

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

КРИЦКОВ ЛЕОНИД ВЛАДИМИРОВИЧ

УДК 517.927.25

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИНГУЛЯРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

01.01.02 - дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

М о с к в а - 1 9 9 0

Кривош-

Работа выполнена на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, член-корреспондент АН СССР В.А.Ильин

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор А.А.Цезин

- кандидат физико-математических наук, старший преподаватель К.В.Мальков

Ведущая организация - Институт проблем механики АН СССР

Защита состоится "16" ноября 1990 г. в 15 час 30 мин на заседании Специализированного ученого совета Д.053.05.37 при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова по адресу: 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, 2-й учебный корпус, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики.

Автореферат разослан " " _____ 1990 г.

Ученый секретарь Совета,

доктор физико-математических наук,

профессор

Моисев

Е.И.Моисеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Спектральная теория линейных операторов в банаховых пространствах является на сегодняшний день одним из наиболее важных направлений развития функционального анализа. Практическую ценность получаемых результатов составляет возможность их применения при решении различных задач математической физики. Большинство изучаемых математических моделей приводит к исследованию спектральных свойств операторов, порожденных дифференциальными выражениями от одного или нескольких переменных.

Исследование спектральных задач для обыкновенных дифференциальных операторов берет свое начало со ставших уже классическими работ Ж.Лиувилля, Ш.Штурма, В.А.Стекклова, Д.Гильберта. Решаемые в них вопросы асимптотики собственных значений и сходимости спектральных разложений для самосопряженного дифференциального оператора второго порядка получили свое развитие в работах Д.Биркгоффа¹ и Я.Д.Тамаркина², посвященных обыкновенным дифференциальным операторам произвольного n -го порядка с общими краевыми условиями.

Переход к, вообще говоря, несамосопряженным задачам существенно усложнил изучение поставленных в классических работах вопросов. Прежде всего было замечено, что рассматриваемую в самосопряженном случае систему собственных функций требуется пополнить так называемыми присоединенными функциями. При этом, если в самосопряженном случае для решения

¹ Birkhoff G.D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations //Trans. Amer. Math. Soc. - 1908. - V.9, № 4. - P.373-395.

² Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. - Петроград, 1917. - 308 с.

вопроса о сходимости спектральных разложений для функций, суммируемых с квадратом на G , достаточно было показать замкнутость системы корневых функций в $L_2(G)$, то в несамосопряженных задачах в силу отсутствия свойства ортогональности замкнутая и минимальная в $L_2(G)$ система корневых, т.е. собственных и присоединенных функций может и не образовывать базиса соответствующего пространства. Это потребовало выработки более тонкого аппарата обоснования свойства базисности.

Я.Д.Тамеркиным в своей монографии (см. сноску 2 на предыдущей странице) был выделен класс краевых задач (с так называемыми усиленно регулярными краевыми условиями), для которых система корневых функций образует базис в $L_2(G)$. В 1962-1964 гг. В.П.Михайлов³ и Г.М.Кесельман⁴ показали, что этот базис эквивалентен ортонормированному, т.е. в терминологии Н.К.Бари является базисом Рисса в $L_2(G)$.

В 1970х годах выяснилось, что за рамками этих и ряда других исследований⁵ оказался важный с точки зрения приложений класс краевых задач.

В 1976 году Н.И.Ионкиным⁶ была изучена одна неклассическая задача о распространении тепла в однородном стержне. Краевые

³ Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. - 1962. - Т.144, № 5. - С.981-984.

⁴ Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. - 1964. - № 2(39). - С.82-93.

⁵ Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. - М., 1965. - 448 с. Данфорт Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т.3: Спектральные операторы. - М., Мир, 1974. - 661 с.

⁶ Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. - 1977. - Т.13, № 2. - С.294-304.

условия этой задачи в классификации Д.Биркгоффа являются регулярными, но не усиленно регулярными; тем не менее система корневых функций образует базис Рисса в $L_2(G)$. В.А.Ильин⁷ было обращено внимание на особенности задач этого класса. Характерной чертой возникающих здесь систем корневых функций является наличие в них бесконечного числа присоединенных функций. Свойство базисности этой системы существенно зависит от того, как для каждой собственной функции выбираются соответствующие ей присоединенные.

Для эффективного обоснования базисности систем корневых функций широкого класса несамосопряженных спектральных задач В.А.Ильин⁸ был разработан новый метод, с помощью которого вывод о базисности той или иной системы делается исходя не из характеристик краевых условий соответствующей ей задачи, а на основании асимптотики собственных значений и асимптотики корневых функций.

Предложенный В.А.Ильин подход позволил также получить ряд важных результатов⁹ о свойствах базисности неортогональных систем экспонент — проблеме, которой начиная с 1934 года посвящено большое количество работ (см., например, монографию

⁷ Ильин В.А. О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора //Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. — 1976. — Т.142. — С.148-155.

⁸ Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка //Докл. АН СССР. — 1983. — Т.273, № 5. — С.1048-1053.

⁹ Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений по системе экспонент //Докл. АН СССР. — 1983. — Т.273, № 4. — С.789-793.

Н.Винера и Р.Пэли¹⁰, статью А.В.Бицадзе¹¹, а также обзорную работу А.М.Седлецкого¹²).

Настоящая работа посвящена изучению некоторых спектральных свойств сингулярных обыкновенных дифференциальных операторов, порожденных дифференциальным выражением второго порядка

$$Lu \equiv -u'' + q_1(x)u' + q_2(x)u \quad (1)$$

на конечном интервале $G=(a, b)$ вещественной оси с комплекснозначными коэффициентами $q_1(x) \in L_1(G)$ и $q_2(x) \in Q(G) = \{f(x): (x-a)(b-x)f(x) \in L_1(G)\}$.

Теоретическим аспектам обыкновенных дифференциальных операторов с, вообще говоря, несуммируемым потенциалом $q_2(x)$ такого типа посвящен ряд исследований.

Хорошо известно¹³, что если $q_1(x) \equiv 0$ и $q_2(x)$ - вещественнозначная функция из $Q(G)$, то любое полуограниченное самосопряженное расширение L обладает полной и минимальной системой собственных функций. Развернутые результаты о существовании и единственности решения задачи Коши для подобного сингулярного оператора L содержатся в монографии

¹⁰ Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. - М., 1964.

¹¹ Бицадзе А.В. Об одной системе функций // УМН. - 1950. - Т.5, № 4(38). - С.150-151.

¹² Седлецкий А.М. Об одном классе биортогональных разложений показателем функций // Изв. АН СССР, сер. матем. - 1977. - Т.41, № 2. - С.393-415.

¹³ В кн: Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Т.2: Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. - М., Мир, 1966. - С.496-498, 567.

И.Т.Кигурадзе¹⁴ и работе А.Г.Ломтатидзе¹⁵. Асимптотика собственных значений самосопряженной краевой задачи для L с $q_1(x) \equiv 0$ и с распадающимися краевыми условиями получена в работе F.V.Atkinson, C.T.Fulton¹⁶.

Цель работы. Основной задачей данной работы является изучение свойств систем корневых функций, связанных с дифференциальным оператором $L(1)$, и, в частности, выяснение достаточных условий базисности Рисса этих систем в классе $L_2(G)$ и необходимых условий их почти-нормированной базисности в классах $L_p(G)$, $1 < p < \infty$.

Общая методика. Метод исследования, применяемый в данной работе, является дальнейшим обобщением метода В.А.Ильина (см. работу в списке 9). В его основе сведение дифференциальных соотношений для корневых функций оператора (1) к системе интегральных формул среднего значения. После чего с помощью оценок L_p -норм корневых функций и их производных исследование системы собственных и присоединенных функций сводится по существу к исследованию системы экспонент.

Научная новизна. В работе показано, что теорема о базисности Рисса системы корневых функций оператора (1), доказанная В.А.Ильиным (см. работу в списке 9) в регулярном случае, без изменений переносится на рассматриваемый здесь сингулярный случай: $q_1(x) \in W_1^1(G)$ и $q_2(x) \in Q(G)$. Приведены более

¹⁴ Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Тбилиси: изд-во Тбил. ун-та, 1975. - 352 с. - §11.

¹⁵ Ломтатидзе А.Г. Об одной сингулярной краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений второго порядка /В сб.: Краевые задачи. - Пермь: ППИ, 1984. - С.46-50.

¹⁶ Atkinson F.V., Fulton C.T. Asymptotics of Sturm-Liouville eigenvalues for problems on a finite interval with one limit circle singularity //Proc. Roy. Soc. Edinburgh. - 1984. - V. 99, № 1-2. - P.51-70.

точные условия почти-нормированной базисности в $L_p(G)$ систем собственных и присоединенных функций в терминах расположения множества собственных значений на комплексной плоскости. Полученные результаты применяются в данной работе для: 1) исследования свойства перестановочности базисов, связанных с дифференциальными операторами (1), 2) изучения несамосопряженной краевой задачи на собственные значения для сингулярного оператора (1), снабженного распадающимися краевыми условиями на интервале $(0,1)$, в случае, когда коэффициент $q_2(x)$ несуммируем на $(0,1)$, но принадлежит классу $Q(0,1)$.

Все доказанные в работе результаты являются новыми.

Применения. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут найти применение в спектральной теории дифференциальных операторов, при изучении неортогональных систем функций, а также в исследовании некоторых задач квантовой механики, приводящих к изучению сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре "Спектральная теория и прикладные вопросы математической физики" под руководством чл.-корр. АН СССР А.В.Бицадзе и чл.-корр. АН СССР В.А.Ильина, на семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ под руководством проф. Е.И.Моисеева и доц. Б.В.Тихомирова, а также послужили основой доклада на IX республиканской межвузовской конференции по математике и механике, проходившей в гор. Алма-Ате с 12 по 15 сентября 1989 года.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ автора, перечисленных в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 148 страницах; состоит из введения, четырех глав, каждая из которых за исключением последней, четвертой, разбита на параграфы. Список литературы содержит 62 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается обзор результатов, относящихся к предмету диссертации, кратко излагается содержание работы, даются основные определения.

Следуя В.А.Ильину, введем понятие корневой функции, пользуясь лишь дифференциальным выражением (1).

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Здесь и всюду ниже через $\sqrt{\lambda}$ будем обозначать то значение квадратного корня из комплексного числа λ , для которого $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} > 0$, а, если $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} = 0$, то дополнительно потребуем, чтобы $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} > 0$.

Под *корневой функцией* порядка $k=0$ или *собственной функцией*, отвечающей собственному значению λ , будем понимать отличную от тождественного нуля функцию $u_0(x; \lambda)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной $u'_0(x; \lambda)$ по x на каждом компакте интервала G , принадлежит классу $L_p(G)$ для некоторого $p > 1$ и почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$Lu_0(\cdot; \lambda) = \lambda u_0(\cdot; \lambda). \quad (2)$$

Если определена корневая функция $u_{k-1}(x; \lambda)$ порядка $k-1 \geq 0$, то под *корневой (присоединенной) функцией* порядка k , отвечающей собственному значению λ и собственной функции $u_0(x; \lambda)$, будем понимать функцию $u_k(x; \lambda)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной $u'_k(x; \lambda)$ по x на каждом компакте интервала G , принадлежит классу $L_p(G)$ и почти всюду в G удовлетворяет уравнению:

$$Lu_k(\cdot; \lambda) = \lambda u_k(\cdot; \lambda) - \sqrt{\lambda} u_{k-1}(\cdot; \lambda). \quad (3)$$

Пусть совокупность всех собственных значений λ оператора L является некоторым счетным подмножеством комплексной плоскости. В силу того, что после замены $q_2(x) = q_2(x) + \lambda_0$ все собственные значения принимают вид $\lambda = \lambda_0 + \lambda_0$, будем без ограничения общности считать, что $0 \in \Lambda$. Пользуясь приведенным выше определением каждому $\lambda \in \Lambda$ поставим в соответствие конечную или бесконечную

цепочку корневых функций $u_0(x;\lambda)$, $u_1(x;\lambda)$, ... Обозначим через $U(\lambda)$ систему, состоящую из цепочек корневых функций, отвечающих всем без исключения собственным значениям множества λ . Если для некоторого λ цепочка соответствующих корневых функций конечна, то максимальный порядок корневых функций в ней обозначим через $m(\lambda)$. Если же ее длина не ограничена, то положим $m(\lambda)=+\infty$.

Первая глава диссертации содержит три параграфа и носит подготовительный характер.

В ее первом параграфе получен основной инструментальный дальнейшего исследования - интегральные представления решений уравнений (2)-(3). Исходными для получения подобных представлений являются хорошо известная формула среднего значения Титчмарша и так называемая формула сдвига⁴⁷. С их помощью методом последовательных приближений в леммах 1.2-1.3 выписывается явное выражение значения корневой функции $u_k(x\pm t;\lambda)$ в точке $x\pm t\in G$ в виде линейной комбинации значений корневых функций $u_j(x;\lambda)$ порядка $j\leq k$ в точке $x\in G$ и даются оценки коэффициентов данного разложения. Лемма 1.4 уточняет формулу среднего значения в том плане, что оценивает главные члены асимптотики полученных коэффициентов по t и по λ . Необходимо отметить, что аналоги лемм 1.3 и 1.4 для случая $q_1(x)=0$, $q_2(x)\in L_1(G)$ доказаны в работах В.В.Тихомирова (см. сноску 18) и I. Joo, V. Komornik⁴⁸.

Второй параграф посвящен получению оценок корневых функций оператора (1) в различных пространствах $L_p(G)$ и $L_p(K)$, где K - компакт интервала G . В отличие от традиционных оценок (см.,

⁴⁷ Тихомиров В.В. Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром // Докл. АН СССР. - 1983. - Т.273, № 4. - С.807-810.

⁴⁸ Joo I., Komornik V. On the equiconvergence of expansions by Riesz bases formed by eigenfunctions of the Schroedinger operator // Acta sci. math. - 1983. - V.46. - P.357-375.

например, работу в сноске 18) все доказываемые здесь оценки равномерны по порядку корневых функций. В лемме I.5 максимум модуля корневой функции на компакте $K_R = \{c-R, d+R\} \subseteq \mathbb{C}$ оценивается через максимумы модулей корневых функций и их производных на компакте $K = [c, d]$, лежащем строго внутри K_R . Леммы I.6 и I.7 рассматривают обратные оценки¹⁹. Наконец, лемма I.8 содержит точные по λ оценки норм корневых функций в различных пространствах $L_p(G)$ и $L_\infty(G)$, $1 \leq p, s < \infty$, вида:

$$\sum_{k=0}^n \|u_k(\cdot; \lambda)\|_{L_s(G)}^s (1 + |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|)^{1/p-1/s} = O(1) \sum_{k=0}^n \|u_k(\cdot; \lambda)\|_{L_s(G)}^s$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Заключительный, третий параграф первой главы содержит (лемма I.9) поэтапное доказательство так называемой *сигматурной оценки*²⁰

$$\|u_{k-1}(\cdot; \lambda)\|_{L_s(G)} = O(1) (1 + |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|) \|u_k(\cdot; \lambda)\|_{L_s(G)}, \quad k \geq 1,$$

при условии равномерной ограниченности порядка $m(\lambda)$ корневых функций. В лемме 1.9 приведены также традиционные оценки норм вида

$$\|u_k(\cdot; \lambda)\|_{L_s(G)} = O(1) (1 + |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|)^{1/p-1/s} \|u_k(\cdot; \lambda)\|_{L_s(G)}.$$

Вторая глава работы в своих двух параграфах изучает необходимые условия почти-нормированной базисности в $L_p(G)$, $1 < p < \infty$, корневых функций оператора (1) с коэффициентами $q_1(x) \in L_1(G)$ и $q_2(x) \in Q(G)$.

Основопологающей в получении оценок является теорема,

¹⁹ Следует отметить, что в силу несуммируемости $q_2(x)$ на G и принадлежности $q_1(x)$ лишь классу $L_1(G)$ не представляется возможным доказать какие-либо оценки для производных корневых функций в классах $L_p(G)$ при $p > 1$.

²⁰ В этой и следующей оценках константы в $O(1)$ уже зависят от k .

доказанная В.И. и Н.И. Гурариями²⁴ для произвольных почти-нормированных базисов в равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах. Из нее следует, что, если система корневых функций $u(\lambda)$ образует почти-нормированный базис в $L_p(G)$ при $1 < p < \infty$, то можно указать такие положительные числа A_1 и A_2 и пару чисел s_1 и s_2 , связанных неравенствами $1 < s_2 \leq s_1 < \infty$, что для любой функции f из пространства $L_r(G)$, $r^{-1} + p^{-1} = 1$ выполнены оценки:

$$A_1 \left[\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{k=0}^{m(\lambda)} \left| \int_G f(x) u_k(x; \lambda) dx \right|^{s_1} \right]^{1/s_1} \leq \|f\|_{L_r(G)} \leq A_2 \left[\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{k=0}^{m(\lambda)} \left| \int_G f(x) u_k(x; \lambda) dx \right|^{s_2} \right]^{1/s_2}. \quad (4)$$

С помощью (4) во второй главе получен ряд качественных характеристик множества собственных значений Λ .

Первый параграф посвящен оценкам сверху для распределения множества собственных значений Λ на комплексной плоскости, если известно, что почти-нормированная система $u(\lambda)$ удовлетворяет левому неравенству (4). Доказано, что в вертикальной полосе $|\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} - \beta| \leq 1$ плоскости комплексного параметра $\sqrt{\lambda}$ справедливы равномерные по $\beta \geq 1$ оценки (лемма 2.1):

$$\sum_{\lambda \in \Lambda: \substack{|\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} - \beta| \leq 1, \\ |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \geq C/R}} \sum_{k=0}^{m(\lambda)} \|u_k(\cdot; \lambda)\|_{C(G)}^{s_1} \cdot |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|^{-s_1} = O(R^{s_1/r})$$

для всех достаточно малых значений R и (лемма 2.2):

²⁴ Гурарий В.И., Гурарий Н.И. О базисах в равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах // Изв. АН СССР, сер. матем. - 1971. - Т.35, № 1. - С.210-215.

$$\sum_{\lambda \in \Lambda: |Re \sqrt{\lambda} - \beta| \leq 1, k=0}^{m(\lambda)} \sum_{k=0}^{m(\lambda)} \|u_k(\cdot; \lambda)\|_{C(\mathbb{R})}^{s_1} \leq O(R).$$

Обоснование данных оценок следует технике, разработанной в работе, указанной в сноске 19.

Если же, кроме этого, $u(\lambda)$ является почти-нормированной в $L_p(G)$ системой, то, как доказывается в теореме 2.1:

1) найдется число $\gamma > 0$ такое, что

$$\sup_{\beta \geq 1} \sum_{\lambda \in \Lambda: |Re \sqrt{\lambda} - \beta| \leq 1, |Im \sqrt{\lambda}| \geq \nu} (1 + m(\lambda)) (1 + |Im \sqrt{\lambda}|)^{-\gamma} = O((1 + \nu)^{-\gamma}),$$

2) количество корневых функций в каждой цепочке конечно, причем:

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} m(\lambda) < \infty,$$

3) количество собственных значений с учетом кратности в каждом прямоугольнике $\{\beta \leq Re \sqrt{\lambda} \leq \beta + 1, \nu \leq |Im \sqrt{\lambda}| \leq \nu + 1\}$ равномерно по всем $\beta \geq 0$ и $\nu \geq 0$ ограничено, т.е.

$$\sum_{\lambda \in \Lambda: \beta \leq Re \sqrt{\lambda} \leq \beta + 1, \nu \leq |Im \sqrt{\lambda}| \leq \nu + 1} (1 + m(\lambda)) = O(1).$$

Аналог последней оценки распределения собственных значений на комплексной плоскости в более слабых предположениях доказан

в работе V. Kozomnik²².

Отметим, что полученные оценки свойственны лишь обыкновенным дифференциальным операторам. Хорошо известно²³, что можно указать такое несамосопряженное расширение оператора Лапласа в прямоугольнике D , что каждое из чисел λ наперед заданного счетного множества вещественных чисел λ является собственным значением бесконечной кратности, причем каждому собственному значению соответствует бесконечно много собственных и бесконечно много присоединенных функций. И при этом множество всех корневых функций образует базис Рисса в $L_2(D)$.

Во втором параграфе выясняется точность полученных оценок. В предположении, что $\mathcal{U}(\lambda)$ образует почти-нормированный базис в $L_p(G)$, $1 < p < \infty$, доказано (теорема 2.2), что найдутся такие положительные постоянные M_0 и ν_0 , что в каждом прямоугольнике $\{ |\operatorname{Re} \lambda - \beta| < M_0, |\operatorname{Im} \lambda| < \nu_0 \}$ содержится число $\sqrt{\lambda}$ для хотя бы одного собственного значения λ из множества Λ . Обоснование результата теоремы 2.2 строится на лемме 2.3, утверждающей, что в условиях теоремы 2.2 для каждого компакта K интервала G можно указать такую постоянную $R_0(K)$, что сразу для всех $R < R_0(K)$ и $M \geq M_0(K, R)$ выполнена оценка:

$$\inf_{y \in K} \inf_{\beta \geq M} \sum_{\lambda \in \Lambda: |\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} - \beta| \leq M} \frac{\sum_{k=0}^{m(\lambda)} |u_k(\cdot; \lambda)|^2 \cdot \operatorname{ch}^2(\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} R)}{1 + |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|^2} \geq CR^{\frac{s}{2} + r}.$$

²² Kozomnik V. Upper estimate for the eigenvalues of an orthonormal system consisting of eigenfunctions of a linear differential operator // *Studia sci. math. hung.* - 1982. - V.17, № 1-4. - P.403-408.

²³ Барновска М., Ильин В.А. Базис Рисса спектральной задачи с бесконечнократными собственными значениями // *Math. Slov. (CSSR)*. - 1985. - Т.35, № 2. - С.161-167.

Доказательство данной оценки использует подход работы²⁴. В качестве следствия из теоремы 2.2 получено следующее утверждение (теорема 2.3):

если $\mathcal{U}(\Lambda)$ образует почти-нормированный базис в $L_p(G)$, $1 < p < \infty$, то в множестве собственных значений Λ всегда можно выделить такую последовательность $\{\lambda_n\}$, что²⁵

$$\operatorname{Re} \sqrt{\lambda_n} = O^*(n) \text{ и } \operatorname{Im} \sqrt{\lambda_n} = O(1) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В частности, отсюда следует, что ни система экспонент

$$\{\exp(i\mu_n x)\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{случай } q_1(x) \equiv 0, q_2(x) \equiv 0), \text{ ни системы функций}$$

$$\text{Уиттакера } \{M_{\delta/c_2\mu_n, 1/2}(-2i\mu_n x)\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{или}$$

$$\{W_{\delta/c_2\mu_n, 1/2}(-2i\mu_n x)\}_{n=1}^{\infty} \quad (\text{случай } q_1(x) \equiv 0, q_2(x) = -\delta/x, \\ G=(0,1))^{26} \text{ не образуют базиса в } L_p(G), 1 < p < \infty, \text{ если } |\operatorname{Im} \mu_n| \rightarrow \infty.$$

Третья глава диссертационной работы исследует достаточные условия безусловной базисности (базисности Рисса) системы корневых функций $\mathcal{U}(\Lambda)$ в пространстве $L_2(G)$ при условии, что в (1): $q_1(x) \in W_1^1(G)$, $q_2(x) \in Q(G)$.

Ключевым моментом в подходе В.А.Ильина к доказательству теоремы о безусловной базисности является использование известного результата Н.К.Бари²⁷ о принадлежности пространству

²⁴ Komornik V. An equiconvergence theorem for the Schroedinger operator // Acta math. hung. - 1984. - V.44, № 1-2. - P.101-114.

²⁵ Под $O^*(n)$ понимается любая последовательность $\{x_n\}$, для которой выполнена двухсторонняя оценка: $A_1 n \leq |x_n| \leq A_2 n$ с положительными постоянными A_1 и A_2 .

²⁶ См.: Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. - М., 1984. - С.235.

²⁷ Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. зап. МГУ. - 1951. - Т.4, вып.148. - С.69-107.

L_2 последовательности коэффициентов Фурье произвольной функции $f \in L_2(G)$. Поэтому первый параграф третьей главы посвящен доказательству неравенств типа Бесселя и неравенства Хаусдорфа-Инга-Рисса для системы $U(\lambda)$, т.е. левого неравенства (4) с $\alpha_1 = p \geq 2$ и $\gamma = p/(p-1)$.

Теорема 3.1. Пусть

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| < \infty; \sup_{\beta \geq 1} \sum_{\lambda \in \Lambda: |\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} - \beta| \leq 1} (1 + m(\lambda)) < \infty.$$

Тогда, если система $U(\lambda)$ — почти-нормированная в $L_2(G)$, то она удовлетворяет неравенству типа Бесселя.

Как следствие данной теоремы и теоремы Рисса-Торина о выпуклости доказано (теорема 3.2), что в условиях теоремы 3.1: если $U(\lambda)$ почти-нормирована в $L_p(G)$, $p \geq 2$, то она удовлетворяет неравенству Хаусдорфа-Инга-Рисса с показателем p для всех функций $f(x) \in L_r(G): r^{-1} + p^{-1} = 1$.

Полученные в §1 результаты позволяют без труда обосновать во втором параграфе следующее утверждение:

Теорема 3.3. Пусть $q_1(x) \in W_1^1(G)$, $q_2(x) \in Q(G)$, система $U(\lambda)$ полна и минимальна в $L_2(G)$, биортогонально сопряженная к $U(\lambda)$ система $\mathcal{B}(\lambda)$ состоит из понимаемых в обобщенном смысле корневых функций $v_1(\cdot; \lambda)$ оператора

$$L^*v = -v'' - (\overline{q_1(x)}v)' + \overline{q_2(x)}v$$

и выполнена равномерная оценка

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| < \infty. \quad (5)$$

Тогда необходимым и достаточным условием базисности Рисса в $L_2(G)$ системы $U(\lambda)$ является выполнение двух условий:

$$1) \quad \sup_{\lambda \in \Lambda} m(\lambda) < \infty;$$

$$2) \quad \sup_{\beta \geq 1} \sum_{\lambda \in \Lambda: |\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} - \beta| \leq 1} (1 + m(\lambda)) < \infty;$$

и условия равномерной ограниченности сверху $L_2(G)$ -норм функций системы $U(\lambda)$ и $\mathfrak{B}(\lambda)$. ■

Если не требовать почти-нормированности системы $U(\lambda)$, то теорему 3.3 заменяет теорема 3.4, содержание которой дословно повторяет содержание теоремы о безусловной базисности В.А.Ильина (см. работу в сноске 9) с заменой условия суммируемости $q_2(x)$ на условие $q_2(x) \in Q(G)$.

Объединение результатов второй и третьей глав приводит к следующему утверждению:

Теорема 3.5. Пусть $q_1(x) \in W_1^1(G)$, $q_2(x) \in Q(G)$, биортogonalно сопряженная к $U(\lambda)$ система состоит из понимаемых в обобщенном смысле корневых функций оператора L^* и выполнена равномерная оценка (5). Тогда, если $U(\lambda)$ образует почти-нормированный базис пространства $L_p(G)$, то при $p=2$ этот базис является безусловным, а при $p \neq 2$ - лишь условным. ■

Теорема 3.5 показывает, что среди систем функций, связанных с дифференциальными операторами второго порядка, отсутствуют примеры условных базисов в $L_2(G)$, аналогичные примерам, построенным в ряде работ²⁶.

Завершающая четвертая глава диссертации рассматривает одно приложение теорем 3.3 и 3.4. Исследуется краевая задача для уравнения

$$-u'' + q(x)u = \lambda u,$$

снабженного на интервале $G=(0,1)$ распадающимися краевыми условиями. Комплекснозначный коэффициент $q(x)$ принадлежит классу $Q(0,1)$ и несуммируем на $(0,1)$.

Традиционным методом (см., например, книгу в сноске 14, с. 470-471) выписывается функция Грина задачи, анализ полюсов

²⁶ Бабенко К.И. О сопряженных функциях // Докл. АН СССР. - 1948. - Т.62, № 2. - С.157-160.; Альтман М.Ш. О базисах в пространстве Гильберта // Докл. АН СССР. - 1949. - Т.69, № 4. - С.483-485.; Гапошкин В.Ф. Одно обобщение теоремы М.Рисса о сопряженных функциях // Матем. сборник. - 1958. - Т.46(88), № 3. - С.359-372.

которой дает асимптотику собственных значений (теорема 4.1):

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi n + o(1) \quad \text{или} \quad \sqrt{\lambda_n} = \pi(n+1/2) + o(1),$$

которые, начиная с некоторого номера, просты. Для собственных функций справедлива (леммы 4.2, 4.2*, 4.3 и 4.3*) равномерная по $x \in \bar{G}$ асимптотика:

$$u_0(x; \lambda_n) = u_n(x) + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $u_n(x)$ — собственные функции задачи с теми же распадающимися краевыми условиями, но для дифференциального выражения (1) с коэффициентами $q_1(x) \equiv 0$, $q_2(x) \equiv 0$.

С помощью абстрактной теоремы М.А. Наймарка²⁰ доказано, что резольвента рассматриваемой краевой задачи является вполне непрерывным из $L_2(0,1)$ в $L_2(0,1)$ оператором, из-за чего система корневых функций полна в $L_2(0,1)$ (теорема 4.2). В силу того, что сопряженная к рассматриваемой задаче принадлежит тому же классу задач с распадающимися краевыми условиями, система $u(\lambda)$ минимальна в $L_2(0,1)$. Выписанные асимптотики собственных значений и собственных функций позволяют с помощью теоремы 3.4 убедиться в том, что $u(\lambda)$ образует безусловный базис в $L_2(0,1)$ (теорема 4.3).

Автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР, профессору В.А. Ильину за научное руководство работой и ряд ценных замечаний, сделанных во время подготовки рукописи.

²⁰ Наймарк М.А. О некоторых признаках полноты систем собственных и присоединенных векторов в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 98, № 5. — С. 727–730.

Статьи автора по теме диссертации

1. Крицков Л.В. Неравенство Рисса по системе собственных и присоединенных функций оператора Шредингера с потенциалом V сб.: Вопр. вычислит. мат. и програм. обеспеч. ЭВМ. - М.: МГУ, 1985. С.96-103.
2. Крицков Л.В. К вопросу о необходимых условиях базисности Рисса V сб.: Вопр. вычислит. мат. и програм. обеспеч. ЭВМ. - М.: МГУ, 1986. С.102-106.
3. Крицков Л.В. Равномерная оценка порядка присоединенных функций и распределение собственных значений одномерного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения. - 1989. - Т.25, № 7. С.1121-1129.
4. Крицков Л.В. Необходимые условия базисности Рисса корневых функций оператора Шредингера // Сб. науч. трудов. № 192. - М.: МЭИ, 1989. - С.50-56.
5. Крицков Л.В. Об одном свойстве базисов из корневых функций одномерного оператора Шредингера. Математика и механика: Тезисы докладов IX республик. межвуз. науч. конф. по математике и механике (12-15 сентября 1989 г.). Часть I. Математика. - Алма-Ата, 1989. С.67.
5. Крицков Л.В. О необходимых условиях базисности в $L_p(G)$ системы корневых функций одномерного оператора Шредингера // Докл. АН СССР. - 1990. - Т.311, № 6. - С.1306-1309.

Крицков

Подписано в печать 25.05.90 г. Л-111009. Формат 60x84/16.
Объем 1,25 п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 42. Бесплатно.

Ротапринт НИИЦ МГУ