение 4.82. Линейный оператор $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *сохраняет* множество $\mathcal{M}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, если $\Phi(v) \in \mathcal{M}^n$ для любого вектора $v \in \mathcal{M}^n$.

Определение 4.83. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет* множество $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$, если $\phi(v) \in \mathcal{M}$ для любого вектора $v \in \mathcal{M}^n$.

Напомним, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 4.84. *Координатами* линейного функционала $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется набор $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ действительных чисел, определяемый равенствами $\phi_i = \phi(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i$ для любого вектора $v = (v_1, \ldots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

Мы отождествляем линейный функционал ϕ с вектор-строкой его координат $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

Для линейного оператора $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и индекса $i \in \{1, \ldots, n\}$ определим $\Phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, задаваемый равенством $\Phi_i(v) = (\Phi(v))_i$.

Лемма 4.85. *Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$ и $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Тогда Φ сохраняет $\mathcal{M}^n$, если и только если каждый функционал Φ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, сохраняет $\mathcal{M}$.*

Доказательство. I. Предположим, что Φ сохраняет множество $\mathcal{M}^n$.

Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ — произвольный вектор. Тогда $\Phi(v) \in \mathcal{M}^n$, т. е. $(\Phi(v))_i = \Phi_i(v) \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Таким образом, каждый линейный функционал Φ_i сохраняет множество $\mathcal{M}$.

II. Предположим, что каждый линейный функционал Φ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, сохраняет множество $\mathcal{M}$.

Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ — произвольный вектор. По условию, $(\Phi(v))_i = \Phi_i(v) \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Следовательно $\Phi(v) \in \mathcal{M}^n$, т. е. Φ сохраняет множество $\mathcal{M}^n$. $\square$

Таким образом, лемма 4.85 позволяет свести задачу характеризации линейных операторов на пространстве $\mathbb{R}^n$, сохраняющих некоторое множество векторов $\mathcal{M}^n$, к характеризации линейных функционалов $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сохраняющих множество $\mathcal{M}$. В настоящем разделе даются характеризации линейных функционалов, сохраняющих различные подмножества $\mathbb{R}$

4.7.1 Общие свойства

Лемма 4.86. *Пусть* $\{0,1\} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$. *Предположим, что линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет множество* $\mathcal{M}$. *Тогда* $\phi_i \in \mathcal{M}$ *для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $e_i \in \mathcal{M}^n$. Тогда $\phi(e_i) = \phi_i \in \mathcal{M}$. □

Лемма 4.87. *Пусть* $\{0,1\} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$, *и пусть множество* $\mathcal{M}$ *замкнуто относительно сложения и умножения. Тогда линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет множество* $\mathcal{M}$, *если и только если* $\phi_i \in \mathcal{M}$ *для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. I. Если ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$, то $\phi_i \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ по лемме 4.86.

II. Предположим, что $\phi_i \in \mathcal{M}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ — произвольный вектор. Тогда $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i \in \mathcal{M}$, поскольку $\mathcal{M}$ замкнуто относительно сложения и умножения. □

Следствие 4.88. *Пусть* $\mathcal{M} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+\}$. *Тогда линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет* $\mathcal{M}$, *если и только если* $\phi_i \in \mathcal{M}$ *для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Лемма 4.89. *Пусть* $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}$. *Тогда линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет множество* $\mathcal{M}$, *если и только если* ϕ *сохраняет множество* $-\mathcal{M}$, *где* $-\mathcal{M} = \{-x \mid x \in \mathcal{M}\}$.

Доказательство. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда $v \in \mathcal{M}^n$, если и только если $-v \in -\mathcal{M}^n$. Поскольку $\phi(-v) = -\phi(v)$, мы получаем, что $\phi(v) \in \mathcal{M}$, если и только если $\phi(-v) \in -\mathcal{M}$. □

Заметим, что лемма 4.89 позволяет, зная характеризацию линейных функционалов, сохраняющих множество $\mathcal{M}$, автоматически получить характеризацию линейных функционалов, сохраняющих множество $-\mathcal{M}$. Таким образом, лемма 4.89 расширяет область применимости лемм 4.92, 4.93, 4.94, 4.98, 4.99, 4.101, в которых рассматриваются такие множества $\mathcal{M}$, что, вообще говоря, $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$.

4.7.2 Бесконечные множества целых чисел

Лемма 4.90. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$. *Тогда линейный функционал* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сохраняет множество* $k\mathbb{Z}$, *если и только если* $\phi_i \in \mathbb{Z}$ *для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. I. Пусть $\phi_i \in \mathbb{Z}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Если $v \in (k\mathbb{Z})^n$, то $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i \in k\mathbb{Z}$.

II. Предположим, что ϕ сохраняет множество $k\mathbb{Z}$. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$ — произвольный индекс. Тогда $ke_i \in (k\mathbb{Z})^n$ и, таким образом, $\phi(ke_i) = k\phi_i \in k\mathbb{Z}$. Из этого следует, что $\phi_i \in \mathbb{Z}$. □

Лемма 4.91. *Пусть $\mathcal{M} = (\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z})$ — множество нечетных чисел. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\mathcal{M}$, если и только если $\phi_i \in \mathbb{Z}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и число $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i$ нечетно.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Имеем $e \in \mathcal{M}^n$. Тогда $\phi(e) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \mathcal{M}$. Теперь, для произвольного $j \in \{1, \ldots, n\}$, рассмотрим вектор $e - 2e_j \in \mathcal{M}^n$. Тогда $\phi(e - 2e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i - 2\phi_j \in \mathcal{M}$. Таким образом, число $2\phi_j$ четно, т. е. $\phi_j \in \mathbb{Z}$.

II. Предположим, что $\phi_i \in \mathbb{Z}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и число $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i$ нечетно. Тогда, в частности, ϕ имеет нечетное число нечетных координат. Из этого следует, что число $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i$ нечетно для любого $v \in \mathcal{M}^n$. □

4.7.3 Ограниченные интервалы

Лемма 4.92. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[0, \alpha]$, если и только если $\phi_i \geq 0$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq 1$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет отрезок $[0, \alpha]$. Для произвольного $j \in \{1, \ldots, n\}$ рассмотрим вектор $\alpha e_j \in [0, \alpha]^n$. Тогда $\phi(\alpha e_j) = \alpha\phi_j \in [0, \alpha]$. Следовательно $\phi_j \geq 0$. Также $\alpha e \in [0, \alpha]^n$. Тогда $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq \alpha$. Из этого следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq 1$.

II. Предположим, что $\phi_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq 1$. Тогда для любого $v \in [0, \alpha]^n$ имеем $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i v_i \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha\phi_i = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq \alpha$. Кроме того,

$\phi(v) \geq 0$. Из этого следует, что ϕ сохраняет отрезок $[0, \alpha]$. $\square$

Лемма 4.93. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — такие числа, что $\beta > \alpha > 0$. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[\alpha, \beta]$, если и только если $\phi_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет отрезок $[\alpha, \beta]$. Имеем $\alpha e \in [\alpha, \beta]^n$. Из этого следует, что $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geq \alpha$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geq 1$. Аналогично, $\beta e \in [\alpha, \beta]^n$ и $\phi(\beta e) = \beta \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq \beta$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq 1$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$.

Теперь для произвольного $j \in \{1, \dots, n\}$ рассмотрим вектор $v = \alpha e + (\beta - \alpha) e_j$. Тогда $v \in [\alpha, \beta]^n$ и $\phi(v) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i + (\beta - \alpha)\phi_j = \alpha + (\beta - \alpha)\phi_j \in [\alpha, \beta]$. Таким образом, $(\beta - \alpha)\phi_j \in [0, \beta - \alpha]$. Следовательно $\phi_j \geq 0$.

II. Предположим, что $\phi_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$. Пусть $v \in [\alpha, \beta]^n$ — произвольный вектор. Тогда $\phi(v)$ — выпуклая комбинация координат v. Из этого следует, что $\phi(v) \in [\min(v), \max(v)] \subseteq [\alpha, \beta]$. В итоге, ϕ сохраняет отрезок $[\alpha, \beta]$. $\square$

Лемма 4.94. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — такие числа, что $\beta \geq \alpha > 0$. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[-\alpha, \beta]$, если и только если*

$$\alpha\Big(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i\Big) + \beta\Big(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j\Big) \leq \alpha.$$

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет отрезок $[-\alpha, \beta]$.

Пусть $w \in [-\alpha, \beta]^n$ — такой вектор, что $w_i = \begin{cases} -\alpha, \text{ если } \phi_i \geq 0 \\ \beta, \text{ если } \phi_i < 0 \end{cases}$ для $i = \{1, \dots, n\}$. Тогда $-\alpha \leq \phi(w) = -\alpha(\sum\limits_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum\limits_{j:\phi_j<0} \phi_j)$. Из этого следует, что $\alpha(\sum\limits_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum\limits_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \leq \alpha$.

II. Предположим, что $\alpha(\sum\limits_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum\limits_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \leq \alpha$. Пусть $v \in [\alpha, \beta]^n$ — произвольный вектор.

Тогда $\phi(v) = \sum\limits_{i:\phi_i>0} v_i\phi_i + \sum\limits_{j:\phi_j<0} v_j\phi_j \geq -\alpha(\sum\limits_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \sum\limits_{j:\phi_j<0} v_j\phi_j \geq -\alpha(\sum\limits_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum\limits_{j:\phi_j<0} \phi_j) \geq -\alpha$.

Кроме того, $\alpha \sum_{i=1}^{n} |\phi_i| = \alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \alpha(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \le \alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \le \alpha$. Из этого следует, что $\sum_{i=1}^{n} |\phi_i| \le 1$.

Тогда мы получаем, что $\phi(v) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i v_i = \sum_{i:\phi_i>0} v_i\phi_i + \sum_{j:\phi_j<0} v_j\phi_j \le \beta(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \sum_{j:\phi_j<0} v_j\phi_j \le \beta(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \alpha(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j) \le \beta(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \beta(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j) = \beta \sum_{i=1}^{n} |\phi_i| \le \beta$.

В итоге, $\phi(v) \in [-\alpha, \beta]$ и ϕ сохраняет отрезок $[\alpha, \beta]$. □

Следствие 4.95. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — такие числа, что $\beta \ge \alpha > 0$. Если линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[-\alpha, \beta]$, то $\sum_{i=1}^{n} |\phi_i| \le 1$.*

Следствие 4.96. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — такие числа, что $\beta \ge \alpha > 0$. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет отрезок $[-\alpha, \beta]$, если $\phi_i \ge 0$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \le 1$.*

Доказательство. Прямое следствие леммы 4.94. □

Следствие 4.97. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $[-\alpha, \alpha]$, если и только если $\sum_{i=1}^{n} |\phi_i| \le 1$.*

Доказательство. I. Если ϕ сохраняет отрезок $[-\alpha, \alpha]$, то $\sum_{i=1}^{n} |\phi_i| \le 1$ по следствию 4.95.

II. Если $\sum_{i=1}^{n} |\phi_i| \le 1$, то $\alpha(\sum_{i:\phi_i>0} \phi_i) + \alpha(\sum_{j:\phi_j<0} -\phi_j) = \alpha \sum_{i=1}^{n} |\phi_i| \le \alpha$. Таким образом, ϕ сохраняет отрезок $[-\alpha, \alpha]$ по лемме 4.94. □

4.7.4 Неограниченные интервалы

Лемма 4.98. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет интервал $[\alpha, +\infty)$, если и только если $\phi_j \ge 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \ge 1$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет интервал $[\alpha, +\infty)$. Имеем $\alpha e \in [\alpha, +\infty)^n$. Из этого следует, что $\phi(\alpha e) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \phi_i \ge \alpha$, т. е. $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \ge 1$.

Предположим, что $\phi_k < 0$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим $\Sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geq 1$. Пусть $v = \alpha e - \frac{\alpha\Sigma}{\phi_k} e_k \in [\alpha, +\infty)^n$. Тогда $\phi(v) = \phi(\alpha e) - \phi(\frac{\alpha\Sigma}{\phi_k} e_k) = \alpha\Sigma - \frac{\alpha\Sigma}{\phi_k}\phi_k = 0 < \alpha$, противоречие. Таким образом, $\phi_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geq 1$.

II. Предположим, что $\phi_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geq 1$. Пусть $v \in [\alpha, +\infty)^n$ — произвольный вектор. Тогда $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \phi_i \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha\phi_i = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geq \alpha$. Таким образом, ϕ сохраняет интервал $[\alpha, +\infty)$. $\square$

Лемма 4.99. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет интервал $[-\alpha, +\infty)$, если и только если $\phi_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq 1$.*

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет интервал $[-\alpha, +\infty)$. Имеем $-\alpha e \in [-\alpha, +\infty)^n$. Из этого следует, что $\phi(-\alpha e) = -\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geq -\alpha$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq 1$.

Предположим, что $\phi_k < 0$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $v = -\frac{\alpha+1}{\phi_k} e_k$. Тогда $v \in [-\alpha, +\infty)^n$, поскольку $-\frac{\alpha+1}{\phi_k} > 0$. Из этого следует, что $\phi(v) = -\frac{\alpha+1}{\phi_k}\phi_k = -\alpha - 1 < -\alpha$, противоречие. Таким образом, $\phi_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq 1$.

II. Предположим, что $\phi_j \geq 0$ для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \leq 1$. Пусть $v \in [-\alpha, +\infty)^n$ — произвольный вектор. Тогда $\phi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \phi_i \geq \sum\limits_{i=1}^{n} (-\alpha)\phi_i = -\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \geq -\alpha$. Таким образом, ϕ сохраняет интервал $[-\alpha, +\infty)$.

$\square$

Следствие 4.100. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ и пусть $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейный функционал. Тогда ϕ сохраняет $[0, \alpha]$, если и только если ϕ сохраняет $[-\beta, +\infty)$.*

Доказательство. Это прямое следствие лемм 4.92 и 4.99. $\square$

Лемма 4.101. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — такие числа, что $\beta \geq \alpha > 0$. Пусть $\mathcal{M} = (-\infty, -\alpha] \cup [\beta, +\infty)$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множе-*

ство $\mathcal{M}$, если и только если $\phi^t \in \{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ для некоторого $\lambda \in (-\infty, -\frac{\beta}{\alpha}] \cup [1, +\infty)$.

Доказательство. I. Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$.

Допустим, как минимум две координаты ϕ не равны нулю. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ — такой индекс, что ϕ_k имеет минимальное по модулю значение среди ненулевых ϕ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим $\sigma = \frac{\sum\limits_{i \neq k} |\phi_i|}{|\phi_k|}$. Тогда $\sigma \geq 1$. Определим вектор $v \in \mathbb{R}^n$ таким образом: $v_i = \begin{cases} -\sigma\beta(\operatorname{sign}(\phi_k)), & \text{для } i = k \\ \operatorname{sign}(\phi_i)\beta, & \text{для } i \neq k \end{cases}$. Тогда $\phi(v) = -\sigma\beta|\phi_k| + \sum\limits_{i \neq k} \beta|\phi_i| = 0 \notin \mathcal{M}$. Но $v \in \mathcal{M}^n$, противоречие.

Также $\phi^t \neq 0$. Таким образом, $\phi^t \in \{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Имеем $-\alpha e \in \mathcal{M}^n$. Из этого следует, что $\phi(-\alpha e) = -\alpha\lambda \in \mathcal{M}$.

Если $\lambda > 0$, то $-\alpha\lambda < 0$ и, как следствие, $-\alpha\lambda \leq -\alpha$. Из этого следует, что $\lambda \geq 1$.

Если $\lambda < 0$, то $-\alpha\lambda > 0$ и, как следствие, $-\alpha\lambda \geq \beta$. Из этого следует, что $\lambda \leq -\frac{\beta}{\alpha}$.

В итоге, $\phi^t \in \{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ для некоторого $\lambda \in (-\infty, -\frac{\beta}{\alpha}] \cup [1, +\infty)$.

II. Предположим, что $\phi^t \in \{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ для некоторого $\lambda \in (-\infty, -\frac{\beta}{\alpha}] \cup [1, +\infty)$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ — произвольный вектор. Тогда $\phi(v) = \lambda v_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Остается рассмотреть следующие 4 случая:

1. Если $v_i \geq \beta$ и $\lambda \geq 1$, то $\lambda v_i \geq \beta$.
2. Если $v_i \geq \beta$ и $\lambda \leq -\frac{\beta}{\alpha}$, то $\lambda v_i \leq -\frac{\beta}{\alpha}\beta \leq -\beta \leq -\alpha$.
3. Если $v_i \leq -\alpha$ и $\lambda \geq 1$, то $\lambda v_i \leq -\alpha$.
4. Если $v_i \leq -\alpha$ и $\lambda \leq -\frac{\beta}{\alpha}$, то $\lambda v_i \geq \frac{\beta}{\alpha}\alpha = \beta$.

В итоге, ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. $\square$

4.7.5 Конечные множества

В этой секции мы даем полную характеризацию линейных функционалов $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сохраняющих конечные множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$. Для начала разберем случай $|\mathcal{M}| = 1$.

Замечание 4.102. Любой линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\{0\}$.

Лемма 4.103. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. Тогда линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет множество $\{\alpha\}$, если и только если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$.*

Доказательство. Имеем $\{\alpha\}^n = \{\alpha e\}$.

I. Предположим, что ϕ сохраняет множество $\{\alpha\}$. Тогда $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = \alpha$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$.

II. Предположим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$. Тогда $\phi(\alpha e) = \alpha$ и ϕ сохраняет $\{\alpha\}$. $\square$

Далее мы можем предполагать, что $|\mathcal{M}| \geq 2$.

Лемма 4.104. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — такое множество, что $2 \leq |\mathcal{M}| < \infty$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \{0, \pm 1\}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{M}$, $\alpha \neq 0$. Тогда $\alpha e \in \mathcal{M}^n$ и, следовательно, $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \mathcal{M}$. Тогда $(\alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i) e \in \mathcal{M}^n$ и, следовательно, $\alpha (\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i)^2 \in \mathcal{M}$. Таким образом, мы получаем, что $\alpha(\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i), \alpha(\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i)^2, \alpha(\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i)^3, \ldots \in \mathcal{M}$.

Имеем $\alpha \neq 0$. Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \notin \{0, \pm 1\}$, то числа $\alpha(\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i), \alpha(\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i)^2, \alpha(\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i)^3, \ldots$ различны. Получается, что $|\mathcal{M}| = \infty$, противоречие.

$\square$

Лемма 4.105. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — такое множество, что $|\mathcal{M}| < \infty$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = -1$. Тогда $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{M}$ — произвольное число. Тогда $\alpha e \in \mathcal{M}^n$. Из этого следует, что $\phi(\alpha e) = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = -\alpha \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$. $\square$

Лемма 4.106. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — такое множество, что $|\mathcal{M}| < \infty$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 0$. Тогда $0 \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{M}$ — произвольное число. Тогда $\alpha e \in \mathcal{M}^n$. Из этого следует, что $\phi(\alpha e) = 0 \in \mathcal{M}$. $\square$

Лемма 4.107. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — такое множество, что $2 \leq |\mathcal{M}| < \infty$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$ и $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = 1$. Тогда $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.*

Доказательство. Пусть $\beta = \max(\mathcal{M})$ и $\alpha = \max(\mathcal{M} \setminus \{\beta\})$. В частности, $\alpha < \beta$ и, если $\alpha < x < \beta$, то $x \notin \mathcal{M}$. Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$ — произвольный индекс. Рассмотрим вектор $v = \beta e + (\alpha - \beta)e_j \in \mathcal{M}^n$.

Тогда $\phi(v) = \beta \sum_{i=1}^{n} \phi_i + (\alpha - \beta)\phi_j = \beta + (\alpha - \beta)\phi_j \in \mathcal{M}$. Из этого следует, что $(\alpha - \beta)\phi_j \leq 0$, поскольку $\beta = \max(\mathcal{M})$. В частности, $\phi_j \geq 0$.

Предположим, что $0 < \phi_j < 1$. Тогда $\alpha < \beta + (\alpha - \beta)\phi_j < \beta$. Таким образом, $\phi(v) \notin \mathcal{M}$, противоречие. В итоге, $\phi_j \in \{0, 1\}$. Из этого следует, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. $\square$

Лемма 4.108. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — такое множество, что $2 \leq |\mathcal{M}| < \infty$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$ и $\sum_{i=1}^{n} \phi_i = -1$. Тогда $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{-e_1, -e_2, \ldots, -e_n\}$.*

Доказательство. По лемме 4.105 имеем $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.

Пусть $\beta = \max(\mathcal{M})$ и $\alpha = \max(\mathcal{M} \setminus \{\beta\})$. В частности, $\alpha < \beta$ и, если $\alpha < x < \beta$, то $x \notin \mathcal{M}$. Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$ — произвольный индекс. Рассмотрим вектор $v = -\beta e + (\beta - \alpha)e_j \in \mathcal{M}^n$.

Тогда $\phi(v) = -\beta \sum_{i=1}^{n} \phi_i + (\beta - \alpha)\phi_j = \beta + (\beta - \alpha)\phi_j \in \mathcal{M}$. Из этого следует, что $(\beta - \alpha)\phi_j \leq 0$, поскольку $\beta = \max(\mathcal{M})$. В частности, $\phi_j \leq 0$.

Предположим, что $-1 < \phi_j < 0$. Тогда $\alpha < \beta + (\beta - \alpha)\phi_j < \beta$. Таким образом, $\phi(v) \notin \mathcal{M}$, противоречие. В итоге, $\phi_j \in \{0, -1\}$. Из этого следует, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{-e_1, -e_2, \ldots, -e_n\}$. $\square$

Лемма 4.109. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — такое множество, что $2 \leq |\mathcal{M}| < \infty$ и $0 \in \mathcal{M}$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$. Тогда $\phi_i \in \{0, \pm 1\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$ — произвольный индекс и пусть $\alpha \in \mathcal{M}$, $\alpha \neq 0$. Тогда $\alpha e_i \in \mathcal{M}^n$ и, следовательно, $\phi(\alpha e_i) = \alpha \phi_i \in \mathcal{M}$. Тогда $\alpha \phi_i e_i \in \mathcal{M}^n$ и, как следствие, $\alpha(\phi_i)^2 \in \mathcal{M}$.

Таким образом, мы получаем, что $\alpha(\phi_i), \alpha(\phi_i)^2, \alpha(\phi_i)^3, \ldots \in \mathcal{M}$.

Имеем $\alpha \neq 0$. Если $\phi_i \notin \{0, \pm 1\}$, то числа $\alpha(\phi_i), \alpha(\phi_i)^2, \alpha(\phi_i)^3, \ldots$ различны. В итоге, $|\mathcal{M}| = \infty$, противоречие. $\square$

Лемма 4.110. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — такое множество, что $2 \leq |\mathcal{M}| < \infty$ и $0 \in \mathcal{M}$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$ и $\phi_j = -1$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathcal{M}$ — произвольное число. Тогда $\alpha e_j \in \mathcal{M}^n$. Из этого следует, что $\phi(\alpha e_j) = -\alpha \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$. $\square$

Лемма 4.111. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — такое множество, что $2 \leq |\mathcal{M}| < \infty$. Предположим, что линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\mathcal{M}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 0$. Тогда $\phi = 0$.*

Доказательство. По лемме 4.106 имеем $0 \in \mathcal{M}$. По лемме 4.109 имеем $\phi_i \in \{0, \pm 1\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Предположим, что $\phi \neq 0$. Из этого следует, что $\phi_j = 1$ и $\phi_k = -1$ для некоторых $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$ по лемме 4.110.

Пусть $\beta = \max(\mathcal{M})$. В частности, $\beta > 0$ и $-\beta \in \mathcal{M}$. Рассмотрим вектор $v = \beta e_j - \beta e_k \in \mathcal{M}^n$. Тогда $\phi(v) = 2\beta \in \mathcal{M}$, противоречие. Из этого следует, что $\phi = 0$. $\square$

Вместе с замечанием 4.102 и леммой 4.103 следующая теорема дает полную характеризацию линейных функционалов $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сохраняющих конечные подмножества $\mathbb{R}$.

Теорема 4.112. *Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ — такое множество, что $2 \leq |\mathcal{M}| < \infty$. Пусть $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейный функционал.*

1. *Если $0 \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$, то ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$, если и только если $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{0, \pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$.*

2. *Если $0 \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$, то ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$, если и только если $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.*

3. Если $0 \notin \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$, то ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$, если и только если $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$.

4. Если $0 \notin \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$, то ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$, если и только если $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Доказательство. Если ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \{0, \pm 1\}$ по лемме 4.104.

1. $0 \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.

   Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \in \{0, \pm 1\}$.

   Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ по лемме 4.107.

   Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = -1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{-e_1, -e_2, \ldots, -e_n\}$ по лемме 4.108.

   Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 0$, то $\phi = 0$ по лемме 4.111.

   Предположим, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{0, \pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ — произвольный вектор. Тогда $\phi(v) \in \{0, \pm v_1, \ldots, \pm v_n\} \subseteq \mathcal{M}$. Таким образом, ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$.

2. $0 \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$.

   Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \neq -1$ по лемме 4.105.

   Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ по лемме 4.107.

   Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 0$, то $\phi = 0$ по лемме 4.111.

   Предположим, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ — произвольный вектор. Тогда $\phi(v) \in \{0, v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{M}$. Таким образом, ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$.

3. $0 \notin \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} = -\mathcal{M}$.

Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \neq 0$ по лемме 4.106.

Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ по лемме 4.107.

Если $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = -1$, то $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{-e_1, -e_2, \ldots, -e_n\}$ по лемме 4.108.

Предположим, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ — произвольный вектор. Тогда $\phi(v) \in \{\pm v_1, \ldots, \pm v_n\} \subseteq \mathcal{M}$. Таким образом, ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$.

4. $0 \notin \mathcal{M}$ и $\mathcal{M} \neq -\mathcal{M}$.

   Предположим, что ϕ сохраняет множество $\mathcal{M}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \neq -1$ по лемме 4.105 и $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i \neq 0$ по лемме 4.106.

   Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = 1$ и $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ по лемме 4.107.

   Предположим, что $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Пусть $v \in \mathcal{M}^n$ — произвольный вектор. Тогда $\phi(v) \in \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{M}$. Таким образом, ϕ сохраняет $\mathcal{M}$.

□

4.7.6 Векторы и матрицы

Продемонстрируем на примере нескольких комбинаторных матричных классов сведение задачи характеризации линейных операторов, сохраняющих эти классы, к линейным функционалам.

Следствие 4.113. *Линейный функционал $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сохраняет $\{\pm 1, 0\}$, если и только если $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^t \in \{0, \pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$.*

Доказательство. Следует из теоремы 4.112. □

Следствие 4.114. *Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ сохраняет $\{\pm 1, 0\}^n$.*

2. *Существуют такие отображения $f : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$, $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{\pm 1\}$, что для любого $v \in \mathbb{R}^n$ и для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $\Phi(v)_i = \sigma(i) v_{f(i)}$, где $v_0 \coloneqq 0$.*

Доказательство. I. Если выполнено условие 2, то для любых $v \in \mathbb{R}^n$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $\Phi(v)_i \in \{0, \pm v_1, \ldots, \pm v_n\} \subseteq \{\pm 1, 0\}$.

II. Предположим, что выполнено условие 1.

По лемме 4.85 Φ сохраняет $\{\pm 1, 0\}^n$, если и только если каждый линейный функционал Φ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, сохраняет $\{\pm 1, 0\}$.

По следствию 4.113 Φ_i сохраняет $\{\pm 1, 0\}$, если и только если $((\Phi_i)_1, \ldots, (\Phi_i)_n)^t \in \{0, \pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$.

Если $\Phi_i = 0^t$, то пусть $f(i) = 0$. Тогда $\Phi(v)_i = 0 = \sigma(i) v_{f(i)}$ для любого $v \in \mathbb{R}^n$.

Если $\Phi_i = e_j^t$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$, то пусть $f(i) = j, \sigma(i) = 1$. Тогда $\Phi(v)_i = v_j = \sigma(i) v_{f(i)}$ для любого $v \in \mathbb{R}^n$.

Если $\Phi_i = -e_j^t$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\}$, то пусть $f(i) = j, \sigma(i) = -1$. Тогда $\Phi(v)_i = -v_j = \sigma(i) v_{f(i)}$ для любого $v \in \mathbb{R}^n$. □

Линейный оператор на множестве действительных $n \times m$ матриц можно рассматривать как линейный оператор на пространстве $\mathbb{R}^{nm}$. Тогда получаем:

Следствие 4.115. *Пусть $\Phi : M_{n,m} \to M_{n,m}$ — линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ сохраняет $(\pm 1, 0)$-матрицы.*

2. *Существуют такие отображения $f : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \cup \{(0, 0)\}$, $\sigma : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \to \{\pm 1\}$, что для любой $X \in M_{n,m}$ и для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ выполнено $\Phi(X)_{i,j} = \sigma(i, j) X_{f(i,j)}$, где $X_{0,0} \coloneqq 0$.*

Аналогично, получаем:

Следствие 4.116. *Пусть $\Phi : M_{n,m} \to M_{n,m}$ — линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Φ сохраняет (± 1)-матрицы.*

2. *Существуют такие отображения* $f : \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}$, $\sigma : \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\} \to \{\pm 1\}$, *что для любой* $X \in M_{n,m}$ *и для любых* $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$ *выполнено* $\Phi(X)_{i,j} = \sigma(i,j)X_{f(i,j)}$.

Следствие 4.117. *Пусть* $\Phi : M_{n,m} \to M_{n,m}$ *— линейный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. Φ *сохраняет* $(0,1)$*-матрицы.*

2. *Существует такое отображение* $f : \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}\cup\{(0,0)\}$, *что для любой* $X \in M_{n,m}$ *и для любых* $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$ *выполнено* $\Phi(X)_{i,j} = X_{f(i,j)}$, *где* $X_{0,0} \coloneqq 0$.

Результаты, приведенные в разделе 4.7, были опубликованы в [47].

Заключение

В данной работе исследовались различные аспекты теории мажоризаций матриц и теории линейных операторов, сохраняющих инварианты. В частности, исследовалось новое понятие мажоризации классов матриц, обобщающее матричные мажоризации. Мотивацией для такого исследования служат вопросы математической статистики. Другим объектом исследования были мажоризации $(0,1)$-матриц. В работе даны комбинаторные критерии различных типов мажоризаций таких матриц.

Исследованы многие вопросы теории линейных операторов, сохраняющих мажоризации матриц и их обобщения. В частности, усилены классические результаты Андо, Ли и Пуна о линейных операторах, сохраняющих векторные и матричные мажоризации, соответственно.

Получены следующие результаты:

- Решена задача нахождения минимального покрывающего класса для слабой мажоризации. Решение в значительной степени опирается на геометрические методы. Была доказана теорема, утверждающая, что матрицы с одинаковыми столбцовыми суммами, которые слабо мажорируются некоторой матрицей B, мажорируются по направлению некоторой матрицей C. Кроме того, доказательство теоремы позволяет непосредственно найти такие матрицы B, C. Таким образом, решена задача нахождения минимального покрывающего класса для мажоризации по направлению.

- Были получены легко проверяемые критерии слабой мажоризации, мажоризации по направлению и сильной мажоризации. В частности, было показано, что сильная мажоризация и мажоризация по направлению на множестве $(0,1)$-матриц являются отношениями эквивалентности. Была подробно исследована строчная мажоризация $(0,1)$-матриц. Установлена связь таких мажоризаций с теорией графов и получены различные комбинаторные критерии мажоризации. Если $A, B \in M_{n,m}(0,1)$, то
  - $A \preceq^w B \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$.
  - $A \preceq^s B \Leftrightarrow A \preceq^d B \Leftrightarrow A = PB$ для некоторой $P \in P(n)$.
  - $A \preceq^r B \Leftrightarrow \sum\limits_{i,j\ :\ a_{ij}=1} y_{ij} \leq \sum\limits_j \max\limits_k (\sum\limits_{i\ :\ b_{ij}=1} y_{ik})$ для любых $Y \in M_{n,m}$.

- Получена полная характеризация всех линейных конвертеров между сильной, по направлению и слабой мажоризациями. В частности, доказано, что все линейные конвертеры из векторной мажоризации в слабую мажоризацию векторов сохраняют векторную мажоризацию, что существенно усиливает теорему Андо 1.15. Кроме того, было доказано, что то же самое верно и для конвертеров из сильной мажоризации матриц в слабую, что усиливает теорему Ли, Пуна 1.16.

- Были получены характеризации линейных операторов на пространстве кортежей матриц, сохраняющих многомерные аналоги слабой, по направлению и сильной мажоризаций. Была даны характеризации линейных операторов, сохраняющих матрицы с коэффициентами из заданного подмножества $\mathbb{R}$. Было доказано, что характеризация линейных операторов, сохраняющих конечное подмножество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$, зависит только от того, есть ли в $\mathcal{M}$ нулевой элемент и симметрично ли множество $\mathcal{M}$ относительно нуля. В частности, получены характеризации линейных операторов, сохраняющих $(0,1)$-матрицы, (± 1)-матрицы и $(0,\pm 1)$-матрицы.

Список литературы

[1] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **118**, 163—248 (1989).

[2] B. C. Arnold, *Majorization and the Lorenz order: a brief introduction*, Springer, Berlin (1987).

[3] A. B. Atkinson, On the measurement of inequality, *J Econ Theory* **2**, 244—-263 (1970).

[4] A. B. Atkinson, F. Bourguignon, The comparison of multidimensioned distributions of economic status, *Rev Econ Stud* **49**, 183–201 (1982).

[5] L.B. Beasley and S.-G. Lee, Linear operators preserving multivariate majorization, *Linear Algebra Appl.*, **304(1)**, 141–159 (2000).

[6] L. B. Beasley, S.-G. Lee, and Y.-H. Lee, A characterization of strong preservers of matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **367**, 341–346 (2003).

[7] S. K. Bhandari, Multivariate majorization and directional majorization; positive results, *Sankhya A*, **50**, 199–204 (1988).

[8] D. Blackwell, Equivalent comparisons of experiments, *Ann. Math. Statistics* **24**, 265–272 (1953).

[9] R. A. Brualdi, *Combinatorial Matrix Classes*, Encyclopedia of Mathematics, Cambridge University Press (2006).

[10] M. V. Budrevich, M. A. Duffner, A. E. Guterman, Absence of linear permanent-determinant converters on skew-symmetric matrices, *Sarajevo Journal of Mathematics* **14(2)**, 143–155 (2018).

[11] L. LeCam, Sufficiency and approximate sufficiency, *Ann. Math. Statistics*, **35(4)**, 1419–1455 (1964).

[12] G. Dahl, Pseudo-experiments and majorization, *Research report*, **11**, Department of Mathematics, University of Oslo (1984).

[13] G. Dahl, Matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **288(1)**, 53–73 (1999).

[14] G. Dahl, Majorization polytopes, *Linear Algebra Appl.*, **297(1)**, 157–175 (1999).

[15] H. Dalton, The measurement of the inequality of incomes, *Econ. J.*, **30**, 348—361 (1920).

[16] J. Dieudonné, Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables, *Arch. Math.*, **1**, 282–287 (1949).

[17] G. Frobenius, Uber die darstellung der endlichen gruppen durch linear substitutionen, *Sitzungsber Deutsch. Akad. Wiss. Berlin*, 994–1015 (1897).

[18] P. R. Halmos, L. J. Savage, Application of the Radon–Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, *Ann. Math. Statistics*, **20**, 225–241 (1949).

[19] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press (1934, 1952, 1978).

[20] A. M. Hasani, M. Radjabalipour, Linear preserver of matrix majorization, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **32(4)**, 475–482 (2006).

[21] A. M. Hasani and M. Radjabalipour, On linear preservers of (right) matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **423**, 255–261 (2007).

[22] S.-G. Hwang, S.-S. Pyo, Matrix majorization via vector majorization, *Linear Algebra Appl.*, **332**, 15–21 (2001).

[23] S. C. Kolm, The optimal production of social justice, *Marjolis J*, Gutton H (eds), Public Economics, MacMillan, New York, 145–200 (1969).

[24] S. C. Kolm, Multidimensional egalitarianisms, *Q J Econ*, **91**, 1–13 (1977).

[25] G. Kosheboy, The Lorenz zonotope and multivariate majorizations, *Soc. Choice Welfare*, **15**, 1–14 (1998).

[26] G. Koshevoy, K. Mosler, Lift zonoids, random convex hulls and the variability of random vectors, *Bernoulli*, **4(3)**, 377–399 (1998).

[27] C.-K. Li, E. Poon, Linear operators preserving directional majorization, *Linear Algebra Appl.*, **325**, 141–146 (2001).

[28] M.O. Lorenz, Methods of measuring concentration of wealth, *J. Amer. Statist. Assoc.* **9**, 209-–219 (1905).

[29] E. Maasoumi, The measurement and decomposition of multidimensional inequality, *Econometrica*, **54**, 991–997 (1986).

[30] A. W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Second Edition, Springer, New York (2011).

[31] K. Mosler, Majorization in economic disparity measures, *Linear Algebra Appl.,* **199**, 91–114 (1994).

[32] F. D. Martínez Pería, P. G. Massey, L. E. Silvestre, Weak matrix majorization, *Linear Algebra Appl.,* **403**, 343–368 (2005).

[33] R. F. Muirhead, Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **21**, 144—157 (1903).

[34] A.C. Pigou, *Wealth and Welfare*, Macmillan, New York (1912).

[35] G. Pólya, Aufgabe 424, *Arch. Math. Phys.*, **20(3)**, 271 (1913).

[36] M. Radjabalipour and P. Torabian, On nonlinear preservers of weak matrix majorization, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **32(2)**, 21–30 (2011).

[37] P. Rietveld, Mutlidimensional inequality comparisons, *Econ Lett*, **32**, 187–192 (1990).

[38] S. Sherman, On a conjecture concerning doubly stochastic matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3**, 511–513 (1952).

[39] I. Schur, Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie, Akad. Wiss., Berlin, 454–463 (1925).

[40] E. Torgersen, *Stochastic Orders and Comparison of Experiments*, Stochastic Orders and Decision under Risk, IMS Lecture Notes – Monograph Series (1991).

[41] E. Torgersen, *Comparison of Statistical Experiments*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Volume 36, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[42] G. Dahl, A. Guterman, and P. Shteyner, Majorization for matrix classes, *Linear Algebra Appl.*, **555**, 201–221 (2018). П.М. Штейнером доказаны теоремы 3.17, 4.15 и лемма 4.9.

DOI: 10.1016/j.laa.2018.06.003 Журнал индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**. IF: WoS 1.401, SJR 0.951.

[43] G. Dahl, A. Guterman, and P. Shteyner, Majorization for (0,1)-matrices, *Linear Algebra Appl.*, **585**, 147–163 (2020). П.М. Штейнером доказаны теорема 3.5, лемма 4.10 и следствия 3.6, 4.20 и 4.23.

DOI: 10.1016/j.laa.2019.09.038 Журнал индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**. IF: WoS 1.401, SJR 0.951.

[44] A. Guterman and P. Shteyner, Linear operators preserving majorization of matrix tuples, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, **53(2)**, 136–144 (2020). П. М. Штейнером доказаны теоремы 14 и 17.

DOI: 10.1134/S1063454120020077 Журнал индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.236.

[45] A. Guterman, and P. Shteyner, Linear converters of weak, directional and strong majorizations, *Linear Algebra Appl.*, **613**, 320–346 (2021). П. М. Штейнером доказаны теоремы 4.5, 5.4, 6.14 и 6.20.

DOI: 10.1016/j.laa.2020.11.012 Журнал индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**. IF: WoS 1.401, SJR 0.951.

[46] П. М. Штейнер, Конвертация столбцовой мажоризации, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **496**, 195–215 (2020);
English transl. *J. Math. Sci.*, **255**, 340–352 (2021).

DOI: 10.1007/s10958-021-05377-4 Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.330.

[47] П. Штейнер, Линейные отображения, сохраняющие некоторые комбинаторные матричные множества, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **504**, 181–199 (2021);
English transl. *J. Math. Sci.*, в печати.

pdmi.ras.ru/znsl/2021/v504.html Журнал индексируется в **RSCI**.

Другие публикации автора

[48] А. Э. Гутерман, К. Мари, П. М. Штейнер, Частичные порядки, порожденные обратными по направлению, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **463**, 58–80 (2017);
English transl. *J. Math. Sci.*, **232(6)**, 783–796 (2018).

DOI: 10.1007/s10958-018-3908-8 Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.330.

[49] A. Guterman, X. Mary, P. Shteyner, On Hartwig–Nambooripad orders, *Semigroup Forum*, **98(1)**, 64–74 (2017).

DOI: 10.1007/s00233-018-9940-7 Журнал индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**. IF: WoS 0.768, SJR 0.52.

[50] A. Guterman, P. Shteyner, Constructing order relations on semigroups, *RIMS Kokyuroku*, **2125**, 86–110 (2019).

repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/252222

[51] A. Guterman, L. Márki, P. Shteyner, Ordering orders and quotient rings, *Semigroups, Categories, and Partial Algebras, Springer*, **345**, 1–17 (2021).

DOI: 10.1007/978-981-33-4842-4_1 Индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**.