

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «ТЕОРИИ УПРУГОСТИ»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)  
специалиста

**«Напряженно деформированное состояние полого  
вязкоупругого цилиндра при граничных условиях  
специального вида»**

Выполнил студент  
625 группы  
Колосков Даниил Александрович

---

*подпись студента*

Научные руководители:  
проф., д.ф.-м.н. Э.Б.Завойчинская

---

*подпись научного руководителя*

доц., к.ф.-м.н. Е.Д.Мартынова

---

*подпись научного руководителя*

доц., к.ф.-м.н. Н.В.Овчинникова

---

*подпись научного руководителя*

Москва

2022

# Оглавление

<u>Глава I Расчёт напряжённо деформированного состояния вязкоупругого толстостенного цилиндра, скрепленного тонкой упругой оболочкой, под действием внутреннего давления</u>	<u>5</u>
1.1 Постановка задачи	5
1.2 Определение контактного давления	6
1.3 Решение задачи для упругого цилиндра в упругой оболочке	6
1.4 Преобразование Лапласа - Карсона и метод аппроксимаций Ильюшина	8
1.5 Решение задачи для вязкоупругого цилиндра в тонкой упругой оболочке	10
1.6 Численно - аналитический расчет поставленной задачи с помощью метода аппроксимаций	16
1.7 Графические результаты расчетов	18
Основные результаты I главы.	20
<u>Глава II Численное решение задачи с помощью программного комплекса ANSYS, сравнение с решением, полученным методом аппроксимаций</u>	<u>21</u>
2.1 Решение для упругого цилиндра в упругой оболочке	21
2.2 Моделирование свойств вязкоупругого материала в ANSYS	23
2.3 Решение задачи о вязкоупругом цилиндре в упругой оболочке в программном комплексе ANSYS и его сравнение с решением, полученным методом аппроксимаций	27
2.4 Анализ зависимости решения задачи, полученного методом аппроксимаций, от диапазона изменения коэффициента Пуассона материала	29
Основные результаты главы II.	32
<u>Глава III НДС полого вязкоупругого цилиндра, скрепленного с упругой оболочкой, нагруженного давлением, приложенным к изменяющейся внутренней границе</u>	<u>33</u>
3.1 Постановка задачи	33
3.2 Получение интегральных уравнений	33

<u>3.3 Решение системы интегральных уравнений</u>	<u>40</u>
<u>3.4 Результаты вычисления</u>	<u>43</u>
<u>3.5 Расчет по другим входным данным</u>	<u>47</u>
<u>Основные результаты главы III.</u>	<u>49</u>
<u>Вывод</u>	<u>50</u>
<u>Заключение</u>	<u>52</u>
<u>Список литературы</u>	<u>53</u>
<u>Приложение</u>	<u>54</u>
<u>    Приложение 1</u>	<u>54</u>
<u>    Приложение 1.1</u>	<u>55</u>
<u>    Приложение 2</u>	<u>58</u>
<u>    Приложение 2.1</u>	<u>59</u>
<u>    Приложение 3</u>	<u>59</u>
<u>    Приложение 3.1</u>	<u>60</u>

# Введение

В работе рассматривается задача о деформировании сжимаемого вязкоупругого цилиндра, скрепленного с упругой оболочкой и находящегося под действием внутреннего давления  $p(t)$ . Рассмотрены два случая: неизменной внутренней поверхности и внутренней поверхности, изменяющей свой радиус по определенному закону  $a(t)$ , т.е. выгорающей.

В первом случае задача решена двумя методами: методом аппроксимаций А.А.Ильюшина, используемым совместно с преобразованием Лапласа - Карсона (глава I), и с помощью программного комплекса ANSYS (глава II). Программа для расчетов в ANSYS приведена в приложении 2. При использовании метода аппроксимаций, коэффициенты аппроксимирующих функций и компоненты напряженно-деформированного состояния, были вычислены с помощью написанной программы в Wolfram Mathematica (приложение 1). Так же, в приложение 1.1 даются пояснения к выбранным граничным условиям, касающихся оболочки.

Сопоставление полученных двумя методами результатов, о котором рассказывается в конце главы II, позволило уточнить выбор начальных параметров при расчете в ANSYS. Результаты расчетов приводятся в приложениях 2.1.

В главе III применение метода Лапласа-Карсона невозможно, т.к. рассмотрен цилиндр с меняющейся внутренней границей. Путем преобразований, аналогичных предложенным в работе [2], решение задачи сведено к системе двух интегральных уравнений. При этом показано, что приведенные в указанной статье формулы имеют неточности. В данной работе эти формулы записаны корректно и затем на их основе получена система интегральных уравнений Вольтерры 2 рода, которая была решена численно. Для решения системы написана программа в Wolfram Mathematica, ее код можно посмотреть в приложении 3. Результаты расчета показали, что напряжение  $\sigma_{rr}$  при  $r = b$  (т.е. на внешней поверхности вязкоупругого цилиндра) в момент полного выгорания цилиндра становится равным заданному  $p(t)$ , что согласуется с физическим смыслом и является подтверждением правильности расчетов. Также в главе III и в приложение 3.1 приведены результаты вычисления других компонент напряженно-деформированного состояния .

# Глава I Расчёт напряжённо деформированного состояния вязкоупругого толстостенного цилиндра, скрепленного тонкой упругой оболочкой, под действием внутреннего давления

## 1.1 Постановка задачи

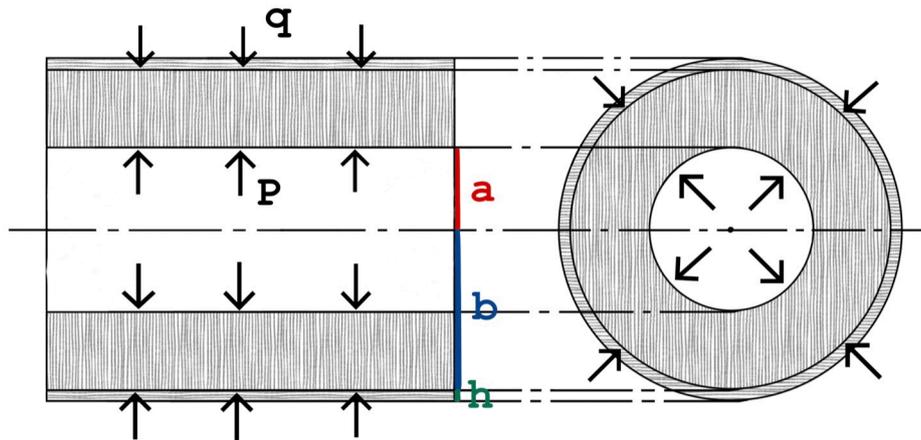


Рис. 1.1

Здесь  $a$  - внутренний радиус;  $b$  - внешний радиус вязкоупругого цилиндра;  $h$  - толщина оболочки;  $p$  - заданное внутреннее давление;  $q$  - неизвестное внешнее давление.

Полная система уравнений для вязкоупругого цилиндра, в силу симметрии задачи, и в предположении, что продольная деформация равна константе, имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \\ \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_z = Const \\ u_\varphi = 0 \\ \sigma = K\theta \\ s_{ij} = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon_{ij}(\tau) \end{array} \right. \quad (1.1a)$$

Здесь  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  - нормальные компоненты тензора напряжений, действующие на площадках, перпендикулярных осям  $r$  и  $\varphi$  соответственно,  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_z$  -

продольные деформации в направлениях соответствующих осей ,  $u_r$  - перемещения по оси  $r$  ,  $u_\varphi$  - тангенциальное перемещение ,  $\sigma$  - среднее напряжение ,  $K$  - модуль объемной деформации ,  $\theta$  - относительное изменение объема ,  $s_{ij}$  - девиатор тензора напряжений ,  $R(t)$  - функция сдвиговой релаксации ,  $\varepsilon_{ij}$  - девиатор тензора деформаций.

Граничные условия записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} \text{Для цилиндра} \quad \sigma_r|_{r=a} &= -p, \quad \sigma_r|_{r=b} = -q. \\ \text{Для оболочки} \quad \sigma_r^*|_{r=b+h} &= 0, \quad \sigma_r^*|_{r=b} = -q. \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\text{Условие на торцах} \quad \pi p a^2 = 2\pi \int_a^b \sigma_z(r) r dr + 2\pi \sigma_z^*(r) h b.$$

Индекс \* означает, что соответствующая величина относится к оболочке.

## 1.2 Определение контактного давления

Для определения контактного давления  $q$  следует использовать условие сопряжения  $u(b) = u_*$  , где  $u_*$  находится из решения задачи о тонкой оболочке

$$\begin{cases} \sigma_\varphi^* = q \frac{b}{h} \\ \sigma_\varphi^*(1 - \nu_*) = \frac{E}{1 + \nu_*} \varepsilon_\varphi^* + \frac{E\nu_*}{1 + \nu_*} \varepsilon_z^* \\ \sigma_r^* \approx 0 \\ \sigma_z^* = \nu_* \sigma_\varphi^* + E_* \varepsilon_z^* \end{cases}$$

Разрешив систему, находим  $u_*$

$$u_* = b \varepsilon_\varphi^* = \frac{qb^2}{E_* h} (1 - \nu_*^2) - \nu_* b \varepsilon_z^*. \quad (1.2)$$

Здесь  $E_*$  и  $\nu_*$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки. Более подробные разнесения о граничных условиях связанных с оболочкой представлены в приложении 1.1. В следующем параграфе эта формула будет использована при нахождении  $q$ .

## 1.3 Решение задачи для упругого цилиндра в упругой оболочке

Для начала рассмотрим задачу об упругом цилиндре в упругой оболочке , для этого воспользуемся известными результатами задачи Ламе о толстостенном упругом цилиндре [2].

Решение такой задачи имеет вид

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_z = 2\nu A + E \varepsilon_z^0,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} \left[ A(1 - \nu - 2\nu^2) + \frac{B}{r^2}(1 + \nu) - \nu E \varepsilon_z^0 \right],$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[ A(1 - \nu - 2\nu^2) - \frac{B}{r^2}(1 + \nu) - \nu E \varepsilon_z^0 \right].$$

Константы А и В найдем из граничных условий ( 1.1б )

$$\begin{cases} A = \frac{p - qM^2}{M^2 - 1} \\ B = \frac{b^2}{M^2 - 1}(p - q) \end{cases}, \quad \text{где} \quad M = \frac{b}{a}.$$

Используя выражение для  $u_*$ (1.2), А и В , а также учитывая что  $\varepsilon_z^* = \varepsilon_z^0$  , получим систему линейных уравнений относительно q и  $\varepsilon_z^*$

$$\begin{cases} q \left[ \frac{b}{h}(1 - \nu_*^2) \frac{E}{E_*} + \frac{(1 + \nu)[1 + M^2(1 - 2\nu)]}{M^2 - 1} \right] = 2p \frac{1 - \nu^2}{M^2 - 1} + E(\nu_* - \nu)\varepsilon_z^* \\ p(1 - 2\nu) = \varepsilon_z^* \left[ E(M^2 - 1) + \frac{2h}{b}M^2E_* \right] + 2M^2q(\nu_* - \nu) \end{cases}$$

Эта система решается относительно q и  $\varepsilon_z^*$  . При  $\varepsilon_z^* = 0$  величины q и  $u^*$  , учитывая формулу (1.2), определяются соотношениями

$$q = \frac{p(1 - 2\nu)}{2M^2(\nu_* - \nu)}, \quad u^* = \frac{pb^2(1 - 2\nu)(1 - \nu_*)^2}{2M^2E_*h(\nu_* - \nu)}.$$

(1.3)

И после определения А и В, становятся известны все компоненты напряжений и деформаций в упругом цилиндре.

Приведем окончательные формулы для деформаций  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\varphi$  , принимающих максимальное значения при  $r = a$ , и для напряжений  $\sigma_r$  ,  $\sigma_\varphi$  ,  $\sigma_z$  , а так же для перемещения  $u_r$  . При этом, следуя работе [1], будем считать параметры заряда такими, что можно пренебречь величиной  $\varepsilon_z^* = \varepsilon_z^0$  .

Основные соотношения имеют вид

$$\varepsilon_\varphi(r) = \frac{p(1 + \nu)}{E(M^2 - 1)} \left[ 1 - 2\nu + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2(1 - \nu) \left( (1 - 2\nu)M^2 + \frac{b^2}{r^2} \right)}{1 + M^2(1 - 2\nu) + \frac{Eb}{E_*h}(M^2 - 1) \frac{1 - \nu_*^2}{1 + \nu}} \right],$$

$$\varepsilon_r(r) = \frac{p(1+\nu)}{E(M^2-1)} \left[ 1 - 2\nu - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2(1-\nu) \left( (1-2\nu)M^2 - \frac{b^2}{r^2} \right)}{1 + M^2(1-2\nu) + \frac{Eb}{E_*h}(M^2-1) \frac{1-\nu_*^2}{1+\nu}} \right],$$

$$u_r(r) = \frac{rp(1+\nu)}{E(M^2-1)} \left[ 1 - 2\nu + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2(1-\nu) \left( (1-2\nu)M^2 + \frac{b^2}{r^2} \right)}{1 + M^2(1-2\nu) + \frac{Eb}{E_*h}(M^2-1) \frac{1-\nu_*^2}{1+\nu}} \right],$$

$$\sigma_r(r) = \frac{p}{M^2-1} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2 \left( M^2 - \frac{b^2}{r^2} \right) (1-\nu)}{1 + M^2(1-2\nu) + \frac{Eb}{E_*h}(M^2-1) \frac{1-\nu_*^2}{1+\nu}} \right],$$

$$\sigma_\varphi(r) = \frac{p}{M^2-1} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2 \left( M^2 + \frac{b^2}{r^2} \right) (1-\nu)}{1 + M^2(1-2\nu) + \frac{Eb}{E_*h}(M^2-1) \frac{1-\nu_*^2}{1+\nu}} \right],$$

$$\sigma_z(r) = \frac{2p\nu}{M^2-1} \left[ 1 - \frac{2M^2(1-\nu)}{1 + M^2(1-2\nu) + \frac{Eb}{E_*h}(M^2-1) \frac{1-\nu_*^2}{1+\nu}} \right].$$

(1.4)

Здесь, в дополнение к работе [1], были получены формулы для  $\varepsilon_r(r)$  и  $u_r(r)$ .

## 1.4 Преобразование Лапласа - Карсона и метод аппроксимаций Ильюшина

Для решения вязкоупругой задачи, необходимо изучить преобразование Лапласа - Карсона и метод аппроксимаций, который был предложен А.А. Ильюшиным.

Применение преобразования Лапласа - Карсона для решения задачи вязкоупругости.

- Изображением Лапласа - Карсона некоторой функции  $g(t)$  называется

следующая функция  $\bar{g}(s)$  действительного параметра  $s$ :  $\bar{g}(s) = s \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt$ .

Отметим следующее важное свойство преобразования Лапласа - Карсона, которое будет необходимо для решения нашей задачи:

Если  $g(t)$  является свёрткой двух функций  $F(t)$  и  $\psi(t)$ :  $g(t) = \int_a^b F(t - \tau)d\psi(\tau)$ ,

то её изображение равно произведению изображений подынтегральных функций:  $\bar{g}(s) = \bar{F}(s)\bar{\psi}(s)$ . Важно, что это соотношение имеет место лишь при выполнении обязательного условия  $\psi(0) = 0$ . Поэтому в начальный момент времени все внешние силовые нагрузки, а так же перемещения на поверхности тела отсутствуют [4].

- Применим данное свойство для определяющих соотношений линейной вязкоупругости:

Изображение Лапласа - Карсона выражения  $s_{ij} = \int_0^t R(t - \tau)d\varepsilon_{ij}(\tau)$ , будет иметь

вид:  $\bar{s}_{ij}(s) = \bar{R}(s)\bar{\varepsilon}_{ij}(s)$ . То есть определяющее соотношение вязкоупругости в изображениях превратилось в определяющее соотношение линейной теории упругости.

- При применении преобразования Лапласа - Карсона к соотношениям (1.1) для изображений величин  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$  получаем постановку задачи линейной теории упругости.

### Метод аппроксимаций.

- Метод аппроксимаций А.А. Ильюшина решения задач вязкоупругости основан на использовании интегрального преобразования Лапласа - Карсона (Л-К) и на специальном представлении решения задач линейной теории упругости.

- Идея метода А.А. Ильюшина, заключается в том, что функцию  $f_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), входящую в представление решений задач теории упругости [3], можно представить с достаточной для практики степенью точности, в виде трехчленов по степеням  $\omega$   $\left(\omega = \frac{2G}{3K}\right)$ :

$$f_k(r, \omega) = f_k^{(0)}(r) + f_k^{(1)}(r)\omega + \frac{1}{\omega} f_k^{(-1)}(r), \quad (1.5)$$

Коэффициенты  $f_k^{(j)}$  ( $j = 0, 1, -1$ ) определяются например, из метода наименьших квадратов.

- В решение задачи вязкоупругости в изображениях войдут операторы типа:

$$\bar{\omega}\bar{p} = \frac{1}{3K}\bar{R}\bar{p}, \quad \frac{1}{\bar{\omega}}\bar{p} = 3K\bar{\Pi}\bar{p}, \quad (1.6)$$

где  $\bar{\Pi}$  - изображение функции ползучести,  $\bar{R}$  - изображение функции релаксации. Оригиналы правых частей выражений (1.6) имеют вид

$$\frac{1}{3K} \int_0^t R(t-\tau)dp(\tau), \quad 3K \int_0^t \Pi(t-\tau)dp(\tau). \quad (1.7)$$

Таким образом, переход от изображений к оригиналам продемонстрирован.

## 1.5 Решение задачи для вязкоупругого цилиндра в тонкой упругой оболочке

Воспользуемся приведённым в разделе 1.3 решением для упругого цилиндра в упругой оболочке и применим преобразования Л-К и метод аппроксимаций А.А. Ильюшина из раздела 1.4 для нахождения решения задачи о действии внутреннего давления в случае линейно вязкоупругого цилиндра в тонкой упругой оболочке. Приведем решение для компонент  $\varepsilon_\varphi(a)$ ,  $\varepsilon_r(a)$ ,  $u_r$ , и  $\sigma_r(r)$ ,  $\sigma_\varphi(r)$ ,  $\sigma_z(r)$ . В качестве независимых констант упругого материала примем модуль объемного сжатия  $K$  и коэффициент  $\omega = \frac{2G}{3K}$ , где  $G$  - модуль сдвига. Тогда коэффициент Пуассона  $\nu$  и модуль Юнга  $E$ , можно представить:

$$\nu = \frac{1-\omega}{2+\omega}, \quad E = 9K \frac{\omega}{2+\omega}. \quad (1.8)$$

Перепишем полученные результаты (1.4) для упругого цилиндра в упругой оболочке, заменив в них постоянные  $E$  и  $\nu$  на  $\omega$  и  $K$  в соответствии с полученными соотношениями (1.8)

$$\varepsilon_\varphi(r) = \frac{p}{M^2-1} \frac{1}{3K} \left[ \frac{3}{2+\omega} + \frac{b^2}{\omega r^2} - \frac{6M^2(1+2\omega)}{(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)} - \frac{2(1+2\omega)\left(\frac{b^2}{r^2}\right)}{\omega(2+B\omega+C\omega^2)} \right],$$

$$\varepsilon_r(r) = \frac{p}{M^2-1} \frac{1}{3K} \left[ \frac{3}{2+\omega} - \frac{b^2}{\omega r^2} - \frac{6M^2(1+2\omega)}{(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)} + \frac{2(1+2\omega)\left(\frac{b^2}{r^2}\right)}{\omega(2+B\omega+C\omega^2)} \right],$$

$$\begin{aligned}
u_r(r) &= \frac{p}{M^2 - 1} \frac{1}{3K} \left[ \frac{3r}{2 + \omega} + \frac{b^2}{\omega r} - \frac{6M^2 r(1 + 2\omega)}{(2 + \omega)(2 + B\omega + C\omega^2)} - \frac{2(1 + 2\omega)\left(\frac{b^2}{r}\right)}{\omega(2 + B\omega + C\omega^2)} \right], \\
\sigma_r(r) &= \frac{p}{M^2 - 1} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\left(M^2 - \frac{b^2}{r^2}\right)(1 + 2\omega)}{2 + B\omega + C\omega^2} \right], \\
\sigma_\varphi(r) &= \frac{p}{M^2 - 1} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{2\left(M^2 + \frac{b^2}{r^2}\right)(1 + 2\omega)}{2 + B\omega + C\omega^2} \right], \\
\sigma_z(r) &= \frac{2p}{M^2 - 1} \frac{1 - \omega}{2 + \omega} \left[ 1 - \frac{2M^2(1 + 2\omega)}{2 + B\omega + C\omega^2} \right],
\end{aligned}
\tag{1.9}$$

где  $C = \frac{1 - \nu_*^2}{E_*} 3K \frac{b}{h} (M^2 - 1)$ ,  $B = 1 + 3M^2 + 2C$ . В частном случае при  $r = a$  деформации имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\varphi(a) &= \frac{p}{M^2 - 1} \frac{1}{3K} \left[ \frac{3}{2 + \omega} + \frac{M^2}{\omega} - \frac{4M^2(1 + 2\omega)^2}{\omega(2 + B\omega + C\omega^2)(2 + \omega)} \right], \\
\varepsilon_r(a) &= \frac{p}{M^2 - 1} \frac{1}{3K} \left[ \frac{3}{2 + \omega} - \frac{M^2}{\omega} - \frac{4M^2(1 + 2\omega)(\omega - 1)}{\omega(2 + B\omega + C\omega^2)(2 + \omega)} \right].
\end{aligned}$$

Используем теперь аппроксимации (1.5) для функций  $f_k$ , где  $k \in [1, 6]$ :

$$\left\{ \begin{aligned}
f_1(\omega) &= \frac{(1 + 2\omega)}{(2 + \omega)(2 + B\omega + C\omega^2)} = f_1^{(0)} + f_1^{(1)}\omega + f_1^{(-1)}\frac{1}{\omega} \\
f_2(\omega) &= \frac{(1 + 2\omega)}{\omega(2 + B\omega + C\omega^2)} = f_2^{(0)} + f_2^{(1)}\omega + f_2^{(-1)}\frac{1}{\omega} \\
f_3(\omega) &= \frac{(1 + 2\omega)}{2 + B\omega + C\omega^2} = f_3^{(0)} + f_3^{(1)}\omega + f_3^{(-1)}\frac{1}{\omega} \\
f_4(\omega) &= \frac{(1 + 2\omega)(1 - \omega)}{(2 + \omega)(2 + B\omega + C\omega^2)} = f_4^{(0)} + f_4^{(1)}\omega + f_4^{(-1)}\frac{1}{\omega} \\
f_5(\omega) &= \frac{(1 + 2\omega)^2}{\omega(2 + \omega)(2 + B\omega + C\omega^2)} = f_5^{(0)} + f_5^{(1)}\omega + f_5^{(-1)}\frac{1}{\omega} \\
f_6(\omega) &= \frac{(1 + 2\omega)(\omega - 1)}{\omega(2 + \omega)(2 + B\omega + C\omega^2)} = f_6^{(0)} + f_6^{(1)}\omega + f_6^{(-1)}\frac{1}{\omega}
\end{aligned} \right.
\tag{1.10}$$

Учитывая (1.9) и (1.10), запишем решение задачи о вязкоупругом цилиндре, скрепленном с упругой оболочкой, в изображениях:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_\varphi(r) &= \frac{\bar{p}}{M^2 - 1} \frac{1}{3K} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\bar{\omega}}{4} + \frac{b^2}{\bar{\omega}r^2} - 6M^2 \left( f_1^{(0)} + f_1^{(1)}\bar{\omega} + f_1^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - 2\frac{b^2}{r^2} \left( f_2^{(0)} + f_2^{(1)}\bar{\omega} + f_2^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \right], \\
\bar{\varepsilon}_r(r) &= \frac{\bar{p}}{M^2 - 1} \frac{1}{3K} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\bar{\omega}}{4} - \frac{b^2}{\bar{\omega}r^2} - 6M^2 \left( f_1^{(0)} + f_1^{(1)}\bar{\omega} + f_1^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2\frac{b^2}{r^2} \left( f_2^{(0)} + f_2^{(1)}\bar{\omega} + f_2^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \right], \\
\bar{u}_r(r) &= \frac{\bar{p}}{M^2 - 1} \frac{r}{3K} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\bar{\omega}}{4} + \frac{b^2}{\bar{\omega}r^2} - 6M^2 \left( f_1^{(0)} + f_1^{(1)}\bar{\omega} + f_1^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - 2\frac{b^2}{r^2} \left( f_2^{(0)} + f_2^{(1)}\bar{\omega} + f_2^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \right], \\
\bar{\sigma}_r &= \frac{\bar{p}}{M^2 - 1} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} - 2 \left( M^2 - \frac{b^2}{r^2} \right) \left( f_3^{(0)} + f_3^{(1)}\bar{\omega} + f_3^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \right], \\
\bar{\sigma}_\varphi &= \frac{\bar{p}}{M^2 - 1} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} - 2 \left( M^2 + \frac{b^2}{r^2} \right) \left( f_3^{(0)} + f_3^{(1)}\bar{\omega} + f_3^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \right], \\
\bar{\sigma}_z &= \frac{2\bar{p}}{M^2 - 1} \left[ \frac{1}{2} - \frac{3\bar{\omega}}{4} - 2M^2 \left( f_4^{(0)} + f_4^{(1)}\bar{\omega} + f_4^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \right].
\end{aligned}
\tag{1.11}$$

В частном случае при  $r = a$  изображения деформаций, имеют вид

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_\varphi(a) &= \frac{\bar{p}}{M^2 - 1} \frac{1}{3K} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\bar{\omega}}{4} + \frac{M^2}{\bar{\omega}} - 4M^2 \left( f_1^{(0)} + f_1^{(1)}\bar{\omega} + f_1^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \right], \\
\bar{\varepsilon}_r(a) &= \frac{\bar{p}}{M^2 - 1} \frac{1}{3K} \left[ \frac{3}{2} - \frac{3\bar{\omega}}{4} - \frac{M^2}{\bar{\omega}} - 4M^2 \left( f_1^{(0)} + f_1^{(1)}\bar{\omega} + f_1^{(-1)}\frac{1}{\bar{\omega}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Здесь использовались дополнительные аппроксимации

$$\frac{1}{2 + \omega} \approx \frac{1}{2} - \frac{\omega}{4} \quad \text{и} \quad \frac{1 - \omega}{2 + \omega} \approx \frac{1}{2} - \frac{3\omega}{4}.$$

Теперь найдём искомое решение, переходя от соотношений в изображениях к оригиналам в соответствии с (1.6) и (1.7) и формулами (1.11)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\varphi(r, t) &= \frac{1}{3K(M^2 - 1)} \left[ \left( \frac{3}{2} - 6M^2 f_1^{(0)} - 2\frac{b^2}{r^2} f_2^{(0)} \right) p(t) - \left( \frac{3}{4} + 6M^2 f_1^{(1)} + 2\frac{b^2}{r^2} f_2^{(1)} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{3K} \int_0^t R(t - \tau) dp(\tau) + \left( \frac{b^2}{r^2} - 6M^2 f_1^{(-1)} - 2\frac{b^2}{r^2} f_2^{(-1)} \right) \times 3K \int_0^t \Pi(t - \tau) dp(\tau) \right], \\
\varepsilon_r(r, t) &= \frac{1}{3K(M^2 - 1)} \left[ \left( \frac{3}{2} - 6M^2 f_1^{(0)} + 2\frac{b^2}{r^2} f_2^{(0)} \right) p(t) - \left( \frac{3}{4} + 6M^2 f_1^{(1)} - 2\frac{b^2}{r^2} f_2^{(1)} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{3K} \int_0^t R(t - \tau) dp(\tau) - \left( \frac{b^2}{r^2} + 6M^2 f_1^{(-1)} - 2\frac{b^2}{r^2} f_2^{(-1)} \right) \times 3K \int_0^t \Pi(t - \tau) dp(\tau) \right], \\
\sigma_r(r, t) &= \frac{1}{M^2 - 1} \left[ \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p(t) - 2f_2^{(0)} \left( M^2 - \frac{b^2}{r^2} \right) p(t) - 2 \left( M^2 - \frac{b^2}{r^2} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \frac{f_2^{(1)}}{3K} \int_0^t R(t - \tau) dp(\tau) + 3K f_2^{(-1)} \int_0^t \Pi(t - \tau) dp(\tau) \right] \right], \\
\sigma_\varphi(r, t) &= \frac{1}{M^2 - 1} \left[ \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p(t) - 2f_2^{(0)} \left( M^2 + \frac{b^2}{r^2} \right) p(t) - 2 \left( M^2 + \frac{b^2}{r^2} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \frac{f_2^{(1)}}{3K} \int_0^t R(t - \tau) dp(\tau) + 3K f_2^{(-1)} \int_0^t \Pi(t - \tau) dp(\tau) \right] \right], \\
\sigma_z(t) &= \frac{2}{M^2 - 1} \left[ \left( \frac{1}{2} - 2M^2 f_3^{(0)} \right) p(t) - \frac{1}{3K} \left( \frac{3}{4} + 2M^2 f_3^{(1)} \right) \int_0^t R(t - \tau) dp(\tau) - \right. \\
&\quad \left. - 6KM^2 f_3^{(-1)} \int_0^t \Pi(t - \tau) dp(\tau) \right], \\
u(r, t) &= \frac{r}{3K(M^2 - 1)} \left[ \left( \frac{3}{2} - 6M^2 f_1^{(0)} - 2\frac{b^2}{r^2} f_2^{(0)} \right) p(t) - \left( \frac{3}{4} + 6M^2 f_1^{(1)} + 2\frac{b^2}{r^2} f_2^{(1)} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{3K} \int_0^t R(t - \tau) dp(\tau) + \left( \frac{b^2}{r^2} - 6M^2 f_1^{(-1)} - 2\frac{b^2}{r^2} f_2^{(-1)} \right) \times 3K \int_0^t \Pi(t - \tau) dp(\tau) \right].
\end{aligned}
\tag{1.12}$$

В частном случае при  $r = a$ , решение для деформаций будет иметь вид

$$\varepsilon_\varphi(a, t) = \frac{1}{3K(M^2 - 1)} \left[ \left( \frac{3}{2} - 4M^2 f_1^{(0)} \right) p(t) - \left( \frac{3}{4} + 4M^2 f_1^{(1)} \right) \frac{1}{3K} \int_0^t R(t - \tau) dp(\tau) + \right. \\ \left. + 3M^2 \left( 1 - 4f_1^{(-1)} \right) K \int_0^t \Pi(t - \tau) dp(\tau) \right],$$

$$\varepsilon_r(a, t) = \frac{1}{3K(M^2 - 1)} \left[ \left( \frac{3}{2} - 4M^2 f_4^{(0)} \right) p(t) - \left( \frac{3}{4} - 4M^2 f_4^{(1)} \right) \frac{1}{3K} \int_0^t R(t - \tau) dp(\tau) - \right. \\ \left. - 3M^2 \left( 1 + 4f_4^{(-1)} \right) K \int_0^t \Pi(t - \tau) dp(\tau) \right].$$

В полученные формулы входят параметры  $f_k^{(0)}$ ,  $f_k^{(1)}$ ,  $f_k^{(-1)}$  ( $k = 1, \dots, 6$ ), которые находятся с помощью метода наименьших квадратов. Решаем систему линейных уравнений (1.13), методом Крамера, следуя работе [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k^{(0)} = \frac{1}{\Delta} \left\{ J_{1k} \left[ \frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3} \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) - (\omega_2 - \omega_1)^2 \right] - J_{2k} \left[ \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) - (\omega_2 - \omega_1) \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] + \right. \\ \left. + J_{3k} \left[ \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)(\omega_2 - \omega_1)}{2} - \frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3} \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] \right\}, \\ f_k^{(1)} = -\frac{1}{\Delta} \left\{ J_{1k} \left[ \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) - (\omega_2 - \omega_1) \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] - J_{2k} \left[ (\omega_2 - \omega_1) \left( \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) - \left( \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + J_{3k} \left[ (\omega_2 - \omega_1)^2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] \right\}, \\ f_k^{(-1)} = \frac{1}{\Delta} \left\{ J_{1k} \left[ \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} (\omega_2 - \omega_1) - \frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3} \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] - J_{2k} \left[ (\omega_2 - \omega_1)^2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \right] + \right. \\ \left. + J_{3k} \left[ \frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3} (\omega_2 - \omega_1) - \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}{4} \right] \right\}. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Область изменения  $\omega$  может быть получена из оценки коэффициента Пуассона  $\nu$

$$0.5 > \nu_1 \geq \nu \geq \nu_2 > 0.$$

Учитывая (1.8), получим

$$0 < \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 < 1,$$

где

$$\omega_1 = \frac{1 - 2\nu_1}{1 + \nu_1}, \quad \omega_2 = \frac{1 - 2\nu_2}{1 + \nu_2}. \quad (1.14)$$

Тут  $\omega_1$  и  $\omega_2$  это минимальное и максимальное значение  $\omega$  в интервале аппроксимации функций  $f_k^{(i)}$ .

Значение  $\Delta$  в системе (1.13) находится как определитель следующей матрицы

$$\Delta = \begin{bmatrix} \omega_2 - \omega_1 & \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} & \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \\ \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} & \frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3} & \omega_2 - \omega_1 \\ \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} & \omega_2 - \omega_1 & \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

В нашем случае квадратуры входящие в систему (1.13), выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)d\omega}{(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, & J_{21} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega(1+2\omega)d\omega}{(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, \\ J_{31} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)d\omega}{\omega(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, \\ J_{12} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)d\omega}{\omega(2+B\omega+C\omega^2)}, & J_{22} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)d\omega}{2+B\omega+C\omega^2}, \\ J_{32} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)d\omega}{\omega^2(2+B\omega+C\omega^2)}, \\ J_{13} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)d\omega}{2+B\omega+C\omega^2}, & J_{23} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega(1+2\omega)d\omega}{2+B\omega+C\omega^2}, \\ J_{33} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)d\omega}{\omega(2+B\omega+C\omega^2)}, \\ J_{14} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)(1-\omega)d\omega}{(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, & J_{24} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\omega(1+2\omega)(1-\omega)d\omega}{(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, \\ J_{34} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)(1-\omega)d\omega}{\omega(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, \\ J_{15} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)^2 d\omega}{\omega(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, & J_{25} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)^2 d\omega}{(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, \\ J_{35} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)^2 d\omega}{\omega^2(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, \\ J_{16} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)(1-\omega)d\omega}{\omega(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, & J_{26} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)(1-\omega)d\omega}{(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}, \\ J_{36} &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(1+2\omega)(1-\omega)d\omega}{\omega^2(2+\omega)(2+B\omega+C\omega^2)}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Следуя работе [2], в (1.16) были дополнительно получены необходимые формулы для  $k = 4, 5, 6$ .

## 1.6 Численно - аналитический расчет поставленной задачи с помощью метода аппроксимаций

Входные данные для расчетов мы брали из статьи [5]. Геометрические характеристики цилиндра и внутреннее давление

$$a = 15\text{см} , b = 60\text{см} , h = 0.4\text{см} , p_0 = 6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} .$$

$$\text{Модуль объемного сжатия цилиндра } K = 5171.59 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} .$$

$$\text{Модуль упругости оболочки } E_* = 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} .$$

$$\text{Коэффициент Пуассона оболочки } \nu_* = 0.3 .$$

$$\text{Оценка коэффициента Пуассона цилиндра } \nu \in [0.473 , 0.498] .$$

$$\text{Временной отрезок } t \in [0 , 100] .$$

Функции релаксации  $R(t)$  и ползучести  $\Pi(t)$  цилиндра были взяты из работы [5]

$$R(t) = 22.6 + 10.32e^{-152.11t} + 204.1e^{-0.133t} + 309.2e^{-1.296t} + 8.66e^{-16.272t} + \\ + 3.46e^{-2.66t} + 2.58e^{-0.47t} + 5.37e^{-0.00384t} + 2.48e^{-0.072t} , \\ \Pi(t) = \frac{1}{563.17} + \frac{1}{984.29}(1 - e^{-0.992t}) + \frac{1}{1038}(1 - e^{-0.129t}) + \frac{1}{232.02}(1 - e^{-0.082t}) + \\ + \frac{1}{27.02}(1 - e^{-0.004856t}) ,$$

$$\text{где } [R] = \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} , [\Pi] = \frac{\text{см}^2}{\text{кГ}} , [t] = c .$$

Функция давления  $p(\tau)$  была взята ступенчатой  $p(\tau) = p_0 h(\tau)$ , где  $h(\tau)$  - функция Хевисайда. Механические характеристики вязкоупругого материала соответствуют некоторой модели твердого топлива.

В качестве вычислительного инструмента для расчетов коэффициентов аппроксимаций и построение графиков напряжённо деформированного состояния, был использован математический пакет Wolfram Mathematica v12.1.0, код представлен в Приложении 1.

Зная, что  $p(\tau)$  - ступенчатая функция, воспользуемся следующими соображениями для упрощения вычисления интегралов в формуле (1.11):

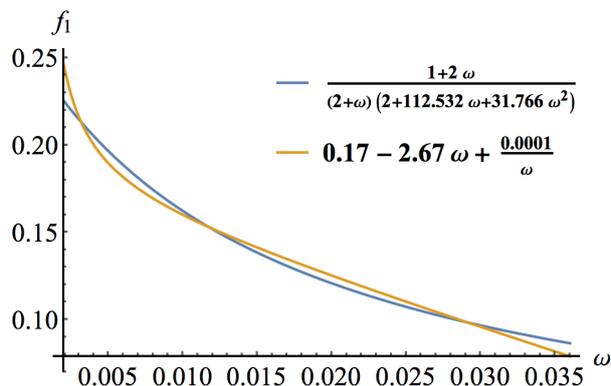
$$p(\tau) = p_0 h(\tau) \Rightarrow dp(\tau) = p_0 \delta(\tau) d\tau \Rightarrow \int_0^t \Pi(t - \tau) dp(\tau) = p_0 \int_0^t \Pi(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = p_0 \Pi(t) ,$$

аналогично для  $R(t)$

Описанным в разделе 1.5 способом, решаем систему (1.12) и находим искомые коэффициенты  $f_k^{(0)}$ ,  $f_k^{(1)}$ ,  $f_k^{(-1)}$  разложения (1.9).

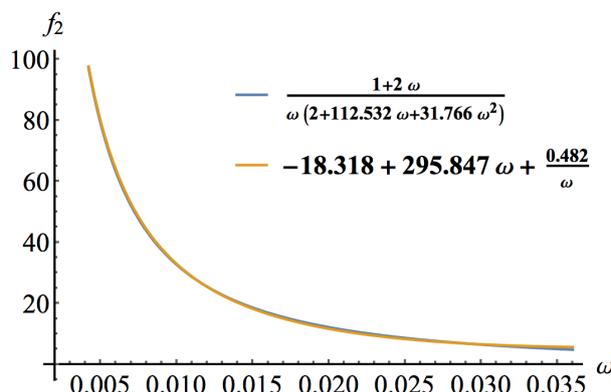
Результаты нахождения аппроксимации для  $f_1(\omega)$ :

$$\begin{aligned} f_1^{(0)} &= 0.17 \\ f_1^{(1)} &= -2.67 \\ f_1^{(-1)} &= 0.0001 \end{aligned}$$



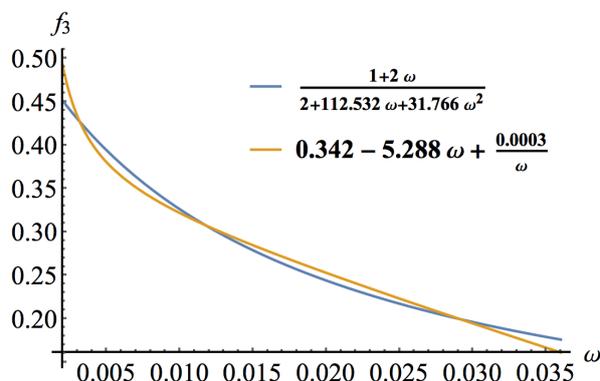
Результаты нахождения аппроксимации для  $f_2(\omega)$ :

$$\begin{aligned} f_2^{(0)} &= -18.318 \\ f_2^{(1)} &= 295.847 \\ f_2^{(-1)} &= 0.482 \end{aligned}$$



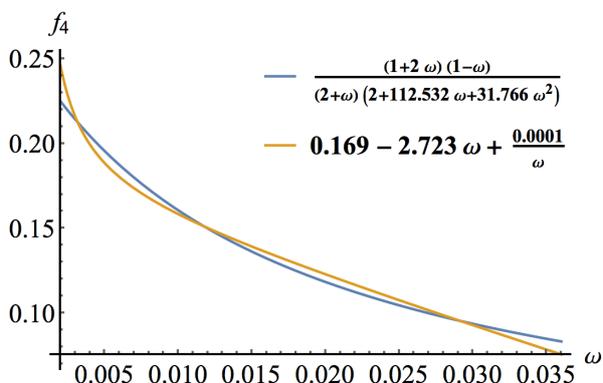
Результаты нахождения аппроксимации для  $f_3(\omega)$ :

$$\begin{aligned} f_3^{(0)} &= 0.342 \\ f_3^{(1)} &= -5.288 \\ f_3^{(-1)} &= 0.0003 \end{aligned}$$



Результаты нахождения аппроксимации для  $f_4(\omega)$ :

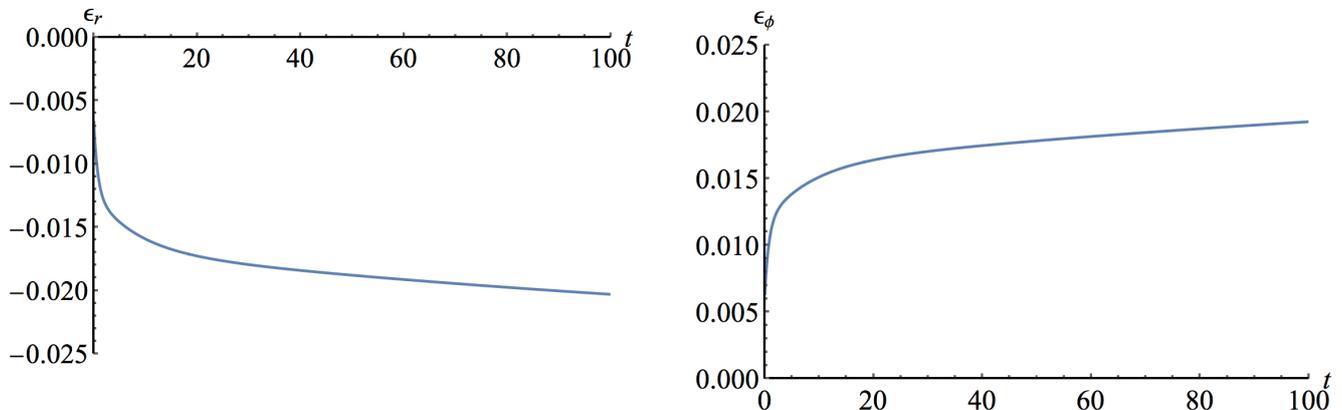
$$\begin{aligned} f_4^{(0)} &= 0.169 \\ f_4^{(1)} &= -2.723 \\ f_4^{(-1)} &= 0.0001 \end{aligned}$$



Графики были построены на основании соотношений (1.9). Из формул (1.13) следует, что в наших расчетах  $\omega$  принадлежит отрезку  $[0.002, 0.036]$ . Теперь подставим, полученные численные значения для  $f_k^{(0)}$ ,  $f_k^{(1)}$ ,  $f_k^{(-1)}$ , в формулы (1.12) для вычисления компонент напряжений и деформаций. Это было

выполнено с помощью программы в Wolfram Mathematica, далее приведем графические результаты.

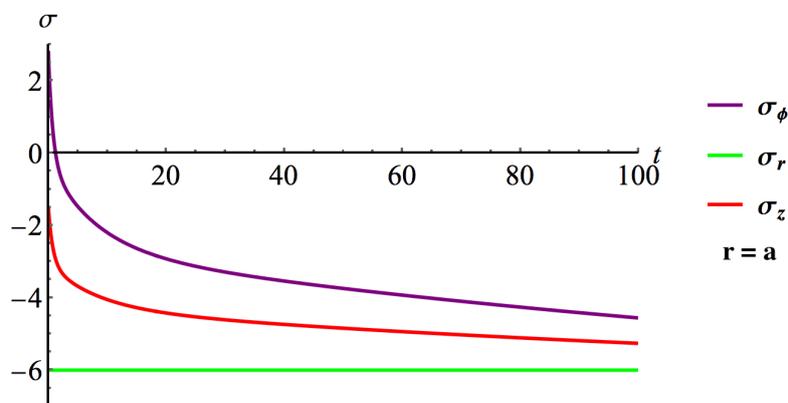
## 1.7 Графические результаты расчетов



Используя формулу (1.12), а так же учитывая аппроксимации, приведенные в разделе 1.6, получаем следующие решения, представленные графически (при  $r = a$ ):

Рис.1.2

Графики деформаций, на Рис.1.2, показывают монотонное возрастание деформации  $\varepsilon_\varphi(a, t)$  и  $|\varepsilon_r(a, t)|$ , что является иллюстрацией процесса



ползучести наблюдающегося в вязкоупругих материалах при постоянной нагрузке. Также, физически достоверным является то, что при действии внутреннего давления  $\varepsilon_\varphi(a, t)$  больше нуля, а  $\varepsilon_r(a, t)$  меньше нуля.

Рис.1.3

Из Рис.1.3 видно, что осевое напряжение  $\sigma_z(t)$  является сжимающим, что согласовывается с условием плоской деформации в задаче о цилиндре под действием внутреннего давления. Напряжение  $\sigma_\varphi(r, t)$  при  $r = a$  является растягивающим при малых  $t$ , а далее является сжимающим. На внутреннем радиусе  $\sigma_r = -p_0$ , в соответствии с граничным условием.

Рассмотрим радиальное напряжение при  $r = b$  :

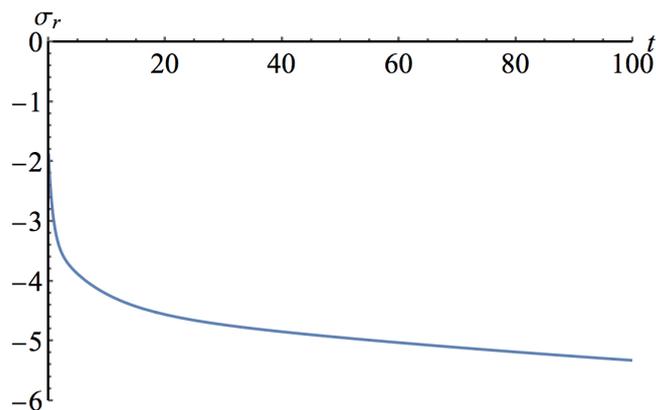


Рис.1.4

Из Рис.1.4 видно, что радиальное напряжение на внешнем радиусе также является сжимающим, но в отличие от  $\sigma_r(r, t)$  при  $r = a$ , со временем возрастает по модулю.

Так же было проверено выполнение уравнения равновесия для напряжений при  $t = 10c, r \in [a, b]$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = - \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r},$$

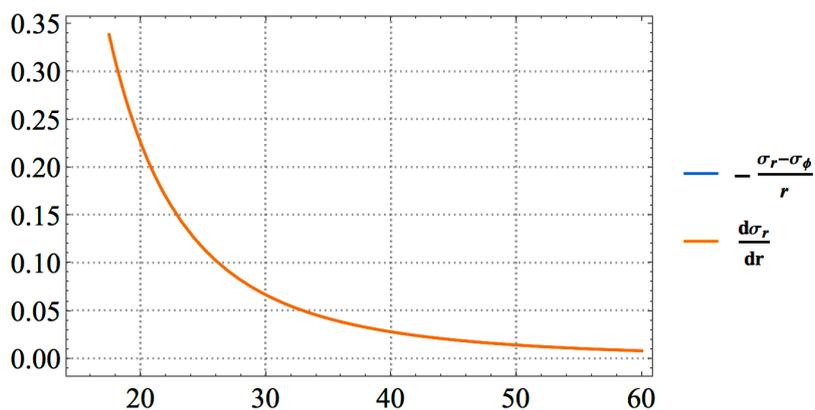
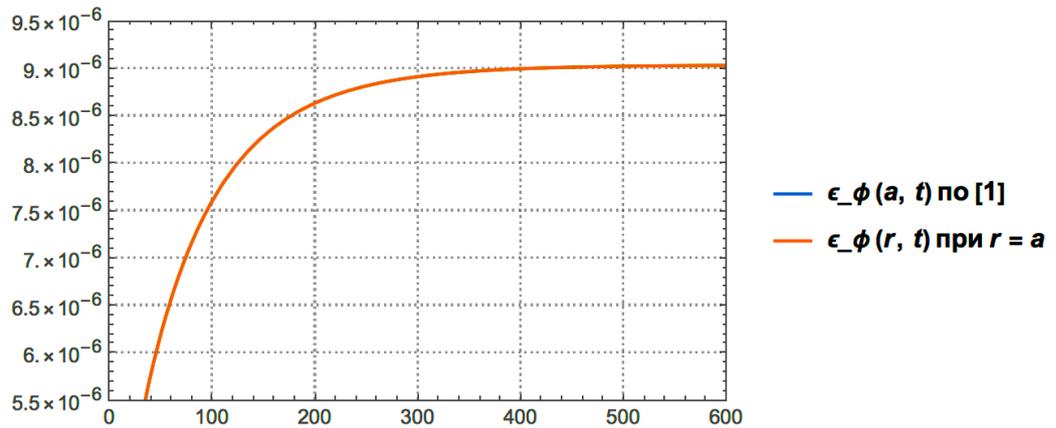


Рис.1.5

На Рис.1.5 видно, что графики правой и левой частей уравнения равновесия сливаются в одну линию, значит условия равновесия выполнены корректно.

На Рис.1.6 показано, что деформация  $\varepsilon_\phi(a, t)$ , полученная в работе [1], а также  $\varepsilon_r(a, t)$ , найденная в ходе работы, получают как частный случай из формул (1.12) при  $r = a$ .

Для  $\epsilon_\varphi$



Для  $\epsilon_r$

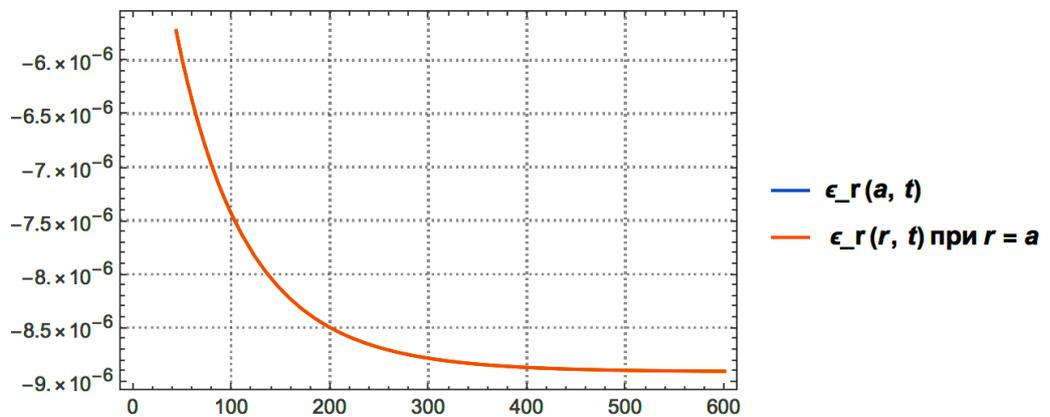


Рис.1.6

## Основные результаты I главы.

Рассмотрена известная задача о вязкоупругом цилиндре, заключенном в упругую оболочку и находящемся под действием внутреннего давления. Для ее решения был использован метод преобразований Л - К совместно с методом аппроксимаций А. А. Ильюшина. При этом, дополнительно к формулам, приведенным в монографии [1], получено выражение для  $\epsilon_\varphi$  и  $\epsilon_r$  при любом значении радиуса  $r$ , и исправлены опечатки в формуле (2.161) той же монографии для трехчленной аппроксимации одной из функций, входящих в решение. Обнаружена малость величины определителя системы алгебраических уравнений в методе наименьших квадратов, вследствие чего округление величин, являвшихся коэффициентами системы, радикальным образом меняло вид решения. Применение пакета Wolfram Mathematica позволило аппроксимировать трехчленными соотношениями функции, зависящие от  $\omega$ , с достаточно высокой точностью. В приложении 1.1 рассмотрены различные варианты постановки граничных условий с оболочкой.

# **Глава II Численное решение задачи с помощью программного комплекса ANSYS, сравнение с решением, полученным методом аппроксимаций**

## **2.1 Решение для упругого цилиндра в упругой оболочке**

Для решения поставленной выше задачи был также использован программный комплекс ANSYS, основанный на применение метода конечных элементов. При рассмотрении вязкоупругой задачи сначала было получено численное решение для упругого цилиндра в упругой оболочке. Конечно-элементная модель построена с учетом осевой симметрии задачи и условия плоской деформации  $\varepsilon_z = 0$ . При решении задачи использовался четырех-узловой конечный элемент Plane 182 с опцией осевая симметрия. Моделирование упругой «оболочки» - внешнего цилиндра небольшой толщины  $h$ , происходило так же с использованием конечного элемента Plane 182. По радиусу в цилиндре бралось от 100 до 1000 элементов со сгущением к внутренней поверхности цилиндра, «оболочка» разбивалась на 5 - 10 элементов. По длине рассматривался один слой элементов (Рис.2.1). Осевые перемещения верхней и нижней границы слоя полагались равными нулю, тогда осевое перемещение внутри элементов равно нулю, следовательно, осевая деформация тождественно равна нулю.

При решение задачи принималось, что у материала цилиндра модуль Юнга в 100 раз меньше, чем модуль Юнга оболочки. Коэффициенты Пуассона были взяты одинаковыми и равными 0.3.

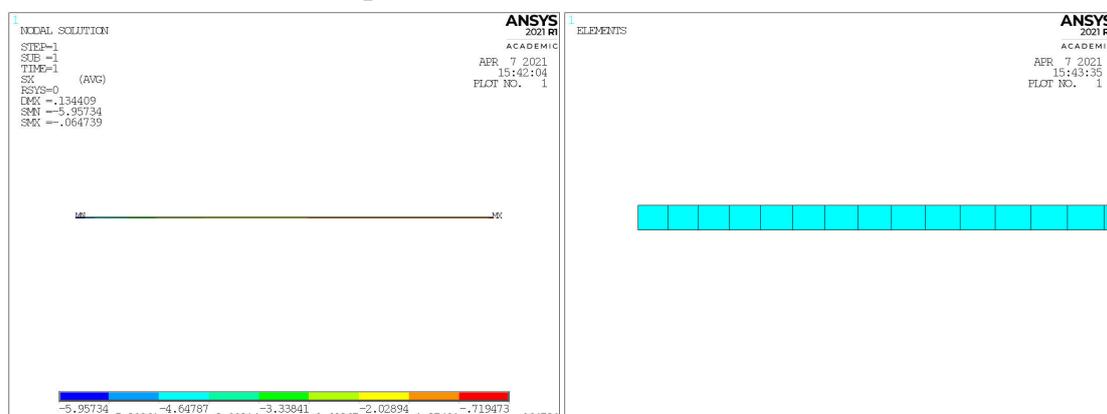


Рис.2.1

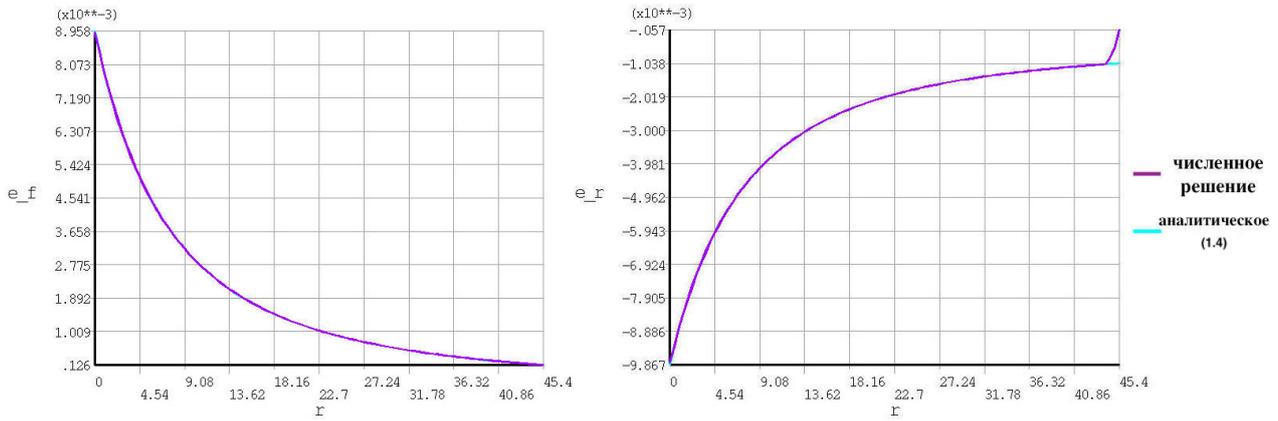


Рис.2.2

На Рис.2.2 представлены сравнения расчетных (полученных в ANSYS - фиолетовые кривые) и аналитических (полученных по формуле (1.4) для упругого цилиндра - голубые кривые) значений деформаций  $\varepsilon_\varphi(r)$  (показанных на левом рисунке) и  $\varepsilon_r(r)$  (на правом). Видно, что для точек упругого цилиндра  $r \in [a, b]$  расчетные и аналитические значения совпадают.

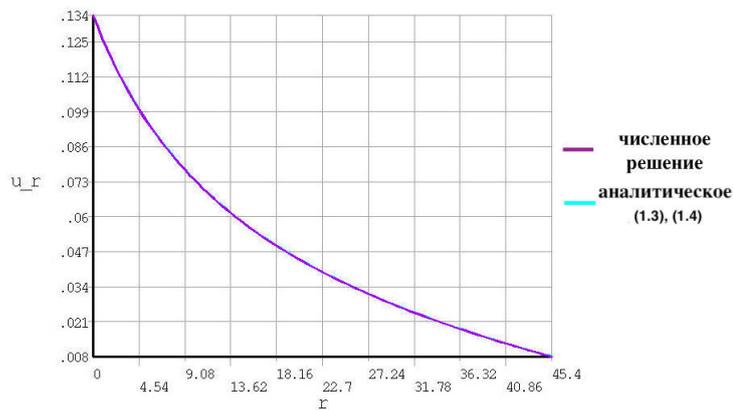


Рис.2.3

На Рис.2.3 представлено сравнение расчетных и аналитических (полученных по формуле (1.4) для упругого цилиндра и по формуле (1.3) для точек оболочки) значений радиальных перемещений, построенных для  $r \in [a, b + h]$ . Видно, что для точек упругого цилиндра и оболочки расчетные и аналитические значения совпадают.

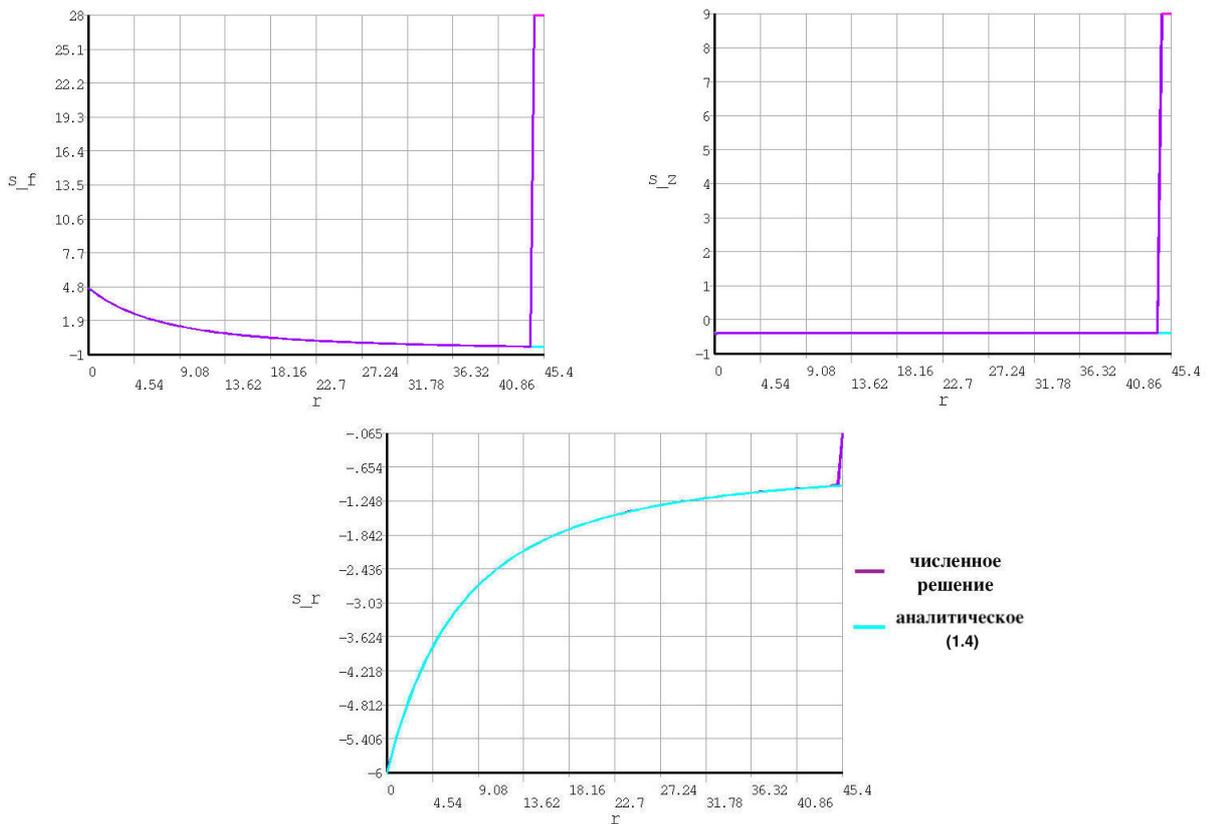


Рис.2.4

На Рис.2.4 представлены сравнения расчетных (полученных в ANSYS) и аналитических (полученных по формуле (1.4) для упругого цилиндра) значений напряжений  $\sigma_\varphi(r)$  (показанных на левом рисунке),  $\sigma_r(r)$  (на нижнем рисунке) и  $\sigma_z$  (на правом). Видно, что для точек упругого цилиндра  $r \in [a, b]$  расчетные и аналитические значения совпадают. В «упругой оболочке»  $r \in [b, b + h]$ , напряжения совпадают с вычисленными по формулам задачи Ламе о трубе под действием внутреннего давления равного  $q$ .

## 2.2 Моделирование свойств вязкоупругого материала в ANSYS

При моделировании вязкоупругих свойств материала в ANSYS требуется задание мгновенных упругих модулей материала: мгновенного модуля Юнга  $E_0$  и коэффициента Пуассона  $\nu_0$ . Функции сдвиговой  $G(t)$  и объемной  $K(t)$  релаксации задаются в виде рядов Прони

$$\begin{cases} R(t) = 2G(t) = 2G_0 \left( \alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{nG} \alpha_i^G e^{-\frac{t}{T_i^G}} \right) \\ K(t) = K_0 \left( \alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{nK} \alpha_i^K e^{-\frac{t}{T_i^K}} \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\text{где } G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}, K_0 = \frac{E_0}{3(1 - 2\nu_0)}, \alpha_i^G = \frac{G_i}{G_0}, \alpha_i^K = \frac{K_i}{K_0} \quad (2.2),$$

$T_i^G$  и  $T_i^K$  это времена сдвиговой и объемной релаксации. Заметим что, так как  $G(0) = G_0, K(0) = K_0$  имеют место соотношения:

$$\alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{nG} \alpha_i^G = 1, \quad \alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{nK} \alpha_i^K = 1. \quad (2.3)$$

В рассматриваемой задаче принимается, что материал имеет сдвиговую релаксацию, а изменение объема происходит по упругому закону. Вместо второго соотношения в (2.1) принято, что  $\sigma = K\theta$ , где  $K = K_0$  (1.1).

Смоделируем в ANSYS опыт на релаксацию вязкоупругого цилиндра, имеющего свойства материала, описанного в разделе 1.6 и взятого из работы [8]. При расчетах принято, что начальная длина цилиндра  $2h = 10$  см, радиус  $r = 1$  см. Рассмотрим осевое растяжение цилиндра при котором удлинение равно  $10^{-4}$  см. При этом осевая деформация равна  $10^{-5}$ . Рассматриваем «мгновенное» нагружение до этой величины (в ANSYS этот шаг нагруженная реализуется за  $10^{-6}$  с). Далее эта деформация держится постоянной до  $t = 100$  с, решение задачи проводилось за 1000 «шагов». В решении задачи учитывалась осевая симметрия и симметрия относительно срединного поперечного сечения. Задача решалась в 2D постановке, для половины цилиндра по длине. Использовались элементы Plane 182 с опцией осевая симметрия. На Рис.2.5 представлена конечно-элементная модель. Ось  $y$  является осью симметрии. На срединном сечении ( $y = 0$ ) задавалось осевое перемещение  $u_y = 0$ , касательное напряжение  $\sigma_{xy} = 0$ . На верхней границе ( $y = h = 5$ ) задано осевое перемещение  $u_y = 5 \times 10^{-5}$  см, касательное напряжение  $\sigma_{xy} = 0$ . На оси симметрии ( $x = 0$ ) радиальное перемещение равно нулю, касательное напряжение равно нулю ( $\sigma_{xy} = 0$ ). Боковая поверхность цилиндра ( $x = r$ ) свободна от нагрузки ( $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$ ).

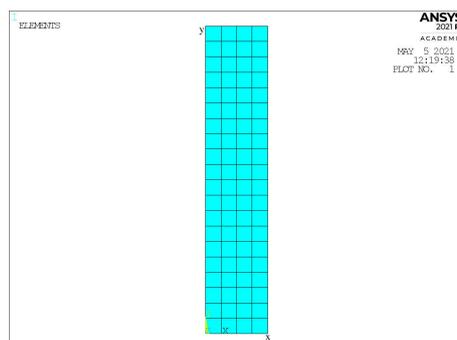


Рис.2.5

В работе [5] была приведена функция релаксации и задано значение  $\nu_0 = 0.473$  :

$$R(t) = 22.6 + 10.32e^{-152.11t} + 204.1e^{-0.133t} + 309.2e^{-1.296t} + 8.66e^{-16.272t} + 3.46e^{-2.66t} + 2.58e^{-0.47t} + 5.37e^{-0.00384t} + 2.48e^{-0.072t} \quad (2.4).$$

Из значения функции релаксации при  $t = 0$  мы знаем величину  $2G(0) = R(0) = \frac{E_0}{1 + \nu_0}$ . Задавая величину  $\nu_0 = 0.473$ , из значения

$$2G(0) = 568.78 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} \text{ находим } E_0 = 837.79 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}.$$

Этим значениям мгновенных упругих модулей соответствует значение  $K_0 = 5171 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ .

Из численного решения задачи на релаксацию вязкоупругого цилиндра, получены графики изменения по времени осевого напряжения. На Рис.2.6 приведен график, построенный для  $\nu_0 = 0.473$ . Графики функции релаксации получены по формуле  $R(t) = \frac{S_{11}(t)}{\varepsilon_{11}(0)} = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_1^0(1 + \nu_0)}$  (2.5), и приведены на Рис.2.7

при значении  $\nu_0 = 0.473$ . Здесь же построен график для функции релаксации по формуле (2.4) из работы [5]. Видно, что эти графики совпадают.

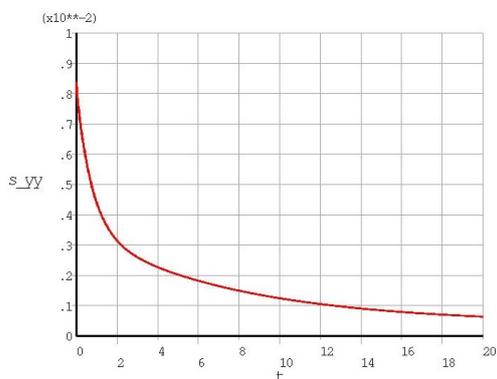


Рис.2.6

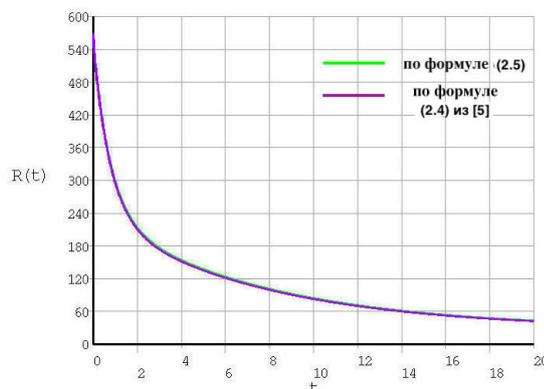


Рис.2.7

На Рис.2.8 построен график изменения коэффициента поперечной деформации (отношение поперечной деформации к осевой, взятое с обратным знаком.) для  $\nu_0 = 0.473$  при  $t \in [0, 20]$ . Из рисунка видно, что коэффициент поперечной деформации  $\nu$  возрастает от величины 0.473 при  $t = 0$  до 0.497 при  $t = 20$ с. Так же, известно из программы, что при  $t = 100$ с,  $\nu(t) = 0.4987$ .

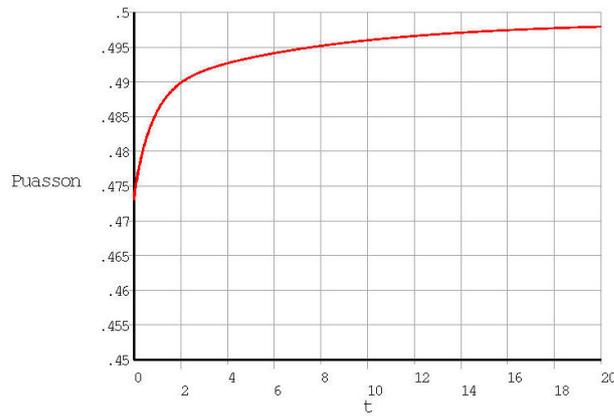


Рис.2.8

Так же, при моделировании релаксации были рассмотрены величины  $\nu_0$  равные 0.3, 0.4, 0.473, 0.498. При  $\nu_0 = 0.3$  получаем  $E_0 = 739.4 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ ,  $K_0 = 616 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ . На Рис.2.9 представлено сравнение для функции релаксации полученной численно при  $\nu_0 = 0.3$  и построенной по формуле (2.4) из работы [5]. Видно что в данном случае совпадение графиков ухудшилось. Можно отметить, что неточное задание мгновенного значения коэффициента Пуассона  $\nu_0$ , приводит к неточному совпадению расчетных функций релаксаций с функцией из работы [5]. Однако, при малых временах  $t$  наблюдается совпадение кривых.

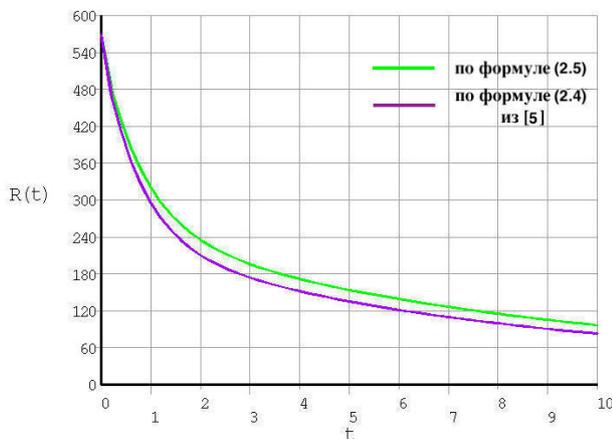


Рис.2.9

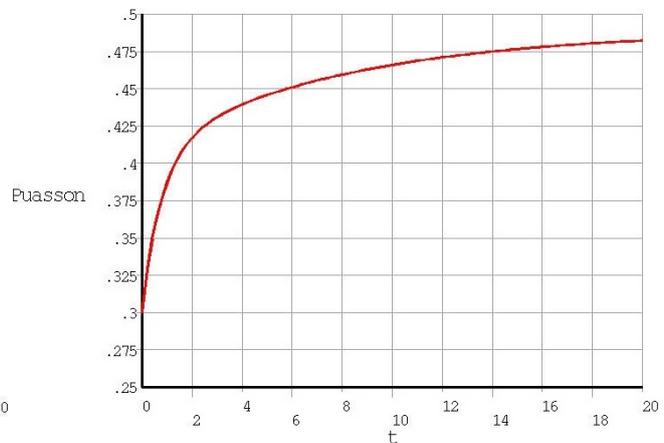


Рис.2.10

На Рис.2.10 построен график изменения коэффициента поперечной деформации для  $\nu_0 = 0.3$  при  $t \in [0, 20]$ . Из рисунка видно, что коэффициент поперечной деформации возрастает от величины 0.3 при  $t = 0$  до 0.482 при  $t = 20$ .

Аналогично был смоделирован в ANSYS опыт на ползучесть вязкоупругого цилиндра, на верхнем торце ( $y = h$ ) задавалось постоянное напряжение  $\sigma_{yy}$ . На Рис.2.11 представлена функция ползучести, построенная для  $\nu_0 = 0.473$

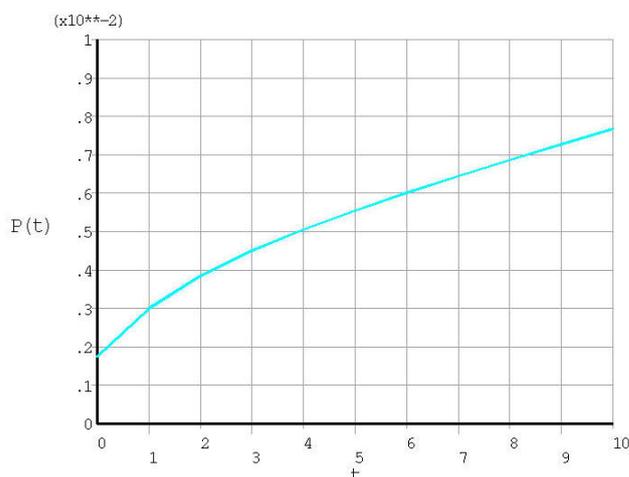


Рис.2.11

Данный график хорошо совпадает с графиком функции ползучести, приведенным в работе [5].

### 2.3 Решение задачи о вязкоупругом цилиндре в упругой оболочке в программном комплексе ANSYS и его сравнение с решением, полученным методом аппроксимаций

Сравним решения задачи о вязкоупругом цилиндре в упругой оболочке под действием внутреннего давления, полученных с помощью программного комплекса ANSYS и методом аппроксимаций, в соответствии с результатами, изложенными в разделе 1.6. Везде далее под «МА» будет подразумеваться метод аппроксимаций Ильюшина. Макрос решения задачи в ANSYS, написанный на языке APDL, приведен в Приложении 2. Программа решения задачи МА с помощью Wolfram Mathematica v12.1.0 представлена в Приложении 1. При решении задачи в ANSYS принята модель материала, описанная в разделе 2.2 при  $\nu_0 = 0.473$ , которому соответствует

$$K = 5171.59 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}.$$

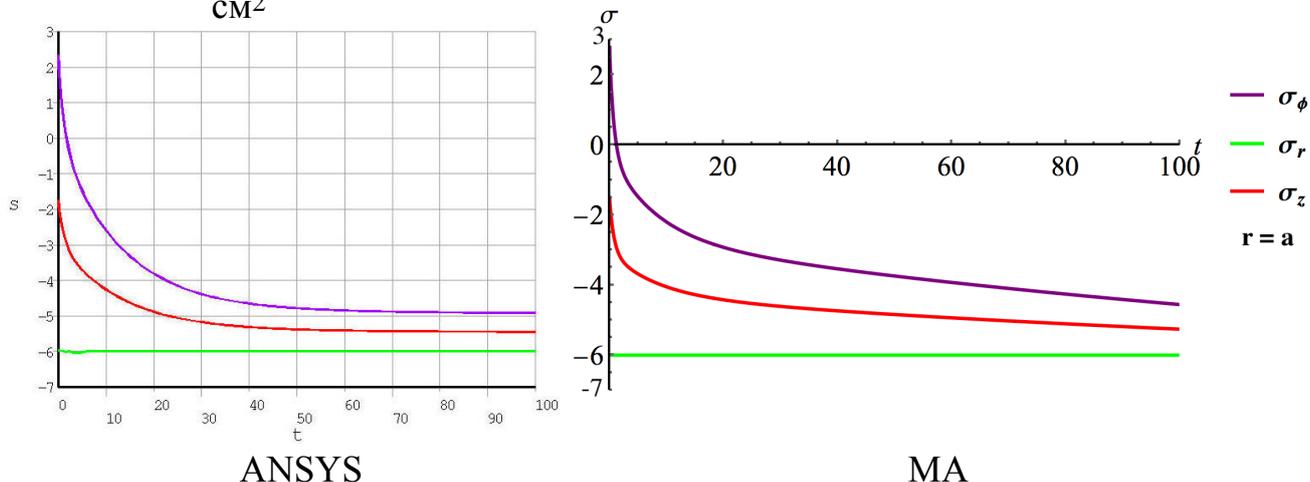


Рис.2.12

На Рис.2.12 показаны графики для всех отличных от нуля напряжений в поставленной задаче. Слева расположено решение полученное с помощью ANSYS, а справа с помощью МА. Графики всех компонент очень похожи и ведут себя одинаково, отличие соответствующих функций - невелико.

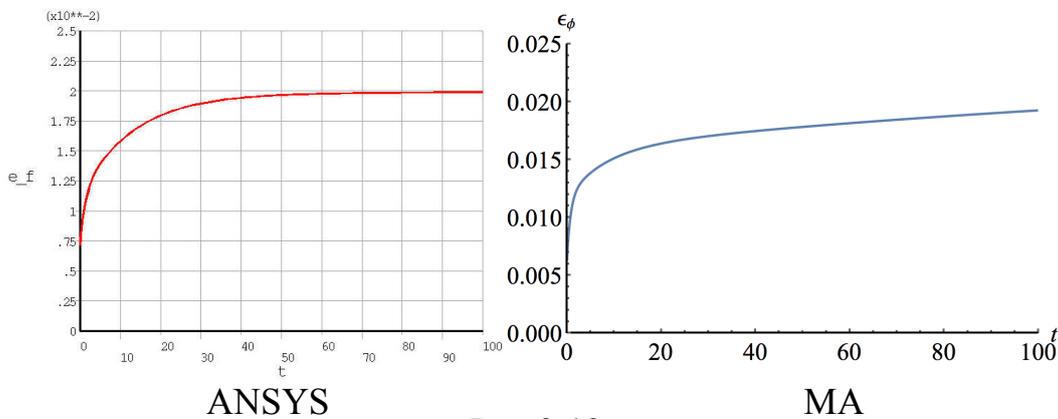


Рис.2.13

На Рис.2.13 показаны графики для  $\epsilon_{\varphi}(r)$ . Слева расположено решение полученное с помощью ANSYS, а справа с помощью МА. Графики совпадают между собой. А поведение функций согласуется с механическим смыслом.

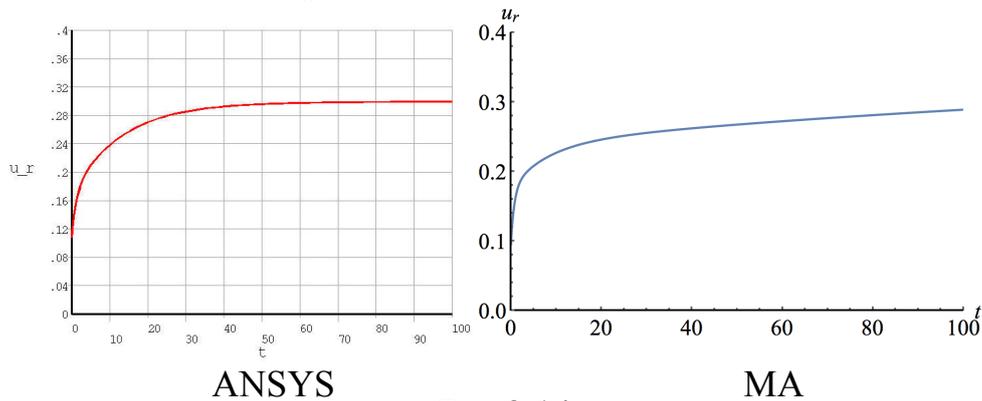


Рис.2.14

На Рис.2.14 показаны графики для  $u_r$ . Слева расположено решение полученное с помощью ANSYS, а справа с помощью МА. Графики совпадают.

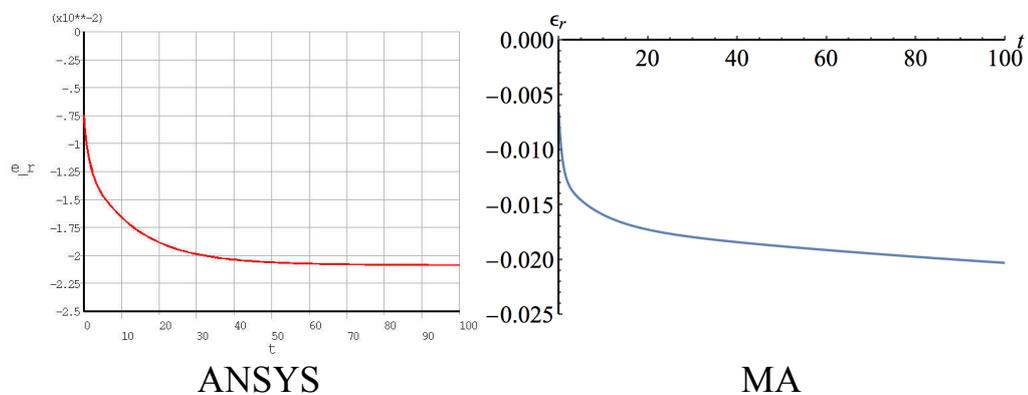


Рис.2.15

На Рис.2.15 показаны графики для  $\epsilon_r(a, t)$ . Слева расположено решение полученное с помощью ANSYS, а справа с помощью МА. Для более точного

сравнения двух решений соответствующие им графики были построены на одном рисунке при  $t \in [0, 10\text{с}]$  (Рис.2.12). При этом использован Excel.

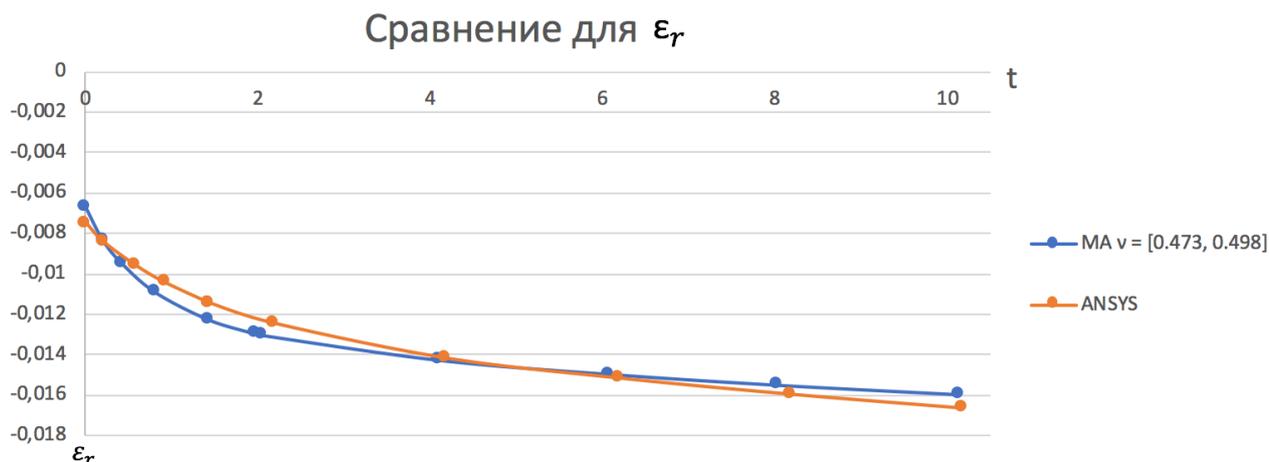


Рис.2.16

На Рис.2.16 видно хорошее совпадения двух решений.

Так же, для сравнения решений, показаны графики построенные для радиального напряжения при  $r = b$

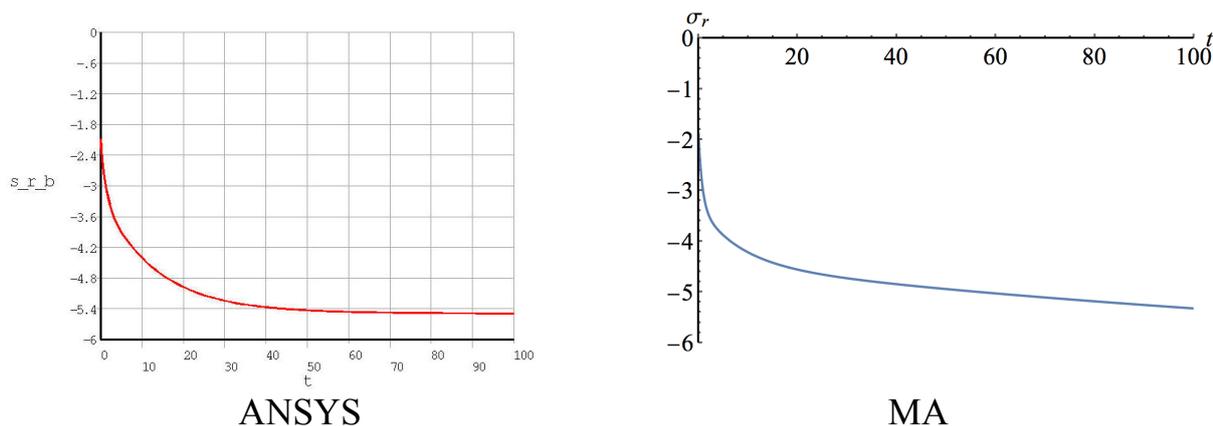


Рис.2.17

## 2.4 Анализ зависимости решения задачи, полученного методом аппроксимаций, от диапазона изменения коэффициента Пуассона материала

Большой диапазон изменения коэффициента поперечной деформации.

При решении задачи методом аппроксимаций была замечена сильная зависимость точности решения от диапазона изменения коэффициента Пуассона. Аппроксимация функций  $f_k^{(i)}$  заметно ухудшается при увеличении этого диапазона. Например, при  $\nu \in [0.3, 0.498]$  аппроксимация функции  $f_2$  имеет вид оранжевой кривой на Рис.2.17 (сравните с соответствующим рисунком в разделе 1.6)

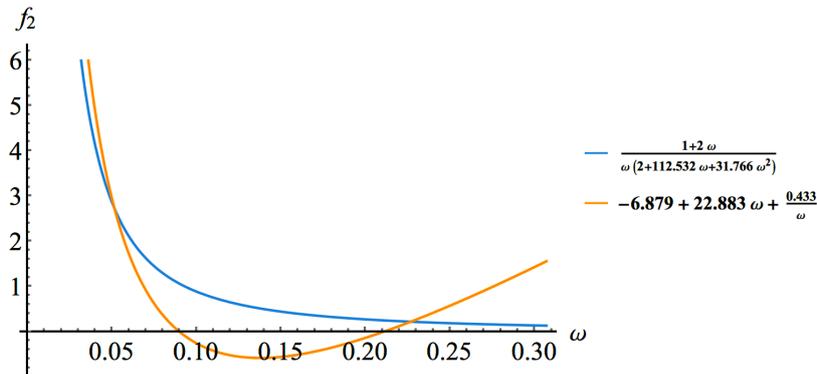


Рис.2.17

Неудачная аппроксимация  $f_2$  заметно портит решение. На Рис.2.18 показаны графики функции  $\epsilon_r(a, t)$ , полученные при  $\nu \in [0.3, 0.498]$  и  $\nu \in [0.473, 0.498]$ . (Решение задачи с вторым диапазоном изменения было показано в разделе 1.6.)

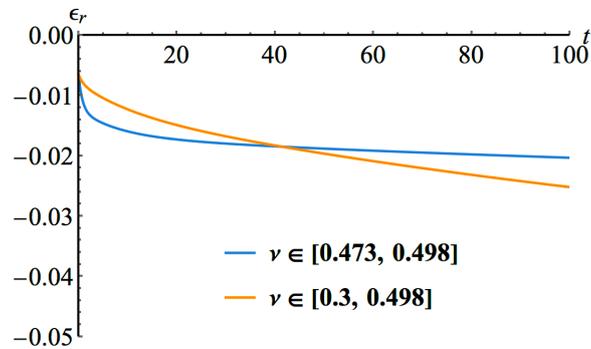


Рис.2.18

На Рис.2.19 более точно сравниваются решения, полученные с помощью ANSYS и МА при  $\nu \in [0.473, 0.498]$ . Так же, для сравнения, показано решение при  $\nu \in [0.3, 0.498]$ . (при построении графиков использован Excel)

Сравнение для  $\epsilon_r$

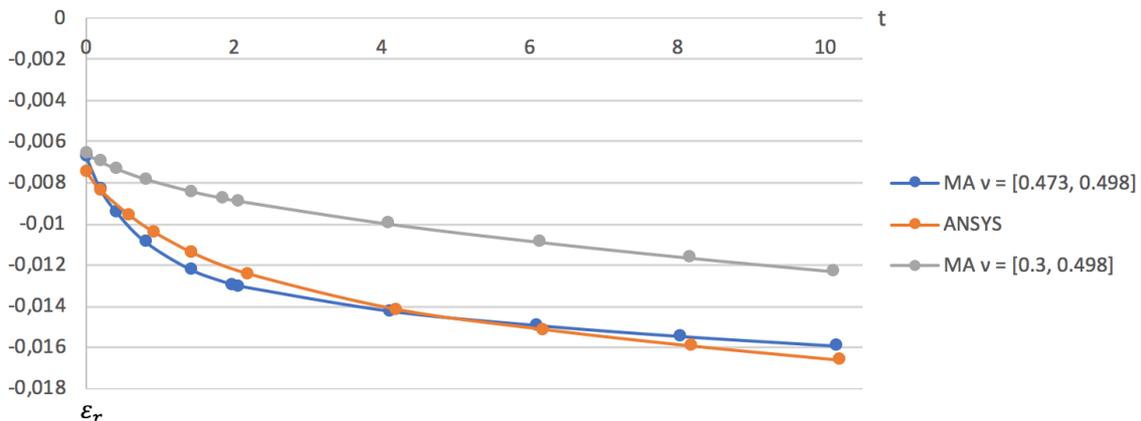


Рис.2.19

Из рисунка видно, что, чем больше изменение диапазона коэффициента поперечной деформации и как следствие хуже аппроксимация функции, тем хуже точность искомого решения. (Разница между серым и синим графиков.)

## О зависимости решения от диапазонов изменения коэффициента поперечной деформации в МА и в ANSYS

Обнаружена сильная зависимость решения полученного методом аппроксимаций от взятого диапазона  $\nu$  (не только от длины диапазона, но и от его расположения внутри отрезка  $[0, 0.5]$ ). При вложении одного диапазона в другой ( $\nu \in [0.473, 0.498]$ , в более широкий  $\nu \in [0.3, 0.498]$ ), полученные решения методом аппроксимаций и ANSYS близки (смотри график на Рис.2.12 фиолетовая кривая или желтая кривая на Рис.2.20). Если указанные диапазоны имеют только одну общую точку, то отличия в решении получаются существенными (синяя и желтая кривая Рис.2.20).

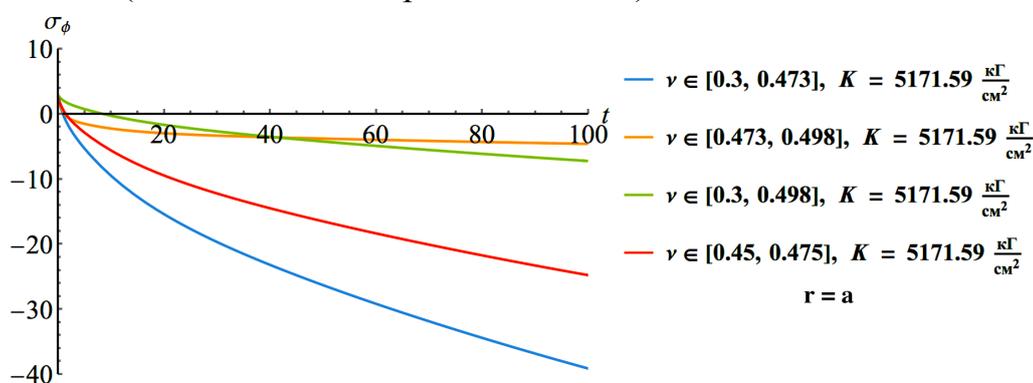


Рис.2.20

Из Рис.2.20 видно, что если диапазоны имеют малое пересечение, то решение методом аппроксимаций получается ближе к точному (красная кривая), но все равно от него отличается существенно. При расширении диапазона, решение МА ухудшается (зеленая кривая) вследствие плохой аппроксимации (см в раздел 2.4). Так же расчеты методом аппроксимаций были проведены для других значений  $K$ , при разных диапазонах изменения коэффициента поперечной деформации (Рис.2.21) и (Рис.2.22 при  $K = 616.17$ )

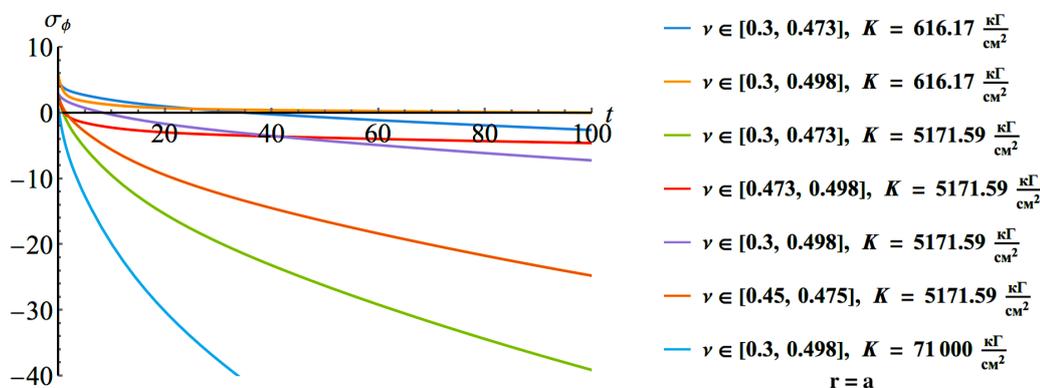


Рис.2.21

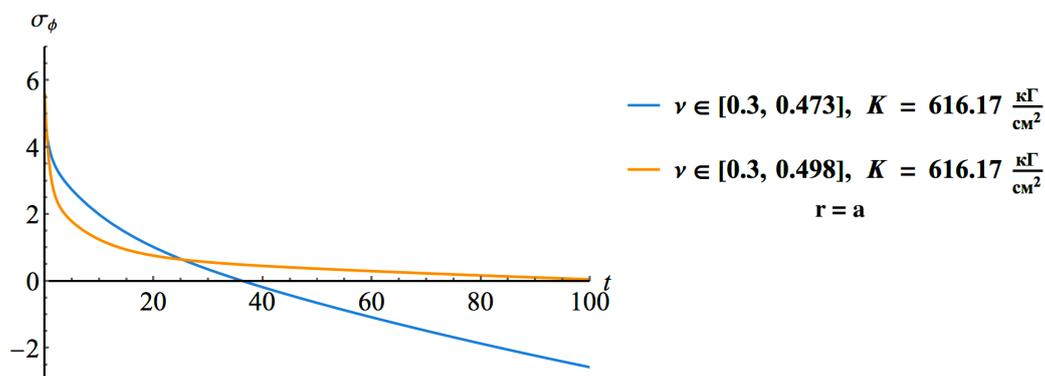


Рис.2.22

Аналогичные расчеты, проделанные для всех остальных компонент тензоров напряжений и деформаций, а так же для перемещений (см. [приложения 2.1](#)) подтверждают сделанные выше выводы.

## Основные результаты главы II.

Во второй главе изучены способы описания свойств вязкоупругих материалов в ANSYS и с помощью этого программного комплекса решена задача о НДС вязкоупругого цилиндра, скрепленного с упругой оболочкой, и находящегося под действием внутреннего давления.

Сравнение решений, полученных в ANSYS и методом аппроксимаций Ильюшина ([глава I](#)) показало сильное влияние на величину напряжений и деформаций, найденных методом аппроксимаций, выбранного диапазона изменения коэффициента поперечной деформации  $\nu$ . Наилучшее совпадение результатов наблюдается при совпадении диапазонов  $[\nu_1, \nu_2]$  изменения  $\nu(t)$  при использовании обоих методов. Увеличение ширины диапазона  $\nu(t)$  в методе аппроксимаций ухудшает аппроксимацию функций  $f_k(r, \omega)$  ( $\omega = 2G/3K$ ) трехчленным соотношением  $f_k^{(0)}(r) + f_k^{(1)}(r)\omega + \frac{1}{\omega}f_k^{(-1)}(r)$ , что снижает точность решения. Аналогично при неполном совпадении диапазонов  $[\nu_1, \nu_2]$  в двух методах, результаты их применения к рассматриваемой задаче могут заметно различаться.

# **Глава III      НДС полого вязкоупругого цилиндра, скрепленного с упругой оболочкой, нагруженного давлением, приложенным к изменяющейся внутренней границе**

## **3.1 Постановка задачи**

Постановка задачи об осесимметричной деформации вязкоупругого цилиндра включает следующие уравнения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} s_{ij} = 2 \int_0^t G(t - \tau) \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau \\ \sigma = K\theta \end{cases} \quad (3.3)$$

$K$  - модуль объемного сжатия,  $G(t)$  - функция сдвиговой релаксации (ранее обозначалась  $R(t) = 2G(t)$ ).

### **Граничные условия**

На меняющейся внутренней поверхности при  $r = a(t)$  и границе контакта с оболочкой при  $r = b$  возьмем в виде [2]

$$\begin{cases} \sigma_r(a(t), t) = -p(t) \\ \sigma_r(b, t) = -B\varepsilon_\varphi(b, t), \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\text{где} \quad B = \frac{E_* h}{b(1 - \nu_*^2)} \quad (3.5)$$

согласно работе [1],  $p(t)$  - давление на внутренней поверхности. Здесь подразумевается  $r = a(t)$  - радиус выгорающей внутренней поверхности цилиндра;  $a(t) \in [a(0), b]$ ;  $t \in [0, t_0]$ , где  $t_0$  - время «выгорания», т.е. время, при котором  $a(t_0) = b$ .

## **3.2 Получение интегральных уравнений**

Отличием данной задачи от рассмотренной в главах I и II является задание одного из граничных условий на меняющейся со временем поверхности. По этой причине для ее решения не удастся применить метод преобразований Лапласа - Карсона. Вместо этого задача сводится к решению двух интегральных уравнений, которые получим, следуя приемам, изложенным в статье [2]

(русскоязычное изложение см. в книге [3]). Исходя из постановки задачи, запишем дополнительные уравнения

$$\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z = 3K(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) = 3K\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right), \quad (3.6)$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) d\tau = 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) d\tau, \quad (3.7)$$

$$\sigma_\varphi - \sigma_z = 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z) d\tau = 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{u}{r}\right) d\tau. \quad (3.8)$$

Из уравнений (3.1), (3.6), (3.7), (3.8), определяются все напряжения и деформации задачи. Однако граничные условия (3.4) связаны только с неизвестными  $\sigma_r$  и  $\varepsilon_\varphi$ , поэтому первым делом исключим из уравнений  $\sigma_z$  и  $\sigma_\varphi$ . Для этого складываем уравнение (3.1) с уравнением (3.7) и учитывая (3.2) получаем

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -2r \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial r \partial \tau} d\tau, \quad (3.9)$$

интегрируем по  $r$

$$\sigma_r = -2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \tau} d\tau + f(t), \quad (3.10)$$

здесь  $f(t)$  - произвольная функция, теперь интегрируем по частям (3.10)

$$\sigma_r(r, t) = f(t) - 2G(0)\varepsilon_\varphi(r, t) - 2 \int_0^t \varepsilon_\varphi(r, t) G'(t-\tau) d\tau,$$

штрихом обозначена производная по аргументу. Далее пользуемся граничным условием (3.4) и получаем уравнение на  $\sigma_r(b, t)$

$$\sigma_r(b, t) + \frac{2\mu}{E} \int_0^t G'(t-\tau) \sigma_r(b, \tau) d\tau = -B \frac{\mu}{E} f(t), \quad (3.11)$$

где  $\mu = \frac{E}{2G(0) - B}$ ,  $E$  - начальное значение модуля Юнга вязкоупругого материала. Это интегральное уравнение Вольтерры второго рода, типа свертки. В этом уравнении две неизвестные функции:  $\sigma_r(b, t)$  и  $f(t)$ . Для того, что бы найти их, нам необходимо получить второе интегральное уравнение.

В работе [2], для получения второго интегрального уравнения предлагается следующий способ: сначала исключаем  $\sigma_z$  из уравнения (3.6) и (3.8), затем  $\sigma_\varphi$  при помощи уравнения (3.7) и  $u$  с помощью (3.2), получаем

$$3\sigma_r = \frac{3K}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varepsilon_\varphi) + 2 \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \varepsilon_\varphi + 2r \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} \right) d\tau, \quad (3.12)$$

теперь исключаем  $\varepsilon_\varphi$  с помощью уравнения (3.9) и (3.10), для того что бы оставить нужные нам функции ( $\sigma_r(r, t)$  и  $f(t)$ ). Для этого нужно сложить удвоенное (3.9) с (3.10) и учесть (3.12), в результате получим

$$\Omega(r, t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{3K}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varepsilon_\varphi), \quad (3.13)$$

где введено обозначение  $\Omega(r, t) = 2\sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r)$ . (3.14)

Далее складываем удвоенное (3.10) с (3.9) и учитываем (3.13)

$$\Omega(r, t) + \frac{4}{3K} \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial \Omega(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 2f(t) + \frac{1}{3K} \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial 2f(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.15)$$

В итоге мы получили соотношение, соответствующие формуле (25) из [2] стр. 122.

## Замечание

В ходе изучения литературы и перепроверки полученных в работах [2], [3] результатов были найдены неточности. Вследствие этого, полученное ниже в дипломной работе второе интегральное уравнение имеет иной вид по сравнению с предложенным в указанных источниках. В статье [2], для получения второго уравнения, предлагается ввести вспомогательную функцию  $R(t)$  (не путать с функцией релаксации) следующим образом:

$$R(t) + \frac{4}{3K} \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau} d\tau = 2G(t), \quad (3.16)$$

далее на основании ассоциативного свойства сверток уравнение (3.15) переписывается в виде

$$\Omega(r, t) = 2f(t) - \frac{1}{K} \int_0^t R(t - \tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.17)$$

**Утверждение:** Если подставить выражение (3.17) в соотношение (3.15), мы не получим тождества, значит, формула (1.50) стр. 296 из [3] не верна. Так же как и в первоисточнике [2] формула 26 стр. 122.

Докажем это:

Сначала для удобства найдем производную по времени от (3.17)

$$\frac{\partial \Omega(r, t)}{\partial t} = \left[ 2 - \frac{R(0)}{K} \right] \frac{\partial f(t)}{\partial t} - \frac{1}{K} \int_0^t R'(t - \tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.18)$$

Подставим (3.17) и (3.18) в левую часть соотношения (3.15)

$$\begin{aligned}
& 2f(t) - \frac{1}{K} \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{4}{3K} \int_0^t G(t-\tau) \left[ \left[ 2 - \frac{R(0)}{K} \right] \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{K} \int_0^\tau R'(\tau-\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi \right] d\tau = 2f(t) - \frac{1}{K} \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \\
& \quad \frac{4}{3K} \left[ 2 - \frac{R(0)}{K} \right] \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \frac{4}{3K} \frac{1}{K} \int_0^t G(t-\tau) \int_0^\tau R'(\tau-\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Рассмотрим отдельно последний интеграл из (3.19), и воспользуемся ассоциативным свойством свертки:

$$G * \left( R' * \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2} \right) = (G * R') * \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}, \tag{3.20}$$

применив это свойство для интеграла, получаем

$$\frac{1}{K} \int_0^t G(t-\tau) \int_0^\tau R'(\tau-\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi d\tau = \frac{1}{K} \int_0^t \int_0^{t-\xi} G(t-\xi-\lambda) R'(\lambda) d\lambda \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi. \tag{3.21}$$

В силу формулы (3.16)  $\int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{3K}{4} (2G(t) - R(t))$ , значит,

интеграл 0 до  $t - \xi$  в (3.21) можно заменить на

$$\int_0^{t-\xi} G(t-\xi-\lambda) R'(\lambda) d\lambda = \frac{3K}{4} (2G(t-\xi) - R(t-\xi)). \tag{3.22}$$

В итоге интеграл (3.21) с учетом (3.22) приводится к виду

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K} \int_0^t \int_0^{t-\xi} G(t-\xi-\lambda) R'(\lambda) d\lambda \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi &= \frac{3K}{4} \left[ \frac{1}{K} \int_0^t 2G(t-\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{K} \int_0^t R(t-\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi \right].
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Подставим теперь (3.23) в (3.19) с учетом (3.21)

$$\begin{aligned}
& 2f(t) - \frac{1}{K} \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{4}{3K} \left[ 2 - \frac{R(0)}{K} \right] \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\
& \quad - \frac{1}{K} \int_0^t 2G(t-\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi + \frac{1}{K} \int_0^t R(t-\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \\
& \quad 2f(t) + \frac{2}{3K} \left[ 2 - \frac{R(0)}{K} - \frac{3}{2} \right] \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} d\tau.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Напомним, что мы преобразовывали левую часть соотношения (3.15). Теперь сравним ее с правой частью, подставив получившуюся левую часть (3.24) в (3.15)

$$2f(t) + \frac{2}{3K} \left[ 2 - \frac{R(0)}{K} - \frac{3}{2} \right] \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} d\tau \neq 2f(t) + \frac{1}{3K} \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} d\tau. \quad (3.25)$$

Видно, что равенство не выполняется, в правой части, перед интегралом отсутствует коэффициент

$$\left[ 2 - \frac{R(0)}{K} - \frac{3}{2} \right], \quad (3.26)$$

что и требовалось доказать.

Выражение (3.15) будет верным, если формулу (3.17) заменить на следующую:

$$\Omega(r, t) = 2f(t) - \frac{1}{AK} \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3.27)$$

где  $A = 1 + \frac{4}{3K}G(0)$ . В этом случае левая часть равенства (3.25) будет иметь вид

$$2f(t) + \frac{2}{3K} \left[ 2 - \frac{R(0)}{AK} - \frac{3}{2A} \right] \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} d\tau \neq 2f(t) + \frac{1}{3K} \int_0^t G(t-\tau) \frac{\partial^2 f(\tau)}{\partial \tau^2} d\tau.$$

Учитывая, что согласно (3.16) следует что  $R(0) = 2G(0)$ , получим

$$2 - \frac{R(0)}{AK} - \frac{3}{2A} = \frac{4\left(1 + \frac{4}{3K}G(0)\right)K - 2R(0) - 3K}{2AK} = \frac{K\left(1 + \frac{4}{3K}G(0)\right)}{2AK} = \frac{1}{2}. \quad (3.28)$$

Видно, что левая и правая части равенства (3.25) теперь совпадут.

Заметим, что для несжимаемого материала  $K = \infty$  и  $A = 1$ . Следовательно, в этом случае формула (3.17) является верной.

## Получение второго интегрального уравнения

Для того, что бы получить второе интегральное уравнение, рассмотрим формулу (3.15) с учетом (3.14). Дальнейшие преобразования направлены на использование граничного условия на выгорающей поверхности (3.4), которое должно привести к системе двух интегральных уравнений относительно функций  $\sigma_r(b, t)$ ,  $f(t)$ .

Попытка в «лоб» проинтегрировать по  $r$  соотношение (3.15) и использовать граничное условие (3.4) не приводит нас к интегральному уравнению относительно  $\sigma_r(b, t)$ . Остается неизвестная функция  $\sigma_r(a(t), \tau)$ .

Поэтому соотношение (3.15) надо привести к виду, в котором  $\Omega(r, t)$  не входит под знак интеграла. Для этого преобразуем соотношение (3.15), прибавляя и вычитая из него  $\frac{1}{K} \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial 2f(\tau)}{\partial \tau} d\tau$ , тогда, группируя слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} [\Omega(r, t) - 2f(t)] + \frac{4}{3K} \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\Omega(r, \tau) - 2f(\tau)] d\tau = \\ = -\frac{1}{K} \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial 2f(\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned}$$

Обозначим

$$y(r, t) = \Omega(r, t) - 2f(t) \quad (3.29)$$

проинтегрируем предыдущее соотношение по частям и в результате получим, что

$$y(r, t) + \frac{4}{3K} \left[ G(0)y(r, t) + \int_0^t G'(t - \tau)y(r, \tau) d\tau \right] = -\frac{1}{K} \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial 2f(\tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Это означает, что уравнение (3.15) можно записать в виде

$$Ay(r, t) + D \int_0^t G'(t - \tau)y(r, \tau) d\tau = g(t), \quad (3.30)$$

где  $A = 1 + DG(0)$ ,  $D = \frac{4}{3K}$ ,

$$g(t) = -\frac{1}{K} \int_0^t G(t - \tau) \frac{\partial 2f(\tau)}{\partial \tau} d\tau = -\frac{1}{K} \left[ G(0)2f(t) + \int_0^t G'(t - \tau)2f(\tau) d\tau \right]. \quad (3.31)$$

Все эти преобразования над уравнением (3.15) были сделаны с целью воспользоваться методом решения интегральных уравнений, описанным в книге [6] §3-3.2 стр.51. Согласно этому методу, вводится функция  $w(t)$  - являющаяся решением уравнения

$$Aw(t) + D \int_0^t G'(t - \tau)w(\tau) d\tau = 1. \quad (3.32)$$

Тогда решение исходного уравнения (3.30) выражается через решение вспомогательного (3.32) с помощью формулы

$$y(r, t) = g(0)w(t) + \int_0^t w(t - \tau)g'(\tau) d\tau = \int_0^t w(t - \tau)g'(\tau) d\tau. \quad (3.33)$$

То есть функция  $y(r, t)$  представляется выражением (3.33), в котором вспомогательная функция  $w(t)$  удовлетворяет уравнению (3.32).

Теперь установим связь между  $\Omega(r, t)$  и  $w(t)$ . Для этого вспомним, как мы ввели функцию  $y(r, t)$  в (3.29) и подставим это в (3.33)

$$\Omega(r, t) - 2f(t) = \int_0^t w(t - \tau)g'(\tau)d\tau \quad (3.34)$$

Продифференцируем  $g(t)$  из (3.31) по  $t$  и подставим в правую часть (3.34)

$$\Omega(r, t) - 2f(t) = -\frac{1}{K} \int_0^t w(t - \tau) \left[ G(0) \frac{\partial 2f(\tau)}{\partial \tau} + \int_0^\tau G'(t - \xi) \frac{\partial 2f(\xi)}{\partial \xi} d\xi \right] d\tau, \quad (3.35)$$

теперь разобьем правую часть этого выражение на два интеграла и воспользуемся ассоциативным свойством сверток, так же как в (3.20) и (3.21), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{G(0)}{K} \int_0^t w(t - \tau) \frac{\partial 2f(\tau)}{\partial \tau} d\tau - \frac{1}{K} \int_0^t \int_0^{t-\tau} w(t - \xi - \lambda) G'(\lambda) d\lambda \frac{\partial 2f(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \\ & = -\frac{1}{K} \int_0^t \frac{\partial 2f(\tau)}{\partial \tau} \left[ G(0)w(t - \tau) + \int_0^{t-\tau} w(t - \tau - \lambda) G'(\lambda) d\lambda \right] d\tau \end{aligned} \quad (3.36)$$

с помощью (3.32) выражаем интеграл который соответствует правому интегралу в (3.36)

$$\int_0^{t-\tau} w(t - \tau - \lambda) G'(\lambda) d\lambda d\tau = \frac{1}{D} (1 - Aw(t - \tau)) d\tau,$$

и делаем замену в (3.36)

$$-\frac{1}{K} \int_0^t \frac{\partial 2f(\tau)}{\partial \tau} \left[ G(0)w(t - \tau) + \frac{1}{D} (1 - Aw(t - \tau)) \right] d\tau,$$

после несложных преобразований с учетом обозначений в (3.30) получаем окончательную связь между  $\Omega(r, t)$  и  $w(t)$

$$\Omega(r, t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{3}{2} \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} w(t - \tau) d\tau. \quad (3.37)$$

Для получения второго интегрального уравнения, теперь необходимо подставить в (3.37) выражение для  $\Omega$  из (3.14), затем умножить все на  $r$  и проинтегрировать полученное выражение по  $r$  в пределах от  $a(t)$  до  $r$ .

$$\int_{a(t)}^r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_r) dr = \int_{a(t)}^r \frac{r}{2} f(t) dr + \int_{a(t)}^r \frac{3r}{2} \int_0^t \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} w(t - \tau) d\tau dr,$$

получаем

$$r^2 \sigma_r(r, t) - a^2(t) \sigma_r(a(t), t) = \frac{1}{4} (r^2 - a^2(t)) \left( f(t) + 3 \int_0^t w(t - \tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right). \quad (3.38)$$

Заметим, что, если подставить полученное выражение в (3.14), мы увидим что функция  $\Omega$  на самом деле не зависит от  $r$ .

Применим граничные условия (3.4)

$$\sigma_r(b, t) = -\frac{a^2(t)p(t)}{b^2} + \frac{1}{4b^2}(b^2 - a^2(t))\left(f(t) + 3 \int_0^t w(t - \tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau\right). \quad (3.39)$$

Итак, получены два интегральных уравнения (3.11), (3.39), относительно переменных  $\sigma_r(b, t)$  и  $f(t)$ . Ниже описано, как найти  $w(t)$  из уравнения (3.32), чтобы подставить его в (3.39).

В качестве функции сдвиговой релаксации примем

$$G(t) = G_0 + G_1 e^{-\lambda t}, \quad (3.40)$$

тогда производная по аргументу имеет вид  $G'(t - \tau) = -G_1 \lambda e^{-\lambda(t-\tau)}$ .

Подставляем это в (3.32) и выражаем  $w(t)$ , получаем уравнение Вольтерры

$$w(t) = \frac{1}{A} + \frac{DG_1 \lambda}{A} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} w(\tau) d\tau. \quad (3.41)$$

Это уравнение можно легко свести к дифференциальному, для этого продифференцируем его

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{DG_1 \lambda}{A} \left[ w(t) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} w(\tau) d\tau \right],$$

выражаем интеграл через остальные слагаемые и подставляем обратно в (3.41), после приведения подобных членов получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dw(t)}{dt} - \frac{\lambda(DG_1 - A)}{A} w(t) - \frac{\lambda}{A} = 0.$$

Решив это уравнение, с учетом начального условия  $w(0) = \frac{1}{A}$ , которое следует из (3.32), мы получаем решение

$$w(t) = \frac{DG_1}{A(DG_1 - A)} \text{Exp} \left[ \frac{\lambda(DG_1 - A)}{A} t \right] - \frac{1}{DG_1 - A}. \quad (3.42)$$

### 3.3 Решение системы интегральных уравнений

Запишем систему двух интегральных уравнений (3.11) и (3.39) относительно переменных  $\sigma_r(b, t)$  и  $f(t)$

$$\begin{cases} \sigma_r(b, t) + \frac{2\mu}{E} \int_0^t G'(t - \tau) \sigma_r(b, \tau) d\tau = -B \frac{\mu}{E} f(t) \\ \sigma_r(b, t) = -\frac{a^2(t)p(t)}{b^2} + \frac{1}{4b^2}(b^2 - a^2(t)) \left( f(t) + 3 \int_0^t w(t - \tau) \frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right). \end{cases} \quad (3.43)$$

Для дальнейшего решения этой системы введем безразмерные параметры следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\sigma}(\bar{t}) = \frac{\sigma_r(b, t)}{E}, \quad \bar{f}(\bar{t}) = \frac{f(t)}{E}, \quad \bar{B} = \frac{B}{E}, \\ \bar{a}(\bar{t}) &= \frac{a^2(t)}{b^2}, \quad \bar{p}(\bar{t}) = \frac{p(t)}{E}, \quad \bar{G}(\bar{t}) = \frac{G(t)}{E}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Заметим, что т.к.  $t \in [0, t_0]$ , то  $\bar{t} \in [0, 1]$ .  $t_0$  - момент полного «выгорания» вязкоупругого цилиндра,  $E$  - начальный модуль Юнга цилиндра.

Перепишем систему (3.43) в обезразмеренном виде

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_r(\bar{t}) = -\bar{B}\mu\bar{f}(\bar{t}) - 2\mu \int_0^{\bar{t}} \bar{G}'(\bar{t} - \bar{\tau})\bar{\sigma}_r(\bar{\tau})d\bar{\tau} \\ \bar{\sigma}_r(\bar{t}) = L(\bar{t}) \int_0^{\bar{t}} \bar{w}(\bar{t} - \bar{\tau})\bar{f}'(\bar{\tau})d\bar{\tau} + H(\bar{t}) + I(\bar{t})\bar{f}(\bar{t}), \end{cases} \quad (3.45)$$

$$L(\bar{t}) = \frac{3}{4}(1 - \bar{a}(\bar{t})), \quad H(\bar{t}) = -\bar{a}(\bar{t})\bar{p}(\bar{t}), \quad I(\bar{t}) = \frac{1 - \bar{a}(\bar{t})}{4}. \quad (3.46)$$

Здесь за  $\mu$  - обозначена безразмерная величина, принятая на стр.34. Для упрощения записей, везде далее мы опускаем черточки над безразмерными величинами, помня, что они являются безразмерными.

Теперь для численного решения системы (3.45), заменим интегралы их приближениями при помощи конечных сумм. Прделаем преобразования для каждого уравнения по очереди начиная с первого. Для него нам известен вид функции  $G(t)$  из (3.40). Для удобства введем обозначение

$$P(t) \equiv \bar{G}'(t) = -\frac{\bar{\lambda}G_1}{E}e^{-\bar{\lambda}t}, \quad \text{где } \bar{\lambda} = \lambda t_0. \quad (3.47)$$

Непрерывную область изменения безразмерного параметра  $t \in [0, 1]$  заменяем набором дискретных точек  $t_n = \Delta t(n - 1)$ , где  $\Delta t = \frac{1}{N - 1}$  - длина отрезка разбиения,  $n = 1, \dots, N$  и  $N$  - общее количество точек разбиения. Для вычисления интеграла в пределах от 0 до  $t = t_n$  область изменения безразмерного параметра  $\tau \in [0, t_n]$  заменяем набором дискретных точек  $\tau_k = t_k$ , где  $k = 1, \dots, n$ . Обратим внимание, что мы используем  $\Delta\tau = \Delta t$ .

Интеграл заменяется интегральной суммой по формуле прямоугольников, где значение интегрируемой функции берется в средней точке для отрезка. С учетом этого и (3.47), замена для интеграла выглядит так

$$\int_0^{t_n} P(t_n - \tau)\sigma_r(\tau)d\tau \approx \sum_{k=1}^{n-1} P\left(t_n - \left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \left[ \frac{\sigma(t_k) + \sigma(t_{k+1})}{2} \right] \Delta t.$$

Мы используем, что  $\sigma\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) \approx \frac{\sigma(t_k) + \sigma(t_{k+1})}{2}$ . Таким образом, первое уравнение принимает вид

$$\sigma(t_n) + \sum_{k=1}^{n-1} P\left(t_n - \left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \left[ \frac{\sigma(t_k) + \sigma(t_{k+1})}{2} \right] \Delta t = -B\mu f(t).$$

Преобразуем это уравнение, оставив часть слагаемого, отвечающего  $k = n - 1$ , слева вместе с  $\sigma(t_n)$ , а все остальное переносим вправо

$$\begin{aligned} \sigma(t_n) \left[ 1 + \mu \Delta t P\left(t_n - \left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \right] &= -B\mu f(t_n) - \mu \Delta t \sum_{k=1}^{n-2} P\left(t_n - \left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \cdot \\ &\cdot \left[ \sigma(t_k) + \sigma(t_{k+1}) \right] - \mu \Delta t P\left(t_n - \left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \sigma(t_{n-1}). \end{aligned}$$

Теперь введем следующие обозначения

$$K1(t_n) = 1 + \mu \Delta t P\left(t_n - \left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\right)\right),$$

$$S(t_n) = -\mu \Delta t \sum_{k=1}^{n-2} P\left(t_n - \left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \left[ \sigma(t_k) + \sigma(t_{k+1}) \right] - \mu \Delta t P\left(t_n - \left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \sigma(t_{n-1}), \quad (3.48)$$

с учетом всех обозначений получаем упрощенный вид первого уравнения

$$\sigma(t_n) K1(t_n) = -B\mu f(t_n) + S(t_n). \quad (3.49)$$

Далее рассматриваем второе уравнение. Вид функции  $w(t)$  нам известен из (3.42), замена интеграла из второго уравнения на конечную сумму производится по приведённой выше схеме, с учетом того, что

$$f'\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta t}. \text{ Интеграл заменяется интегральной суммой:}$$

$$\int_0^{t_n} w(t_n - \tau_k) f'(\tau) d\tau \approx \sum_{k=1}^{n-1} w\left(t_n - \left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \left[ \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\Delta t} \right] \Delta t.$$

С учетом этого, второе уравнение принимает вид:

$$\sigma(t_n) = L(t_n) \sum_{k=1}^{n-1} w\left(t_n - \left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \left[ f(t_{k+1}) - f(t_k) \right] + H(t_n) + I(t_n) f(t_n).$$

Преобразуем это уравнение, для этого вынесем из под знака суммы слагаемое  $f(t_n)$  и сгруппируем его с другими слагаемыми

$$\begin{aligned} \sigma(t_n) &= \left( L(t_n) w\left(t_n - \left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) + I(t_n) \right) f(t_n) - L(t_n) w\left(t_n - \left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) f(t_{n-1}) + \\ &+ L(t_n) \sum_{k=1}^{n-2} w\left(t_n - \left(t_k + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \left[ f(t_{k+1}) - f(t_k) \right] + H(t_n). \end{aligned}$$

Обозначим для упрощения записи

$$\beta(t_n) = L(t_n)w \left( t_n - \left( t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) + I(t_n),$$

$$\delta(t_n) = L(t_n) \sum_{k=1}^{n-2} w \left( t_n - \left( t_k + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) [f(t_{k+1}) - f(t_k)] - L(t_n)w \left( t_n - \left( t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) f(t_{n-1}) + H(t_n). \quad (3.50)$$

Окончательный вид второго уравнения

$$\sigma(t_n) = \delta(t_n) + \beta(t_n)f(t_n). \quad (3.51)$$

После всех преобразований и замен (3.48), (3.50), у нас получается система линейных алгебраических уравнений из (3.49) и (3.51)

$$\begin{cases} \sigma(t_n)K1(t_n) = -B\mu f(t_n) + S(t_n) \\ \sigma(t_n) = \delta(t_n) + \beta(t_n)f(t_n). \end{cases} \quad (3.52)$$

Решаем систему (3.52) относительно искомым параметров  $\sigma(t_n)$  и  $f(t_n)$

$$\begin{cases} f(t_n) = \frac{S(t_n) - \delta(t_n)K1(t_n)}{B\mu + \beta(t_n)K1(t_n)} \\ \sigma(t_n) = \frac{\beta(t_n)S(t_n) + \delta(t_n)B\mu}{B\mu + K1(t_n)\beta(t_n)}. \end{cases} \quad (3.53)$$

Из соотношений (3.49), (3.51) и предшествующих им выражений видно, что получена система рекуррентных уравнений, которые решаются последовательно. Теперь для того, что бы решить ее, нам необходимо найти решение для начального момента времени  $t_1 = 0$  из исходных интегральных уравнений системы (3.45). Видно, что при нулевом времени, интегралы, входящие в оба уравнения, равны нулю. Тогда первое уравнение выглядит так:

$$\sigma(0) = -B\mu f(0).$$

Второе уравнение, в свою очередь, имеет вид:

$$\sigma(0) = H(0) + I(0)f(0).$$

С учетом (3.46) получаем  $\sigma(0) = -\bar{a}(0)\bar{p}(0) + \frac{1 - \bar{a}(0)}{4}f(0)$ , где  $\bar{a}(0)$  и  $\bar{p}(0)$  обозначены в (3.44). После преобразований получаем решение для начального момента времени

$$\begin{cases} f(0) = \frac{4\bar{a}(0)\bar{p}(0)}{4B\mu + 1 - \bar{a}(0)} \\ \sigma(0) = -\frac{4B\mu\bar{a}(0)\bar{p}(0)}{4B\mu + 1 - \bar{a}(0)}. \end{cases} \quad (3.54)$$

### 3.4 Результаты вычисления

Для расчёта по формулам из разделала 3.3 была написана программа в Wolfram Mathematica, на языке Wolfram language. В ней были реализованы вычисления полученных рекуррентных уравнений (3.53). Для проверки работы

программы мы взяли данные из статьи [2], для того что бы у нас была возможность сравнить характер графиков.

### Входные данные.

Задача рассматривается для коэффициента Пуассона цилиндра  $\nu_0 = 0.35$ . Безразмерная функция сдвиговой релаксации (3.40) будет иметь следующий вид

$$G(t) = \frac{1}{2(1 + \nu_0)} \left( \alpha + (1 - \alpha)e^{-\lambda t} \right). \quad (3.55)$$

Будем считать, что функция давление меняется по формуле

$$p(t) = Nte^{-\alpha \lambda t}. \quad (3.55')$$

В этих формулах  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $N$  это некоторые положительные константы. В качестве функции выгорания  $a(t)$ , возьмем следующую функцию

$$a(t) = \frac{a_0}{1 - (1 - a_0)t}, \quad (3.56)$$

здесь, следуя (3.44), подразумевается, что  $a_0 = \bar{a}(\bar{t})$ , в момент времени  $\bar{t} = 0$ .

Примем следующие данные:  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 5$ ,  $N = 1$ ,  $a_0 = \frac{4}{9}$ ,  $B = \frac{1}{3}$ , напомним что  $B$  определяется формулой (3.5), с учетом (3.40). Исходя из этих данных так же можно посчитать значения  $G(0) = \frac{1}{2.7}$  - начальный модуль сдвига,  $G_1 = \frac{1}{6}$  - коэффициент формулы (3.40).

Для расчета бралась  $N = 1001$  точка разбиения. Код программы представлен в Приложениях 3.

### Графические результаты.

В результате вычислений, мы получили 1001 значение  $\sigma_r(b, t_n)$  и  $f(t_n)$ . Далее по этим значениям построили графики, так на Рис.3.1 показан график зависимости обезразмеренного радиального напряжение  $-\sigma_r(b, \bar{t})$ , для удобства взятого со знаком минус, от безразмерного времени  $t$ . (Как вычисляется шаг времени указано на стр.42)

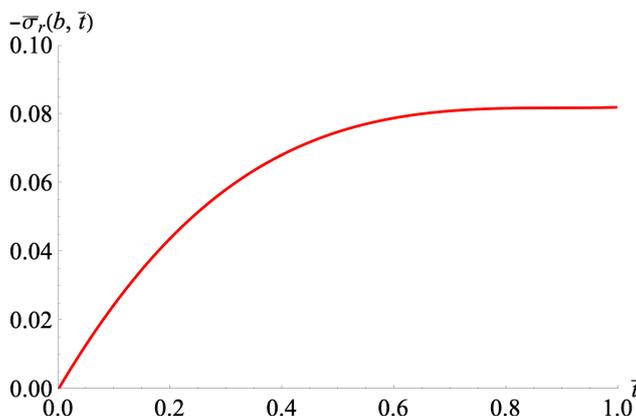


Рис.3.1

На Рис.3.1, видно, что радиальное напряжение увеличивается по модулю со временем, что соответствует физическому смыслу задачи.

Из граничных условий (3.4) следует, что значения функций радиального напряжения при  $r = b$  и заданного давления  $p(t)$ , равны по модулю в момент времени  $t_0$  полного «выгорания» цилиндра. Для проверки этого условия построим на одном графике функции радиального напряжения  $-\sigma_r(b, t_n)$  и функцию давления  $p(t)$  (3.55').

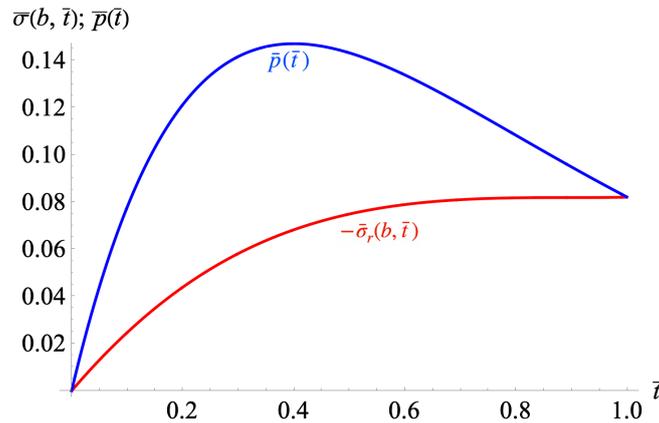


Рис.3.2

Видно, что на Рис.3.2 есть явное пересечение двух функций при  $\bar{t} = 1$ , значит граничное условие (3.4) выполнено.

Следуя решению из раздела 3.2, можно посчитать и остальные компоненты напряжений и деформации. В качестве примера, приведем способ нахождения  $\sigma_\phi(r, t)$ . Для этого воспользуемся сначала уравнением равновесия (3.1) и определением функции  $\Omega(t)$  из (3.14). Прямой подстановкой (3.14) в (3.1) получаем уравнение связывающее радиальное и тангенциальное напряжение через функцию  $\Omega(t)$

$$\sigma_\phi(r, t) = \Omega(t) - \sigma_r(r, t). \quad (3.57)$$

Теперь запишем в явном виде  $\sigma_r(r, t)$  из (3.38) с применением граничного условия (3.4)

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{a^2(t)p(t)}{r^2} + \frac{1}{4r^2}(r^2 - a^2(t))\left(f(t) + 3\int_0^t w(t - \tau)\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau}d\tau\right), \quad (3.58)$$

и подставим его в (3.57) с учетом формулы для  $\Omega(t)$  из (3.37). Приведя подобные слагаемые имеем окончательный вид для  $\sigma_\phi(r, t)$

$$\sigma_\phi(r, t) = \frac{a^2(t)p(t)}{r^2} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{a^2(t)}{r^2}\right)f(t) + \frac{3}{4}\left(1 + \frac{a^2(t)}{r^2}\right)\int_0^t w(t - \tau)\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau}d\tau. \quad (3.59)$$

Вообще говоря, для нашей программы расчетов в Wolfram Mathematica, не было необходимости, выписывать  $\sigma_\phi(r, t)$  в явном виде. Для того что бы посчитать значения  $\sigma_\phi(b, t_n)$  достаточно добавить в код программы формулу для вычисления  $\Omega(t)$ , это формула номер (3.37). Интеграл из этой формулы аппроксимируется так же, как и было показано раньше на стр.43. (Это один и тот же интеграл) После чего, учитывая, что значения функций  $\sigma_r(b, t_n)$  и  $f(t_n)$  для всех  $n$ , нам уже известны, мы пользуемся формулой (3.57). Теперь по полученным значениям  $\sigma_\phi(b, t_n)$  построим график.

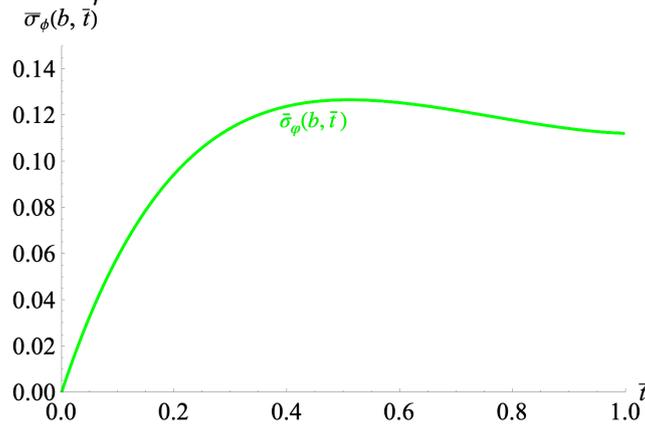


Рис.3.3

На Рис.3.3, видно, что тангенциальное напряжение изменяется со временем в разумных пределах, что соответствует физическому смыслу задачи.

На Рис.3.4 для сравнения приведены результаты расчетов, по нашим формулам (слева) и графики из статьи [2].

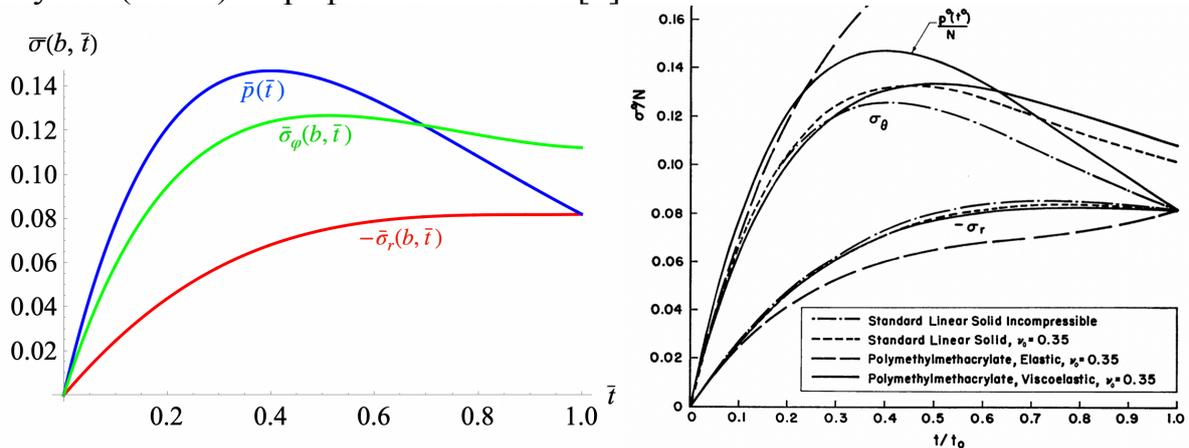


Рис.3.4

Значения компоненты тензора напряжений  $\sigma_r(b, t_n)$  на левом и правом графиках отличаются. Причина этого в неточности соответствующих формул статьи [2] (см. замечание в разделе 3.2). Однако указанное различие в графиках невелико, т.к. в данной работе расчеты проведены для материала, близкого к несжимаемому, а в этом случае формулы, приведенные в статье [2] дают небольшую погрешность.

### 3.5 Расчет по другим входным данным

Для проверки работы программы и полученных соотношений, произведем расчёт по данным представленным в разделе 1.6. По этим данным мы уже получали численно - аналитическое решение с помощью метода аппроксимаций в главе I и затем проверяли его с помощью численного решения в программном комплексе ANSYS в главе II. Теперь, решим задачу с учетом выгорания, для этого воспользуемся результатами полученными в главе III.

#### Входные данные.

Геометрические характеристики цилиндра были взяты соответственно разделу 1.6. Начальный коэффициент Пуассона для вязкоупругого материала цилиндра был взят так же  $\nu_0 = 0.473$ . Для упругой оболочки  $\nu_* = 0.3$ , модуль объёмного сжатия  $E_* = 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$ .

Функцию релаксации возьмем в виде

$$2G(t) = R(t) = 563.4 + 5.37e^{-0.00384t}, \quad (3.60)$$

Обезразмерим функцию  $G(t)$  в соответствии с формулами (3.44). Обратим внимание, что степень экспоненты  $\lambda$  обезразмеривается с помощью  $t_0$  из (3.47), и что мы знаем, что  $t_0$  есть время полного выгорания (стр.33). Примем, что  $t_0 = 1000\text{с}$ . (Далее мы покажем, что от выбранного  $t_0$  зависит например поведения кривых напряжений.) В итоге, безразмерная функция  $G(t)$  имеет вид

$$G(t) = 0.33 + 0.003e^{-3.84t}, \quad (3.61)$$

отсюда нужные параметры для вычислений формул (3.42) равны:  $G(0) = 0.333$ ,  $G_1 = 0.003$ ,  $\lambda = 3.84$ .

С учетом (3.61), модуль объёмного сжатия цилиндра находим, применив формулу (2.2) и подставив в нее все необходимое. В итоге  $E = 837.8 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$  - начальный модуль упругости цилиндра, необходимый для обезразмеривания величин в (3.44).

В качестве функции давления возьмем функцию  $p(t) = Nte^{-\alpha t}$  следуя статье [2]. Это безразмерная формула в которой  $N$  есть некоторая положительная константа пусть  $N = 1$ , а  $\alpha$  находится из формул (3.61) и (3.55), в итоге  $\alpha = 0.97$ .

Функцию выгорания оставим такой же, как в разделе 3.4 и [2]. Исходя из новых данных, постоянная  $B$  вычисляется из (3.5) с учетом (3.44). Получим  $B = 8.74$ .

## Графические результаты.

В ходе вычислений было обнаружено, что характер кривых зависит от выбранного времени  $t_0$ . Приведем некоторые графики

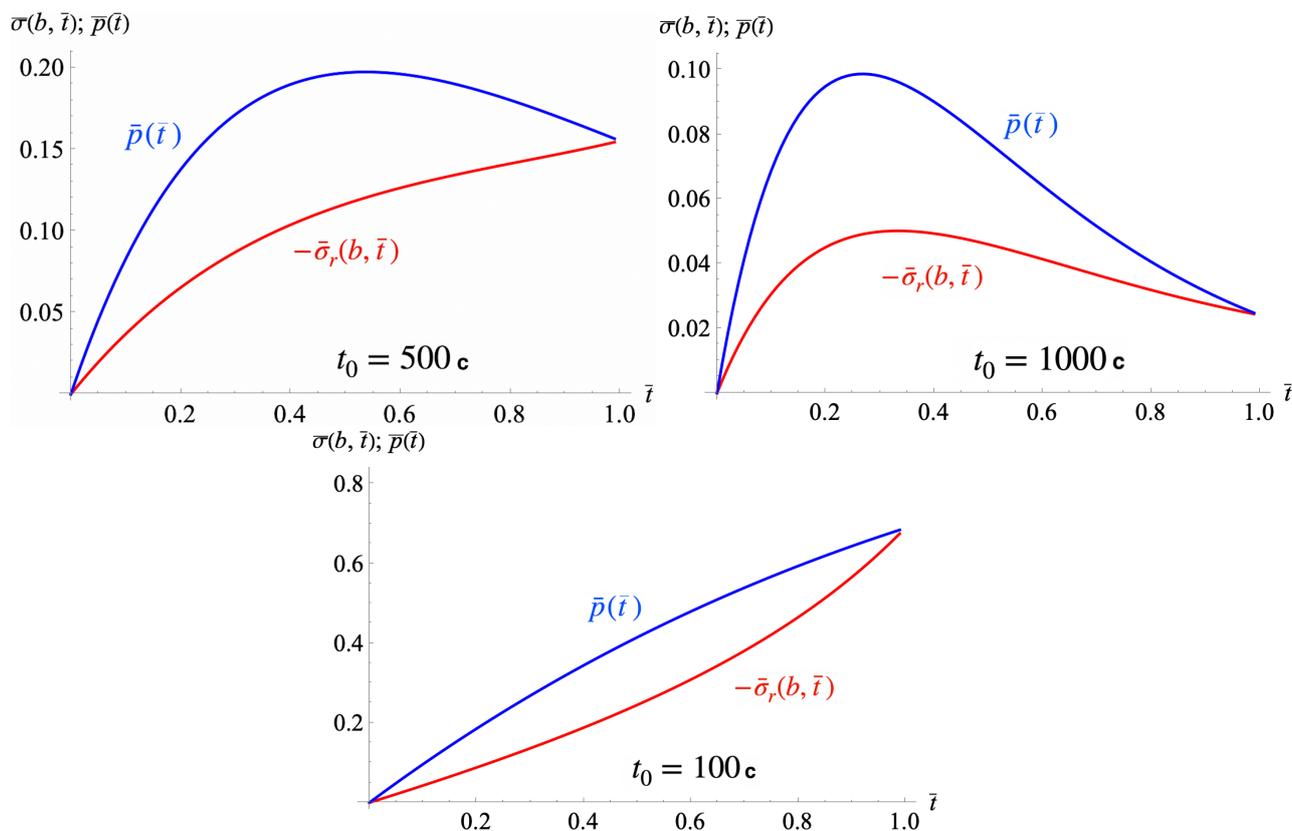


Рис.3.5

На Рис.3.5 видно выполнение граничного условия (3.4). Вид этих функций зависит от того, как меняется давление на выгорающей поверхности. Так же, мы видим, что разному времени выгорания соответствует разного вида зависимость  $\sigma_r(b, t)$ . При  $t_0 = 500 \text{ c}$  график становится пологим. При самом большом  $t_0 = 1000 \text{ c}$ ,  $\sigma_r(b, t)$  начинает убывать со временем, что отражает уменьшение внутреннего давления при больших значениях  $\bar{t}$ . В частности, видно, что при малых  $t_0$  ( $t_0 = 100 \text{ c}$ ) напряжение  $\sigma_r(b, t)$  отслеживает быстрорастущий характер функции давления, но с некоторым опозданием. В приложении 3.1 в дополнение к этим графикам, приведены графики построенные для случая, когда функция релаксации (3.60) имеет другой свободный член  $G_0 = 22.6$ , по ним видно, как это изменение влияет на решение.

Так же была посчитана другая компонента напряжений  $\sigma_\phi(b, t)$ . Следуя рассуждениям на стр.45, по новым данным и для времени выгорания  $t_0 = 1000 \text{ c}$ , построим график.

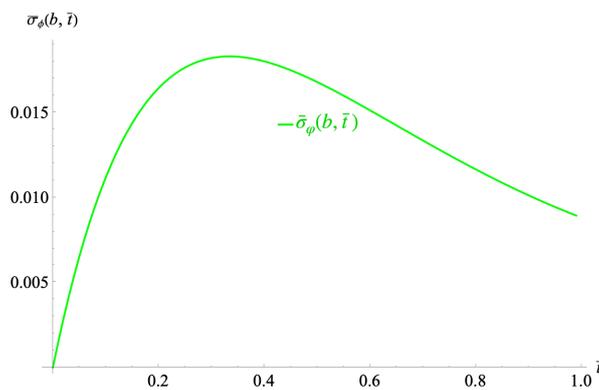


Рис.3.6

На Рис.3.6 видно, что тангенциальное напряжение изменяется со временем, и уменьшается по модулю вслед уменьшающемуся давлению, как и в случае с  $\sigma_r(b, t)$ . Заметим, что  $\sigma_\phi(b, t)$  принимает отрицательные значения, так же, как и на Рис.2.20 и Рис.2.21, когда решалась похожая задача, но без условия выгорания.

### Основные результаты главы III.

Рассмотрена задача о НДС вязкоупругого цилиндра, скрепленного с упругой оболочкой, находящегося под действием внутреннего давления, приложенного к выгорающей поверхности. Зависимости внутреннего радиуса и давления от времени выбраны в виде предложенном в статье [2]. В ходе изучения указанной статьи была обнаружена и исправлена неточность в одной из формул. В результате преобразований задача свелась к системе двух интегральных уравнений, которая была решена численно в Wolfram Mathematica. По входным данным из статьи [2] были получены графические результаты, которые сравнивались с графиками приведенными в упомянутой статье. Так же, при взятии иных входных данных, была проверена корректность результатов и выполнение граничных условий, что свидетельствует о правильности полученных в главе III формул и корректной работе программы. Была обнаружена зависимость вида кривых  $\sigma_r(b, t)$  от длительности времени полного выгорания цилиндра  $t_0$ .

## Вывод

В главе I, рассмотрена задача расчета напряжённно деформированного состояния вязкоупругого толстостенного цилиндра, скрепленного тонкой упругой оболочкой, под действием внутреннего давления. Для ее аналитического решения были изучены метод аппроксимаций А.А. Ильюшина и преобразования Лапласа - Карсона. Были получены формулы для всех компонент напряжений и деформаций и исправлены неточности в книге [1]. Далее по полученным формулам был произведен численно аналитический расчет и построены графики всех компонент НДС. Графики согласовывались с физическим смыслом задачи и граничными условиями, таким образом подтвердилась корректность полученных результатов.

В главе II, после изучения программный комплекс ANSYS, сначала были смоделированы и проверены соотношения полученные для задачи о упругом цилиндре в упругой оболочке под действием внутреннего давления. Затем был смоделирован опыт на релаксацию, таким образом, что бы график функции релаксации запрограммированной в ANSYS совпадал с графиком, из работы [5]. Далее было получено решение вязкоупругой задачи, по тем же данным что и в главе I, но с помощью ANSYS. Было проведено сравнение результатов. В итоге получилось хорошее совпадения графических результатов, полученных методом аппроксимаций и численным решением в ANSYS. Так же обнаружена сильная зависимость решения, полученного методом аппроксимаций, от взятого диапазона  $\nu$ . Было изучено так же, какой диапазон лучше брать для улучшения аппроксимаций и как именно это влияет на результат.

В главе III, была рассмотрена задача определения НДС полого вязкоупругого цилиндра, скрепленного с упругой оболочкой, нагруженного давлением, приложенным к изменяющейся внутренней границе. Для ее решения была изучена статья [2], в которой рассматривалась подобная задача. В ходе ее изучения были отмечены неточности в формулах, которые были исправленные в данной работе. В результате преобразований задача была сведена к системе двух интегральных уравнений Вольтерры второго рода. Для ее решения, потребовалось изучить способы решения систем интегральных уравнений, а так же прибегнуть к численному методу, реализованному с помощью программы Wolfram Mathematica. Были получены графические результаты для радиального и тангенциального напряжения, проверены граничные условия и результаты сопоставлены с статьей [2]. Серьезных различий графиков найденная в [2] неточность не повлекла, так как рассмотренный в дипломной работе материал был близок к несжимаемому.

Далее был произведен расчет по иным входным данным. По этим данным получено графические результаты, которые имеют физический смысл и подтверждались выполнением граничных условий. Было отмечено влияние взятого времени  $t_0$  - полного выгорания, на характер графика напряжений  $\sigma_r(b, t)$ .

## Заключение

В дипломной работе рассмотрена задача определения НДС в вязкоупругом цилиндре, скрепленном с упругой оболочкой, находящемся под действием внутреннего давления. В том числе при учете аблации внутренней поверхности. Тема является актуальной, поскольку связана с прочностным расчетом твердотопливных двигателей. При выполнении работы изучены и применены для вычисления напряжений и деформаций методы решения задач линейной вязкоупругости: аппроксимаций А.А.Ильюшина и преобразований Лапласа-Карсона. Также изучен и применен комплекс программ ANSYS. При решении задачи с изменяющейся внутренней поверхностью потребовалось находить аналитическое решение интегрального уравнения Вольтерры 2 рода и численное решение системы двух интегральных уравнений.

Полученные разными методами решения согласуются между собой, а также с физическим смыслом и результатами, приведенными в работе [2].

## Список литературы

1. Москвитин В.В. Сопротивления вязкоупругих материалов. М.:Наука, 1972. 328 с.
2. Rogers T. G., Lee E. H. The cylinder problem in viscoelastic stress analysis // Quarterly of applied mathematics. – 1964. – Т. 22. – №. 2. – С. 117-131.
3. Огибалов П. М., Ломакин В. А., Кишкин Б. П. Механика полимеров: Учебное пособие. – МГУ, 1975.
4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела: учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
5. Быков Д. Л., Голиков С. Н. Плоская неосесимметричная деформация вязкоупругого цилиндра с учетом его физической и геометрической нелинейности //Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2009. – №. 6. – С. 41-45.
6. Манжиров А. В., Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. – 2000.
7. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями //М.: Едиториал УРСС. – 2003.
8. Xu C. et al. RI-IGABEM for 3D viscoelastic problems with body force // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2022. – Т. 394. – С. 114911.
9. Голиков С. Н. Решение задач линейной и нелинейной теорий вязкоупругости модифицированным методом аппроксимаций АА Ильюшина и методами нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов //Москва. – 2009.
10. Пелешко В.А. О важности учета пористости твердого ракетного топлива при анализе его деформирования и пористости в заряде, скрепленном с корпусом // Упругость и Неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. ИЛЬЮШИНА / Под ред. Г.Л.Бровко. — Изд-во Моск. ун-та М, 2021. — С. 306-310
11. Chen Z., Du D., Sun W. Solution of nonlinear eigenvalues for the viscoelastic damped cylindrical shell considering the frequency dependence of viscoelastic materials //Thin-Walled Structures. – 2022. – Т. 173. – С. 109013.
12. Soleimani-Javid Z. et al. On the higher-order thermal vibrations of FG saturated porous cylindrical micro-shells integrated with nanocomposite skins in viscoelastic medium //Defence Technology. – 2021.

# Приложение

## Приложение 1

Расчет задачи из Главы 1, раздел 1.6 представленный на языке Wolfram

language.

```
(*Матрица \CapitalDelta Москвитин (2.161*)
MatrixForm[{{y - x, (y^2 - x^2)/2, Log[y/x]}, {(y^2 - x^2)/2, (y^3 - x^3)/3, y - x}, {Log[y/x], y - x, 1/x - 1/y}}]
y := 0.036
x := 0.002
Det[{{0.034, 0.000646, 2.89037}, {0.000646, 0.0000155493, 0.034}, {2.89037, 0.034, 472.222}}] (*определитель матрицы \CapitalDelta*)
(*Нахождение \Sigma_\Phi и \Sigma_r*)
Integrate[(1 + 2 w)/(2 + 112.532 w + 31.766 w^2), {w, 0.002, 0.036}] (*поиск J_13*)
Integrate[w (1 + 2 w)/(2 + 112.532 w + 31.766 w^2), {w, 0.002, 0.036}] (*поиск J_23*)
Integrate[(1 + 2 w)/(w (2 + 112.532 w + 31.766 w^2)), {w, 0.002, 0.036}] (*поиск J_33*)
f := Function[{x, y, d, a, b, c}, 1/d (a ((y^3 - x^3) (1/x - 1/y)/3 - (y - x)^2) - b ((y^2 - x^2) (1/x - 1/y)/2 - (y - x) Log[y/x]) + c ((y^2 - x^2) (y - x)/2 - (y^3 - x^3) Log[y/x/3]))]
f[0.002, 0.036, 0.000010348545999404356, 0.00915636934758398, 0.00014994446475181944, 0.9616120333032587] (*нашли f_3^0*)
g := Function[{x, y, d, a, b, c}, -1/d (a ((y^2 - x^2) (1/x - 1/y)/2 - (y - x) Log[y/x]) - b ((y - x) (1/x - 1/y) - (Log[y/x])^2) + c ((y - x)^2 - (y^2 - x^2) Log[y/x/2]))]
g[0.002, 0.036, 0.000010348545999404356, 0.00915636934758398, 0.00014994446475181944, 0.9616120333032587] (*нашли f_3^1*)
h := Function[{x, y, d, a, b, c}, 1/d (a ((y^2 - x^2) (y - x)/2 - (y^3 - x^3) Log[y/x/3]) - b ((y - x)^2 - (y^2 - x^2) Log[y/x/2]) + c ((y^3 - x^3) (y - x)/3 - (y^2 - x^2)^2/4))]
h[0.002, 0.036, 0.000010348545999404356, 0.00915636934758398, 0.00014994446475181944, 0.9616120333032587] (*нашли f_3^(-1)*)
(*Проверим нашу аппроксимацию по Ильешину для f_3*)
Plot[{{(1 + 2 \Omega)/(2 + 112.532 \Omega + 31.766 \Omega^2), 0.34255115693545996 - 5.2889605667752315 \Omega + 0.0003204773003280707 \Omega^3}, {\Omega, 0.002, 0.036}], AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[\Omega], HoldForm[Subscript[f, 3]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}]
(*Найдем \Sigma_\Phi*)
\Sigma := Function[{M, b, p, f, g, h, k}, 1/(M^2 - 1) ((1 + b^2/r^2) p - 2 f (M^2 + b^2/r^2) p - 2 (M^2 + b^2/r^2) p (g/3 k) (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i]) + 3 k (h) (p) (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])))]
\Sigma[4, 60, 6, 0.34255115693545996, -5.2889605667752315, 0.0003204773003280707, 5171.59] (*это \Sigma_\Phi*)
Plot[{{(1 + 2 \Omega)/(2 + 112.532 \Omega + 31.766 \Omega^2) - 4.11061 (16 + 3600/15^2) - 2 (-0.00204539 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i]) + 0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i]))}, {i, 0, 100}], AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[i], HoldForm[Subscript[\Sigma, \Phi]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}, PlotRange -> {{0, 100}, {3, -7}}]
(*Найдем \Sigma_r*)
\Sigma := Function[{M, b, p, f, g, h, k}, 1/(M^2 - 1) ((1 + b^2/r^2) p - 2 f (M^2 + b^2/r^2) p - 2 (M^2 + b^2/r^2) p (g/3 k) (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i]) + 3 k (h) (p) (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])))]
\Sigma[4, 60, 6, 0.34255115693545996, -5.2889605667752315, 0.0003204773003280707, 5171.59] (*это \Sigma_r*)
(*строим график \Sigma_r при фиксированном g=60 и отрезки времени 0 до 20*)
Plot[{{(1 + 2 \Omega)/(2 + 112.532 \Omega + 31.766 \Omega^2) - 4.110613883225519 (16 + 3600/60^2) - 2 (-0.002045390515015781 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i]) + 0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i]))}, {i, 0, 100}], AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[i], HoldForm[Subscript[\Sigma, r]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}, PlotRange -> {{0, 100}, {0, -6}}]
(*Нахождение \Sigma_z*)
w2 = 0.307;
w1 = 0.002;
d = Det[{{w2 - w1, (w2^2 - w1^2)/2, Log[w2/w1]}, {(w2^2 - w1^2)/2, (w2^3 - w1^3)/3, w2 - w1}, {Log[w2/w1], w2 - w1, 1/w1 - 1/w2}}];
M = 4;
p = 6;
b = 60;
k = 5171.59;
(*J_14*)
j14 = Integrate[{{(1 + 2 w) (1 - w)} / ((2 + w) (2 + 112.532 w + 31.766 w^2)), {w, 0.002, 0.307}}]
(*J_24*)
j24 = Integrate[w (1 + 2 w) (1 - w) / ((2 + w) (2 + 112.532 w + 31.766 w^2)), {w, 0.002, 0.307}}]
(*J_34*)
j34 = Integrate[{{(1 + 2 w) (1 - w)} / (w (2 + w) (2 + 112.532 w + 31.766 w^2)), {w, 0.002, 0.307}}] (*J_34*)
(*f_4^0*) f1 = Function[{w1, w2, d, j14, j24, j34}, 1/d (j14 ((w2^3 - w1^3) (1/w1 - 1/w2)/3 - (w2 - w1)^2) - j24 ((w2^2 - w1^2) (1/w1 - 1/w2)/2 - (w2 - w1) Log[w2/w1]) + j34 ((w2^2 - w1^2) (w2 - w1)/2 - (w2^3 - w1^3) Log[w2/w1/3]))]
f1 = f1[w1, w2, d, j14, j24, j34]
(*f_4^1*) f2 = Function[{w1, w2, d, j14, j24, j34}, -1/d (j14 ((w2^2 - w1^2) (1/w1 - 1/w2)/2 - (w2 - w1) Log[w2/w1]) - j24 ((w2 - w1) (1/w1 - 1/w2) - (Log[w2/w1])^2) + j34 ((w2 - w1)^2 - (w2^2 - w1^2) Log[w2/w1/2]))]
f2 = f2[w1, w2, d, j14, j24, j34]
(*f_4^(-1)*) f3 = Function[{w1, w2, d, j14, j24, j34}, 1/d (j14 ((w2^2 - w1^2) (w2 - w1)/2 - (w2^3 - w1^3) Log[w2/w1/3]) - j24 ((w2 - w1)^2 - (w2^2 - w1^2) Log[w2/w1/2]) + j34 ((w2^3 - w1^3) (w2 - w1)/3 - (w2^2 - w1^2)^2/4))]
f3 = f3[w1, w2, d, j14, j24, j34]
(*Проверим нашу аппроксимацию по Ильешину f_4*)
Plot[{{(1 + 2 \Omega) (1 - \Omega) / ((2 + \Omega) (2 + 112.532 \Omega + 31.766 \Omega^2))}, {f1 + f2 \Omega + f3 \Omega^2}, {\Omega, 0.002, 0.307}], AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[\Omega], HoldForm[Subscript[f, 4]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}]
(*Выпишем \Sigma_z*)
\Sigma := Function[{M, b, p, f1, f2, f3, k}, 2/(M^2 - 1) ((1/2 - 2 M^2 f1) p - 1/(3 k) (3/4 + 2 M^2 f2) p (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i]) - 6 k (M^2) f3 (p) (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])))]
\Sigma = \Sigma[M, b, p, f1, f2, f3, k]
(*строим график \Sigma_z, на отрезки времени 0 до 100*)
Plot[{{\Sigma}, {i, 0, 100}], AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[i], HoldForm[Subscript[\Sigma, z]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}, PlotRange -> {{0, 100}, {0, -10}}]
(*Сравнения графиков для \Nu=[0.473, 0.498], \Nu=[0.3, 0.498] при k=5171*)
Plot[{{(2/15 (-29.47553503707638 + 0.03341857694522313 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i]) - 490.2567576224666 (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i]))}, {\Sigma}, {i, 0, 100}], AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[i], HoldForm[Subscript[\Sigma, z]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}, PlotRange -> {{0, 100}, {0, -10}}]
(*Нахождение \Epsilon_\Phi и \Epsilon_r ОБЩЕГО ВИДА*)
(* Сначала считаем аппроксимацию для f_1 *)
Integrate[{{(1 + 2 w) / ((2 + w) (2 + 112.532 w + 31.766 w^2))}, {w, 0.002, 0.036}}] (*J_11*)
Integrate[w (1 + 2 w) / ((2 + w) (2 + 112.532 w + 31.766 w^2)), {w, 0.002, 0.036}] (*J_21*)
Integrate[{{(1 + 2 w) / (w (2 + w) (2 + 112.532 w + 31.766 w^2))}, {w, 0.002, 0.036}}] (*J_31*)
f1 := Function[{x, y, d, a, b, c}, 1/d (a ((y^3 - x^3) (1/x - 1/y)/3 - (y - x)^2) - b ((y^2 - x^2) (1/x - 1/y)/2 - (y - x) Log[y/x]) + c ((y^2 - x^2) (y - x)/2 - (y^3 - x^3) Log[y/x/3]))]
f1[0.002, 0.036, 0.000010348545999404356, 0.004541109242548563, 0.0000741508624868114, 0.47853546203035524] (*f_1^0*)
g1 := Function[{x, y, d, a, b, c}, -1/d (a ((y^2 - x^2) (1/x - 1/y)/2 - (y - x) Log[y/x]) - b ((y - x) (1/x - 1/y) - (Log[y/x])^2) + c ((y - x)^2 - (y^2 - x^2) Log[y/x/2]))]
g1[0.002, 0.036, 0.000010348545999404356, 0.004541109242548563, 0.0000741508624868114, 0.47853546203035524] (*f_1^1*)
h1 := Function[{x, y, d, a, b, c}, 1/d (a ((y^2 - x^2) (y - x)/2 - (y^3 - x^3) Log[y/x/3]) - b ((y - x)^2 - (y^2 - x^2) Log[y/x/2]) + c ((y^3 - x^3) (y - x)/3 - (y^2 - x^2)^2/4))]
h1[0.002, 0.036, 0.000010348545999404356, 0.004541109242548563, 0.0000741508624868114, 0.47853546203035524] (*f_1^(-1)*)
```

```

(*Проверим аппроксимацию Ильюшина для функции f_1*)
Plot[{{(1 + 2 \[Omega])/(2 + \[Omega]) (2 + 112.532 \[Omega] + 31.766 \[Omega]^2)}, 0.17056485619732822} - 2.670940909530644 \[Omega] + 0.00016168576174309287 \[Omega]}, {\[Omega]}, {0, 0.02, 0.036}, AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[\[Omega]], HoldForm[Subscript[f, 1]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}]
(* Теперь считаем аппроксимацию для f_2 *)
Integrate[(1 + 2 w)/(w (2 + 112.532 w + 31.766 w^2)), {w, 0.002, 0.036}]"J_12"
Integrate[(1 + 2 w)/(w^2 (2 + 112.532 w + 31.766 w^2)), {w, 0.002, 0.036}]"J_22"
Integrate[(1 + 2 w)/(w^2 (2 + 112.532 w + 31.766 w^2)), {w, 0.002, 0.036}]"J_32"
f2 := Function[{x, y, d, a, b, c}, 1/d (a (y^3 - x^3) (1/x - 1/y)/3 - (y - x)^2) - b (y^2 - x^2) (1/x - 1/y)/2 - (y - x) Log[y/x] + c ((y^2 - x^2) (y - x)/2 - (y^3 - x^3) Log[y/x]/3)]
f2[0.002, 0.036, 0.000010348545999404356, 0.9616120333032587, 0.00915636934758398, 184.74998958881574]"(f_2^A(0))"
g2 := Function[{x, y, d, a, b, c}, -1/d (a (y^2 - x^2) (1/x - 1/y)/2 - (y - x) Log[y/x]) - b ((y - x) (1/x - 1/y) - (Log[y/x])^2) + c ((y - x)^2 - (y^2 - x^2) Log[y/x]/2)]
g2[0.002, 0.036, 0.000010348545999404356, 0.9616120333032587, 0.00915636934758398, 184.74998958881574]"(f_2^A(1))"
h2 := Function[{x, y, d, a, b, c}, 1/d (a (y^2 - x^2) (y - x)/2 - (y^3 - x^3) Log[y/x]/3) - b ((y - x)^2 - (y^2 - x^2) Log[y/x]/2) + c ((y^3 - x^3) (y - x)/3 - (y^2 - x^2)^2/4)]
h2[0.002, 0.036, 0.000010348545999404356, 0.9616120333032587, 0.00915636934758398, 184.74998958881574]"(f_2^A(-1))"
(*Проверим нашу аппроксимацию Ильюшина для функции f_2*)
Plot[{{(1 + 2 \[Omega])/(\[Omega]) (2 + 112.532 \[Omega] + 31.766 \[Omega]^2)}, -18.31869000010714} + 295.8477885379241 \[Omega] + 0.4820590355219798 \[Omega]}, {\[Omega]}, {0, 0.002, 0.036}, AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[\[Omega]], HoldForm[Subscript[f, 2]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}]
Plot[{{(1 + 2 \[Omega])/(\[Omega]) (2 + 112.532 \[Omega] + 31.766 \[Omega]^2)}, -18.3187} + 295.848 \[Omega] + 0.482059 \[Omega]}, {\[Omega]}, {0.002, 0.036}, PlotTheme -> "Detailed", AxesStyle -> GrayLevel[0], AxesLabel -> {HoldForm[\[Omega]], HoldForm[Subscript[f, 2]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}]
(* Вычислим \[Epsilon]_\[Phi] ОБЩЕГО ВИДА *)
\[CurlyEpsilon][\[Phi]] := Function[{M, b, p, f1, f2, g2, h2, k}, 1/(3 k (M^2 - 1)) ((3/2 - 6 M^2 f1 - 2 b^2 f2/r^2) p - (3/4 + 6 M^2 g1 + 2 b^2 g2/r^2) p/(3 k) (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i]) + 3 p k (b^2/r^2 - 6 M^2 h1 - 2 b^2 h2/r^2) (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])))]\[CurlyEpsilon][\[Phi][4, 60, 6, 0.17056485619732822, -2.670940909530644, 0.00016168576174309287, -18.31869000010714, 295.8477885379241, 0.4820590355219798, 5171.59] (* это \[Epsilon]_\[Phi] *)
(* Построим график для \[Epsilon]_\[Phi], при фиксированном r=15, на отрезке времени t[0,100] *)
Plot[{{4.296980662083077^-6 (93088.62 (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])) - (0.015521833127336916 + 129.17494424174538/15^2) + 6 (-14.87422619494351 + 131894.5680007714/15^2) - 0.000386728259587477 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i]) (-255.6603273149418 + 2.1301040774730532^6/15^2)}, {i, 0, 100}, AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[Subscript[\[Epsilon], \[Phi]]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}, PlotRange -> {{0, 100}, {0, 0.025}}]
(* Вычислим и ОБЩЕГО ВИДА *)
u := Function[{M, b, p, f1, g1, h1, f2, g2, h2, k}, r/(3 k (M^2 - 1)) ((3/2 - 6 M^2 f1 - (2 b^2 f2/r^2) p - 1/(3 k) (3/4 + 6 M^2 g1 + (2 b^2 g2/r^2) p) (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i]) + 3 p k (b^2/r^2 - 6 M^2 h1 - (2 b^2 h2/r^2) (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])))]
u[4, 60, 6, 0.17056485619732822, -2.670940909530644, 0.00016168576174309287, -18.31869000010714, 295.8477885379241, 0.4820590355219798, 5171.59] (* это u *)
Plot[{{4.296980662083077^-6 (93088.62 (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])) - (0.015521833127336916 + 129.17494424174538/15^2) + 6 (-14.87422619494351 + 131894.5680007714/15^2) - 0.000386728259587477 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i]) (-255.6603273149418 + 2.1301040774730532^6/15^2)}, {i, 0, 100}, AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[Subscript[u, r]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}, PlotRange -> {{0, 100}, {0, 0.4}}]
(* Вычислим \[Epsilon]_r ОБЩЕГО ВИДА *)
\[CurlyEpsilon][r] := Function[{M, b, p, f1, g1, h1, f2, g2, h2, k}, 1/(3 k (M^2 - 1)) ((3/2 - 6 M^2 f1 + (2 b^2 f2/r^2) p - 1/(3 k) (3/4 + 6 M^2 g1 + (2 b^2 g2/r^2) p) (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i]) - 3 p k (b^2/r^2 + 6 M^2 h1 - (2 b^2 h2/r^2) (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])))]
\[CurlyEpsilon][r][4, 60, 6, 0.17056485619732822, -2.670940909530644, 0.00016168576174309287, -18.31869000010714, 295.8477885379241, 0.4820590355219798, 5171.59] (* это \[Epsilon]_r *)
Plot[{{4.296980662083077^-6 (-0.000386728259587477 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i]) (-255.6603273149418 - 2.1301040774730532^6/15^2) + 6 (-14.87422619494351 - 131894.5680007714/15^2) - 93088.62 (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])) - (0.015521833127336916 + 129.17494424174538/15^2)}, {i, 0, 100}, AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[Subscript[\[Epsilon], r]]}, PlotLabel -> None, PlotRange -> {{0, 100}, {0, -0.025}}]
(*выведем точки графика в таблицу*)
{plot, {points}} = Reap@Plot[Last@Sow@{i, 4.296980662083077^-6 (-0.000386728259587477 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i]) (-255.6603273149418 - 2.1301040774730532^6/15^2) + 6 (-14.87422619494351 - 131894.5680007714/15^2) - 93088.62 (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])) - (0.015521833127336916 + 129.17494424174538/15^2)}, {i, 0, 10}], {i, 0, 10}]]
(*построим все \[Sigma] на одном графике r = a*)
Plot[{{1/15 (6 (1 + 3600/15^2) - 4.110613883225519 (16 + 3600/15^2) - 2 (-0.002045390515015781 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i]) + 29.832789628865648 (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])) (16 + 3600/15^2)), 1/15 (6 (1 - 3600/15^2) - 4.110613883225519 (16 - 3600/15^2) - 2 (-0.002045390515015781 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i]) + 29.832789628865648 (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])) (16 - 3600/15^2)), 2/15 (-29.47553503707638 + 0.03341857694522313 (22.6 + 10.32 Exp[-152.11 i] + 8.6624 Exp[-16.272 i] + 3.46 Exp[-2.66 i] + 309.2 Exp[-1.296 i] + 2.58 Exp[-0.47 i] + 204.1 Exp[-0.133 i] + 2.4872 Exp[-0.072 i] + 5.37 Exp[-0.00384 i]) - 490.2567576224666 (0.0017 + 0.001 (1 - Exp[-0.992 i]) + 0.0009 (1 - Exp[-0.129 i]) + 0.0043 (1 - Exp[-0.082 i]) + 0.037 (1 - Exp[-0.004856 i])))}, {i, 0, 100}, AxesStyle -> Black, AxesLabel -> {HoldForm[t], HoldForm[\[Sigma]]}, PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 16, GrayLevel[0]}, PlotRange -> {{0, 100}, {3, -7}}, PlotStyle -> {{Purple, Thick}, {Green, Thick}, {Red, Thick}}]

```

## Приложение 1.1

Для получения граничных условий на поверхности контакта вязкоупругого цилиндра и упругой оболочки, рассмотрим оболочку как трубу под действием внутреннего давления  $q$ . (Т.е. Рассмотрим для нее решение задачи Ламе.)

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=b_1} = 0 \\ \sigma_r|_{r=b} = -q \end{cases}, \text{ где } b_1 = b + h - \text{внешний радиус цилиндра.} \quad (1)$$

Решение задачи ламе в этом случае имеет вид [Победра Б. Е., Георгиевский Д. В. Лекции по теории упругости //М.: Эдиториал УРСС. – 1999]

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{qb^2}{b_1^2 - b^2} \left( 1 - \frac{b_1^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\phi = \frac{qb^2}{b_1^2 - b^2} \left( 1 + \frac{b_1^2}{r^2} \right) \end{cases} \quad (2)$$

Найдем деформации в трубе. Пользуясь законом Гука

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E} \sigma_r - \frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z) \\ \varepsilon_\phi = \frac{1+\nu}{E} \sigma_\phi - \frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z) \\ \varepsilon_z = \frac{1+\nu}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z) \end{cases} \quad (3)$$

Рассматриваем плоскую деформацию  $\varepsilon_z = 0$ , значит  $\sigma_z = \nu(\sigma_\phi + \sigma_r)$ , и  $\sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z = (1 + \nu)(\sigma_\phi + \sigma_r)$ , подставляя в (3) и находим

$$\varepsilon_\phi = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_\phi - \nu\sigma_r] \quad (4)$$

Запишем выражение для напряжений (2) записанное при  $r = b$

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=b} = -q \\ \sigma_\phi|_{r=b} = q \frac{b^2 + b_1^2}{b_1^2 - b^2} \end{cases} \quad (5)$$

Подставим (5) в (4)

$$\varepsilon_\phi|_{r=b} = q \frac{1 + \nu}{E} \left[ (1 - \nu) \frac{b^2 + b_1^2}{b_1^2 - b^2} + \nu \right] \quad (6)$$

Значит

$$\sigma_r|_{r=b} = -\varepsilon_\phi|_{r=b} B, \quad \text{где } \frac{1}{B} = \frac{1 + \nu}{E} \left[ (1 - \nu) \frac{b^2 + b_1^2}{b_1^2 - b^2} + \nu \right] \quad (7)$$

То есть, если не учитывать тонкости упругой оболочки, граничные условия на границе контакта имеют вид (7).

Теперь преобразуем полученные формулы, учитывая тонкостенность оболочки  $b_1 = b + h$ , где  $\frac{h}{b} \ll 1$ . В таком случае

$$\frac{b^2 + b_1^2}{b_1^2 - b^2} = \frac{2b^2 + 2bh + h^2}{2bh + h^2} = \frac{2 + 2\frac{h}{b} + \left(\frac{h}{b}\right)^2}{2\frac{h}{b} + \left(\frac{h}{b}\right)^2} = \frac{2 + 2\frac{h}{b} + \left(\frac{h}{b}\right)^2}{2\frac{h}{b}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{b}\right)} \approx \frac{b}{h} \quad (8)$$

Значит (7) принимает вид

$$\sigma_r|_{r=b} = -\varepsilon_\phi|_{r=b} B_1, \quad \text{где } \frac{1}{B_1} = \frac{1 + \nu}{E} \left[ (1 - \nu) \frac{b}{h} + \nu \right]. \quad (9)$$

Если, теперь рассмотрим напряженное состояние в оболочке, как безмоментное [Образцов И. Ф. и др. Строительная механика летательных аппаратов //М.: Машиностроение. – 1986. Стр.156] ( $\sigma_\phi = const = q \frac{b}{h}$ ) и удовлетворяющее второй гипотезе Кирхгофа - Лява ( $\sigma_r \approx 0$ , по сравнению с  $\sigma_\phi$ ), то из формулы (4) получим

$$\varepsilon_\phi|_{r=b} = \frac{1 - \nu^2}{E} q \frac{b}{h} = - \sigma_r|_{r=b} \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{b}{h} \quad (10)$$

Значит граничное условие (7) имеет вид

$$\sigma_r|_{r=b} = - \varepsilon_\phi|_{r=b} B_2, \quad \text{где } \frac{1}{B_2} = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{b}{h}. \quad (11)$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_2} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{b}{h} \\ \frac{1}{B_1} &= \frac{1 + \nu}{E} \left[ (1 - \nu) \frac{b}{h} + \nu \right] = \frac{1}{B_2} A_1 \\ \frac{1}{B} &= \frac{1 + \nu}{E} \left[ (1 - \nu) \frac{b^2 + b_1^2}{b_1^2 - b^2} + \nu \right] = \frac{1}{B_2} A_0 \end{aligned}$$

поскольку оболочка предполагается тонкой  $\frac{h}{b} \ll 1$ , все рассмотренные граничные условия на поверхности отличаются на величину порядка  $\frac{h}{b}$ .

В частности, при принятых в работе параметрах  $h = 0.4 \text{ см}, b = 60 \text{ см}, \nu^* = 0.3$ , коэффициенты различия  $A_1 = 1.003$  и  $A_0 = 1.006$ . В работе использовались граничные условия вида (11) следуя постановки [2].

# Приложение 2

Программа в ANSYS написанная на языке APDL для Главы 2, раздела 2.3 (решение задачи о внутреннем давлении, действующем на вязкоупругий цилиндр, помещенный в упругий цилиндр)

```
/COM, Structural
!!!! Все размерности в см, кг/см2
!!!! Материальные константы из диссертации Голикова
!*SET,a,0.15
!*SET,b,0.6 !!! В МЕТРАХ
!*SET,h,0.004 !!!толщина оболочки
!*SET,c,0.01*a !!! высота рассматриваемого цилиндрического слоя
!*SET,a,150 !! В мм
!*SET,b,600
!*SET,h,4
!*SET,c,0.01*a
!*SET,a,15 !! В см
!*SET,b,60
!*SET,h,0.4
!*SET,c,0.01*a
!p0=15690
!p0=6 !мега паскали
!p0=60 !кг/см2 величина внутреннего давления
!p0=6 !кг/см2 величина внутреннего давления
!*SET,nu1,0.473 !Начальный коэффициент Пуассона для трубы
!*SET,nu1,0.3 !Начальный Коэффициент Пуассона для трубы
!материальные параметры трубы (коэффициенты рядов Прони в функции
релаксации)
!!!!все константы заданы в кг/см2
!*SET,g2,568.7796 !!!кг/см2
!*SET,alf1,10.32/g2
!*SET,alf2,204.1/g2
!*SET,alf3,309.2/g2
!*SET,alf4,8.6624/g2
!*SET,alf5,3.46/g2
!*SET,alf6,2.58/g2
!*SET,alf7,5.37/g2
!*SET,alf8,2.4872/g2
e1=g2*(1+nu1) !!!Модуль Юнга для материала трубы в кг/см2
!*SET,nu2,0.3 !Коэффициент Пуассона для оболочки
e2=1e6 !!!-Модуль Юнга для материала оболочки кг/см2

!*SET,n1,100 !(количество разбиений для трубы)
!*SET,n2,5 !(количество разбиений для оболочки)
!*SET,n2,10
!*SET,nh,1 !(количество разбиений по высоте)
!t0=60 !если переводим в секунды, считая, что у Голикова задано в минутах
!t0=1
!*SET,t1,1/152.11/t0 !переводим в секунды
!*SET,t2,1/0.133/t0
!*SET,t3,1/1.296/t0
!*SET,t4,1/16.272/t0
!*SET,t5,1/2.66/t0
!*SET,t6,1/0.47/t0
!*SET,t7,1/0.00384/t0
!*SET,t8,1/0.072/t0
/PREP7
ET,1,PLANE182
KEYOPT,1,1,0
KEYOPT,1,3,1 !!!осевая симметрия
KEYOPT,1,6,0
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,e1 !!!Материал трубы
MPDATA,PRXY,1,,nu1
!задаем параметры ряда Прони из работы Голикова
TB,PRONY,1,1,8,SHEAR
TBTEMP,0
TBDATA,,alf1,t1,alf2,t2,alf3,t3
TBDATA,,alf4,t4,alf5,t5,alf6,t6
TBDATA,,alf7,t7,alf8,t8,,
!TB,PRONY,1,1,2,SHEAR
!TBTEMP,0 !!!вязкоупругость
!TBDATA,,0.097,8.4,0.37,52.63,,
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,e2 !!!Материал оболочки
MPDATA,PRXY,2,,nu2
RECTNG,a,b,0,c,
RECTNG,b,b+h,0,c,
/PNUM,KP0
/PNUM,LINE,1

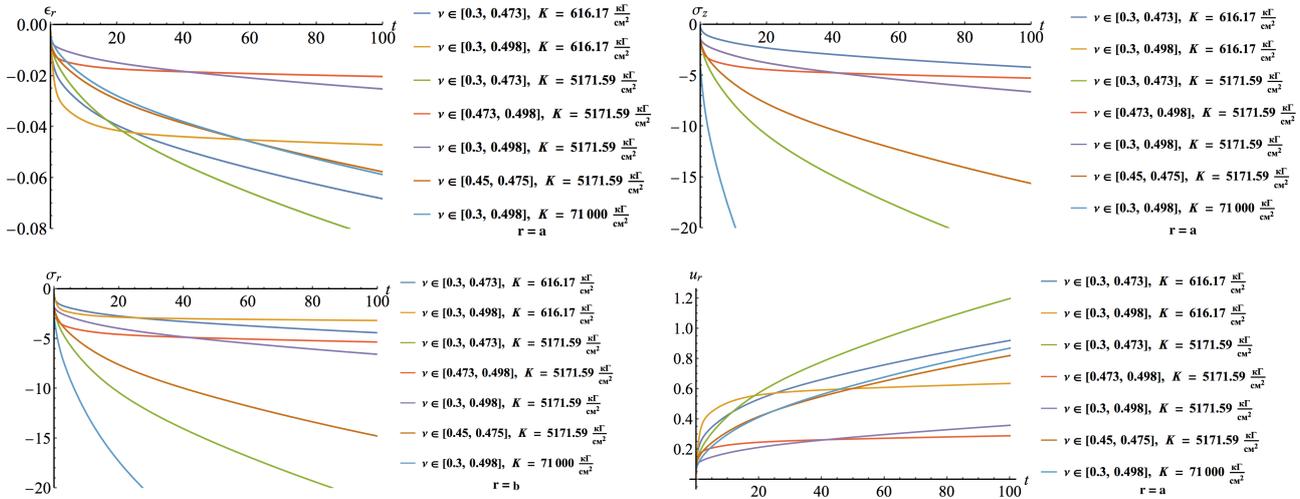
/PNUM,AREA,1
AGLUE,ALL
LESIZE,1,,n1,5,,1 !!! количество разбиений для трубы
LESIZE,3,,n1,1/5,,1
LESIZE,9,,n2,,1 !!! количество разбиений для оболочки
LESIZE,10,,n2,,1
LESIZE,2,,nh,,1
LESIZE,6,,nh,,1
LESIZE,4,,nh,,1
!разбиение на элементы внутреннего цилиндра(материал 1)
TYPE,1
MAT,1
REAL,
ESYS,0
MSHKEY,1
AMESH,1
MSHKEY,0
!разбиение на элементы оболочки (материал 2)
TYPE,1
MAT,2
REAL,
ESYS,0
MSHKEY,1
AMESH,3
MSHKEY,0
FINISH
/SOL
DL,1,,UY,0 !закрепляем среднее сечение
DL,9,,UY,0
DL,3,,UY,0 !закрепляем верхнюю границу
DL,10,,UY,0
SFL,4,PRES,p0,
TIME,1e-6
SOLVE
!NSUBST,100,0,0
NSUBST,1000,0,0 !шаги расчета

!NSUBST,10000,0,0 !шаги расчета
OUTRES,ERASE
OUTRES,ERASE
OUTRES,ALL,ALL
TIME,100
!TIME,10
!TIME,20
kbc,1 !для задания Хевисайда держит нагрузку постоянно
SOLVE
FINISH
/POST1
SET,LAST
PATH,p2,2,30,200,
PPATH,1,0,a,,0,
PPATH,2,0,b+h,,0,
AVPRIN,0,,
PDEF,,U,X,AVG
/PBC,PATH,,0
AVPRIN,0,,
PDEF,,S,X,AVG
/PBC,PATH,,0
AVPRIN,0,,
PDEF,,S,Y,AVG
/PBC,PATH,,0
AVPRIN,0,,
PDEF,,S,Z,AVG
/PBC,PATH,,0
PLPATH,SX,SY,SZ
FINISH
/POST26
ESOL,2,1,1,EPEL,X,e_rr !строим график для e_rr=a
PLVAR,2,,,,,,,,,
ESOL,3,1,1,S,X,sigma_rr_a
ESOL,4,1,1,S,Z,sigma_tt_a
ESOL,5,1,1,S,Y,sigma_zz_a
ESOL,6,1,1,EPEL,Z,e_tt_a
NSOL,7,1,U,X,UX_a
!сравнение напряжений на границе слоя и оболочки
ESOL,8,100,2,S,X,s_r_b_1
ESOL,9,101,2,S,X,s_r_b_2
```

Программу следует читать слева направо, по блокам.

# Приложение 2.1

Результаты решения всех рассмотренных задач, для выводов сделанных в Главе 2, раздел 2.4.



# Приложение 3

Программа для расчет задачи из Главы 3, раздел 3.4 представленный на языке Wolfram language.

```

a = 2;
b11 = 3;
a1 = a^2/b11^2; (*б/р*)
B1 = 1/3; (*из статьи*)
(*h1=B1 (E1 b11(1-[Nu]^2))/E2 *) (*б/р*) (*толщина оболочки цилиндра*)
[Nu]1 = 0.35; (*Пуассон цилиндр*)
(*[Nu]2=0.3;*) (*Пуассон оболочка*)
nN = 1001; (*количество разбиений*)
[Delta]t = 1/(nN - 1); (*б/р*) (*длина отрезка разбиения*)
t[k_] := t[k] = [Delta]t (k - 1); (*k, 1, n*)
a0 = 4/9; (*выгорание в начальный момент времени*)
at[t_] := at[t] = a0/(1 - (1 - a0) t); (*функция выгорания*)
(*E1=837.79; (*модуль упругости цилиндра при [Nu] = 0.473*)
E2=10^6; (*оболочка*) *)
K11 = 1/(1 - 2 [Nu]1); (*модуль объемного сжатия цилиндра*)
N1 = 1; (*из статьи*)
[Alpha] = 1/2; (*из статьи*)
[Lambda] = 5; (*из статьи в б/в внимание!!!*)
p0 = 0; (*начальное давление*)
p1 = p0/E1; (*обезразмерное начальное давление*)
pt[t_] := pt[t] = N1 t Exp[-[Alpha] [Lambda] t]; (*функция давления*)
(*B1=E2 h1/(E1 b11(1-[Nu]^2));*)
G0 = 1/2.7; (*начальный модуль сдвига из статьи при t=0*)
G1 = 1/6; (*из статьи внимание G1 это коэффициент при экспоненте в б/р виде!!!!*)
[Mu] = 1/(2 G0 - B1); (*б/р*)
(*первые члены*)
fn[1] = 4 a1 p1/(4 B1 [Mu] + 1 - a1);
[Sigma]n[1] = -4 B1 [Mu] a1 p1/(4 B1 [Mu] + 1 - a1);
L[t_] := L[t] = 3/4 (1 - at[t]);
H[t_] := H[t] = -at[t] pt[t];
H[t_] := H[t] = (1 - at[t])/4;
W[t_] := W[t] = C1 Exp[C2 t] - C3; D1 = 4/(3 K11); A = 1 + D1 G0; C1 = (D1 G1)/(A (D1 G1 - A)); C2 = ([Lambda] (D1 G1 - A))/A; C3 = 1/(D1 G1 - A); (*б/р*)
P[t_] := P[t] = -[Lambda] G1 Exp[-[Lambda] t];
K1[n_] := K1[n] = 1 + [Mu] [Delta]t P[t[n] - (t[n] - 1) + [Delta]t/2];
[Beta][n_] := [Beta][n] = H[t[n]] + L[t[n]] W[t[n] - (t[n] - 1) + [Delta]t/2];
[Delta]n[n_] := [Delta]n[n] = L[t[n]] Sum[W[t[n] - (t[k] + [Delta]t/2)] (fn[k + 1] - fn[k]), {k, 1, n - 2}] - L[t[n]] W[t[n] - (t[n] - 1) + [Delta]t/2] fn[n - 1] + H[t[n]];
Sn[n_] := Sn[n] = -[Mu] [Delta]t Sum[P[t[n] - (t[k] + [Delta]t/2)] ([Sigma]n[k + 1] + [Sigma]n[k]), {k, 1, n - 2}] - [Mu] [Delta]t P[t[n] - (t[n] - 1) + [Delta]t/2] [Sigma]n[n - 1];
[CapitalOmega][n_] := [CapitalOmega][n] = 1/2 fn[n] + Sum[W[t[n] - (t[k] + [Delta]t/2)] (fn[k + 1] - fn[k]), {k, 1, n - 1}];
fn[n_] := fn[n] = (Sn[n] - [Delta]n[n] K1[n])/(B1 [Mu] + [Beta][n] K1[n]);
[Sigma]n[n_] := [Sigma]n[n] = ([Beta][n] Sn[n] + [Delta]n[n] B1 [Mu] + [Beta][n] K1[n]);
[Sigma][Phi][n_] := [Sigma][Phi][n] = [CapitalOmega][n] - [Sigma]n[n];
fn[2]
[Sigma]n[2]
[Sigma][Phi][2]
Table[{fn[n], [Sigma]n[n]}, {n, 1, 100}]
Table[{t[n], -[Sigma]n[n]}, {n, 1, 1000}]
Table[{t[n], [Sigma][Phi][n]}, {n, 1, 1000}]
(*график [Sigma]_r[b,t]*)
ListLinePlot[%81, PlotStyle -> Red, AxesLabel -> {HoldForm[!(*OverscriptBox[t], \_)]], HoldForm[Subscript[!(*OverscriptBox[[Sigma]], \_)]], r[b, !(*OverscriptBox[t], \_)]}], Joined -> True, PlotLabel -> None, LabelStyle -> "Times New Roman", 14, GrayLevel[0], PlotRange -> {{0, 1}, {0, 0.1}}]
Table[{t[n], pt[t[n]]}, {n, 1, 1000}]
(* график функции давления p[t] *)

```

```

ListLinePlot[%94, Joined -> True]
(* сравнение графиков p[t] и \[Sigma]_r[b,t] *)
Show[{ListLinePlot[%81, PlotStyle -> Red], ListLinePlot[%94, PlotStyle -> Blue]}, (*ListLinePlot[%223, PlotStyle[Rule[Green]], *) PlotRange -> {{0, 1}, {0, 0.14}}, AxesLabel ->
{HoldForm[\[Upsilon](*OverscriptBox[\(t), \(\_)]]), HoldForm[\[Upsilon](*OverscriptBox[\(\[Sigma]), \(\_)]][b, \[Upsilon](*OverscriptBox[\(t), \(\_)]]); \[Upsilon](*OverscriptBox[\(p), \(\_)]][\[Upsilon](*OverscriptBox[\(t), \(\_)]
)}]], PlotLabel -> None, LabelStyle -> {FontFamily -> "Times New Roman", 14, GrayLevel[0]}]
(* график функции выгорания *)
Table[{t[n], at[t[n]]}, {n, 1, 1000}]
ListPlot[%126, Joined -> True]
(* \[Sigma]= Function[{t,t],1/r^2 (-a^2)[t]pt[t+1/4(r^2-a^2)t](fn[t+3\[Upsilon](*SubscriptBox[\(\[Integral]), \(\theta), \(\tau)]](W[t-\[Tau]]\[Upsilon](*DifferentialD)[\[Tau]])))]
a = 15;
b11 = 60;
h1 = 0.4; (*б/р*) (*толщина оболочки цилиндра*)
\[Nu]1 =
0.473; (*Пуассон цилиндр*)
\[Nu]2 = 0.3; (*Пуассон оболочка*)

E1 = 41.2; (*начальный модуль упругости цилиндра при \[Nu] = 0.473*)
E2 = 10^6; (*оболочка*)
B1 = (E2 h1)/(E1 b11 (1 - \[Nu]2^2))(*б/р*)
K11 =
1/(1 - 2 \[Nu]1); (*модуль объемного сжатия цилиндра*) (*б/р*)
N1 = 1; (*из статьи*)
(*t0=100;*)
10 (* время полного выгорания*)
\
(*t0=1000;*)
(*E00=10.4;
E11=43.2;
\[Alpha]=E00/(E00+E11); (*из работы Е Д б/р*) *)
\[Alpha] = 0.79;
\[Lambda] = 0.00384 t0; (*из ГЛАВЫ 2 б/р*)
(*p0=6; (*начальное давление*)
p1=0; (*обезразмеренное начальное \
давление*) *)
p1 = 0;
pt[L_]:=
pt[t] = N1 t Exp[-\[Alpha] \[Lambda] t]; (*функция давления*)
G0 = \
0.335; (*начальный модуль сдвига из ГЛАВЫ 2 при t=0*) (*б/р*)
G1 = \
0.065; (* G1 это коэффициент при экспоненте из ГЛАВЫ 2*) (*б/р*)
\
(*pt[L_]:=p1 UnitStep[t]; (*функция давления (хивисайд) мгновенная \
нагрузка *) *)
(*G0= E1/(2(1+\[Nu]1)) ; (*начальный модуль сдвига из \
статьи при t=0*) *)
G1=E11/2; (*из статьи внимание G1 это коэффициент \
при экспоненте в б/р виде!!!!*) *)
\[Mu] =
1/(2 G0 - B1); (*б/р*)
(*Clear[pt]*)

```

## Приложение 3.1

