Об автоматной модели преследования

Н.Ю.Волков

Аннотация

Изучается процесс преследования системой автоматов ("хищников") нескольких независимых друг от друга автоматов ("жертв") на плоскости. Показано, что существует конечный коллектив хищников, который "ловит" любую конечную независимую систему жертв, таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки хищников.

1. Введение

Рассматривается автоматный аналог ситуации преследования хищниками своих жертв. С этой целью формализуются пространство, в котором происходит процесс преследования (пространство преследования), понятия хищников и жертв, как по логике их поведения, так и по способности обнаруживать друг друга и перемещаться. Пространство преследования представляется в виде плоскости, разбитой на квадраты целочисленной решеткой, а хищники и жертвы — в виде автоматов, которые, находясь в какой-либо клетке, умеют обозревать некоторую ее окрестность, и, в зависимости от вида (конфигурации) этой окрестности (т.е. от расположения других автоматов в этой окрестности) и своего состояния, способны перемещаться в другую клетку плоскости. Автоматы-хищники и автоматы-жертвы в начале процесса образуют определенную диспозицию, находясь в своих начальных состояниях. После этого начинается процесс перемещения автоматов по плоскости. Внутренние логики автоматов в совокупности определяют этот процесс. Жертва считается пойманной, если она оказалась в фиксированной окрестности одного из хищников.

Рассматриваются следующие 2 основные задачи.

Сначала предполагается, что каждый из хищников "не видит" других хищников, но видит жертв, попавших в его зону обзора. Аналогично, каждая жертва "не видит" других жертв, но видит хищников, попавших в ее зону обзора (в этом случае мы говорим, что хищники и жертвы представляют собой, соответственно, независимые системы автоматов).

Спрашивается, существуют ли система хищников K и их начальное расположение на плоскости, такие, что для любой системы жертв S и любого их начального расположения на плоскости, с течением времени все жертвы будут пойманы хищниками (первая задача).

Затем рассматривается более сложный и более реальный случай, когда хищники "видят" и жертв и друг друга на расстоянии своего обзора (в этом случае мы говорим, что хищники представляют собой коллектив автоматов), а жертвы не обладают этим свойством (представляют собой независимую систему автоматов). Ставится тот же вопрос о возможности поимки всех жертв (вторая задача).

Показывается, что первая задача не имеет положительного решения, а вторая решается положительно. Устанавливается, что существует коллектив из 28 хищников, такой, что хищники, стартуя из начального расположения в одной произвольной клетке плоскости, ловят любую конечную независимую систему жертв при любом начальном расположении жертв.

Автор работы выражает признательность В.Б.Кудрявцеву за научное руководство, а также А.В.Галатенко, высказавшему ряд ценных замечаний.

2. Постановка задачи и основные результаты

Будем использовать стандартные обозначения для множеств натуральных и целых чисел $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, соответственно. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество клеток, на которые плоскость разбивается целочисленной решеткой, обозначим через $\mathbb{Z}^2$, сопоставляя каждой клетке координаты ее нижнего левого угла. Назовем r-окрестностью клетки (x_0, y_0) множество

$$D_{(x_0,y_0),r} = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{Z}^2\,,\ (\,|x - x_0| + |y - y_0|\,) \leq r\},$$

где $r \in \mathbb{N}_0$. Будем считать, что задана определенная нумерация клеток множества $D_{(x_0,y_0),r}$.

Под автоматом будем понимать инициальный конечный автомат вида $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где A — входной, B — выходной, Q — внутренний алфавиты автомата $\mathcal{A}$, $\varphi : Q \times A \to Q$ и $\psi : Q \times A \to B$ — функции переходов и выходов $\mathcal{A}$, соответственно, $q_0 \in Q$ — его начальное состояние. Алфавит A определяет возможности $\mathcal{A}$ “видеть” происходящее вокруг, а алфавит B — его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции φ и ψ задают внутреннюю логику автомата $\mathcal{A}$.

Рассмотрим автомат $\mathcal{A}$, перемещающийся по $\mathbb{Z}^2$. Выходным алфавитом $\mathcal{A}$ является множество $B = D_{(0,0),V}$, где параметр $V \in \mathbb{N}$ называется *скоростью автомата* $\mathcal{A}$. Входной алфавит $\mathcal{A}$ зависит от параметра $R \in \mathbb{N}$ $(R \geq V)$, называемого *обзором автомата* $\mathcal{A}$ и способа взаимодействия $\mathcal{A}$ с другими автоматами. Возможны два случая такого взаимодействия:
1) $\mathcal{A}$ является элементом независимой системы автоматов;
2) $\mathcal{A}$ является элементом коллектива автоматов.

Автомат со скоростью V и обзором R будем обозначать как $\mathcal{A}(R, V)$. Пусть $\mathcal{A}(R, V)$ находится в клетке (x_0, y_0). Множество $D_{(x_0,y_0),V}$ называется *окрестностью хода* $\mathcal{A}$, а множество $D_{(x_0,y_0),R}$ – *зоной обзора* $\mathcal{A}$.

Рассмотрим две системы автоматов $K = (\,W_1, \ldots, W_m\,)(R, V)$ (хищники) и $S = (\,U_1, \ldots, U_n\,)(R', V')$ (жертвы), где R и R' — обзоры, а V и V' — скорости хищников и жертв, соответственно. Здесь S — независимая система автоматов, K может быть независимой системой, а может при $m \geq 2$ быть коллективом.

Положим $N' = (R'+1)^2 + (R')^2$ — размер зоны обзора жертвы. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ строку $(a_1, \ldots, a_{N'})$, такую что для любого $k = 1, \ldots, N'$

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{, если в } k\text{-й клетке зоны обзора } U_i \text{ находится} \\ & \text{ хотя бы один хищник;} \\ 0 & \text{, иначе;} \end{cases}$$

назовем *U_i-конфигурацией.* Каждая U_i-конфигурация однозначно задает клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники.

Положим $N = (R+1)^2 + R^2$ — размер зоны обзора хищника. Если $K = (\,W_1, \dots, W_m\,)$ — независимая система автоматов, то для каждого $j = 1, \dots, m$ строку $(a_1, \dots, a_N)$, такую что для любого $k = 1, \dots, N$

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{, если в } k\text{-й клетке зоны обзора } W_j \text{ находится} \\ & \text{ хотя бы одна жертва;} \\ 0 & \text{, иначе;} \end{cases} \qquad (*)$$

назовем *W_j-конфигурацией.* Каждая W_j-конфигурация однозначно задает клетки зоны обзора W_j, в которых находятся жертвы.

Обозначим внутренний алфавит W_j как Q_j, а множество всех пар вида $((x,y),q)$, где $(x,y) \in D_{(0,0),R},\ q \in \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$ — как M. Пусть каждый хищник W_j находится в клетке (x_j, y_j) в состоянии q_j. Если $K = (\,W_1, \dots, W_m\,)$ — коллектив автоматов, то для каждого $j = 1, \dots, m$ строку $(a_1, \dots, a_{N+m})$, такую что a_k при $k = 1, \dots, N$ определяется из $(*)$, $a_{N+j} = \Lambda$, и для любого $p = 1, \dots, m,\ p \neq j$

$$a_{N+p} = \begin{cases} (\,(x_p - x_j,\, y_p - y_j),\, q_p\,) & \text{, если } |x_p - x_j| + |y_p - y_j| \le R; \\ \Lambda & \text{, иначе;} \end{cases}$$

назовем *W_j-конфигурацией.* Легко видеть, что $a_{N+p} \in (M \cup \{\Lambda\})$ при $p = 1 \dots m$. Каждая W_j-конфигурация однозначно задает клетки зоны обзора W_j, в которых находятся жертвы, а также расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_j.

Расположения на плоскости жертв и хищников и состояния хищников однозначно задают все U_i-конфигурации и все W_j-конфигурации. Множество всех U_i-конфигураций при всевозможных расположениях жертв и хищников и состояниях хищников обозначим как F'. Аналогично, множество всех W_j-конфигураций обозначим как F. Входным алфавитом каждой жертвы U_i является множество всех пар вида $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1 \in (\{\emptyset\} \cup F')$, а $\mathcal{F}_2 \in F'$. Входным алфавитом каждого хищника W_j является множество всех пар вида $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in F$.

Момент времени 2τ ($\tau \in \mathbb{N}_0$) называется *моментом хода жертв с номером τ*. Момент $(2\tau+1)$ называется *моментом хода хищников с номером τ*. Промежуток времени $[2\tau, (2\tau+1)]$ называется *тактом с номером τ*. Время взаимодействия автоматов будем измерять в тактах.

Преследование независимой системой $\langle$ коллективом $\rangle$ хищников независимой системы жертв происходит так. Фиксируются начальные (в нулевой момент времени) расположения всех хищников и жертв на плоскости. В нулевой момент каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\emptyset, \mathcal{F}_2)$, где U_i-конфигурация $\mathcal{F}_2$ задает клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники. В момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N})$ каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, задающую клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники в моменты $(2\tau - 1)$ и 2τ. В каждый момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ жертва U_i, в соответствии со своими функциями переходов и выходов, определяет свое следующее состояние, выходной символ $\bar{b}$, и перемещается на вектор $\bar{b}$.

В момент $(2\tau + 1)$ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ хищник W_j воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, задающую клетки зоны обзора W_j, в которых находятся жертвы $\langle$ и расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_j $\rangle$ в моменты 2τ и $(2\tau + 1)$, и, в соответствии со своими функциями переходов и выходов, определяет свое следующее состояние, выходной символ $\bar{b}$, и перемещается на вектор $\bar{b}$.

Система хищников K "ловит" жертву, если жертва в некоторый момент времени оказалась в окрестности хода одного из хищников. Пойманная жертва исчезает с плоскости. K "ловит" независимую систему жертв, если в процессе преследования K ловит каждую жертву.

Ставится вопрос: существуют ли независимая система $\langle$ коллектив $\rangle$ хищников $K(R, V)$ и их начальное расположение на плоскости, такие что для произвольной конечной независимой системы жертв $S(R', V')$ и любого их начального расположения, K ловит S.

Расположение автоматов системы, при котором все они находятся в одной клетке, назовем *каноническим*. Зафиксируем R, $V \in \mathbb{N}$, такие что $2 \leq V \leq R$.

Теорема 1. *При любых натуральных R', V' $(R' \geq V')$, для любой независимой системы хищников $K = (\,W_1, \ldots, W_m\,)(R, V)$, любого начального расположения $W_1, \ldots, W_m$ и любого автомата-жертвы $U = U(R', V')$ существует начальное расположение U, при котором K не ловит U.*

Теорема 2. *Имеют место утверждения:*
1) для любого автомата-жертвы $U = U(R, V - 1)$ существует коллектив хищников $K = (\,W_1, W_2, W_3\,)(R, V)$, который, стартуя из канонического расположения, ловит U при любом начальном взаимном расположении U и K;
2) при любых натуральных R', V', таких что $R' \geq V'$, для любого коллектива $(\,W_1, W_2\,)(R, V)$, любого автомата-жертвы $U = U(R', V')$ и любого начального расположения $(\,W_1, W_2\,)(R, V)$, существует такое начальное расположение U, что $(\,W_1, W_2\,)$ не ловит U.

Теорема 3. *Существует коллектив хищников $K = (\,W_1, \ldots, W_{28}\,)(R, V)$, который, стартуя из канонического расположения, ловит любую конечную независимую систему жертв $S = (\,U_1, \ldots, U_n\,)(R, V - 1)$ при любом начальном взаимном расположении $U_1, \ldots, U_n$ и K.*

3. Вспомогательные утверждения

Пусть автомат $\mathcal{A}$ перемещается по плоскости и его выходные символы в такты $\tau_1, \tau_1+1, \ldots, \tau_2$ равны $\overline{b}_{\tau_1}, \overline{b}_{\tau_1+1}, \ldots, \overline{b}_{\tau_2}$, соответственно. *Вектором перемещения* (или просто *перемещением*) *автомата $\mathcal{A}$ за промежуток времени* $[\tau_1, \tau_2]$ называется вектор $\vec{s} = \overline{b}_{\tau_1} + \overline{b}_{\tau_1+1} + \ldots + \overline{b}_{\tau_2}$. Пусть вектор $\vec{s}$ имеет координаты s_1 и s_2 $(\vec{s} = (s_1, s_2))$. Положим $|\vec{s}| = |s_1| + |s_2|$.

Лемма 1. *Произвольный автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$ с n состояниями, перемещающийся по плоскости так, что другие автоматы не попадают в его зону обзора, имеет периодическую последовательность выходных символов и длина периода этой последовательности d, длина предпериода d_0 и перемещение $\vec{s}$ автомата $\mathcal{A}$ за период этой последовательности удовлетворяют неравенствам $d_0 + d \leq n$, $|\vec{s}| \leq V \cdot d$.*

Доказательство. Т.к. в зону обзора $\mathcal{A}$ не попадают другие автоматы, его входной символ постоянен. Поскольку $\mathcal{A}$ имеет n состояний, не позднее чем через n тактов он окажется в состоянии, в котором уже находился. Выходные символы и состояния $\mathcal{A}$ будут повторяться с длиной предпериода d_0 и периода d, причем $d_0 + d \leq n$. Рассмотрим период $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_d$ выходной последовательности автомата $\mathcal{A}$. Т.к. $\mathcal{A}(R, V)$ имеет скорость V, для каждого $i = 1, \ldots, d$ выполнено $|\overline{b}_i| \leq V$. Следовательно, $|\vec{s}| = |\overline{b}_1 + \ldots + \overline{b}_d| \leq V \cdot d$. **Лемма доказана**.

Если жертва U_i $(1 \leq i \leq n)$ в некоторый момент оказалась в зоне обзора W_j $(1 \leq j \leq m)$, будем говорить, что система хищников *обнаружила* ее. Будем также говорить, что W_j обнаружил U_i. Наименьший момент, в который это произошло, будем называть моментом обнаружения.

Определим *схему функционирования системы автоматов* как набор записей следующего вида. Первая запись содержит пары вида (наименование автомата, внутренний алфавит) для каждого автомата системы. Например,
1) $(U_1, \{q_1, q_2\})$, $(U_2, \{q\})$.

Остальные записи содержат наименование автомата (например, U_1), условия, в которых он может находиться, и его поведение в этих условиях (между условиями и поведением автомата ставится разделяющий символ $\rightarrow$). Условия — это некоторое подмножество декартова произведения внутреннего и входного алфавитов U_1. Поведение — это элемент декартова произведения внутреннего и выходного алфавитов U_1. Такая запись означает, что автомат U_1 в данном состоянии, получив данный входной символ, перейдет в соответствующее следующее состояние и выдаст соответствующий выходной символ. Если для какого-то автомата нет записи, соответствующей некоторым условиям, в которых он может находиться, подразумевается, что в этих условиях автомат не меняет состояние и стоит на месте. Например,
2) U_1, (q_1), $\rightarrow (q_2, (1, 0))$.
3) U_1, (q_2), $\rightarrow (q_1, (-1, 0))$.

Схема функционирования из строк 1)-3) задает систему автоматов (U_1, U_2), такую что U_1 в четные такты делает шаг вправо, а в нечетные — шаг влево, а U_2 стоит на месте. Как в этом примере, везде далее в случае, когда берется декартово произведение собственного подмножества внутреннего алфавита на входной алфавит, или декартово произведение собственного подмножества входного алфавита на внутренний алфавит, в схеме функционирования указывается только собственное подмножество. Схема функционирования системы автоматов корректна, если для каждого автомата каждый элемент декартова произведения его внутреннего и входного алфавитов встречается не более чем в одной записи. Корректно записанная схема функционирования однозначно задает систему автоматов. Если в первой строке схемы функционирования системы автоматов алфавиты автоматов заданы при помощи перечисления, то, если не оговорено противное, начальным состоянием каждого автомата является первый (в порядке перечисления) символ его внутреннего алфавита.

Пусть даны системы автоматов $(\,\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_m\,) = (\,W_1,\ldots,W_m\,)(R,V)$ и $(\,\mathcal{A}_{m+1},\ldots,\mathcal{A}_{m+n}\,) = (\,U_1,\ldots,U_n\,)(R',V')$, и заданы расположения этих автоматов на плоскости и их состояния в текущий момент $(2\tau+1)$ и предыдущий момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$. Введем следующие предикаты.

1) $P_h(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $(2\tau+1)$ находится в h-окрестности $\mathcal{A}_i$, 0 — иначе.

2) $P'_h(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j,q)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $(2\tau+1)$ находится в h-окрестности $\mathcal{A}_i$, и $\mathcal{A}_j$ находится в состоянии q, и 0 — иначе.

3) $P''_h(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если существует натуральное число k, такое что $m+1 \le k \le m+n$ и $\mathcal{A}_k$ находился в h-окрестности $\mathcal{A}_i$ хотя бы в один из моментов $\{\,2\tau,\ (2\tau+1)\,\}$, и $P''_h(\mathcal{A}_i)= 0$ — иначе.

Если система хищников $(\,\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_m\,)$ представляет собой коллектив, то при любых $h = 0,\ldots,R$, $i,j = 1,\ldots,m$, $q \in Q_j$ (Q_j — внутренний алфавит $\mathcal{A}_j$), входной символ автомата $\mathcal{A}_i$ однозначно определяет значение предикатов $P_h(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j)$, $P'_h(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j,q)$ и $P''_h(\mathcal{A}_i)$. Т.е. каждый $\mathcal{A}_i$ (из коллектива хищников) в каждый момент хода "знает" значение этих предикатов.

Если $P_h(\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_j)= 1$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит* $\mathcal{A}_j$ *в своей h-окрестности* (при $h = R$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит* $\mathcal{A}_j$). Если $P''_h(\mathcal{A}_i) = 1$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит жертв в своей h-окрестности* (при $h = R$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит жертв*).

Будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_j$ *расположен правее* $\mathcal{A}_i$, если разница x-координат $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_i$ положительна. Будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_j$ *расположен левее* $\mathcal{A}_i$, если разница x-координат $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_i$ отрицательна.

Клетка (x_2,y_2) называется *ближайшей к клетке* (x_1,y_1) *клеткой V-окрестности* (x_0,y_0), если $(x_2,y_2) \in D_{(x_0,y_0),V}$, и для любой клетки (x_3,y_3) из $D_{(x_0,y_0),V}$ выполнено $|x_2-x_1|+|y_2-y_1| \le |x_3-x_1|+|y_3-y_1|$, причем (x_2,y_2) является самой верхней среди самых правых клеток, удовлетворяющий данному набору неравенств. Будем говорить, что автомат $\mathcal{A}(R,V)$, находящийся в клетке (x_0,y_0), сделал *ход к клетке* (x_1,y_1), если он за один такт переместился в клетку (x_2,y_2) — ближайшую к клетке (x_1,y_1) клетку $D_{(x_0,y_0),\,V}$.

Лемма 2. *Для любого коллектива* $K = (\,W_1,\ldots,W_m\,)(R,V)$ *существует коллектив* $K' = (\,W'_1,\ldots,W'_m\,)(R,V)$*, такой что если для некоторого начального расположения хищников и жертв коллектив* K *обнаруживает какую-либо из жертв, то* K' *ловит некоторую жертву при таких же начальных расположениях хищников и жертв.*

Доказательство. Пусть автомат $W_i = W_i(R,V)$ $(1 \le i \le m)$ имеет внутренний алфавит Q_i и функции переходов и выходов φ_i и ψ_i, соответственно. Рассмотрим автомат $W'_i = W'_i(R,V)$, который, видя жертв, делает ход к клетке расположения ближайшей к нему жертвы, а не видя жертв, перемещается, как W_i. Под ближайшей жертвой (из тех, которые в данный или предыдущий момент находятся в зоне обзора данного хищника) понимается жертва, находящаяся (или находившаяся в предыдущий момент времени) в клетке зоны обзора хищника, имеющей наименьший номер. Схема функционирования коллектива $K' = (\,W'_1,\ldots,W'_m\,)(R,V)$:
1) $(W'_1,Q_1),\ldots,(W'_m,Q_m)$.
2) W'_i (где $1 \le i \le m$), $(q_i, P''_R(W_i) = 0)$, $\to$ $(\varphi_i(q_i,a_i), \psi_i(q_i,a_i))$, где a_i — произвольный входной символ W'_i, $q_i \in Q_i$.
3) W'_i $(1 \le i \le m)$, $(q_i, P''_R(W_i) = 1)$, $\to$ $(\varphi_i(q_i,a_i)$, (ход к клетке (x_1,y_1))). Здесь a_i — произвольный входной символ W'_i, $q_i \in Q_i$, (x_1,y_1) — расположение ближайшей к W'_i жертвы в наибольший момент ее обнаружения хищником W_i, не превосходящий текущего момента хода хищников.

Покажем, что K' удовлетворяет условию леммы. Пусть t_0 — наименьший момент обнаружения жертв коллективом K. Пусть в момент t_0 хищник W_i обнаруживает U, причем U — жертва, ближайшая к W_i в момент t_0. Тогда до момента t_0 K' и U будут взаимодействовать так же, как K и U, а в момент t_0 W'_i обнаружит U. В первый момент хода хищников после обнаружения U (t_0 или (t_0+1)), выполнится условие $P''_R(W'_i) = 1$. Т.к. скорость W'_i превосходит скорость U, из выполнения в момент хода хищников с номером τ условия $P''_R(W'_i) = 1$ следует выполнение этого условия в $(\tau+1)$-й момент хода хищников. При этом, если U не пойман в такт τ, в $(\tau+1)$-й момент хода хищников U будет ближе к W'_i, чем в момент хода хищников с номером τ. Таким образом, за каждый такт W'_i будет приближаться к ближайшей к нему жертве. Значит, не позднее чем через $(R-V)$ тактов после t_0 некоторая жертва будет поймана. **Лемма доказана**.

Если τ_j — наименьший такт, начиная с которого автомат $\mathcal{A}_j$ не меняет состояния и его выходная последовательность (с такта τ_j) состоит из нулевых векторов, будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_j$ остановился в такт τ_j. Если каждый $\mathcal{A}_j$ $(j = 1,\ldots,m)$ останавливается в такт τ_j, и $\tau = max_{j\in\{1,\ldots,m\}}\tau_j$, будем говорить, что коллектив $(\,\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_m\,)$ остановился в такт τ.

Если коллектив $K = (\,\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_m\,)$ $(m \ge 4)$, расположен на плоскости так, что $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ находятся в клетках $(x_0{+}a, y_0)$ и $(x_0{+}b, y_0)$, соответственно, (где $a \in \mathbb{N}_0,\ b \in \mathbb{N},\ a \le b$), а все остальные автоматы расположены в клетке (x_0,y_0), то будем говорить, что коллектив K находится в (a,b)-*расстановке с центром* (x_0,y_0).

Фиксируем натуральное $V \geq 2$.

Лемма 3. *Для любого* $c \in \mathbb{N}$ *существует коллектив* $K_c = (\,\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_5\,)(V, V)$, *который, при произвольных* $a, b, (x_0, y_0)$, *стартуя из* (a, b)*-расстановки с центром* (x_0, y_0), *функционирует* $2a \cdot c \cdot]b/V[$ *тактов и останавливается в той же расстановке.*

Доказательство. Идея доказательства такова. При $a = 0$ все автоматы стоят на месте. При $a > 0$ происходит следующее. Автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_3$ неподвижны, и автомат $\mathcal{A}_5$ перемещается от $\mathcal{A}_1$ к $\mathcal{A}_3$ и обратно. На каждый такой проход туда-обратно тратится $2c \cdot]b/V[$ тактов. Автомат $\mathcal{A}_5$ совершает a проходов, после чего коллектив останавливается.

Опишем функционирование коллектива K_c, стартовавшего в нулевой такт из (a, b)-расстановки с центром (x_0, y_0) $(a > 0)$, более подробно. Для каждого логического фрагмента описания K_c приведем соответствующие строки схемы его функционирования.

Перечень автоматов и их внутренних алфавитов.

1) $(\mathcal{A}_1, \{\,-1, 1\}^2), (\mathcal{A}_2, \{q^2\}), (\mathcal{A}_3, \{q^3\}), (\mathcal{A}_4, \{q_0^4, q_1^4\} \cup (\{\,-1, 1\}^2 \times \{q_2^4\})),$ $(\mathcal{A}_5, (\{q_1^5, q_2^5\} \times \{1, \ldots, c\}) \cup \{q_3^5\}\,).$

Все состояния автомата $\mathcal{A}_1$ являются начальными. Начальными состояниями автоматов $\mathcal{A}_4$ и $\mathcal{A}_5$ являются q_0^4 и $(q_1^5, 1)$, соответственно.

Автомат $\mathcal{A}_5$ будет перемещаться только в такты вида $c \cdot \tau,\ \tau \in \mathbb{N}$. В такие такты он будет находиться в состояниях вида (q_i^5, c) $(i = 1, 2)$. Находясь в других состояниях, $\mathcal{A}_5$ стоит на месте.

2) $\mathcal{A}_5$, $((q_i^5, j)), \rightarrow (\,(q_i^5, j + 1), (0, 0)\,)$, где $i = 1, 2,\ 1 \leq j < c$.

Автомат $\mathcal{A}_5$ движется в сторону $\mathcal{A}_3$, за каждые c подряд идущих тактов перемещаясь на вектор $(V, 0)$, пока не окажется в той же клетке, что и $\mathcal{A}_3$, или правее.

3) $\mathcal{A}_5$, $((q_1^5, c), ((P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0) \vee (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 0)) \wedge (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 0)),$ $\rightarrow (\,(q_1^5, 1), (V, 0)\,)$.

4) $\mathcal{A}_5$, $((q_1^5, c), ((P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0) \vee (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 0)) \wedge (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 1)),$ $\rightarrow (\,(q_2^5, 1), (V, 0)\,)$.

Этот этап завершится в такт $c \cdot]b/V[$. Затем $\mathcal{A}_5$ движется обратно в сторону $\mathcal{A}_1$, за каждые c подряд идущих тактов перемещаясь на вектор $(-V, 0)$, пока не окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_1$.

5) $\mathcal{A}_5$, $((q_2^5, c), (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0)), \rightarrow (\,(q_2^5, 1), (-V, 0)\,)$.

6) $\mathcal{A}_5$, $((q_2^5, c), (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P'_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_4, q_1^4) = 0) \wedge (\mathcal{A}_5$ не видит слева от себя $\mathcal{A}_4,$ находящегося на 1 клетку левее $\mathcal{A}_2)), \rightarrow (\,(q_1^5, 1), (-V, 0)\,)$.

7) $\mathcal{A}_5$, $((q_2^5, c), (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 1) \wedge ((P'_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1, q_1^4) = 1) \vee (\mathcal{A}_5$ видит слева от себя $\mathcal{A}_4,$ находящегося на 1 клетку левее $\mathcal{A}_2))), \rightarrow (q_3^5, (-V, 0))$.

Этот этап завершится в такт $2c \cdot]b/V[$. Если автомат $\mathcal{A}_5$ окажется в этот такт в состоянии q_3^5, он останавливается. В противном случае $\mathcal{A}_5$ снова пойдет к $\mathcal{A}_3$ (см п. 4)-7)).

Во время каждого, кроме последнего, прохода $\mathcal{A}_5$ от $\mathcal{A}_3$ обратно к $\mathcal{A}_1$ совершается перемещение автомата $\mathcal{A}_4$ на 1 в сторону $\mathcal{A}_2$. Автомат $\mathcal{A}_4$, увидев $\mathcal{A}_5$ в состоянии $(q_2^5, 1)$ правее себя, сдвигается на $(1, 0)$, если расстояние от $\mathcal{A}_4$ до $\mathcal{A}_2$ больше 1.

8) $\mathcal{A}_4$, $(q_0^4, (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, (q_2^5, 1)) = 1) \wedge (\mathcal{A}_5$ правее $\mathcal{A}_4) \wedge (P_1(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_0^4, (1, 0))$.

Если расстояние от $\mathcal{A}_4$ до $\mathcal{A}_2$ равно 1, $\mathcal{A}_4$ возвращается к $\mathcal{A}_1$ и останавливается.

9) $\mathcal{A}_4$, $(q_0^4, (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, (q_2^5, 1)) = 1) \wedge (\mathcal{A}_5$ правее $\mathcal{A}_4) \wedge (P_1(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 0)) \to (q_1^4, (-V, 0))$.

10) $\mathcal{A}_4$, $(q_0^4, (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, (q_2^5, 1)) = 1) \wedge (\mathcal{A}_5$ правее $\mathcal{A}_4) \wedge (P_1(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1, (q', q'')) = 1)) \to ((q', q'', q_2^4),$ (ход в расположение $\mathcal{A}_1$)), где $q', q'' \in \{-1, 1\}$.

11) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 0)) \to (q_1^4, (-V, 0))$.

12) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1, (q', q'')) = 1)) \to ((q', q'', q_2^4),$ (ход в расположение $\mathcal{A}_1$)), где $q', q'' \in \{-1, 1\}$.

Легко видеть, что если построенный коллектив стартовал из (a, b)-расстановки $(0 \le a \le b)$, то автомат $\mathcal{A}_5$ совершает a проходов от $\mathcal{A}_1$ к $\mathcal{A}_3$ и обратно, после чего K_c останавливается в (a, b)-расстановке. Т.к. на каждый проход тратится $2c\cdot]b/V[$ тактов, время функционирования коллектива равно $2a \cdot c\cdot]b/V[$. **Лемма доказана**.

Коллектив $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ назовем *правильным*, если автомат $\mathcal{A}_1$ имеет внутренний алфавит $Q = \{-1, 1\}^2 \times Q'$. Определим функцию $sgn_0(x)$, принимающую значение 1 при $x \ge 0$, и значение -1 — иначе.

Пусть правильный коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ $(m \ge 8)$, расположен на плоскости так, что $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$ находятся в клетках $(x_0 + |a_1|, y_0)$, $(x_0 + |a_2|, y_0)$ и $(x_0 + b, y_0)$, соответственно $(a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $max(|a_1|, |a_2|) \le b)$, и автомат $\mathcal{A}_1$ находится в состоянии $q = (sgn_0(a_1), sgn_0(a_2), q')$. Если при этом все автоматы коллектива, кроме $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$, расположены в клетке (x_0, y_0), будем говорить, что коллектив K находится в (a_1, a_2, b)-*расстановке с центром* (x_0, y_0). Если $\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_7$ и $\mathcal{A}_8$ находятся в клетках $(x_0 + h_1, y_0)$, $(x_0, y_0 + h_2)$, $(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ и $(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$ соответственно $(h_1, h_2 \in \mathbb{Z})$, и все автоматы коллектива, кроме $\mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_8$ расположены в клетке (x_0, y_0), будем говорить, что коллектив K находится в (a_1, a_2, b, h_1, h_2)-*расстановке с центром* (x_0, y_0).

Состояние автомата назовем *финальным*, если попав в это состояние автомат останавливается (при любых входных символах). Пусть дан автомат $\mathcal{A}_1$ с начальными состояниями $q_0^1, \ldots, q_0^k$ и автомат $\mathcal{A}_2$. *Композицией автоматов* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ называется автомат с начальными состояниями $q_0^1, \ldots, q_0^k$, диаграмма Мура которого получена из объединения диаграмм Мура автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ отождествлением (склеиванием) каждого финального состояния автомата $\mathcal{A}_1$ с некоторым состоянием автомата $\mathcal{A}_2$. Склеивание состояний происходит по следующим правилам:

а) если автомат $\mathcal{A}_1$ имеет 4 финальных состояния: $(1, 1, q^1)$, $(-1, 1, q^1)$, $(1, -1, q^1)$ и $(-1, -1, q^1)$, а автомат $\mathcal{A}_2$ имеет 4 начальных состояния: $(1, 1, q^2)$, $(-1, 1, q^2)$, $(1, -1, q^2)$ и $(-1, -1, q^2)$, где q^1 и q^2 произвольные, то каждое состояние (q', q'', q^1) склеивается с состоянием (q', q'', q^2) $(q', q'' \in \{-1, 1\})$;

б) если автомат $\mathcal{A}_2$ имеет единственное начальное состояние, то все фи-

нальные состояния $\mathcal{A}_1$ склеиваются с начальным состоянием $\mathcal{A}_2$.
в) во всех случаях, кроме а), б), композиция автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ определена только в том случае, если специально указано, как производится склеивание финальных состояний $\mathcal{A}_1$ с состояниями $\mathcal{A}_2$.

Запись $\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}$ означает, что строится автомат $\mathcal{A}$, по определению равный композиции автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Неподвижный автомат с 1 состоянием будем обозначать $\mathcal{H}_0$. Автомат с 1 состоянием, который за каждый такт смещается на 1 вправо, будем обозначать $\mathcal{H}_1$. Построим два семейства автоматов, зависящих от параметров $s_x, s_y \in \mathbb{Z}$ и $p \in \mathbb{N}$ $(|s_x| + |s_y| \leq V,\ p \geq 2)$ и от некоторого автомата $\mathcal{A}$.

Пусть автомат $\mathcal{A}$ неподвижен. Тогда $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y))(V, V)$ — автомат, который, стартуя из начального состояния (q, q_1) $(q \in \{-1, 1\})$, за каждый такт смещается на вектор $q \cdot (s_x, s_y)$, пока не увидит $\mathcal{A}$. Увидев $\mathcal{A}$, автомат $\mathcal{H}_2$ ходит в расположение $\mathcal{A}$ и останавливается.
1)$(\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y)), \{-1, 1\} \times \{q_1, q_2\})$.
2) $\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y))$,$((q, q_1),\ P_V(\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y)), \mathcal{A}) = 1), \to ((q, q_2)$, ход в расположение $\mathcal{A}$), где $q \in \{-1, 1\}$.
3) $\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y))$,$((q, q_1),\ P_V(\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, (s_x, s_y)), \mathcal{A}) = 0), \to ((q, q_1),\ q \cdot (s_x, s_y))$, где $q \in \{-1, 1\}$.

$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p)(V, V)$ — автомат, который, стартуя из начального состояния (q, q_1) $(q \in \{-1, 1\})$, в такты вида $p \cdot k + h$ $(k, h \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq h \leq p - 2)$ смещается на вектор $q \cdot (s_x, s_y)$, а в такты вида $p \cdot k + (p - 1)$ стоит на месте. Такое движение продолжается, пока $\mathcal{H}_3$ в состоянии (q, q_p) не окажется в одной клетке с автоматом $\mathcal{A}$ (который уже не предполагается неподвижным). Оказавшись в состоянии (q, q_p) в одной клетке с $\mathcal{A}$, автомат $\mathcal{H}_3$ останавливается.
1)$(\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), \{-1, 1\} \times \{q_1, ..., q_{p+1}\})$.
2) $\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p),\ ((q, q_i)), \to ((q, q_{i+1}),\ q \cdot (s_x, s_y))$, где $q \in \{-1, 1\}$, $1 \leq i \leq p - 1$.
3) $\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p),\ ((q, q_p), P_0(\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), \mathcal{A}) = 0)), \to ((q, q_1),\ (0, 0))$, где $q \in \{-1, 1\}$.
4) $\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), ((q, q_p), P_0(\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, (s_x, s_y), p), \mathcal{A}) = 1)), \to ((q, q_{p+1}), (0, 0))$, где $q \in \{-1, 1\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — автомат типа $\mathcal{H}_i$, $i = 2, 3$. Обозначим внутренний алфавит $\mathcal{A}$ через $Q = \{-1, 1\} \times Q'$. Через $\mathcal{A}^x$ и $\mathcal{A}^y$ будем обозначать автоматы с внутренними алфавитами, равными $\{-1, 1\}^2 \times Q'$, функционирующие так же, как $\mathcal{A}$. “Функционирует так же“ означает следующее. Если начальными состояниями автомата $\mathcal{A}$ являются состояния $(-1, q_1)$ и $(1, q_1)$, то начальными состояниями каждого из автоматов $\mathcal{A}^x$ и $\mathcal{A}^y$ являются состояния $(-1, -1, q_1)$, $(-1, 1, q_1)$, $(1, -1, q_1)$ и $(1, 1, q_1)$. Пусть автомат $\mathcal{A}$, находясь в произвольном состоянии вида (a_1, q), где $a_1 \in \{-1, 1\}$, $q \in Q'$, при данном входном символе перемещается на вектор $a_1 \cdot (s_1, s_2)$ (где вектор (s_1, s_2) зависит лишь от q и входного символа $\mathcal{A}$) и переходит в состояние (a_1, q'), где $q' \in Q'$. Тогда автоматы $\mathcal{A}^x$ и $\mathcal{A}^y$, находясь в состоянии (a_1, a_2, q) (где

$a_1, a_2 \in \{-1, 1\}$) при данном входном символе перемещаются на вектора $a_1 \cdot (s_1, s_2)$ и $a_2 \cdot (s_1, s_2)$, соответственно, и оба переходят в состояние (a_1, a_2, q').

Лемма 4. *Для любого $c \in \mathbb{N}$ существует правильный коллектив $K_c = (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_9)(V, V)$, который, при произвольных $a_1, a_2, b, (x_0, y_0)$, стартуя из (a_1, a_2, b)-расстановки с центром (x_0, y_0), через $T = 2 \cdot (|a_1| + |a_2|) \cdot (c + 1) \cdot]b/V[$ тактов остановится в $(a_1, a_2, b, (2 \cdot a_1 \cdot c \cdot]b/V[\cdot V), (2 \cdot a_2 \cdot c \cdot]b/V[\cdot V))$-расстановке с центром (x_0, y_0).*

Доказательство. Обозначим через $K_1 = (\mathcal{A}'_1, ..., \mathcal{A}'_5)(V, V)$ коллектив $K_c(V, V)$ из леммы 3 при $c = 1$. Модифицируем K_1 следующим образом.
1. Добавим в коллектив автоматы $\mathcal{A}'_6$ и $\mathcal{A}'_7$. Автомат $\mathcal{A}'_6$ неподвижен (является аналогом $\mathcal{A}'_2$). Автомат $\mathcal{A}'_7$ является аналогом $\mathcal{A}'_4$. За каждый обратный проход $\mathcal{A}'_5$ от $\mathcal{A}'_3$ к $\mathcal{A}'_1$ автомат $\mathcal{A}'_7$ смещается на 1 в сторону $\mathcal{A}'_6$, если расстояние между $\mathcal{A}'_7$ и $\mathcal{A}'_6$ больше 1. После того, как $\mathcal{A}'_7$ оказался на расстоянии 1 от $\mathcal{A}'_6$, автомат $\mathcal{A}'_7$ возвращается к $\mathcal{A}'_1$.
2. Автомат $\mathcal{A}'_5$ будет перемещаться между $\mathcal{A}'_1$ и $\mathcal{A}'_3$ до тех пор, пока оба автомата $\mathcal{A}'_4$ и $\mathcal{A}'_7$ не вернутся к автомату $\mathcal{A}'_1$ от $\mathcal{A}'_2$ и $\mathcal{A}'_6$, соответственно.
3. Увеличим внутренний алфавит каждого автомата $\mathcal{A}'_i$ $(i = 4, 7)$, присоединив к нему множество $\{-1, 1\}^2 \times \{q^i_3, q^i_4\}$.
4. Добавим в коллектив автоматы $\mathcal{A}'_8$ и $\mathcal{A}'_9$. Определим поведение этих автоматов и доопределим поведение автоматов $\mathcal{A}'_4$ и $\mathcal{A}'_7$ в состояниях вида (q', q'', q) (где $q', q'' \in \{-1, 1\}$).

Внутренние алфавиты автоматов $\mathcal{A}'_8$ и $\mathcal{A}'_9$.

1) $(\mathcal{A}'_8, \{q^8_0\} \cup (\{-1, 1\}^2 \times \{q^8_1, \ldots, q^8_{c+2}\})), (\mathcal{A}'_9, \{q^9_0\} \cup (\{-1, 1\}^2 \times \{q^9_1, \ldots, q^9_{c+2}\}))$.

Обозначим состояние $\mathcal{A}''_1$ через (q', q''). Автомат $\mathcal{A}'_8$, начиная с нулевого такта, движется в направлении $(q', 0)$. В такты вида $(c+1) \cdot k + h$ $(k, h \in N_0$, $0 \le h \le c)$, он перемещаются со скоростью V, а в такты вида $(c+1) \cdot k + c$ — стоит на месте. Автомат $\mathcal{A}'_8$ продолжает такое движение, пока он в состоянии (q', q'', q^8_2) не увидит $\mathcal{A}'_4$ в состоянии (q', q'', q^4_3), а затем останавливается.

2) $\mathcal{A}'_8$, $(q^8_0, (P_0(\mathcal{A}'_8, \mathcal{A}'_2) = 0) \wedge (P'_0(\mathcal{A}'_8, \mathcal{A}''_1, (q', q'')) = 1))$, $\to ((q', q'', q^8_2), (q' \cdot V, 0))$, где $q', q'' \in \{-1, 1\}$.

3) $\mathcal{A}'_8$, $((q', q'', q^8_i))$, $\to ((q', q'', q^8_{i+1}), (q' \cdot V, 0))$, где $q', q'' \in \{-1, 1\}$, $1 \le i \le c$.

4) $\mathcal{A}'_8$, $((q', q'', q^8_{c+1}), P'_V(\mathcal{A}'_8, \mathcal{A}'_4, (q', q'', q^4_2)) = 0)$, $\to ((q', q'', q^8_1), (0, 0))$, где $q', q'' \in \{-1, 1\}$.

5) $\mathcal{A}'_8$, $((q', q'', q^8_{c+1}), P'_V(\mathcal{A}'_8, \mathcal{A}'_4, (q', q'', q^4_2)) = 1)$, $\to ((q', q'', q^8_{c+2}), (0, 0))$, где $q', q'' \in \{-1, 1\}$.

Аналогично, автомат $\mathcal{A}'_9$, начиная с нулевого такта, движется в направлении $(0, q'')$. В такты вида $(c + 1) \cdot k + h$ $(k, h \in N_0,\ 0 \le h \le c)$, он перемещаются со скоростью V, а в такты вида $(c + 1) \cdot k + c$ — стоит на месте. Автомат $\mathcal{A}'_9$ продолжает такое движение, пока он в состоянии (q', q'', q^9_2) не увидит $\mathcal{A}'_7$ в состоянии (q', q'', q^7_3), а затем останавливается.

Автомат $\mathcal{A}'_4$, находясь в состоянии (q', q'', q^4_2) и увидев в своей клетке $\mathcal{A}'_5$, начинает двигаться в направлении $(q', 0)$ со скоростью V, догоняя $\mathcal{A}'_8$, а догнав его — останавливается.

6) $\mathcal{A}'_4$, $((q',q'',q_2^4),(P'_0(\mathcal{A}'_4,\mathcal{A}'_5,q_3^5)=1)), \to ((q',q'',q_3^4),(q'\cdot V,0))$.
7) $\mathcal{A}'_4$, $((q',q'',q_3^4),(P'_V(\mathcal{A}'_4,\mathcal{A}'_8,(q',q'',q_{c+1}^8))=0)), \to ((q',q'',q_3^4),(q'\cdot V,0))$.
8) $\mathcal{A}'_4$, $((q',q'',q_3^4),(P'_V(\mathcal{A}'_4,\mathcal{A}'_8,(q',q'',q_{c+1}^8))=1)), \to ((q',q'',q_4^4),(q'\cdot V,0))$.

Аналогично, автомат $\mathcal{A}'_7$, находясь в состоянии (q',q'',q_2^7) и увидев в своей клетке $\mathcal{A}'_5$, начинает двигаться в направлении $(0,q'')$ со скоростью V, догоняя $\mathcal{A}'_9$, а догнав его — останавливается.

Перенумеруем построенный коллектив и обозначим его как $K_2 = (\,\mathcal{B}_1,..\,...,\mathcal{B}_9\,)(V,V) = (\,\mathcal{A}'_1,\mathcal{A}'_2,\mathcal{A}'_6,\mathcal{A}'_3,\mathcal{A}'_8,\mathcal{A}'_9,\mathcal{A}'_4,\mathcal{A}'_7,\mathcal{A}'_5\,)$. Пусть K_2 находится в (a_1,a_2,b)-расстановке с центром (x_0,y_0). Автоматы $\mathcal{A}'_8$ и $\mathcal{A}'_9$, начиная с нулевого такта, движутся в направлениях $(sgn_0(a_1),0)$ и $(0,sgn_0(a_2))$, соответственно. Подколлективы $(\,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_7,\,\mathcal{B}_9\,)$ и $(\,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3,\,\mathcal{B}_4,\mathcal{B}_8,\mathcal{B}_9\,)$ в нулевой такт находятся в $(|a_1|,b)$-расстановке с центром (x_0,y_0) и в $(|a_2|,b)$-расстановке с центром (x_0,y_0), соответственно. Эти подколлективы начинают функционировать, как коллектив K_1 из леммы 3. В итоге автомат $\mathcal{B}_7$ начинает догонять $\mathcal{B}_5$ в такт $2|a_1|\cdot]b/V[$ и догонит его в такт $2|a_1|\cdot(c+1)\cdot]b/V[$, а автомат $\mathcal{B}_8$ начинает догонять $\mathcal{B}_6$ в такт $2|a_2|\cdot]b/V[$ и догонит его в такт $2|a_2|\cdot(c+1)\cdot]b/V[$.

Таким образом, если K_2 стартует из (a_1,a_2,b)-расстановки с центром (x_0,y_0), то в такт $2|a_1|\cdot(c+1)\cdot]b/V[$ автоматы $\mathcal{B}_5$ и $\mathcal{B}_7$ остановятся в клетке $(x_0+2a_1\cdot c\cdot V\cdot]b/V[\,,\,y_0)$, а в такт $2|a_2|\cdot(c+1)\cdot]b/V[$ автоматы $\mathcal{B}_6$ и $\mathcal{B}_8$ остановятся в клетке $(x_0\,,\,y_0+2a_2\cdot c\cdot V\cdot]b/V[)$.

Введем автоматы $\mathcal{C}_7$ и $\mathcal{C}_8$, такие что $\mathcal{C}_7 = \mathcal{H}_3(\mathcal{C}_8,(0,V),c+1)$, $\mathcal{C}_8 = \mathcal{H}_3(\mathcal{C}_7,(V,0),c+1)$. $\quad \mathcal{B}_7\circ\mathcal{C}_7^y\to\mathcal{A}_7$. $\quad \mathcal{B}_8\circ\mathcal{C}_8^x\to\mathcal{A}_8$.

Переобозначим $(\,\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_6,\mathcal{A}_7,\mathcal{A}_8,\mathcal{B}_9\,)$ как $K_c = (\,\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_9\,)$. Пусть в нулевой момент K_c расположенен в (a_1,a_2,b)-расстановке с центром (x_0,y_0). Тогда в такт $2(|a_1|+|a_2|)\cdot(c+1)\cdot]b/V[$ автоматы $\mathcal{A}_7$ и $\mathcal{A}_8$ окажутся в клетке $(x_0+2a_1\cdot c\cdot V\cdot]b/V[,\,y_0+2a_2\cdot c\cdot V\cdot]b/V[)$, и коллектив K_c остановится в $(a_1,a_2,b,(2a_1\cdot c\cdot V\cdot]b/V[),(2a_2\cdot c\cdot V\cdot]b/V[))$-расстановке. **Лемма доказана**.

Пусть коллектив $K = (\,\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_m\,)$ $(m\geq 3)$, расположен на плоскости так, что $\mathcal{A}_3$ находится в клетке (x_0+a,y_0) $(a\in\mathbb{N})$, а все автоматы, кроме $\mathcal{A}_3$, расположены в клетке (x_0,y_0). Будем говорить, что коллектив K находится в *a-расстановке с центром* (x_0,y_0).

Лемма 5. *Существует коллектив* $(\,\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4\,)(V,V)$*, который, стартуя в такт* τ_0 *из* τ_0*-расстановки с центром* (x_0,y_0)*, в такт* $\widetilde{\tau}_0$ *окажется в* $(\widehat{\tau}_0,\widetilde{\tau}_0)$*-расстановке с центром* (x_0,y_0)*, где* $\widehat{\tau}_0 = \tau_0+]\tau_0/(V-1)[$, $\widetilde{\tau}_0 = \tau_0+2\cdot]\tau_0/(V-1)[$.

Доказательство. Опишем функционирование $(\,\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4\,)$, стартовавшего в такт τ_0 $(\tau_0\in\mathbb{N})$ из τ_0-расстановки с центром (x_0,y_0). Список автоматов и их внутренних алфавитов.
1) $(\mathcal{A}_1,\{-1,1\}^2),(\mathcal{A}_2,\{q_1^2,q_2^2\}),(\mathcal{A}_3,\{q^3\}),(\mathcal{A}_4,\{q_1^4,q_2^4,q_3^4\})$.

В этом коллективе $\mathcal{A}_1$ — неподвижный автомат, все состояния которого — начальные, $\mathcal{A}_3 = \mathcal{H}_1$, этот автомат в произвольный такт τ находится в клетке $(x_0+\tau,y_0)$. $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_4$ стартовав, движутся в направлении $(1,0)$ со скоростью V, догоняя $\mathcal{A}_3$.

2) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_{V-1}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_1^2, (V, 0))$.
3) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_{V-1}(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_1^4, (V, 0))$.
4) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_{V-1}(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to$ (q_2^2, ход в клетку, находящуюся на 1 правее расположения $\mathcal{A}_3$).
5) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_{V-1}(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to$ (q_2^4, ход в клетку, находящуюся на 1 правее расположения $\mathcal{A}_3$).

В такт $\widehat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$ $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_4$ окажутся в одной клетке с $\mathcal{A}_3$. После этого $\mathcal{A}_2$ останавливается, а $\mathcal{A}_4$ возвращается обратно к $\mathcal{A}_1$.
6) $\mathcal{A}_4$, $(q_2^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_2^4, (-V, 0))$.
7) $\mathcal{A}_4$, $(q_2^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to$ (q_3^4, ход в расположение $\mathcal{A}_1$).

В такт $\widetilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2\cdot]\tau_0/(V-1)[$ коллектив остановится в $(\widehat{\tau}_0, \widetilde{\tau}_0)$-расстановке.
Лемма доказана.

Лемма 6. *Существует коллектив* $K = (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_4)(V, V)$, *который, стартуя из канонического расположения, обходит* $\mathbb{Z}^2$, *причем* $\mathcal{A}_1$ *проходит через каждую клетку счетное число раз.*

Доказательство. Расстановку коллектива $K = (\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_4)$ назовем *треугольной a-расстановкой с центром* (x_0, y_0) $(a \in \mathbb{N})$, если координаты автоматов $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_4$ равны (x_0, y_0), (x_0, y_0), (x_0, y_0+1), (x_0+a, y_0) соответственно (где $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$). Треугольник $\{(x, y) |\, x, y \in \mathbb{Z},\ y \geq y_0,\ x \leq x_0 + a,\ (x-y) \geq x_0 - y_0 - 1\}$ называется *соответствующим* данной треугольной a-расстановке. Треугольная $(a+3)$-расстановка с центром $(x_0 - 2, y_0 - 1)$ называется *следующей за треугольной a-расстановкой с центром* (x_0, y_0).

Последовательность треугольных расстановок коллектива K, такую что для любого $k \in \mathbb{N}$, k-я расстановка является треугольной $(3k-2)$-расстановкой, и $k+1$-я расстановка является следующей за k-й расстановкой, назовем *базовой.* Обозначим треугольник, соответствующий k-й расстановке, как Δ_k.

Легко видеть, что для базовой последовательности расстановок выполнены свойства
1. $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \ \Delta_k \subset \Delta_{k+1}$.
2. $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k = Z^2$.
3. $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \ \ \Delta_k$ — прямоугольный треугольник.

Построим коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_4)$, который, стартуя из канонического расположения, функционирует следующим образом.
1. Из канонического расположения K переходит в треугольную 1-расстановку.
2. Если K стартует из треугольной a-расстановки $(a \in \mathbb{N})$, то $\mathcal{A}_1$ обходит соответствующий этой расстановке треугольник, и K переходит в следующую за ней треугольную $(a+3)$-расстановку.

Такой коллектив обходит последовательность треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots,$ $\ldots \Delta_k, \ldots$ $(k \in \mathbb{N})$. Каждый такой треугольник содержится во всех последующих, и объединение всех этих треугольников есть $\mathbb{Z}^2$. Следовательно, $\mathcal{A}_1$ проходит через каждую клетку $\mathbb{Z}^2$ счетное число раз. Значит, коллектив, удовлетворяющий п. 1,2, удовлетворяет условию леммы.

Перечень автоматов коллектива K и их алфавитов.

1) $(\mathcal{A}_1, \{q_0^1, q_1^1, \ldots, q_4^1\}), (\mathcal{A}_2, \{q_0^2, q_1^2\}), (\mathcal{A}_3, \{q_0^3, q_1^3\}), (\mathcal{A}_4, \{q_0^4, q_1^4\})$.

Переход из канонического расположения в треугольную 1-расстановку.

2) $\mathcal{A}_1$, (q_0^1), $\to (q_1^1, (0,0))$.
3) $\mathcal{A}_2$, (q_0^2), $\to (q_1^2, (0,0))$.
4) $\mathcal{A}_3$, (q_0^3), $\to (q_1^3, (0,1))$.
5) $\mathcal{A}_4$, (q_0^4), $\to (q_1^4, (1,0))$.

Пусть в такт τ_0 K находится в треугольной $(3k-2)$-расстановке с центром (x_0, y_0).

$\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0,1)$ со скоростью 1 до встречи с $\mathcal{A}_3$.

6) $\mathcal{A}_1$, $(q_1^1, P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 0)$, $\to (q_1^1, (0,1))$.

Когда $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_3$ оказались в одной клетке, причем в этой клетке не находится $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ сдвигается на вектор $(1,1)$, а $\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0,-1)$ со скоростью 1 до встречи с $\mathcal{A}_2$.

7) $\mathcal{A}_3$, $(q_1^3, (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_1^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_1^3, (1,1))$.
8) $\mathcal{A}_1$, $(q_1^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_2^1, (0,-1))$.
9) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0)$, $\to (q_2^1, (0,-1))$.

После того, как $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ оказались в одной клетке, причем в соседней клетке не находится $\mathcal{A}_4$, автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(1,0)$.

10) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4) = 0))$, $\to (q_1^1, (1,0))$.
11) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_2^1) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 0))$, $\to (q_1^2, (1,0))$.

После этого K повторяет действия п. 6)-9) ($\mathcal{A}_1$ снова идет к $\mathcal{A}_3$, и т.д.).

После каждого прохода $\mathcal{A}_1$ вверх-вниз, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ смещаются на вектор $(1,0)$, а $\mathcal{A}_3$ — на вектор $(1,1)$.

После одного или нескольких повторений действий п. 6)-9) и п. 10)-11), $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ окажутся клетке, соседней с расположением $\mathcal{A}_4$. Пусть это произошло в такт τ_1. С такта τ_0 до такта τ_1 включительно, $\mathcal{A}_4$ находится в вершине при прямом угле Δ_k. Все это время $\mathcal{A}_2$, перемещается по горизонтальному катету треугольника Δ_k, пройдя его от клетки (x_0, y_0) до клетки, ближайшей слева к $\mathcal{A}_4$. Автомат $\mathcal{A}_3$ на этом промежутке времени перемещается по гипотенузе треугольника Δ_k, все время находясь либо на одной вертикали с $\mathcal{A}_2$, либо на соседней с ним вертикали. Перемещаясь между $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, автомат $\mathcal{A}_1$ за промежуток времени $[\tau_0, \tau_1]$ обходит весь треугольник Δ_k, кроме клетки (x_0-1, y_0) и вертикального катета.

Затем $\mathcal{A}_4$ сдвигается на вектор $(1,-1)$, перемещаясь в вершину при прямом угле Δ_{k+1}, автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(0,1)$, перемещаясь в вершину при прямом угле Δ_k, и $\mathcal{A}_1$ переходит в состояние q_3^1.

12) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_1(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_1^4, (-1,-1))$.
13) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, (P_1(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to (q_3^1, (0,1))$.
14) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_1(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to (q_1^2, (0,1))$.

Затем начинается обратный проход (повторный обход треугольника) Δ_k. Автомат $\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0,1)$ со скоростью 1 до встречи с $\mathcal{A}_3$.

15) $\mathcal{A}_1$, $(q_3^1, P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 0)$, $\to (q_3^1, (0,1))$.

Когда $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_3$ оказались в одной клетке, и в этой клетке не находится $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ сдвигается на вектор $(-1,-1)$, а $\mathcal{A}_1$ движется в направлении $(0,-1)$ со скоростью 1 до встречи с $\mathcal{A}_2$.

16) $\mathcal{A}_3$, $(q_1^3, (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\rightarrow (q_1^3, (-1, -1))$.
17) $\mathcal{A}_1$, $(q_3^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\rightarrow (q_4^1, (0, -1))$.
18) $\mathcal{A}_1$, $(q_4^1, P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0)$, $\rightarrow (q_4^1, (0, -1))$.

После того, как $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ оказались в одной клетке, причем в этой клетке не находится $\mathcal{A}_3$, автоматы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(-1, 0)$.
19) $\mathcal{A}_1$, $(q_4^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\rightarrow (q_3^1, (-1, 0))$.
20) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_4^1) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\rightarrow (q_1^2, (-1, 0))$.

После этого K повторяет действия п. 15)-18) ($\mathcal{A}_1$ снова идет к $\mathcal{A}_3$, и т.д.).

После каждого прохода $\mathcal{A}_1$ вверх-вниз, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ смещаются на вектор $(-1, 0)$, а $\mathcal{A}_3$ — на вектор $(-1, -1)$.

После одного или нескольких повторений действий п. 15)-18) и п. 19)-20) $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ встретятся в одной клетке. Пусть это произошло в такт τ_2. С такта τ_1 до такта τ_2, автомат $\mathcal{A}_2$, перемещается по горизонтальному катету треугольника Δ_k, пройдя его от вершины при прямом угле до клетки $(x_0 - 1, y_0)$. Автомат $\mathcal{A}_3$ на этом промежутке времени перемещается по гипотенузе треугольника Δ_k, все время находясь либо на одной вертикали с $\mathcal{A}_2$, либо на соседней с ним вертикали. Перемещаясь между $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, автомат $\mathcal{A}_1$ за промежуток времени $[\tau_1, \tau_2]$ обходит весь треугольник Δ_k.

После этого $\mathcal{A}_3$ сдвигается на вектор $(-1, 0)$, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сдвигаются на вектор $(-1, -1)$ и $\mathcal{A}_1$ переходит в состояние q_1^1.
21) $\mathcal{A}_3$, $(q_1^3, (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) = 1))$, $\rightarrow (q_1^3, (-1, 0))$.
22) $\mathcal{A}_1$, $(q_3^1, (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\rightarrow (q_3^1, (-1, -1))$.
23) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\rightarrow (q_1^2, (-1, -1))$.

В результате этого $\mathcal{A}_1$ коллектив K останавливается в треугольной $(3k + 1)$-расстановке с центром (x_0, y_0).

Таким образом, построенный коллектив $K = K(2, 2) = K(V, V)$, стартуя из канонического расположения, переходит в треугольную 1-расстановку. Коллектив K, стартуя в такт τ_0 из треугольной $(3k - 2)$-расстановки ($k \in \mathbb{N}$) с центром (x_0, y_0), которой соответствует треугольник Δ_k, обходит Δ_k, после чего автомат $\mathcal{A}_1$ переходит в состояние q_1^1 и K останавливается в треугольной $(3k + 1)$-расстановке с центром (x_0, y_0).

K удовлетворяет требованиям п. 1,2, следовательно удовлетворяет условию леммы. **Лемма доказана**.

Пусть автомат U перемещается по плоскости с периодической выходной последовательностью. Обозначим длину периода этой последовательности через d, длину предпериода — d_0, клетку, в которой U находится в такт d_0 — (x, y). Рассмотрим минимальное натуральное n, такое что $n \cdot d \geq d_0$. Обозначим перемещение U за период его выходной последовательности через (s_1, s_2), перемещение U за первые d_0 тактов n подряд идущих периодов его выходной последовательности — (s_1', s_2'), а перемещение U за последние $(n \cdot d - d_0)$ тактов n подряд идущих периодов его выходной последовательности — (s_1'', s_2''). Назовем клетку целочисленной плоскости $(x_0, y_0) = (x, y) - (s_1', s_2')$ *условной клеткой старта* автомата U. В обозначениях этого параграфа имеет место

Лемма 7. *Для любого натурального* $k \geq \frac{d_0}{d}$, *автомат* U *в такт* $k \cdot d$ *находится в клетке* $(x_0, y_0) + k \cdot (s_1, s_2)$.

Доказательство. Наименьшее значение k, удовлетворяющее условию леммы, т.е. такое, что $k \geq \frac{d_0}{d}$, есть n. В такт $n \cdot d$ автомат U находится в клетке $(x, y) + (s_1'', s_2'') = (x_0, y_0) + (s_1', s_2') + (s_1'', s_2'') = (x_0, y_0) + n \cdot (s_1, s_2)$. Таким образом, для $k = n$ утверждение леммы верно. После такта $n \cdot d$ каждые d тактов U перемещается на вектор (s_1, s_2), следовательно, утверждение леммы верно для всех $k \geq \frac{d_0}{d}$. **Лемма доказана**.

Назовем *h-четверкой* ($h \in \mathbb{N}$) четверку $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$, где $\tau_0, d \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, $d \leq \tau_0$, $|s_1|+|s_2| \leq min\{h{\cdot}d,\ \tau_0\}$. *$h$-четверка* ($\tau_0, d, (s_1, s_2)$, (x_0, y_0)) *характеризует автомат-жертву* $U = U(R, h)$, *перемещающийся по* $\mathbb{Z}^2$, если U имеет периодическую выходную последовательность с длиной периода, не превосходящей d, длиной предпериода, не превосходящей τ_0, вектор перемещения за период выходной последовательности (s_1, s_2) и условную клетку старта (x_0, y_0).

Правильный коллектив ($W_1, ..., W_{10}$)(R, V) расположен в $(\tau_0, d, (s_1, s_2)$, $(x_0, y_0))$*-позиции*, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0,\ y_0))$ — $(V-1)$-четверка, W_1 находится в состоянии $q = (sgn_0(s_1), sgn_0(s_2), q')$, и автоматы W_2, W_3, W_4 и W_{10} находятся в клетках $(x_0{+}|s_1|, y_0)$, $(x_0{+}|s_2|, y_0)$, $(x_0{+}\tau_0, y_0)$, $(x_0{+}(V{-}1)d\,, y_0)$ соответственно, а остальные автоматы — в клетке (x_0, y_0).

Рассмотрим коллективы автоматов $K(R, V) = (\,\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m\,)$ и $K'(R, V) = (\,\mathcal{A}_1', \ldots, \mathcal{A}_{m'}'\,)$ $(m \geq m')$. Пусть даны натуральные числа $i_1, \ldots, i_{m'}$ $(1 \leq i_1, \ldots, i_{m'} \leq m)$, которые будем называть *стыковочными*. Введем понятие i_h-композиции коллективов K и K'.

i_h-композицией коллективов K и K' (где $h \in \mathbb{N}$, $1 \leq h \leq m'$) называется коллектив $K'' = (\,\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m\,)(R, V)$, автоматы которого определяются так.
1) $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}_i$ при $i \neq i_p\,(p = 1, \ldots, m')$.
2) $\mathcal{B}_{i_h}$ есть композиция $\mathcal{A}_{i_h}$ и $\mathcal{A}_h'$.
3) Если автомат $\mathcal{A}_{i_p}$ $(p = 1, \ldots, m',\ p \neq h)$ не имеет финальных состояний, то $\mathcal{B}_{i_p} = \mathcal{A}_{i_p}$.
4) Если $\mathcal{A}_{i_p}$ $(p = 1, \ldots, m',\ p \neq h)$ имеет финальные состояния, диаграмма Мура $\mathcal{B}_{i_p}$ получается из объединения диаграмм Мура $\mathcal{A}_{i_p}$ и $\mathcal{A}_p'$. Начальное состояние есть начальное состояние $\mathcal{A}_{i_p}$. Добавляются стрелки, описывающие следующие переходы: для каждого входного символа $\mathcal{A}_p'$, соответствующего тому, что некоторый $\mathcal{A}_j'$ $(1 \leq j \leq m')$ находится в зоне обзора $\mathcal{A}_p'$, автомат $\mathcal{B}_{i_p}$ из каждого состояния q_{i_p}, которое является финальным для $\mathcal{A}_{i_p}$, переходит в то же состояние и выдает тот же выходной символ, что и $\mathcal{A}_p'$ в некотором состоянии q_p' с этим же входным символом.

Т.е., увидев автомат $\mathcal{B}_j$ в состоянии, являющимся состоянием $\mathcal{A}_j'$, автомат $\mathcal{B}_{i_p}$ выходит из финального состояния $\mathcal{A}_{i_p}$ и начинает функционировать как $\mathcal{A}_p'$ в состоянии q_p'. Состояние q_p' автомата $\mathcal{A}'{}_p$ называется *сопоставленным состоянию* q_{i_p} автомата $\mathcal{A}_{i_p}$. Состояния сопоставляются друг другу следующим образом:
а) если автомат $\mathcal{A}_{i_p}$ $(p \neq h)$ имеет 4 финальных состояния: $(1, 1, q^{i_p})$,

$(-1,1,q^{i_p})$, $(1,-1,q^{i_p})$ и $(-1,-1,q^{i_p})$, а автомат $\mathcal{A}'_p$ имеет 4 начальных состояния: $(1,1,\hat{q}^p)$, $(-1,1,\hat{q}^p)$, $(1,-1,\hat{q}^p)$ и $(-1,-1,\hat{q}^p)$, где q^{i_p} и $\hat{q}^p$ произвольные, то каждому состоянию (q',q'',q^{i_p}) автомата $\mathcal{A}_{i_p}$ сопоставляется состояние $(q',q'',\hat{q}^p)$ автомата $\mathcal{A}'_p$ $(q',q''\in\{-1,1\})$;
б) если $\mathcal{A}'_p$ имеет единственное начальное состояние, каждому финальному состоянию $\mathcal{A}_{i_p}$ сопоставляется начальное состояние автомата $\mathcal{A}'_p$.
в) i_h-композиция K и K' определена только в том случае, если для всех $p\in\{1,\dots,m'\}$, для которых $\mathcal{A}_{i_p}$ имеет финальные состояния, и не имеет места ни случай а), ни случай б), специально указано, как производится сопоставление финальным состояниям $\mathcal{A}_{i_p}$ состояний $\mathcal{A}'_p$ (при $p=h$ речь идет не о сопоставлении, а о склеивании).

Содержательно, i_h-композиция — это коллектив K'', такой, что если при функционировании K автомат $\mathcal{A}_{i_h}$ обязательно останавливается, и все автоматы, которые останавливаются, останавливаются не позже, чем $\mathcal{A}_{i_h}$, то K'' сначала функционирует как K, а после того, как $\mathcal{A}_{i_h}$ остановится, те автоматы K'' с номерами i_p $\quad(p=1,\dots,m')$, которые останавливаются, начинают действовать, как коллектив K', а остальные автоматы коллектива K'' функционируют так же, как функционировали в составе коллектива K.

Запись $(K\circ K')(i_1,\dots,i_{m'})\xrightarrow{i_h}K''$ означает, что строится коллектив K'', по определению равный i_h-композиции коллективов K и K' при стыковочных числах $i_1,\dots,i_{m'}$.

Лемма 8. *Существует коллектив хищников $K=(\,W_1,...,W_{10}\,)(R,V)$, такой что для любой жертвы $U=U(R,V-1)$ коллектив K, стартуя в такт τ из $(\tau_0,d,(s_1,s_2),\,(x_0,y_0))$-позиции, где $\tau\le 3\tau_0$, останавливается в той же позиции, причем, если $(V-1)$-четверка $(\tau_0,d,(s_1,s_2),\,(x_0,y_0))$ характеризует U, то K обнаруживает U.*

Доказательство. Фиксируем $c=3V-1$. Рассмотрим коллектив $K_c= =(\,\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_9\,)(V,V)$ из леммы 4. Введем следующие обозначения:
$\mathcal{A}^1=\mathcal{H}^x_2(\mathcal{B}_6,(-V,0))$, $\mathcal{A}^2=\mathcal{H}^y_2(\mathcal{B}_1,(0,-V))$, $\mathcal{A}^3=\mathcal{H}^y_2(\mathcal{B}_6,(0,V))$, $\mathcal{A}^4=\mathcal{H}^x_2(\mathcal{B}_7,(V,0))$, $\mathcal{A}^5=\mathcal{H}^y_2(\mathcal{B}_5,(0,-V))$ $\mathcal{A}^6=\mathcal{H}^x_2(\mathcal{B}_1,(-V,0))$.

Построим вспомогательные автоматы $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$.
$\mathcal{A}^1\circ\mathcal{A}^2\to\mathcal{A}$. $\quad\mathcal{A}^3\circ\mathcal{A}^4\to\mathcal{A}'$. $\quad\mathcal{A}^5\circ\mathcal{A}^6\to\mathcal{A}''$.

$\mathcal{B}_8\circ\mathcal{A}\to\mathcal{B}'_8$. Заменим в коллективе K_c автомат $\mathcal{B}_8$ на $\mathcal{B}'_8$ и добавим $\mathcal{B}_{10}=\mathcal{H}_0$. Полученный коллектив обозначим как K_1. Этот коллектив функционирует как K_c, а затем $\mathcal{B}'_8$ возвращается к $\mathcal{B}_1$ и останавливается.

$(K_1\circ K_{c'})(1,10,4,8,9)\xrightarrow{8}K_2=(\,\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_{10}\,)(V,V)$, где $c'=]\frac{V}{V-1}[\cdot c$, $K_{c'}=K_{c'}\,(V,V)$ — коллектив из леммы 3.

$\mathcal{C}_8\circ\mathcal{A}'\to\mathcal{C}'_8$. Заменим в коллективе K_2 автомат $\mathcal{C}_8$ на $\mathcal{C}'_8$. Этот автомат функционирует так же, как $\mathcal{C}_8$, а затем приходит к $\mathcal{C}_7$ и останавливается.

$$(\,(\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_7,\mathcal{C}'_8,\mathcal{C}_9,\mathcal{C}_{10})\circ(\mathcal{A}^6,\mathcal{A}^2,\mathcal{A}'',\mathcal{A})\,)(5,6,7,8)\xrightarrow{8}K=(\,W_1,\dots,W_{10}\,)(V,V).$$

Будем рассматривать коллектив K, как имеющий обзор R, т.е. будем рассматривать $K(R,V)$, который действует так же, как и $K(V,V)$.

Покажем, что коллектив K удовлетворяет требованиям леммы. Сначала заметим, что все построения корректны. Т.е., во-первых, при определении композиций и i_h-композиций всюду имеют место случаи а) и б) из определения i_h-композиции, а во-вторых, каждый из автоматов типа $\mathcal{H}_2(\mathcal{A},(s_x,s_y))$ используется лишь на таких промежутках времени, на которых автомат $\mathcal{A}$, по которому он строится, неподвижен.

Пусть K стартовал в такт $\tau \leq 3\tau_0$ из $(\tau_0,d,(s_1,s_2),(x_0,y_0))$-позиции. Тогда через $\tau_1 = 2\cdot(|s_1|+|s_2|)\cdot(c+1)\cdot]\tau_0/V[$ тактов K останавливается в (s_1,s_2,τ_0,f_1,f_2)-расстановке, где $f_i = 2\cdot s_i\cdot c\cdot V\cdot]\tau_0/V[,\ \ i=1,2$. Спустя еще $\tau_2 = 2\cdot(|s_1|+|s_2|)\cdot c\cdot]\tau_0/V[$ тактов W_8 возвращается в клетку (x_0,y_0). Затем подколлектив (W_1,W_{10},W_4,W_8,W_9) функционирует $\tau_3 = 2\cdot d\cdot(V-1)\cdot c'\cdot]\tau_0/V[$ тактов, после чего автоматы W_5,W_6,W_7,W_8 возвращаются в клетку (x_0,y_0) за время $\tau_4 = 2\tau_2$ и останавливаются. Таким образом, в такты с $(\tau+\tau_1)$ по $(\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3)$ автомат W_7 находится в клетке (x_0+f_1,y_0+f_2), а в такт $\tau' = (\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4)$ коллектив останавливается в $(\tau_0,d,(s_1,s_2),(x_0,y_0))$-позиции.

Осталось показать, что если $(V-1)$-четверка $(\tau_0,d,(s_1,s_2),(x_0,y_0))$ характеризует $U=U(R,V-1)$, перемещающийся по плоскости, то K обнаруживает U.

Положим $k = 2\cdot c\cdot V\cdot]\tau_0/V[$. Т.к. длина d_0 предпериода выходной последовательности U не превосходит τ_0, имеет место неравенство $k \geq \frac{\tau_0}{d} \geq \frac{d_0}{d}$. По лемме 7, если U не будет обнаружен хищниками ранее, то в такт $\tau_5 = k\cdot d$ он будет находиться в клетке $(x_0,y_0)+k\cdot(s_1,s_2) = (x_0+f_1,y_0+f_2)$. Хищник W_7 окажется в этой клетке в такт $(\tau+\tau_1)$ и покинет эту клетку не раньше, чем через $(\tau_2+\tau_3)$ тактов после этого.

$$\tau+\tau_1 \;\leq\; 3\tau_0 \;+\; 2\cdot(|s_1|+|s_2|)\cdot(c+1)\cdot]\tau_0/V[\;\leq$$

$$\leq\;]\tau_0/V[\cdot(3V \;+\; 2\cdot((V-1)\cdot d)\cdot(3V))\;\leq$$

$$\leq 2\cdot V\cdot]\tau_0/V[\cdot d\cdot(\,3/2+3\cdot(V-1)\,)\;\leq\;2\cdot V\cdot]\tau_0/V[\cdot d\cdot c\;=\;k\cdot d=\;\tau_5.$$

Здесь учтены соотношения $(|s_1|+|s_2|)\leq(V-1)\cdot d$ и $c=3V-1$.

$$(\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3)\geq\tau_3\;=\;2]\tau_0/V[\cdot c'\cdot(V-1)\cdot d\;\geq$$

$$\geq\;2]\tau_0/V[\cdot V\cdot c\cdot d\;=\;k\cdot d\;=\;\tau_5.$$

Таким образом, W_7 окажется в клетке (x_0+f_1,y_0+f_2) не позже чем U, и покинет ее не раньше чем U. Следовательно, жертва будет обнаружена. **Лемма доказана**.

Фиксируем произвольное $k\in\mathbb{N}_0$. Построим упорядоченный набор M_k, элементами которого являются все пары (s_1,s_2) $(s_1,s_2\in\mathbb{Z})$, удовлетворяющие условию $(|s_1|+|s_2|) = k$. При $k=0$ набор состоит из одного элемента $z^0 = (0,0)$. При $k = 1$ набор состоит из элементов $z_1^1, z_2^1, z_3^1, z_4^1$ равных $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ соответственно. При $k > 1$ набор состоит из элементов $z_1^k, \ldots, z_{4k}^k$ соответственно равных $(k,0),(k-1,1),\ldots,(0,k)$, $(-1,k-1),\ldots,(-k,0),(-(k-1),-1),\ldots,(0,-k),(1,-(k-1)),\ldots,(k-1,-1)$.

Пусть $(s_1,s_2) = z_i^k$. Пару (s_1',s_2') назовем *h-следующей за парой* (s_1,s_2) $(h \in \mathbb{N})$, если $k \le h$ и

$$(s_1', s_2') = \begin{cases} z_{i+1}^k & , i < 4k; \\ z_1^{k+1} & , i = 4k,\ k < h. \end{cases}$$

Для пары $(s_1,s_2) = z_{4h}^h$ h-следующая пара не определена.

Правильный коллектив $(\,W_1,...,W_{11}\,)(R,V)$ расположен в *сильной* $(\tau_0, d, (s_1,s_2),(x_0,y_0))$*-позиции*, если $(\tau_0,d,(s_1,s_2),(x_0,y_0))$ — $(V-1)$-четверка, автоматы W_4 и W_{11} расположены в клетках (x_0,y_0) и $(x_0+\tau_0,y_0)$, соответственно, а расстановка подколлектива $(\,W_1,...,W_{10}\,)$ отличается от $(\tau_0,d,(s_1,s_2),(x_0,y_0))$-позиции лишь расположением W_4.

Коллектив хищников $K = (\,W_1,...,W_{11}\,)$ *обрабатывает автоматы с параметрами* (R,h) (где $h \in \mathbb{N}$), если для любой h-четверки $(\tau_0,d,(s_1,s_2),(x_0,y_0))$, и любого автомата-жертвы $U = U(R,h)$, перемещающегося по $\mathbb{Z}^2$, K, стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0,d,(s_1,s_2),(x_0,y_0))$-позиции, функционирует так, что выполнены следующие условия.
1. K обнаруживает U, если $(\tau_0,d,(s_1,s_2),(x_0,y_0))$ характеризует U.
2. При $(s_1,s_2) \ne z_{4hd}^{hd}$, K оказывается в некоторый такт $\tau_0' \ge \tau_0$ в сильной $(\tau_0',d,(s_1',s_2'),(x_0,y_0))$-позиции, где (s_1',s_2') — $(h\cdot d)$-следующая за (s_1,s_2) пара, и все автоматы K находятся в начальных состояниях.
3. При $(s_1,s_2) = z_{4hd}^{hd}$, K оказывается в некоторый такт $\tau_0' \ge \tau_0$ в сильной $(\tau_0',d+1,(0,0),(x_0,y_0))$-позиции, причем каждый из автоматов W_4 и W_5 останавливается в состоянии, отличном от начального, и все автоматы K, кроме W_{11}, останавливаются не позднее W_8.

Заметим, что при $\tau_0' \ge \tau_0+1$ если $(\tau_0,d,(s_1,s_2),(x_0,y_0))$ — $(V-1)$-четверка, то рассмотренные выше черверки $(\tau_0',d,(s_1',s_2'),(x_0,y_0))$ и $(\tau_0',d+1,(0,0),(x_0,y_0))$ также являются $(V-1)$-четверками. Действительно, свойства $(d+1) \le \tau_0'$, и $(|s_1'|+|s_2'|) \le \tau_0'$ следуют из того, что $(d+1) \le \tau_0+1 \le \tau_0'$ и $(|s_1'|+|s_2'|) \le (|s_1|+|s_2|)+1 \le \tau_0+1 \le \tau_0'$. Свойство $(|s_1'|+|s_2'|) \le (V-1)\cdot d$ следует из того, что $(|s_1'|+|s_2'|) \le (|s_1|+|s_2|)+1$, $(|s_1|+|s_2|) \le (V-1)\cdot d$ и $(|s_1'|+|s_2'|) = (|s_1|+|s_2|)+1$ только при $(|s_1|+|s_2|) < (V-1)\cdot d$.

Лемма 9. *Существует коллектив хищников* $K = (\,W_1,\ldots,W_{11}\,)(R,V)$, *который обрабатывает автоматы с параметрами* $(R,V-1)$.

Доказательство. Будем рассматривать коллектив $(\,\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4\,)(V,V)$ из леммы 5, как имеющий обзор R. Этот коллектив, стартуя в такт τ_0 $(\tau_0 \in \mathbb{N})$ из τ_0-расстановки, в такт $\widetilde{\tau}_0$ окажется в горизонтальной $(\widehat{\tau}_0,\widetilde{\tau}_0)$-расстановке, где $\widehat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$, $\widetilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2]\tau_0/(V-1)[$.

Переобозначим коллектив $(\,\mathcal{A}_1,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_4,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{A}_3\,)$ как K_1, а коллектив из леммы 8 — как K_2.

$$(K_1 \circ K_2)(1,\ldots,10) \xrightarrow{5} K_3 = (\,\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_{11}\,)(R,V).$$

Если K_3 стартовал в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$-позиции, то в такт $\widetilde{\tau}_0$ подколлектив $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{10})$ оказывается в $(\widehat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$-позиции. Имеют место неравенства

$$\widetilde{\tau}_0 \le \tau_0 + \frac{2\tau_0}{V-1} + 2 \le \tau_0 \cdot \frac{3V}{V-1} \le 3 \cdot (\tau_0 + \frac{\tau_0}{V-1}) \le 3\widehat{\tau}_0.$$

Следовательно, по лемме 8 коллектив K_3 обнаруживает жертву U, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$ (и, следовательно, $(\widehat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$) характеризует U.

Построим коллектив $K_4 = (\mathcal{B}'_1, \ldots, \mathcal{B}'_6)(R, V)$, такой, что коллектив $K' = (W'_1, \ldots, W'_{11})(R, V)$, являющийся 8-композицией коллективов K_3 и K_4, стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$-позиции, сначала функционирует как K_3, а потом в некоторый такт τ'_0 при $(s_1, s_2) \ne z^{(V-1)d}_{4(V-1)d}$ коллектив K' останавливается в сильной $(\tau'_0, d, (s'_1, s'_2), (x_0, y_0))$-позиции, а при $(s_1, s_2) = z^{(V-1)d}_{4(V-1)d}$ коллектив K' останавливается в сильной $(\tau'_0, d{+}1, (0,0), (x_0, y_0))$-позиции. Приведем схему функционирования K_4.

1) $(\mathcal{B}'_1, \{-1,1\}^2), (\mathcal{B}'_2, \{q^2_0, q^2_1\}), (\mathcal{B}'_3, \{q^3\}), (\mathcal{B}'_4, \{q^4_0, q^4_1\}), (\mathcal{B}'_5, \{q^5_1, \ldots, q^5_7\} \cup \{-1,1\}^2 \times \{q^5_8, \ldots, q^5_{16}\}), (\mathcal{B}'_6, \{q^6\})$.

Все состояния автомата $\mathcal{B}'_1$ являются начальными.

Автомат $\mathcal{B}'_5$ идет к автомату $\mathcal{B}'_4$ и передвигает его в клетку (x_0, y_0).

2) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_1, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_4) = 0)$, $\to (q^5_1, (V, 0))$.
3) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_1, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_4) = 1)$, $\to (q^5_2$,(ход в расположение $\mathcal{B}'_4$)).
4) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_2, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0)$, $\to (q^5_2, (-V, 0))$.
5) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_2, P'_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1, (q_1, q_2)) = 1)$, $\to ((q_1, q_2, q^5_8)$,(ход в расположение $\mathcal{B}'_1$)), где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$.
6) $\mathcal{B}'_4$, $(q^4_0, (P'_0(\mathcal{B}'_4, \mathcal{B}'_5, q^5_2) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}'_4, \mathcal{B}'_1) = 0))$, $\to (q^4_0, (-V, 0))$.
7) $\mathcal{B}'_4$, $(q^4_0, (P'_0(\mathcal{B}'_4, \mathcal{B}'_5, q^5_2) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}'_4, \mathcal{B}'_1) = 1))$, $\to (q^4_1$,(ход в расположение $\mathcal{B}'_1$)).

При $(s_1, s_2) = (0,0)$ автомат $\mathcal{B}'_2$ смещается на вектор $(1,0)$, а $\mathcal{B}'_5$ переходит в финальное состояние q^5_6.

8) $\mathcal{B}'_2$, $(q^2_0, (P_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, (q_1, q_2, q^5_8)) = 1))$, $\to (q^2_0, (1, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$.
9) $\mathcal{B}'_5$, $((q_1, q_2, q^5_8), (P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 1))$, $\to (q^5_6, (0, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$.

Если $(s_1, s_2) = z^{hd}_{4hd}$ при некотором $h = 1, \ldots, (V-1)$, автомат $\mathcal{B}'_5$ переходит в состояние q^5_3, $\mathcal{B}'_1$ переходит в состояние $(1,1)$, и $\mathcal{B}'_3$ перемещается на вектор $(-1, 0)$.

10) $\mathcal{B}'_5$, $((1, -1, q^5_8), P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 1)$, $\to (q^5_3, (0, 0))$.
11) $\mathcal{B}'_1$, $((1, -1), (P_1(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_5, (1, -1, q^5_8)) = 1))$, $\to ((1,1), (0,0))$.
12) $\mathcal{B}'_3$, $(q^3_0, P'_1(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_5, (1, -1, q^5_8)) = 1)$, $\to (q^3_0, (-1, 0))$.

Затем $\mathcal{B}'_5$ идет к $\mathcal{B}'_2$. При $|s_1| \le (V-1)d - 2$ автомат $\mathcal{B}'_2$ перемещается на вектор $(2, 0)$, а $\mathcal{B}'_5$ возвращается к $\mathcal{B}'_1$. После этого K_4 останавливается.

13) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_3, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 0)$, $\to (q^5_3, (V, 0))$.
14) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_3, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 1)$, $\to (q^5_4$,(ход в расположение $\mathcal{B}'_2$)).
15) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_4, (P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_6) = 0))$, $\to (q^5_4, (-V, 0))$.

16) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_4, (P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_6) = 1))$, $\rightarrow (q^5_5, (-V, 0))$.
17) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_4, (P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_6) = 0))$, $\rightarrow$ (q^5_6,(ход в расположение $\mathcal{B}'_1$)).
18) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_4, (P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_6) = 1))$, $\rightarrow$ (q^5_7,(ход в расположение $\mathcal{B}'_1$)).
19) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_5, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0)$, $\rightarrow (q^5_5, (-V, 0))$.
20) $\mathcal{B}'_5$, $(q^5_5, P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 1)$, $\rightarrow$ (q^5_7,(ход в расположение $\mathcal{B}'_1$)).
21) $\mathcal{B}'_2$, $(q^2_0, (P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q^5_4) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_6) = 0))$, $\rightarrow (q^4_0, (2, 0))$.

При $|s_1| > (V-1)d - 2$ автомат $\mathcal{B}'_6$ передвигается на вектор $(V-1, 0)$, а автомат $\mathcal{B}'_2$ возвращается к $\mathcal{B}'_1$ вместе с $\mathcal{B}'_5$. После этого коллектив останавливается.

22) $\mathcal{B}'_6$, $(q^6, (P'_1(\mathcal{B}'_6, \mathcal{B}'_5, q^5_4) = 1))$, $\rightarrow (q^6, (V-1, 0))$.
23) $\mathcal{B}'_2$, $(q^2_0, ((P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q^5_4) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_6) = 1) \vee (P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q^5_5) = 1)) \wedge (P_V(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1) = 0))$, $\rightarrow (q^2_0, (-V, 0))$.
24) $\mathcal{B}'_2$, $(q^2_0, ((P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q^5_4) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_6) = 1) \vee (P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, q^5_5) = 1)) \wedge (P_V(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_1) = 1))$, $\rightarrow$ (q^2_1,(ход в расположение $\mathcal{B}'_1$)).

Если $(s_1, s_2) \neq z^{hd}_{4hd}$ ни при каком $h = 0, \ldots, (V-1)$, то автомат $\mathcal{B}'_5$, находясь в состоянии (q_1, q_2, q^5_8), при $(s_1, s_2) \neq z^{hd}_{hd+1}$, z^{hd}_{2hd+1} переходит в состояние (q_1, q_2, q^5_9), а при $(s_1, s_2) = z^{hd}_{hd+1}$ или $(s_1, s_2) = z^{hd}_{2hd+1}$ — в состояние (q_1, q_2, q^5_{13}), где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$. При $(s_1, s_2) = z^{hd}_{hd+1}$, $(s_1, s_2) = z^{hd}_{2hd+1}$ или $(s_1, s_2) = z^{hd}_{3hd}$ автомат $\mathcal{B}'_1$ меняет свое состояние.

25) $\mathcal{B}'_1$, $(\,(1, 1), (P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_3) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_5, (1, 1, q^5_8)) = 1)\,) \rightarrow (\,(-1, 1), (0, 0))$.
26) $\mathcal{B}'_1$, $(\,(-1, 1), (P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_5, (-1, 1, q^5_8)) = 1)\,) \rightarrow (\,(-1, -1), (0, 0))$.
27) $\mathcal{B}'_1$, $(\,(-1, -1), (P_1(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_5, (-1, -1, q^5_8)) = 1)\,) \rightarrow (\,(1, -1), (0, 0))$.
28) $\mathcal{B}'_5$, $(\,(q_1, q_2, q^5_8), ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 0) \vee (q_2 = -1)) \wedge ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 0) \vee ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 0) \wedge (q_1 = 1))) \wedge ((P_1(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 0) \vee (q_1 = -1) \vee (q_2 = 1)\,)\,)$, $\rightarrow (\,(q_1, q_2, q^5_9), (0, 0))$.
29) $\mathcal{B}'_5$, $(\,(q_1, q_2, q^5_8), ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 0) \wedge (q_2 = 1)) \vee ((P_0(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 1) \wedge (q_1 = -1))\,)$, $\rightarrow (\,(q_1, q_2, q^5_{13}), (0, 0))$.

Затем автомат $\mathcal{B}'_5$ идет к автомату $\mathcal{B}'_2$.

30) $\mathcal{B}'_5$, $(\,(q_1, q_2, q^5_i), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 0)$, $\rightarrow (\,(q_1, q_2, q^5_i), (V, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$, $i = 9, 13$.
31) $\mathcal{B}'_5$, $(\,(q_1, q_2, q^5_i), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_2) = 1)$, $\rightarrow$ $(\,(q_1, q_2, q^5_{i+1})$,(ход в расположение $\mathcal{B}'_2$)), где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$, $i = 9, 13$.

$\mathcal{B}'_2$ смещается на 1 в нужную сторону.

32) $\mathcal{B}'_2$, $(q^2_0, P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, (q_1, q_2, q^5_{10})) = 1)$, $\rightarrow (q^2_0, (-q_1 \cdot q_2, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$.
33) $\mathcal{B}'_2$, $(q^2_0, P'_0(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_5, (q_1, q_2, q^5_{14})) = 1)$, $\rightarrow (q^2_0, (q_1 \cdot q_2, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$.

Автомат $\mathcal{B}'_5$ возвращается к $\mathcal{B}'_1$ и идет к автомату $\mathcal{B}'_3$.

34) $\mathcal{B}'_5$, $(\,(q_1, q_2, q^5_i), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 0)$, $\rightarrow$ $(\,(q_1, q_2, q^5_i), (-V, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$, $i = 10, 14$.
35) $\mathcal{B}'_5$, $(\,(q_1, q_2, q^5_i), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_1) = 1)$, $\rightarrow$ $(\,(q_1, q_2, q^5_{i+1})$,(ход в расположение $\mathcal{B}'_1$)), где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$, $i = 10, 14$.
36) $\mathcal{B}'_5$, $(\,(q_1, q_2, q^5_i), P_V(\mathcal{B}'_5, \mathcal{B}'_3) = 0)$, $\rightarrow (\,(q_1, q_2, q^5_i), (V, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$, $i = 11, 15$.

37) $\mathcal{B}_5'$, $((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5', \mathcal{B}_3') = 1)$, $\rightarrow$ $((q_1, q_2, q_{i+1}^5)$,(ход в расположение $\mathcal{B}_3'$)), где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$, $i = 11, 15$.

$\mathcal{B}_3'$ смещается на 1 в нужную сторону.

38) $\mathcal{B}_3'$, $(q_0^3, P_0'(\mathcal{B}_3', \mathcal{B}_5', (q_1, q_2, q_{12}^5)) = 1)$, $\rightarrow (q_0^3, (q_1 \cdot q_2, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$.

39) $\mathcal{B}_3'$, $(q_0^3, P_0'(\mathcal{B}_3', \mathcal{B}_5', (q_1, q_2, q_{16}^5)) = 1)$, $\rightarrow (q_0^3, (-q_1 \cdot q_2, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$.

Автомат $\mathcal{B}_5'$ возвращается к $\mathcal{B}_1'$ и коллектив останавливается.

40) $\mathcal{B}_5'$, $((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5', \mathcal{B}_1') = 0)$, $\rightarrow$ $((q_1, q_2, q_i^5), (-V, 0))$, где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$, $i = 12, 16$.

41) $\mathcal{B}_5'$, $((q_1, q_2, q_i^5), P_V(\mathcal{B}_5', \mathcal{B}_1') = 1)$, $\rightarrow$ $(q_6^5$,(ход в расположение $\mathcal{B}_1'$)), где $q_1, q_2 \in \{-1, 1\}$, $i = 12, 16$.

Таким образом K_4 построен. $(K_3 \circ K_4)(1, 2, 3, 4, 8, 10) \xrightarrow{8} K'$.

Модифицируем K' так, чтобы в случае, когда W_8' останавливается в состоянии q_6^5, в следующий такт времени $\mathcal{A}_8$ и все автоматы, находящиеся с ним в одной клетке, переходили в свои начальные состояния (в этом случае все остальные автоматы также находятся в начальных состояниях). Заметим, что если W_8' останавливается в состоянии q_7^5, то W_4' и W_5' останавливаются в состояниях, отличных от начального.

Полученный коллектив $K = (W_1, \ldots, W_{11})(R, V)$ удовлетворяет условию леммы. **Лемма доказана**.

Лемма 10. *Существует коллектив хищников $K = (W_1, \ldots, W_{14})(R, V)$, который, стартуя из канонического расположения, обнаруживает любую жертву $U = U(R, V-1)$, при любом начальном взаимном расположении K и U.*

Доказательство. Обозначим через $K_1 = (W_1', \ldots, W_{11}')(R, V)$ коллектив из леммы 9, обрабатывающий автоматы с параметрами $(R, V-1)$. K_1, стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (0,0), (x_0, y_0))$-позиции, перебирает $(V-1)$-четверки со всевозможными допустимыми значениями третьей компоненты (при некоторых значениях первой компоненты, второй компоненте, равной d и четвертой компоненте, равной (x_0, y_0)), обнаруживает автоматы-жертвы, которые они характеризуют и оказывается в $(\tau_0', (d+1), (0,0), (x_0, y_0))$-позиции ($\tau_0' \in \mathbb{N}, \tau_0' \geq \tau_0$). Если автомат-жертва U имеет предпериод выходной последовательности, не превосходящий τ_0, период выходной последовательности, не превосходящий d и условную клетку старта (x_0, y_0), то K_1, стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (0,0), (x_0, y_0))$-позиции, обнаруживает U.

В доказательстве леммы 6 построен коллектив $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_4)(2, 2)$, такой, что $\mathcal{A}_1$ обходит $\mathbb{Z}^2$, побывав в каждой клетке счетное число раз. Модифицируем K_1, добавив к нему автоматы W_{12}',W_{13}' и W_{14}', которые совместно с W_1' образуют подколлектив $(W_1', W_{12}', W_{13}', W_{14}')$, функционирующий точно так же, как $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_4)$, но с паузами в работе после каждого хода. Если W_1' переместился из клетки (x_0, y_0) в клетку (x_0', y_0'), то все автоматы из K_1 перемещаются на тот же вектор $(x_0' - x_0, y_0' - y_0)$. Для перемещения автоматов коллектива K_1, которые не находятся в одной клетке с W_1'

(т.е. автоматов W_2',W_3', W_{10}' и W_{11}') на вектор $(x_0'-x_0, y_0'-y_0)$ используется механизм, аналогичный тому, который используется при построении коллектива K_4 в доказательстве леммы 9. После каждого хода подколлектива $(\,W_1', W_{12}', W_{13}', W_{14}'\,)$ запускается коллектив K_1 и функционирует вплоть до остановки всех автоматов, кроме W_{11}'. После этого снова делает ход подколлектив $(\,W_1', W_{12}', W_{13}', W_{14}'\,)$, и все автоматы из K_1 перемещаются на соответствующий вектор.

При каждом следующем запуске подколлектива K_1 производится перебор $(V-1)$-параметризующих четверок вида $(\tau_0, d, (s_x, s_y), (x_0, y_0))$ со всеми допустимыми значениями (s_x, s_y) при некоторых значениях τ_0 и фиксированных значениях d и (x_0, y_0). При каждом новом запуске K_1 значение d увеличивается. (x_0, y_0) счетное число раз пробегает все клетки плоскости при всех запусках K_1. Полученный коллектив обозначим как $K_2 = (\,W_1'', \ldots, W_{14}''\,)$.

Рассмотрим коллектив $K_3 = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{14})(R, V)$, где $\mathcal{B}_1$ — неподвижный автомат с внутренним алфавитом $\{q_0\} \cup \{\,-1, 1\}^2$, который в первый такт функционирования переходит из состояния q_0 в состояние $(1,1)$, автомат $\mathcal{B}_{10}$ в первый такт смещается на $(1,0)$ и останавливается, $\mathcal{B}_{11} = \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{B}_i = \mathcal{H}_0$ при всех $i \neq 1, 10, 11$. Коллектив $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{11})$ из канонического расположения в клетке (x_0, y_0) за 1 такт переходит в сильную $(1, 1, (0,0), (x_0, y_0))$-позицию. $(\,K_3 \circ K_2\,)(1, \ldots, 10) \xrightarrow{1} K = (\,W_1, \ldots, W_{14}\,)$.

Покажем, что K удовлетворяет условию леммы. Для любого автомата-жертвы $U = U(R, V-1)$ существует $(V-1)$-четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x_0, y_0))$, которая характеризует U. При функционировании K, подколлектив K_1 счетное число раз запускается из расположений, являющихся $(\tau_0', d', (0,0),$ $(x_0, y_0))$-позициями, при некоторых значениях τ_0', d'. Среди $(V-1)$-четверок $(\tau_0', d', (s_1', s_2'), (x_0, y_0))$, которые перебирает K_1 при таких запусках, найдется такая, что $\tau_0' \geq \tau_0$, $d' \geq d$, $(s_1', s_2') = (s_1, s_2)$. Такая $(V-1)$-четверка характеризует U, следовательно, по лемме 8 автомат U будет обнаружен. **Лемма доказана**.

Пусть даны целочисленные вектора (x_0, y_0) и $(s_1, s_2) \neq (0,0)$, и $h \in \mathbb{N}_0$. Множество $L = L_{(x_0,y_0),(s_1,s_2)} = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbb{R}^2,\, (x,y) = (x_0, y_0) + \alpha \cdot (s_1, s_2),\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0\}$ назовем *полупрямой*. Точку (x_0, y_0) назовем *началом* L, а вектор (s_1, s_2) — *направлением* L. Будем рассматривать целочисленную плоскость $\mathbb{Z}^2$ как подмножество действительнозначной плоскости $\mathbb{R}^2$. Назовем *полуполосой* множество $\widehat{L} = \widehat{L}^H_{(x_0,y_0),(s_1,s_2)} = \{(x,y) | (x,y) \in \mathbb{Z}^2,$ $\rho((x,y), L) \leq H\}$. Здесь $\rho((x,y), L) = \inf_{(x',y') \in L}(|x-x'| + |y-y'|)$.

Величина $\inf_{(x,y) \in L_1,\, (x',y') \in L_2}(|x-x'| + |y-y'|)$ называется *расстоянием между множествами* L_1 *и* L_2.

Лемма 11. *Для любых полупрямых $L_1 = L_{(x_1,y_1),(s_1^1,s_2^1)}, \ldots, L_n = L_{(x_n,y_n),(s_1^n,s_2^n)}$ и любых $(s_1^0, s_2^0) \neq (0,0)$ и H (где $s_1^0, s_2^0 \in \mathbb{Z}$, $H \in \mathbb{N}_0$) существует клетка (x_0, y_0), такая, что расстояние от $L_0 = L_{(x_0,y_0),(s_1^0,s_2^0)}$ до L_i не меньше H при любом $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Полупрямые L_i $(1 \le i \le n)$ пересекаются между собой в конечном числе точек. Рассмотрим круг на плоскости, внутренность которого содержит все эти точки пересечения и начала всех полупрямых. Каждая L_i пересекает границу этотого круга в одной точке. Все такие точки различны. Выберем произвольную из этих точек для начала отсчета, и, двигаясь по окружности против часовой стрелки, перенумеруем полупрямые в том порядке, в котором они встречаются на окружности. Рассмотрим направление полупрямой L_1, и, начиная с этого направления, занумеруем направления полупрямых, вектора (s_1^i, s_2^i), в порядке возрастания ориентированного угла между (s_1^1, s_2^1) и (s_1^i, s_2^i). Утверждается, что при такой нумерации направление полупрямой L_i имеет номер i (с точностью до перенумерации параллельных направлений полупрямых). Действительно, если направление полупрямой L_i имеет больший номер, чем направление полупрямой L_j при $1 \le i < j \le n$ (см. рис. 1), то это означает, что эти полупрямые пересекаются вне рассматриваемого круга, что невозможно. Итак, считаем, номер направления L_i равен i при любом $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим направление (s_1^0, s_2^0) и направления (s_1^i, s_2^i) и (s_1^j, s_2^j), где i — наибольшее, такое, что угол от (s_1^1, s_2^1) до (s_1^i, s_2^i) не превосходит угла от (s_1^1, s_2^1) до (s_1^0, s_2^0), а j — наименьшее, такое, что угол от (s_1^1, s_2^1) до (s_1^j, s_2^j) больше угла от (s_1^1, s_2^1) до (s_1^0, s_2^0) $(1 \le i < j \le n)$. Между полупрямыми L_i и L_j находится сектор, неограниченно расширяющийся с удалением от рассматриваемого круга. В этом секторе не находится точек полупрямых L_k $(1 \le k \le n)$. Выберем в этом секторе точку (x_0, y_0) (см. рис. 2), удаленную от L_i и L_j на расстояние, не меньшее H. Расстояния между $L_0 = L_{(x_0,y_0),(s_1^0,s_2^0)}$ и L_i и между L_0 и L_j будут также не меньше H. Следовательно для всех $k = 1, \ldots, n$, расстояние между L_0 и L_k не меньше H. **Лемма доказана**.

Следствие. Для любых полуполос $\widehat{L}_1 = \widehat{L}^{h_1}_{(x_1,y_1),(s_1^1,s_2^1)}, \ldots, \widehat{L}_n = \widehat{L}^{h_n}_{(x_n,y_n),(s_1^n,s_2^n)}$, любого целочисленного вектора $(s_1^0, s_2^0) \ne (0,0)$ и любых $h_0, k \in \mathbb{N}_0$, существует клетка (x_0, y_0), такая, что расстояние от $\widehat{L}_0 = \widehat{L}^{h_0}_{(x_0,y_0),(s_1^0,s_2^0)}$ до $\widehat{L}_i$ не меньше k при любом $i = 1, \ldots, n$.

Для доказательства достаточно применить лемму 11 к полупрямым $L_1 = L_{(x_1,y_1),(s_1^1,s_2^1)}, \ldots, L_n = L_{(x_n,y_n),(s_1^n,s_2^n)}$, вектору (s_1^0, s_2^0) и числу $H = k + max(\, h_0, h_1, \ldots, h_n\,) + 1$.

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть дана произвольная независимая система хищников $K(R,V) = (W_1, \dots, W_m)$, их начальные расположения на плоскости $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ и жертва $U(R', V')$. Назовем *траекторией* автомата множество клеток плоскости, в которых он бывает за время своего функционирования. По лемме 1 автоматы $U, W_1, \dots, W_m$ двигаются по плоскости с периодами выходных последовательностей $(\, d_0, d_1, \dots, d_m\,)$ соответственно, и с векторами перемещения за свой период $(\,(s_1^0, s_2^0), (s_1^1, s_2^1), \dots, (s_1^m, s_2^m)\,)$, соответственно. Следовательно, траектория каждого хищника $W_i(R,V)$, при $(s_1^i, s_2^i) \neq (0,0)$, лежит в полуполосе $\widehat{L}_{(x_i,y_i),(s_1^i,s_2^i),(V\cdot d_i)}$, а при $(s_1^i, s_2^i) = (0,0)$, лежит в полуполосе $\widehat{L}_{(x_i,y_i),(1,0),(V\cdot d_i)}$. Аналогично, траектория жертвы $U(R',V')$, при $(s_1^0, s_2^0) \neq (0,0)$, лежит в полуполосе $\widehat{L}_{(x_0,y_0),(s_1^0,s_2^0),(V'\cdot d_0)}$, а при $(s_1^0, s_2^0) = (0,0)$, лежит в полуполосе $\widehat{L}_{(x_0,y_0),(1,0),(V'\cdot d_0)}$, где (x_0, y_0) — клетка старта $U(R',V')$. По следствию из леммы 11, существует клетка старта жертвы, такая, что полуполоса, содержащая траекторию жертвы будет удалена от полуполос, содержащих траектории хищников не менее, чем на R. Следовательно, стартовав из такой клетки, жертва не будет обнаружена и не будет поймана. **Теорема доказана**.

Доказательство теоремы 2. Пусть дан $U = U(R, V-1)$. Докажем утверждения 1 и 2.

1. Пусть $R \geq V_1 + V_2$ и даны автоматы $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(R, V_1)$ и $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2(R, V_2)$ с внутренними алфавитами Q_1 и Q_2 и функциями переходов и выходов φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2, соответственно.

Суммой автоматов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ называется автомат $\mathcal{B} = \mathcal{B}(R, V_1 + V_2)$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$) с внутренним алфавитом $Q = Q_1 \times Q_2$ и функциями переходов φ и выходов ψ, определяемых из соотношений $\varphi((q_1, q_2), a) = (\varphi_1(q_1, a), \varphi_2(q_2, a))$, $\psi((q_1, q_2), a) = \psi_1(q_1, a) + \psi_2(q_2, a)$, где a — произвольный входной символ $\mathcal{B}$, $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$.

Суммой коллективов $K_1 = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)(R, V_1)$ и $K_2 = (\mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_n)(R, V_2)$ называется коллектив $K(R, V_1 + V_2) = K_1 + K_2 = (\,\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}_n + \mathcal{B}'_n\,)$.

В [?] построен коллектив $K_0 = (\,\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\,)(1,1)$, обходящий целочисленную плоскость. Будем считать, что K_0 имеет обзор R. Рассмотрим $K_1(R,V) = K_0(R,1) + (\,U, U, U\,)(R, V-1)$. K_1 перемещается относительно U так же, как K_0 относительно неподвижной точки. Следовательно, K_1 обнаруживает U при любом начальном взаимном расположении K_1 и U. По лемме 2, существует коллектив $K = (\,W_1, W_2, W_3\,)(R,V)$, который ловит U при любом начальном взаимном расположении K и U.

2. Пусть дан произвольный коллектив из двух автоматов $(W_1, W_2)(R', V')$ с числом состояний n_1 и n_2 соответственно. Покажем, что при любых начальных расположениях W_1 и W_2 существует расположение U, такое что (W_1, W_2) не ловит U. Фиксируем начальные расположения W_1 и W_2 и рассмотрим функционирование (W_1, W_2) в отсутствие U. Возможны два слу-

чая: 1) W_1 и W_2 не попадают в зоны обзора друг друга; 2) W_1 и W_2 попадают в зоны обзора друг друга в такт τ_0. В первом случае W_1 и W_2 действуют, как независимая система автоматов, и, по теореме 1, существует расположение U, такое что (W_1, W_2) не ловит U при данных начальных расположениях W_1, W_2 и U.

Рассмотрим подробнее второй случай. Пусть после такта τ_0 W_1 и W_2 оказались вне зоны обзора друг друга в течении $max(n_1, n_2)$ тактов подряд (с такта τ_1 по такт τ_2). Как следует из леммы 1, за это время W_1 и W_2 завершат прохождение предпериодов своих выходных последоветельностей и начнут двигаться с периодическими последовательностями выходных символов. Обозначим длины периодов выходных последовательностей W_1 и W_2 как d_1 и d_2, соответственно, а клетки в которых W_1 и W_2 находятся в такт τ_2, — как (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Имеют место неравенства $d_1 \leq n_1$ и $d_2 \leq n_2$. Т.к. до такта τ_2 автоматы W_1 и W_2 находились вне зоны обзора друг друга не более $max(n_1, n_2)$ тактов подряд, $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leq R' + 2 \cdot max(n_1, n_2) \cdot V'$. Начиная с такта τ_2, перемещения W_1 относительно W_2 являются периодическими, с длиной периода $d \leq d_1 \cdot d_2$. Пусть за этот период W_1 смещается относительно W_2 на вектор (s_1, s_2) (где $|s_1| + |s_2| \leq 2V' \cdot d$).

При $(s_1, s_2) = (0, 0)$ либо W_1 и W_2 окажутся в зоне обзора друг друга не позднее, чем в такт $\tau_2 + d$, либо не окажутся никогда.

Пусть $(s_1, s_2) \neq (0, 0)$. Пока W_1 и W_2 находятся вне зоны обзора друг друга, в системе координат, связанной с W_2, W_1 перемещается в полуполосе $\widehat{L}^{2V' \cdot d}_{((x_1-x_2),(y_1-y_2)),(s_1,s_2)}$. Обозначим через R_{min} минимальное расстояние между W_1 и W_2 за время нахождения W_1 и W_2 вне зоны обзора друг друга, начиная с такта τ_2, а через R'_{min} — минимальное расстояние, на котором W_1 и W_2 находятся в такты вида $\tau_2 + k \cdot d$, $(k \in \mathbb{N}_0)$. $R'_{min} = min_{k \in \mathbb{N}_0}(|x_1 - x_2 + k \cdot s_1| + |y_1 - y_2 + k \cdot s_2|)$. Расстояние R_{min} между W_1 и W_2 достигается не позднее, чем через d тактов после достижения расстояния R'_{min}. Укажем такты, в которые расстояние между W_1 и W_2 равно R'_{min}.

При $|s_1| > |s_2|$ и $(x_1 - x_2) \cdot s_1 \geq 0$, при $|s_2| > |s_1|$ и $(y_1 - y_2) \cdot s_2 \geq 0$, а так же при $|s_1| = |s_2|$, $(x_1 - x_2) \cdot s_1 \geq 0$ и $(y_1 - y_2) \cdot s_2 \geq 0$ расстояние R'_{min} достигается в такт τ_2.

При $|s_1| > |s_2|$ и $(x_1 - x_2) \cdot s_1 < 0$ $\langle\, |s_2| > |s_1|$ и $(y_1 - y_2) \cdot s_2 < 0 \,\rangle$, расстояние R'_{min} достигается в такт $\tau_2 + [(x_2 - x_1)/s_1] \cdot d$, либо в такт $\tau_2 +](x_2 - x_1)/s_1[\cdot d$ $\langle$ в такт $\tau_2 + [(y_2 - y_1)/s_2] \cdot d$, либо в такт $\tau_2 +](y_2 - y_1)/s_2[\cdot d \,\rangle$.

Наконец, в случае $|s_1| = |s_2|$ при $(x_1 - x_2) \cdot s_1 < 0$ или $(y_1 - y_2) \cdot s_1 < 0$ расстояние R'_{min} достигается либо в такт

$$\tau_2 + d \cdot max_{(a_1,a_2) \in \{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\},(a_2-a_1)\cdot s_1<0}([(a_1 - a_2)/s_1])\,,$$

либо в такт

$$\tau_2 + d \cdot max_{(a_1,a_2) \in \{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\},(a_2-a_1)\cdot s_1<0}(](a_1 - a_2)/s_1[)\,.$$

Таким образом получаем, что в любом случае не позднее, чем в такт $\tau_3 = \tau_2 + d \cdot max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) + d$ между W_1 и W_2 достигается расстояние

R_{min}. Используя оценки сверху для d, τ_2 и $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, получим $\tau_3 \leq \tau_1 + max(n_1, n_2) - 1 + (n_1 \cdot n_2 + 1) \cdot (R' + 2V' \cdot max(n_1, n_2))$.

Если с такта τ_1 до такта τ_3 W_1 и W_2 находятся вне зоны обзора друг друга, то они будут вне зоны обзора друг друга и далее, т.к. в такт τ_3 расстояние между ними минимально. Таким образом, либо, начиная с некоторого такта τ_1, $(\,W_1, W_2\,)$ действует как независимая система автоматов, либо W_1 и W_2 либо не покидают зоны обзора друг друга более чем на $\tau_4 = max(n_1, n_2) + (n_1 \cdot n_2 + 1) \cdot (R' + V' \cdot max(n_1, n_2))$ тактов. В первом случае траектории W_1 и W_2 (целиком, т.е. с нулевого такта) лежат в полуполосах ширины $(n_1 + \tau_1) \cdot V'$ и $(n_2 + \tau_1) \cdot V'$, соответственно. Во втором случае расстояние между W_1 и W_2 не превосходит $R_0 = R' + V' \cdot \tau_4$. Не позднее чем через $\tau_5 = n_1 \cdot n_2 \cdot (R_0^2 + (R_0 + 1)^2)$ тактов W_1 и W_2 окажутся в тех же состояниях и в том же относительном расположении, что и ранее. Следовательно, выходные последовательности W_1 и W_2 периодические с суммой периода и предпериода не превосходящей τ_5. Траектории W_1 и W_2 лежат в полуполосах ширины $\tau_5 \cdot V'$.

В обоих случаях, как и в доказательстве теоремы 1, существует начальное расположение U, при котором полуполоса, содержащая его траекторию, не пересекается с полуполосами, содержащими траектории W_1 и W_2. Т.е. $(\,W_1, W_2\,)$ не ловит U. **Теорема доказана**.

Доказательство теоремы 3. Пусть по плоскости перемещается произвольная независимая система жертв $S = (\,U_1, \ldots, U_n\,)(R, V-1)$. При $R = V$ обнаружение жертвы означает ее поимку и теорема 3 прямо следует из леммы 10.

Предположим, $R > V$. Построим автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$, который, не видя жертв, стоит на месте, а увидев какую-либо из жертв, $\mathcal{A}$ не позднее, чем через $(R - V)$ тактов ловит некоторую жертву и возвращается в исходное расположение. Начальным состоянием $\mathcal{A}$ является $(q_0, \ldots, q_0)$.

1) $(\,\mathcal{A},\, Q_{\mathcal{A}} = (\{q_0, q_1\} \cup \{\,-V, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, V\}^2)^{R-V} \cup \{q_2\}\,)$.

Увидев в такт τ_0 какую-либо жертву, автомат $\mathcal{A}$ преследует ближайшую к нему жертву (понятие ближайшей жертвы определено в доказательстве леммы 2), запоминая в s-той компоненте своего состояния свой ход в такт $(\tau_0 + s - 1)$ (где $1 \leq s \leq (R - V)$).

2) $\mathcal{A}, (\,(q_0, \ldots, q_0), (P''_R(\mathcal{A}) = 1)\,), \rightarrow (\,((v_1, v_2), q_0, \ldots, q_0), (v_1, v_2)\,)$, где (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

3) $\mathcal{A}, (\,((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^s, v_2^s), q_0, \ldots, q_0), (P''_R(\mathcal{A}) = 1)\,), \rightarrow (((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^s, v_2^s),$ $(v_1, v_2), q_0, \ldots, q_0),\ (v_1, v_2))$, где $1 \leq s \leq (R - V - 2)$, (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

4) $\mathcal{A},\ (\,((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), q_0), (P''_R(\mathcal{A}) = 1)\,),\ \rightarrow\ (((v_1^1, v_2^1), \ldots$ $\ldots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), (v_1, v_2)), (v_1, v_2))$, где (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

Если в какой-то момент преследования хищник не видит ни одной жертвы, значит, как минимум одна жертва (та, которую преследовал хищник) поймана. После этого $\mathcal{A}$ возвращается в исходное расположение (не реагируя на другие жертвы), используя ранее сохраненные координаты своих перемещений. Это возвращение также происходит не более чем за $R-V$ тактов.
5) $\mathcal{A}$, $(\,((v_1^1,v_2^1),\dots,(v_1^{s-1},v_2^{s-1}),(v_1^s,v_2^s),q_0,\dots,q_0),(P''_R(\mathcal{A})=0)\,)$, $\rightarrow$ $(((v_1^1,v_2^1),\dots,(v_1^{s-1},v_2^{s-1}),q_1,\dots,q_1),\ (v_1^s,v_2^s))$, где $1\le s\le (R-V-1)$.

Не позднее, чем через $R-V$ тактов преследования некоторая жертва будет поймана. После этого $\mathcal{A}$ возвращается в исходное расположение не более чем за $R-V$ тактов.
6) $\mathcal{A}$, $(\,((v_1^1,v_2^1),\dots,(v_1^{(R-V)},v_2^{(R-V)}))\,)$, $\rightarrow$ $(((v_1^1,v_2^1),\dots,(v_1^{(R-V-1)},v_2^{(R-V-1)}),$ $q_1),(-v_1^{R-V},-v_2^{R-V}))$.
7) $\mathcal{A}$, $(\,((v_1^1,v_2^1),\dots,(v_1^s,v_2^s),q_1,\dots,q_1)\,)$, $\rightarrow$ $(((v_1^1,v_2^1),\dots,(v_1^{s-1},v_2^{s-1}),q_1,\dots,q_1),$ $(-v_1^s,-v_2^s))$, где $2\le s\le (R-V)$.
8) $\mathcal{A}$, $(\,((v_1^1,v_2^1),q_1,\dots,q_1)\,)$, $\rightarrow$ $(q_2,(-v_1^1,-v_2^1))$.

В лемме 10 построен коллектив хищников, обнаруживающий любой автомат-жертву $U=U(R,V-1)$. Переобозначим этот коллектив как $K_1=(\,W'_1,\dots,W'_{14}\,)(R,V)$. Внутренний алфавит W'_i $(1\le i\le 14)$ обозначим как Q'_i, а его начальное состояние как q_0^i.

При функционировании коллектива K_1 его подколлектив $(\,W'_1,\dots,W'_{11}\,)$ при каждом своем запуске фунционирует не менее 7 тактов (W'_5 идет к W'_{11} и обратно (не менее 2 тактов), W'_9 не менее одного раза идет к W'_4 и обратно (см. доказательство леммы 8), после остановки коллектива K_3 (см. доказательство леммы 9) W'_5 идет к W'_4 и обратно, а затем еще хотя бы один такт тратится на перемещение автоматов W'_2 и W'_3). Автоматы W'_1, W'_{12}, W'_{13} и W'_{14} перемещаются только в паузах между запусками подколлектива $(\,W'_1,\dots,W'_{11}\,)$, т.е. не чаще, чем 1 раз в 8 тактов. За одну такую паузу каждый этих автоматов делает 1 ход, перемещаясь на некоторый вектор $\vec{s}$, такой что $|\vec{s}|\le 2$. Автомат W'_{10} за время работы коллектива $(\,W'_1,\dots,W'_{11}\,)$ перемещается на вектор $(\,(V-1),0)$, а автомат W'_{11} за каждый такт работы коллектива $(\,W'_1,\dots,W'_{11}\,)$ перемещается на вектор $(1,0)$.

Добавим к коллективу K_1 автоматы $W''_1,\dots,W''_{14}$, устроенные следующим образом.

Каждый хищник W''_i при $i=1,10,11,12,13,14$ имеет две группы состояний: Q'_i и $Q_{\mathcal{A}}$. Начальным состоянием W''_i является q_0^i. Автомат W''_i, находясь в состоянии $q\in Q'_i$, перемещается и меняет свое состояние так же, как автомат W'_i в состоянии q при том же входном символе, если $P''_R(W''_i)=0$, и перемещается и меняет свое состояние так же, как автомат $\mathcal{A}$ в состоянии $(q_0,\dots,q_0)$ при том же входном символе, если $P''_R(W''_i)=1$. Находясь в состоянии $q\in Q_{\mathcal{A}}$, $q\ne q_2$, хищник W''_i перемещается и меняет свое состояние, так же, как и $\mathcal{A}$ в состоянии q при том же входном символе.

Каждый хищник W''_i при $i=2,3,4,5,6,7,8,9$ имеет внутренний алфавит $Q''_i=\{\,-1,1\}^2\times(Q_i^0\cup\{q_3,q_4\})$, где $Q_i^0=Q'_i\cup Q_{\mathcal{A}}$. Начальным состоянием

W_i'' является $(1, 1, q_0^i)$.

Рассмотрим черыре квадранта, на которые целочисленная плоскость разбивается горизонтальной и вертикальной целочисленными прямыми, проходящими через расположение W_1'. Из построений лемм 8, 9, 10 нетрудно видеть, что каждый хищник W_i' может перейти из одного рассматриваемого квадранта в другой только оказавшись в одной клетке с W_1'. Хищник W_i'' также переходит из одного квадранта в другой (не считая времени преследования увиденной жертвы и возвращения на траекторию W_i'), только оказавшись в одной клетке с W_1'. Поэтому W_i'' в каждый момент времени (кроме, может быть, времени преследования увиденной жертвы и возвращения на траекторию W_i') "знает" величины $sgn_0(a_1)$ и $sgn_0(a_2)$, где (a_1, a_2) — вектор разности расположений W_i' и W_1'.

Определим функцию переходов W_i'' так, что первая и вторая компоненты состояния W_i'' в каждый момент времени (кроме, может быть, времени преследования увиденной жертвы и возвращения на траекторию W_i') будут равны $sgn_0(a_1)$ и $sgn_0(a_2)$ соответственно. Если $P_R''(W_i'') = 0$, то W_i'', находясь в состоянии (q', q'', q), где $q', q'' \in \{-1, 1\}$, $q \in Q_i'$, перемещается так же, как W_i', находящийся в состоянии q, при том же входном символе и переходит в состояние с третьей комнонентой, равной состоянию, в которое переходит W_i' из состояния q при том же входном символе. Если $P_R''(W_i'') = 1$, то W_i'', находясь в состоянии (q', q'', q), где $q \in Q_i'$, перемещается так же, как $\mathcal{A}$, находящийся в состоянии $(q_0, \ldots, q_0)$, при том же входном символе и переходит в состояние с третьей комнонентой, равной состоянию, в которое переходит $\mathcal{A}$ из состояния $(q_0, \ldots, q_0)$ при том же входном символе. W_i'', находясь в состоянии (q', q'', q), где $q \in Q_{\mathcal{A}}$, перемещается так же, как $\mathcal{A}$, находящийся в состоянии q, при том же входном символе и переходит в состояние с третьей комнонентой, равной состоянию, в которое переходит $\mathcal{A}$ из состояния q при том же входном символе.

Каждый хищник W_i'' при $i = 1, \ldots, 14$, до того, как увидит какую-либо жертву, перемещается совместно с W_i'. Увидев какую-либо жертву, W_i'' функционирует как автомат $\mathcal{A}$, т.е. за время, не большее $2(R - V)$ ловит некоторую жертву и возвращается в клетку, из которой он начинал преследование жертвы.

Пусть $i \in \{1, 12, 13, 14\}$. Перемещение $\vec{s_i}$ автомата W_i' за время преследования автоматом W_i'' жертвы таково, что $|\vec{s_i}| \leq 2 \cdot]2(R-V)/8[\leq (R-V)/2 + 2 \leq R/2 + 1 \leq R$. Т.е. автомат W_i'', оказавшись в состоянии q_2 (финальном состоянии автомата $\mathcal{A}$), увидит W_i'. Доопределим W_i'', так что W_i'' в состоянии q_2, видя W_i', идет к нему со скоростью V, а, оказавшись в одной клетке с W_i', — переходит в то же состояние, в которое переходит W_i'. Таким образом, не позднее, чем через $\tau = 2(R-V) + 8]R/6[$ тактов после обнаружения жертвы, W_i'' вернется к W_i'.

Пусть $i \in \{10, 11\}$. Доопределим W_i'' так, что он, находясь в состоянии q_2, не видя W_i', идет со скоростью V в направлении $(1, 0)$, пока не увидит W_i', а видя W_i' — идет к нему со скоростью V, становясь в одну клетку с W_i' в том же состоянии, в котором оказывается W_i'. Перемещение $\vec{s_i}(\tau)$ автомата W_i' за некоторый промежуток времени длиной τ тактов есть сумма

$\vec{s_i}(\tau) = \vec{s_i'}(\tau) + \vec{s_1}(\tau)$, где $\vec{s_i'}(\tau)$ — перемещение W_i' как элемента подколлектива $(W_1', \ldots, W_{11}')$, а $\vec{s_1}(\tau)$ — перемещение автомата W_1' за рассматриваемый промежуток времени. $\vec{s_i'}(\tau) = (x_i(\tau), 0)$. Имеют место неравенства: $0 \le x_{10}(\tau) \le (V-1)\cdot]\tau/8[,\ 0 \le x_{11}(\tau) \le \tau,\ |\vec{s_1}(\tau)| \le 2\cdot]\tau/8[$. Нетрудно видеть, что автомат W_{10}'', оказавшись в состоянии q_2, окажется на одной вертикали с W_{10}' не позднее, чем через время

$$\tau_{10}' = 8\cdot]\frac{(V-1)\cdot](R-V)/4[}{7V+1}[\ \le\ \frac{2}{7}\cdot(R-V) + \frac{64}{7}\,.$$

За это время W_{10}' сместится (с момента обнаружения жертвы) по вертикали не более, чем на

$$|\vec{s_1}(\,2(R-V) + \tau_{10}'\,)| = \frac{4}{7}(R-V) + \frac{16}{7}\ \le R.$$

Это следует из соотношений $V \ge 2$, $R \ge 3$. Таким образом, W_{10}'' увидит W_{10}', и не позднее, чем через $\tau_{10} = 2(R-V) + \tau_{10}' + 8]R/6[$ тактов после обнаружения жертвы окажется с ним в одной клетке. Аналогично,автомат W_{11}'', оказавшись в состоянии q_2, не позднее, чем через время $2(R-V)$ окажется на одной вертикали с W_{11}'. За это время W_{11}' сместится (с момента обнаружения жертвы) по вертикали не более, чем на $|\vec{s_1}(\,4(R-V)\,)| = 2\cdot](R-V)/2[\le R$. Таким образом, W_{11}'' увидит W_{11}', и не позднее, чем через $\tau_{11} = 4(R-V) + 8]R/6[\le 6R$ тактов после обнаружения жертвы окажется с ним в одной клетке.

Пусть $i \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Как нетрудно видеть из построений лемм 8, 9, 10, автомат W_i' при $i \in \{2,3,4,5,6,9\}$ перемещается так, что в любой такт времени ему, чтобы вернуться к W_1', достаточно пройти не более одного горизонтального или вертикального отрезка. Автоматам же W_7' и W_8' для возвращения к W_1', достаточно пройти не более одного горизонтального и одного вертикального отрезка. Автоматы W_7' и W_8' для возвращения к W_1' используют в качестве ориентира автоматы W_5' и W_6', соответственно.

Изменим функции переходов и выходов автоматов W_5' и W_6', так, чтобы W_5' возвращался к W_1' не одновременно с W_7', а только после того, как, возвращаясь к W_1', мимо W_5' пройдут и W_7' и W_7'', а W_6' возвращался к W_1' не одновременно с W_8', а только после того, как, возвращаясь к W_1', мимо W_6' пройдут и W_8' и W_8''. Также изменим функции переходов и выходов автомата W_1', так, чтобы W_1', совершал свои перемещения только совместно с автоматами W_i', W_i'', $i \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Т.е., если в момент, когда автомату W_1' надо переместиться, в одной клетке с ним не находятся все вышеобозначенные автоматы, он ждет, пока все они не окажутся с ним в одной клетке, и затем передвигается вместе с ними. Легко видеть, что такие изменения коллектива $(W_1', \ldots, W_{11}')$, не влияют на факт обнаружения им любой жертвы.

Попав в состояние вида (q', q'', q_2) $(q', q'' \in \{-1, 1\})$, автомат W_i'', находится в клетке, где он ранее находился вместе с W_i'. Добавим автоматам W_7'' и W_8'' еще несколько состояний, которые позволят им во время преследования жертвы (т.е. когда этот автомат действует отдельно от W_7' или W_8', соответственно) “помнить” свое состояние в момент, когда преследование началось. Это нужно, чтобы возвращаясь к W'_1, каждый из этих автоматов “знал”, один или два прямых отрезка пути ему предстоит пройти. Доопределим W''_i так, чтобы после попадания в состояние (q', q'', q_2), он перемещался в клетку, в которой находится W'_1, и останавливался в состоянии $(1, 1, q_4)$ (как видно из построений лемм 8, 9, 10, это можно сделать, используя для такого перемещения состояния вида (q', q'', q_2) и (q', q'', q_3)). Когда все W'_i и все W''_i $(i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ оказываются в той же клетке, что и W'_1, причем каждый W''_i находится в состоянии $(1, 1, q_4)$, тогда каждый W''_i переходит в то же состояние, в которое переходит W'_i и делает тот же ход, что и W'_i.

Обозначим полученный коллектив $K = (W_1, \dots, W_{28}) = (W'_1, \dots, W'_{14}, W''_1, \dots, W''_{14})$. Покажем, что K удовлетворяет условию теоремы. Подколлектив $(W'_1, \dots, W'_{14})$ функционирует так же, как коллектив K_1, только, возможно, с большим числом пауз в работе всех автоматов, кроме W'_{11}. Однако, как следует из доказательств лемм 8, 9, 10, и приведенных выше построений, эти паузы не влияют на факт обнаружения коллективом K_1 любой жертвы. Пусть в некоторый такт τ_0 уже поймано h жертв $(0 \leq h \leq n-1)$. Проведем доказательство от противного, т.е., предположим, что после этого ни одна жертва не будет поймана. Обозначим следующий после τ_0 момент, когда все автоматы W'_i, W''_i, $i \in \{1, \dots, 9\}$ перемещаются в следующую клетку, как τ_1. Тогда не позднее, чем в такт $max\{\tau_1, \tau_0 + \tau_2\}$, каждый хищник W''_i $(i = 1, \dots, 14)$ окажется в той же клетке и в том же состоянии, что и W'_i. Здесь под τ_2 понимается максимальное время, которое требуется W''_i для возвращения к W'_i после обнаружения жертвы, при всех $i \in \{1, 10, 11, 12, 13, 14\}$ (все эти величины подсчитаны выше). После этого, хищники W''_i и W'_i передвигаются совместно, пока не обнаружат (согласно лемме 10) некоторую жертву. Как указано выше, в такой ситуации W''_i начнет преследовать обнаруженную жертву, и поймает некоторую жертву. Это противоречит предположению о том, что никакая новая жертва не будет поймана. Это противоречие доказывает теорему. **Теорема доказана**.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. "Введение в теорию автоматов", Наука, 1985.

[2] Г. Килибарда, В.Б. Кудрявцев, Ш. Ушчумлич "Независимые системы автоматов в лабиринтах", Дискретная математика, т. 15 вып. 2, 2003.

[3] Г. Килибарда, В.Б. Кудрявцев, Ш. Ушчумлич "Коллективы автоматов в лабиринтах", Дискретная математика, т. 15 вып. 3, 2003.

[4] Грунская В.И., "О динамическом взаимодействии автоматов", в кн.: Математическая кибернетика и ее приложения к биологии, МГУ, 1987, стр. 8-18.