

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Максаева Артема Максимовича
«Характеризации гомоморфизмов графов матричных
отношений», представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5
— «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика» (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и
теория чисел»)

Содержание диссертации. В диссертации А. М. Максаева исследуются отображения, сохраняющие некоторые важные отношения, определенные на множестве всех $n \times n$ -матриц над полем или антинегативным коммутативным полукольцом с 1 и без делителей нуля. Среди изучаемых отношений — отношения, определяемые значениями скрамблинг-индекса, классические отношения Грина, отношение вырожденности суммы матриц. Этим темам посвящены главы 2–4 диссертации. В главе 5 рассматриваются некоторые свойства тотального и регулярного графа произвольного многочлена. Кроме того, диссертация включает введение, главу 1, в которой собраны необходимые определения и предварительные сведения, а также ряд фактов, связанных со скрамблинг-индексом и его обобщениями, список из восьми основных и двух дополнительных публикаций автора по теме диссертации, и список используемой литературы из 61 наименования.

Оценка проблематики и полученных результатов. Вопросы, рассматриваемые в главах 2–4 диссертации, находятся в русле классической проблематики теории матриц. Слово «классическая» здесь не следует понимать как эвфемизм для слова «старомодная» — теория матриц постоянно продолжает обнаруживать все новые связи и приложения, благодаря чему она способна обеспечить интересными и сложными задачами еще не одно поколение исследователей. Таким образом, темы, разрабатываемые в диссертации, представляются весьма актуальными.

Все основные результаты диссертации новы и содержательны. Многие из них являются существенными продвижениями в соответствующих направлениях. Особо я хотел бы выделить результаты об отображениях, сохраняющих отношения Грина в моноиде матриц над полем; эти результаты решают естественную и важную задачу об одном из самых классических объектов алгебры. (Для меня даже несколько удивительно, что эта задача не была исследована ранее.)

Я проверил доказательства и не обнаружил в них каких-либо неточностей или неясных мест. При этом многие доказательства потребовали от автора значительной изобретательности и выдвижения свежих идей.

Оформление работы. Основной текст диссертации оформлен с похвальным тщанием. Изложение очень обстоятельное, аккуратно организованное и основательно продуманное. Язык работы грамотен и разнообразен (упомяну использование таких слов, как «оный», «вкупе» и «отнюдь»), а число опечаток очень мало для текста такого объема.

В отличие от основного текста список использованной литературы оформлен неаккуратно: наблюдается шрифтовой разноречивостью, названия журналов приводятся то полностью, то в сокращенном виде, попадаются опечатки (все они, впрочем, безобидны).

Замечания. Известная максима, которую обычно приписывают Ларашфуко¹, утверждает, что наши недостатки суть продолжения наших достоинств. Выше уже отмечалось, что изложение весьма обстоятельно; обратной стороной медали тут является явная перегруженность диссертации. Ее текст набран 12-м кеглем при узких полях и, несмотря на это, занимает 150 страниц (не считая титульного листа).

Думаю, что безо всякого ущерба можно было бы опустить главу 5, посвященную тотальным и регулярным графам многочленов. Хотя ее результаты и представляют интерес, они имеют довольно опосредованное отношение к матрицам (грубо говоря, связь с матрицами состоит только в том, что определитель матрицы является многочленом от ее элементов). Материал глав 2–4 с лихвой достаточен для полноценной кандидатской диссертации.

В тексте встречаются повторы, которых можно (и нужно) было бы избежать. Например, во введении на с.5–7 подробно обсуждается генезис задачи об автоморфизмах отношения вырожденности суммы матриц. Это обсуждение повторяется (зачастую в точности теми же словами) на с.117–119. Поэлементное произведение матриц вводится на с.14 диссертации, а затем заново определяется на с.59. Но автор не успокаивается на этом и для большей надежности вводит данное понятие еще раз как определение 2.4.2 на с.90. Число примеров подобной избыточности текста можно было бы легко увеличить.

Приведу еще несколько конкретных замечаний.

1. На с.13–14 формулируются основные теоремы из главы 2. При этом диссертант, к сожалению, забывает ввести используемые в формулировках обозначения $\mathbf{B}$ и $\mathcal{P}_n$ и понятие отображения, примитивно сохраняющего скрамблинг-индекс. В результате формулировки остаются непонятными без загля-

¹Имея в виду его фразу «Nos vertus ne sont, le plus souvent, que de vices déguisés», которая вообще-то говорит прямо противоположное.

дывания в главу 2 (впрочем, обозначение **B** читатель там все равно не найдет, так как оно вводится в главе 1).

2. На с.49 диссертант пишет «В 1964 г., отталкиваясь от построенной им серией² автоматов [23], Черни выдвинул следующую гипотезу, не доказанную и по сей день». Ссылка на статью [23] как на источник гипотезы Черни – довольно распространенная в литературе ошибка. Основополагающая статья [23] примечательна во многих отношениях, но гипотеза **не была** сформулирована в ней. Понятно, что на самом деле мало кто читал статью [23] в словацком оригинале, но сейчас опубликован в открытом доступе ее авторизованный английский перевод (J. Černý, A note on homogeneous experiments with finite automata, *Journal of Automata, Languages and Combinatorics* **24** (2019) 2-4, 121–130). О реальном происхождении гипотезы Черни см. предисловие к посвященному ей специальному выпуску *Journal of Automata, Languages and Combinatorics* (**24** (2019) 2-4, 119–121).

3. На с.123, в предпоследней строке доказательства леммы 4.2.2 вместо «их старшие коэффициенты» должно быть «их свободные члены».

4. На с.129 в доказательстве леммы 4.2.9 буква *J* обозначает жорданову форму некоторой матрицы. Однако во введении на с.22 обозначение *J* было «заморожено» в другом смысле (квадратная матрица, состоящая из одних единиц) и далее использовалось именно в этом смысле.

5. При общей высокой грамотности диссертант довольно часто ошибается при использовании наращений и пишет «*i*-ой» вместо «*i*-й», «*j*-ом» вместо «*j*-м», и т.п.

Все высказанные замечания несущественны и не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Заключение. Диссертация А. М. Максаева представляет собой законченную и цельную научно-исследовательскую работу в актуальном направлении современной алгебры. Совокупность доказанных в диссертации результатов можно квалифицировать как решение ряда задач, имеющих важное значение для развития теории матричных отношений. Результаты диссертации прошли солидную апробацию и должным образом опубликованы. Их достоверность не вызывает сомнений. Автореферат верно и полно отражает основные результаты диссертационной работы.

Развитые в диссертации подходы могут быть использованы в дальнейших исследованиях, проводимых в Московском государственном университете, Высшей школе экономики, Санкт-Петербургском государственном университете, Казанском (Приволжском) и Уральском федеральных университетах и других научных центрах, в которых изучаются вопросы, связанные с матричными отношениями.

²Так в тексте; это одна из немногочисленных опечаток.

Считаю, что диссертационная работа А. М. Максаева «Характеризации гомоморфизмов графов матричных отношений» является научно-квалификационной работой, соответствующей критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», и оформленной согласно приложениям №№5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова». По моему мнению, автор диссертации заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика» (01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел»).

15.05.2022

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук (специальность 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»), профессор, главный научный сотрудник лаборатории комбинаторной алгебры, заведующий кафедрой алгебры и фундаментальной информатики ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д. 19
+7 (343) 375-45-07, <http://urfu.ru>, rector@urfu.ru



Волков Михаил Владимирович
m.v.volkov@urfu.ru, +7 (343) 389-94-68

