где $v_1(x, y; x_0, y_0) = R(x, y; x_0, y_0)$, $v_2(x, y; x_0, y_0)$ определяется формулой (5). k_1 определяется из условия: $[v] = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}[v_1(x, x_0-\varepsilon; x_0, y_0) - v_2(x, x_0+\varepsilon; x_0, y_0)]$ — конечен (обозначения см., например, в [3, с. 74]). Вычисления дают $[v] = -\cos(\pi q)(x_0-x)^q(y_0-x_0)^{-q}$, $k_1 = \dfrac{\Gamma(q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(2q)}$.

О. К. Быстрова построила функцию Римана— Адамара задачи Дарбу для уравнения (L)

$$v(x, y; x_0, y_0) = \begin{cases} v_1(x, y; x_0, y_0), & y > x_0, \\ v_3(x, y; x_0, y_0), & y < x_0, \end{cases}$$

где функция $v_3(x, y; x_0, y_0)$ определяется формулой (6). Вычисления дают

$$[v] = \lim_{\varepsilon\to 0}[v_1(x, x_0-\varepsilon; x_0, y_0) - v_3(x, x_0+\varepsilon; x_0, y_0)] =$$

$$= \cos(\pi q)(x_0-x)^q(y_0-x_0)^{-q}, \quad k_2 = \frac{\Gamma(1-q)}{\Gamma(q)\Gamma(2-2q)}.$$

В заключение отметим, что построенные нами функции Римана—Адамара применяются при решении задач Коши—Гурса и Дарбу для уравнения (L).

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1965. Т. 1.
2. Copson E. T. // J. Rat. Mech. and Anal. 1958. Vol. 1. P. 324—348.
3. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М., 1970.

Куйбышевский государственный педагогический институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию 5 декабря 1989 г.

УДК 517.927.25

Л. В. КРИЦКОВ

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

1. Рассмотрим на произвольном конечном интервале $G = (a, b)$ дифференциальное выражение вида

$$lu = -\frac{d^2}{dx^2}u + q(x)u. \tag{1}$$

В случае, когда $q(x)$ — суммируемая на G комплекснозначная функция, хорошо известно (см., например, [1, с. 98]), что оператор, определяемый дифференциальным выражением (1) и распадающимися краевыми условиями, обладает полной и минимальной в $L_2(G)$ системой корневых (т. е. собственных и присоединенных) функций, причем эта система образует базис Рисса в $L_2(G)$.

В настоящей работе получен ряд результатов, касающихся свойств корневых функций операторов, определяемых выражением (1), в том случае, когда коэффициент $q(x)$, вообще говоря, не является суммируемой на G функцией, а лишь удовлетворяет условию

$$(x-a)(b-x)q(x) \in L_1(G). \tag{2}$$

2. Рассмотрим спектральную задачу

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in G, \tag{3}$$

$$\Gamma_a[u] = \Gamma_b[u] = 0 \tag{4}$$

при условии, что коэффициент $q(x)$ в левой части (3) удовлетворяет условию (2), а краевые условия (4) распадающиеся *).

Установлена

Теорема 1. 1) *Собственные числа задачи (3), (4) имеют асимптотику*

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{b-a}n + o(1) \ \text{при}\ n\to\infty,$$

причем начиная с некоторого номера все собственные числа простые.

*) Конкретный вид этих условий можно описать исходя из теоремы 27 и следствия 28 монографии [2, с. 470—471].

2) *Система корневых функций задачи (3), (4) полна и минимальна в $L_2(G)$.*

Доказательство теоремы 1 основано на получении асимптотики функции Грина задачи (3), (4) и последующем использовании абстрактной теоремы М. А. Наймарка [3].

3. Вопрос базисности корневых функций изучим для несколько более широкого, чем (3), (4), класса дифференциальных операторов.

Следуя В. А. Ильину [4], введем понятие корневой функции, определяемой лишь дифференциальным выражением (1). Под корневой функцией порядка $k=0$ (или собственной функцией), отвечающей комплексному собственному числу λ, будем понимать отличную от тождественного нуля функцию $u_0(x;\lambda)$ из класса $L_2(G)$, которая вместе со своей производной абсолютно непрерывна на каждом компакте из G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $lu_0(\cdot;\lambda)=\lambda u_0(\cdot;\lambda)$. Аналогично под корневой функцией порядка $k\geqslant 1$, отвечающей собственному числу λ и собственной функции $u_0(x;\lambda)$, будем понимать функцию $u_k(x;\lambda)$ из класса $L_2(G)$, которая вместе со своей производной абсолютно непрерывна на каждом компакте из G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $lu_k(\cdot;\lambda)=\lambda u_k(\cdot;\lambda)-\sqrt{\lambda}u_{k-1}(\cdot;\lambda)$. Конечную или бесконечную последовательность корневых функций

$$u_0(x;\lambda),\ u_1(x;\lambda),\ \dots,\ u_k(x;\lambda),\ \dots, \tag{5}$$

отвечающих данному собственному числу λ и данной собственной функции $u_0(x;\lambda)$, будем называть цепочкой корневых функций.

Будем далее рассматривать систему U, состоящую из цепочек (5) определенных указанным выше образом корневых функций оператора (1), отвечающих собственным числам λ из произвольного счетного множества Λ на комплексной плоскости. Если для данного $\lambda\in\Lambda$ цепочка (5), входящая в U, конечна, то максимальный порядок корневых функций в ней будем обозначать через $m(\lambda)$. Если же цепочка не ограничена, то положим $m(\lambda)=\infty$.

Заметим, что в соответствии с введенными выше определениями в качестве системы U можно взять систему всех корневых функций задачи (3), (4).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) система U полна и минимальна в $L_2(G)$;

2) биортогонально сопряженная в $L_2(G)$ к U система V состоит из понимаемых указанным выше образом корневых функций оператора $l^*v=-v''+\overline{q(x)}v$, т. е. $V=\{v_n(x;\bar{\lambda})\}_{n=0}^{m(\lambda)}$, $\lambda\in\Lambda$;

3) равномерно по $\lambda\in\Lambda$ выполнены оценки: $m(\lambda)\leqslant A_1$, $|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\leqslant A_2$ и равномерно по $t\geqslant 0$ — оценка

$$\sum_{\lambda\in\Lambda:\, t\leqslant \operatorname{Re}\sqrt{\lambda}\leqslant t+1} 1\leqslant A_3.$$

Тогда системы U и V образуют безусловные базисы в $L_2(G)$ в том и только в том случае, когда

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\ \sup_{0\leqslant k\leqslant m(\lambda)} \left[\|u_k(\cdot;\lambda)\|_{L_2(G)}\|v_{m(\lambda)-k}(\cdot;\bar{\lambda})\|_{L_2(G)}\right]<\infty. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме, предложенной В. А. Ильиным в работе [5], где аналогичный результат доказан в случае $q(x)\in L_1(G)$.

4. Применим теорему 2 для обоснования безусловной базисности в $L_2(G)$ системы корневых функций задачи (3), (4).

В силу теоремы 1 достаточно проверить условие (6), справедливость которого несложно усмотреть из асимптотики собственных функций задачи (3), (4), так как ее главный член полностью совпадает с главным членом асимптотики собственной функции задачи (3), (4) с $q(x)\in L_1(G)$.

Автор благодарит В. А. Ильина, Е. И. Моисеева и В. В. Тихомирова за полезное обсуждение результатов данной работы.

Литература

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2: Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М., 1966.
3. Наймарк М. А. // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98, № 5. С. 727—730.
4. Ильин В. А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771—794.
5. Ильин В. А. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 5. С. 1048—1053.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 18 декабря 1989 г.