

Отзыв научного руководителя на диссертационную работу  
Штейнера Павла Михайловича  
"Мажоризации матриц и их эндоморфизмы",  
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-  
математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра,  
теория чисел и дискретная математика (01.01.06 – математическая логика,  
алгебра и теория чисел)

Штейнер Павел Михайлович поступил в очную аспирантуру, окончив механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова в 2019г. Перед диссертантом был поставлен ряд открытых проблем о мажоризациях на множестве матриц, их свойствах и линейных отображениях, их сохраняющих.

Различные вопросы, связанные с мажоризацией матриц и векторов являются важнейшим и динамично развивающимся направлением линейной алгебры, имеющим как самостоятельный математический интерес ввиду наличия целого ряда глубоких и интересных открытых проблем, так и широкий спектр приложений в экономике, оптимизации и математической статистике. Это активно развивающееся направление исследований и у нас в стране, и за рубежом, по которому ежегодно публикуются сотни работ. Несмотря на имеющийся прогресс, теория мажоризаций содержит массу актуальных открытых задач и вопросов.

Перед диссертантом были поставлены задачи исследования мажоризаций для наборов и множеств матриц, для специальных матриц, в частности,  $(0,1)$ -матриц, а также вопросы характеристики линейных отображений, меняющих тип мажоризации или сохраняющих мажоризации наборов матриц.

Рассматриваемый диссертантом класс задач и методов необычайно широк. Следует заметить, что, несмотря на кажущуюся простоту постановки вопросов, для решения зачастую приходится привлекать глубокие методы линейной алгебры, комбинаторики и оптимизации. П.М. Штейнер качественно и всесторонне исследовал поставленные перед ним проблемы. Ему удалось не только успешно решить все поставленные задачи, но также и разработать новые общие методы, в частности метод редукции линейных отображений, сохраняющих мажоризации на наборах матриц к линейным отображениям, сохраняющим мажоризации на матрицах, и метод редукции линейных отображений, меняющих тип мажоризации, к линейным отображениям, сохраняющим мажоризации, что существенно отличает рассматриваемый класс задач от проводившихся ранее исследований.

Диссертация П.М. Штейнера состоит из введения и четырех глав. Глава 1 является вводной и содержит основные определения, обозначения и вспомогательные результаты, которые используются в дальнейшем.

В главе 2 диссертации определяется новое понятие мажоризации множеств матриц, включающее различные типы мажоризаций на матрицах.

Решена задача нахождения минимального, по числу элементов, покрывающего множества для слабой мажоризации и мажоризации по направлению. Также разработаны алгоритмы, конструктивно решающие данную задачу.

Глава 3 посвящена изучению мажоризаций  $(0,1)$ -матриц. Получены характеристики слабой мажоризации, сильной мажоризации и мажоризации по направлению на рассматриваемом классе матриц. В частности, доказано, что на множестве  $(0,1)$ -матриц сильная мажоризация и мажоризация по направлению совпадают и являются отношениями эквивалентности. Изучена строчная мажоризация и найдены ее геометрические представления.

В главе 4 автор рассматривает различные аспекты теории линейных отображений, сохраняющих мажоризации матриц. Охарактеризованы линейные операторы, конвертирующие мажоризацию по направлению в сильную мажоризацию, или слабую мажоризацию в сильную мажоризацию, или слабую мажоризацию в мажоризацию по направлению. Также исследована возможность конвертации различных мажоризаций в столбцовую мажоризацию и из столбцовой мажоризации. Параллельно автором всесторонне изучена задача характеристики линейных отображений, сохраняющих мажоризации на наборах матриц. Отдельное внимание уделено характеристике линейных отображений, сохраняющих те или иные свойства элементов матрицы, например, быть четными, или принадлежать фиксированному множеству.

В диссертации получены сильные и интересные результаты, находящиеся в русле самых передовых исследований в рассматриваемой области алгебры. Считаю, что П.М. Штейнером проделана большая, очень важная и актуальная работа. Полученные результаты хорошо оформлены, изложение сопровождается большим числом примеров, иллюстрирующих доказываемые свойства и их приложения. Диссертация демонстрирует высокий уровень научных способностей и огромные творческие возможности диссертанта.

П.М. Штейнер провел полное и всеобъемлющее исследование поставленной задачи. В целом, работа П.М. Штейнера имеет большое значение, как теоретическое, так и практическое, и является серьезным вкладом в современную алгебру. Рассматриваемая диссертация представляет собой законченное научное исследование. Ее результаты получены лично автором и прошли всестороннюю квалифицированную апробацию, опубликованы в ведущих научных журналах.

Основные результаты диссертации П.М. Штейнера изложены в шести статьях в рецензируемых научных изданиях, определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, представленные публикации полно и правильно отражают о результаты выполненных исследований. На протяжении обучения в аспирантуре П.М. Штейнер неоднократно принимал участие в международных математических конференциях и выступал на научных семинарах с высокопрофессиональными докладами об основных результатах диссертации.

Считаю, что диссертация Штейнера Павла Михайловича полностью соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел) (физико-математические науки).

Научный руководитель:  
Доктор физико-математических наук  
Профессор

А.Э. Гутерман

11 марта 2022г.