

ФГБОУ ВО  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. Ломоносова  
Механико-математический факультет



На правах рукописи  
УДК 539.3

КЛИМОВ КИРИЛЛ ЮРЬЕВИЧ

**РЕОНОМНЫЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ И  
ИХ ВЛИЯНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ**

01.02.04 — механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

МОСКВА 2017 г.

Работа выполнена на кафедре теории пластичности механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова.

**Научный руководитель:** **Мовчан Андрей Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор.

**Официальные оппоненты:** **Волков Александр Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Теории упругости» Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), г. Санкт-Петербург;

**Думанский Александр Митрофанович**, доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по научной работе Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва.

**Ведущая организация:** **ОАО «Национальный институт авиационных технологий»**, г. Москва.

Защита диссертации состоится 9 июня 2017 г. в 15 часов 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 501.001.91 по механике при Московском Государственном Университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А, 8 этаж, к. 812 и на сайте: <https://istina.msu.ru/dissertations/51421758/>

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » апреля 2017 г.

Учёный секретарь диссертационного совета  
Д 501.001.91, канд. физ.-мат.наук



П.В. Чистяков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы исследования

Термоупругие мартенситные фазовые превращения, наблюдаемые в сплавах с памятью формы (СПФ), были впервые открыты в 1948 г. Г.В. Курдюмовым и Л.Г. Хандорсом. Первый промышленно значимый образец СПФ — нитинол (примерно равноатомный никелид титана, NiTi) — был синтезирован в Ливерморской лаборатории (США) в 50-х годах XX века и запатентован в 1965 г. На сегодняшний день также известны и широко используются сплавы, обладающие свойством памяти формы, синтезированные на основе Ti-Ni-Cu, Fe-Mn, Mn-Cu, Cu-Zn-Al и других соединений.

Уникальность данных сплавов обусловлена наличием эффекта памяти формы, проявляемого следующим образом:

- Если нагрузить СПФ (находящийся при некоторой достаточно низкой температуре) возрастающим напряжением за границы предела упругости и затем снять нагрузку, то приобретенная неупругая компонента деформации материала сохраняется;
- Далее, после нагрева до определенного уровня температур описанная выше неупругая деформация частично или полностью исчезает. Таким образом, материал возвращается в свою первоначальную форму.

Данное явление для NiTi может быть объяснено наличием двух различных фазовых состояний: аустенитного (с объемноцентрированной кубической кристаллической решеткой типа B2), в котором материал находится при высоких температурах, и мартенситного (имеющем моноклинную с искажениями кристаллическую решетку), в котором материал находится при низких температурах.

При переходе из аустенитной фазы в мартенситную для образца из никелида титана переход в моноклинную структуру в общем случае может происходить в 12 различных направлениях (в системе координат, образованной осями исходной объемноцентрированной ячейки аустенитной фазы). По этой причине полученный мартенсит может находиться в разных структурных состояниях, различающихся степенью ориентированности мартенситных ячеек. Структурной деформацией СПФ принято называть деформацию, вызванную увеличением степени ориентированности мартенситных элементов СПФ как результата действия внешних механических напряжений и сопровождающуюся раздвойникованием и переориентацией мартенситных элементов. Уровни неупругих структурных деформаций, возникающие благодаря раздвойникованию и переориентации мартенситных элементов, могут достигать в TiNi значений порядка 8 %.

Одним из ключевых вопросов, решение которого необходимо для прикладного применения данного материала, является вопрос моделирования и экспериментального исследования поведения элементов из СПФ. Данному вопросу посвящены работы Лихачева В.А., Абдрахманова С.А., Малинина В.Г., Волкова А.Е., Беляева С.П., Андропова И.Н., Мовчана А.А., Лурье С.А., Васина Р.А., Tanaka K., Lagoudas D.C., Brinson L.C., Liang C., Rogers C.A., Lexcelent C., Auricchio F. и др. В настоящее время большинство авторов работ (Grabe C., Bruhns O.T., Iadicola M.A., Shaw J.A., Van Humbeeck J., Delaey L., Lin P., Tobushi H. и др.), которые изучают поведение СПФ, зависящее от масштаба времени, придерживаются той точки зрения, что процесс деформирования СПФ сам по себе является склерономным, а наблюдаемые экспериментально реономные эффекты обусловлены зависимостью от времени процессов теплопередачи и теплопроводности при выделении и поглощении латентного тепла при фазовых переходах. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о том, что реономное поведение может наблюдаться и в изотермическом процессе, то есть оно не объясняется только лишь процессами теплопроводности.

Реономные свойства деформируемых твердых тел и соответствующие краевые задачи рассматривались в работах Работнова Ю.Н., Ильюшина А.А., Шестерикова С.А., Победри Б.Е., Ржаницина А.Р., Локощенко А.М., Соколовского В.В., Думанского А.М., Георгиевского Д.В., Malvern L.E., Perzina P., Jonson G.R., Cook W.H. и др.

Экспериментальному исследованию и теоретическому анализу устойчивости элементов из СПФ посвящены работы Малыгина Г.А., Хусаинова М.А., Мовчана А.А., Сильченко Л.Г., Шкутина Л.И., Rahman M.A., Qui J., Tani J., Richter F., Kastner O., Eggeler G., Urushiyama Y., Lewinnek D., Kunavar J., Kozel F., Puksic A., Videnic T. и др. Вместе с этим, в связи с упомянутыми выше экспериментальными данными, возникает вопрос учета влияния реономных свойств СПФ на устойчивость элементов из этих материалов. Задачи устойчивости для деформируемых твердых тел, обладающих реономными свойствами (вязкоупругих полимеров и металлов, демонстрирующих явление ползучести), рассматривались разными авторами: Ржаницыным А.Р., Работновым Ю.Н., Шестериковым С.А., Зубчаниновым В.Г. и др. В работах Ржаницына А.Р. было установлено, что для линейно вязкоупругих полимеров, демонстрирующих явление ограниченной ползучести, имеет смысл постановка задачи устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале (т.е. постановка задачи устойчивости по Ляпунову). В рамках вязкоупругой модели Кельвина — Фойгхта предельная нагрузка может быть вычислена по зависимости типа

формулы Эйлера с использованием длительного упругого модуля вместо мгновенного. В то же время для металлов, демонстрирующих явление нелинейной неограниченной ползучести, постановка задачи устойчивости по Ляпунову, как правило, не имеет смысла. Здесь речь может идти об определении критического времени потери устойчивости при заданной нагрузке. Аналогичные результаты получены в работах Зубчанинова В.Г. для вязкопластических систем, зависящая от времени деформация которых подчиняется законам установившейся ползучести. В то же время в случае вязкопластического стержня из материала, для которого характерно явление ограниченной ползучести, автором была установлена корректность постановки задачи устойчивости по Ляпунову на бесконечном временном интервале.

СПФ, с одной стороны, демонстрируют существенно нелинейное поведение, и в этом плане данные материалы схожи с металлами, для которых характерна нелинейная ползучесть или вязкопластическая деформация. С другой стороны, для СПФ характерно явление ограниченной ползучести, и в этом отношении данные материалы схожи с вязкоупругими полимерами. В результате встает принципиальный вопрос о том, возможна ли для элементов из СПФ, проявляющего реономные свойства, постановка задачи устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале, или же речь может идти только об определении критического времени для заданной нагрузки.

### ***Цели работы***

- Предложить модели, описывающие реономное поведение СПФ;
- Предложить способ идентификации (калибровки) параметров модели по экспериментальным данным;
- Соотнести результаты экспериментов с вычислениями, полученными при использовании определяющих соотношений предложенных моделей;
- Оценить возможность постановки задачи устойчивости для модельных систем, содержащих элементы из СПФ в форме Эйлера и Ляпунова;
- Оценить влияние реономного поведения СПФ на устойчивость модельных систем, содержащих элементы из данного материала.

### ***Основные положения, выносимые на защиту***

- Предложен ряд моделей, призванных описать реономное поведение сплавов с памятью формы, наблюдаемое в экспериментах;
- Предложена процедура идентификации параметров модели (калибровки);
- Показано хорошее качественное согласование модельных данных и экспериментальных наблюдений;

- Установлено, что для модельных систем, содержащих элементы из СПФ (являющиеся неконсервативной средой), учитывая реономные свойства, имеет смысл постановка задачи устойчивости по Ляпунову на бесконечном временном интервале;
- Установлено, что квазистатическая (Эйлерова) и динамическая (Ляпунова) постановки задачи устойчивости для элементов из СПФ в рамках разных моделей при консервативных нагрузках дают одинаковое значение критической силы;
- Установлено, что критическая сила потери устойчивости может быть определена с помощью касательного модуля к кривой мартенситной неупругости предельно медленного процесса в точке потери устойчивости. Приведена точная формула для вычисления этой критической силы.

### ***Научная новизна***

В данной работе впервые была предпринята попытка построения моделей, согласующихся с экспериментальными наблюдениями реономного поведения СПФ при их нагружении в режиме мартенситной неупругости в рамках предположений о существовании предельно медленных и предельно быстрых процессов неупругого деформирования. Впервые исследовано влияние реономных свойств СПФ на устойчивость элементов, содержащих эти материалы.

### ***Научная и практическая значимость***

Предложенные в работе определяющие соотношения могут быть использованы для моделирования реономного поведения элементов и конструкций, содержащих сплавы с памятью формы, и таких, для которых важное значение имеет время срабатывания. На основе данных определяющих соотношений для ряда модельных систем, содержащих элементы из СПФ, приведена формула расчета критической нагрузки потери устойчивости.

### ***Степень достоверности***

Достоверность теоретических результатов диссертации вытекает из использования классического аппарата механики сплошных сред, теории упругости и теории пластичности. Результаты также подтверждены строгими математическими выводами, основанными на положениях механики. Ряд задач устойчивости решен в различных постановках (квазистатической и динамической), в результате чего получены одинаковые уровни критической нагрузки потери устойчивости. Достоверность предлагаемых моделей

подтверждается сравнением с экспериментальными данными по реономному поведению СПФ.

### ***Апробация работы***

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Научно-исследовательский семинар кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством академика РАН, профессора Р.И. Нигматулина и профессора Н.Н. Смирнова (19 декабря 2016 г.);
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора Д.В. Георгиевского (7 декабря 2016 г.);
- Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора В.И. Горбачева (21 ноября 2016 г.);
- Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством члена-корреспондента РАН Е.В. Ломакина и акад. РАН И.Г. Горячевой (5 сентября 2016 г.);
- Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композитных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», ИПРИМ РАН, г. Москва, 15–17 декабря 2015 г.;
- Международная конференция «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел — научное наследие Ю.Н. Работнова», ИМАШ РАН, г. Москва, 24–26 февраля 2014 г.;
- Научная конференция «Ломоносовские чтения», МГУ, г. Москва, апрель 2013 г.;
- II Всероссийская научная конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем», ИПРИМ РАН, г. Москва, 2013 и 2011 гг.;
- Международная конференция «Современные проблемы механики», посвященная 100-летию Л.А. Галина, г. Москва, 20-21 сентября 2012 г.;
- Международная конференция «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященная 100-летию со дня рождения академика Н.Х. Арутюняна, г. Цахкадзор, Армения, 8–12 октября 2012 г.

### ***Личный вклад***

В совместных работах А.А. Мовчану принадлежат постановки задач и общее научное руководство. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно.

### ***Публикации***

Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях, 6 из которых опубликованы в журналах из списка ВАК РФ, 1 – в журнале из перечня Scopus, 7 — в тезисах докладов.

### ***Объем и структура работы***

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 150 страниц с 76 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 101 наименование.



## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** приводится краткий обзор уникальных свойств СПФ. Также приводится определение понятий фазовой и структурной деформации в СПФ. Далее упоминается ряд экспериментов (более подробно они описаны в Главе 1), результаты которых выходят за рамки общепринятого на данный момент мнения, что поведение СПФ является склерономным, а реономные свойства объясняются исключительно процессами теплопередачи латентного тепла, выделяющегося в процессе прямого превращения.

Затем приводится краткий обзор решенных на данный момент задач устойчивости для тонкостенных элементов из СПФ, исходя из моделей, рассматривающих свойства СПФ как склерономные (т. е. независящие от масштаба времени). Поясняется причина актуальности решения задачи устойчивости для СПФ в постановке Эйлера (квазистатической) и Ляпунова (динамической). Далее приводятся цели и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, научная новизна, теоретическая и практическая значимость данной работы. Кроме этого приводятся аргументы, подтверждающие достоверность полученных в ходе работы результатов, а также перечень основных конференций и семинаров, на которых они были апробированы.

**Глава 1** посвящена анализу экспериментальных данных, подтверждающих наличие у СПФ реономных свойств.

В начале главы приводятся результаты экспериментов по жесткому изотермическому нагружению образца из никелида титана в режиме мартенситной неупругости, мягкому изотермическому ступенчатому нагружению СПФ в режиме мартенситной неупругости, а также релаксации напряжений.

Исходя из этих экспериментальных данных можно сделать следующие выводы:

1. Никелид титана при комнатных температурах и малых скоростях изменения деформаций или напряжений проявляет реономные свойства, соответствующие явлению ограниченной ползучести;
2. При жестком изотермическом нагружении в режиме мартенситной неупругости при равных напряжениях деформация тем больше, чем меньше скорость движения активного захвата;
3. При мягком ступенчатом нагружении, как в режиме мартенситной неупругости, так и в режиме сверхупругости, после каждого скачка нагрузки наблюдается затухающий с течением времени рост деформаций при постоянном напряжении;

4. При ступенчатой изотермической разгрузке в режиме сверхупругости после скачкообразного падения нагрузки наблюдается затухающее с течением времени уменьшение деформации при постоянном напряжении;
5. Изменения деформации со временем после скачка нагрузки сравнимы по величине с мгновенным скачком деформаций в том же процессе. При одинаковых скачках напряжений величина накапливаемой со временем деформации тем выше, чем меньше значение касательного модуля соответствует рассматриваемой области изменения напряжений;
6. После жесткого нагружения в режиме мартенситной неупругости до заданного значения напряжений и дальнейшей фиксации полученных деформаций наблюдается явление релаксации напряжений. Величина релаксации напряжения при нагружении до одних и тех же уровней напряжений тем больше, чем больше скорость предварительного жесткого нагружения.

Таким образом, взяв за основу эксперименты по мягкому ступенчатому нагружению в режиме мартенситной неупругости, впервые для СПФ было показано, что реономное поведение СПФ наблюдается независимо от процессов теплопередачи латентного тепла, выделяемого при фазовых переходах.

Завершает главу ряд основанных на экспериментальных наблюдениях положений, опираясь на которые на протяжении всей главы 2 будет осуществляться поиск подходящих определяющих соотношений. Так, постулируется существование нелинейных диаграмм предельно быстрого и предельно медленного процессов в осях напряжение — фазово-структурная деформация, наличие явления ограниченной ползучести с асимптотическим приближением к предельно медленной диаграмме при постоянном напряжении на каждом участке после скачкообразного увеличения напряжения в эксперименте по мягкому ступенчатому нагружению в режиме мартенситной неупругости, а также тот факт, что упругое поведение СПФ не обладает реономными свойствами.

**Глава 2** посвящена моделированию реономных свойств сплавов с памятью формы, наблюдаемых в режиме мартенситной неупругости и сверхупругости.

В разделе **2.1** рассматривается простейшая модель реономного поведения СПФ. В §2.1.1 определяется понятие предельно медленного процесса, а также вводятся определяющие соотношения, описывающие фазово-структурные деформации СПФ, которые в одномерном случае могут быть записаны в виде:

$$\dot{\varepsilon}^{phst} = k \langle \psi(\sigma, q) - \varepsilon^{phst} \rangle,$$

где  $\psi(\sigma, q) = \rho_D q \varphi(\sigma)$  — диаграмма предельно медленного процесса,  $q$  — параметр фазового состава ( $q = 1$  в полностью мартенситном состоянии),  $\rho_D$  — предельное значение интенсивности деформаций прямого превращения СПФ,  $\varphi(\sigma_i)$  — материальная функция, трактуемая как интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме поликристаллического СПФ, а угловые скобки — это оператор взятия положительной части.

В терминах полной деформации в одномерном случае для СПФ, находящемся в полностью мартенситном состоянии, определяющие соотношения данной модели записываются в виде:

$$\dot{\varepsilon}^{tot} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k \left\langle \rho_D q \varphi(\sigma) - \varepsilon^{tot} + \frac{\sigma}{E} \right\rangle, \quad (1)$$

где, помимо величин, определенных выше,  $E$  — модуль Юнга СПФ. Далее приводится доказательство того факта, что в случае монотонного нагружения, а также в случае развития деформаций под действием постоянного нагружения решения, полученные по данным определяющим соотношениям и упрощенным определяющим соотношениям без угловых скобок, совпадают. Также приводится процедура, позволяющая дать строгое определение понятию предельно медленного процесса. Завершает §2.1.1 сопоставление предложенных определяющих соотношений с классическими моделями (такими, как модель установившейся ползучести, модель Соколовского, Малверна и Пэжины, модель классической вязкоупругости, модель нелинейной вязкоупругости Ю.Н. Работнова и др.).

В §2.1.2 приводятся результаты моделирования жесткого нагружения СПФ с заданной скоростью изменения деформаций, контролируемого как по фазово-структурным, так и по полным деформациям. Объясняются недостатки предложенных в данном разделе определяющих соотношений для описания процесса жесткого нагружения с заданной скоростью изменения фазово-структурной деформации: невозможность описать процесс с постоянной скоростью роста деформаций, исходящий из нулевой точки, уменьшение предельного значения фазово-структурной деформации при росте скорости деформации, а также хрупкое разрушение материала, начиная с некоторого — не слишком большого — значения этой скорости. Показано, что в случае контроля скорости изменения полных деформаций модельные кривые качественно правильно описывают экспериментальные наблюдения.

В §2.1.3–2.1.4 приводятся результаты моделирования процесса мягкого нагружения (с постоянной скоростью изменения напряжений) и процесса релаксации напряжений. В обоих случаях показано, что модельные кривые

качественно правильно описывают динамику процессов, наблюдаемую в эксперименте.

В §2.1.5 рассматривается моделирование процесса мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости. Показано, что кривые, построенные по представленным определяющим соотношениям модели из раздела 2.1, недостаточно хорошо описывают экспериментальные наблюдения, а именно не описывают скачок неупругой деформации при скачке напряжения, а также недостаточно хорошо согласуются с характером развития деформации после скачка неупругой деформации, наблюдаемой в эксперименте. На рис. 1 точками изображены соответствующие экспериментальные данные, а линия соответствует их аппроксимации методом наименьших квадратов, построенной с использованием определяющих соотношений данной модели.

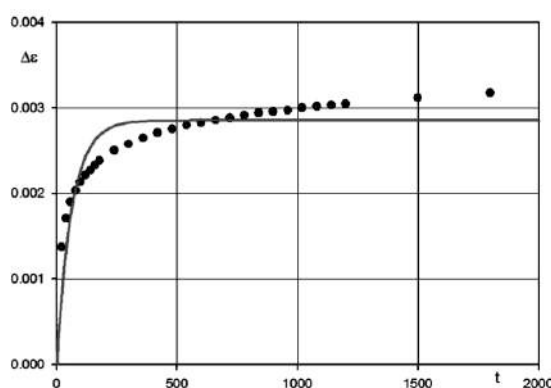


Рисунок 1

В §2.1.6 представлены результаты решения задачи моделирования процесса мягкого ступенчатого нагружения в режиме сверхупругости: показано, что решением этой задачи будет полученное в §2.1.3 решение для задачи мягкого нагружения в режиме мартенситной неупругости при замене в (1) материальной функции  $\varphi(\sigma)$  на материальную функцию

$$\varphi_1(\sigma) = \frac{1}{2} \varphi(\sigma) \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{\pi}{M_s^0 - M_f^0} \left( M_s^0 + \frac{\sigma \rho_D \varphi(\sigma)}{\Delta S} - T_0 \right) \right] \right\}.$$

Таким образом, достоинствами простейшей модели реономного поведения СПФ, рассмотренной в разделе 2.1, следует признать качественно правильное описание экспериментов по мягкому нагружению с фиксированным ростом напряжений, релаксации напряжений и жесткому нагружению, контролируемому по полным деформациям, а также простой линейный вид определяющих соотношений, которые удобно использовать для практических вычислений и решения задач устойчивости. К основным недостаткам данной модели следует отнести отсутствие скачка неупругих деформаций при скачкообразном увеличении напряжений в процессе мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости; недостаточно хорошую согласованность модельных кривых, построенных с помощью метода

наименьших квадратов (МНК) и экспериментальных данных; проблемы, возникающие при моделировании процесса жесткого нагружения, контролируемого по скоростям фазово-структурной деформации.

В разделе 2.2 рассматривается более сложная версия модели, призванная описать реономное поведение СПФ и при этом устранить недостатки модели, представленной в разделе 2.1.

В §2.2.1 формулируется определяющее соотношение данной модели для фазово-структурной компоненты деформации в виде:

$$\dot{\varepsilon}^{phst} = k \left\langle \frac{\psi_1(q, \sigma) - \varepsilon^{phst}}{\varepsilon^{phst} - \psi_2(q, \sigma)} \right\rangle,$$

где  $\psi_1(q, \sigma) = q\rho_{D1}\varphi_1(\sigma)$ ,  $\psi_2(q, \sigma) = q\rho_{D2}\varphi_2(\sigma)$  — функционалы, определяющие классы предельно медленных и предельно быстрых процессов соответственно, которое для простоты дальнейшего анализа заменяется аналогичным соотношением без угловых скобок:

$$\dot{\varepsilon}^{phst} = k \left[ \frac{\psi_1(q, \sigma) - \varepsilon^{phst}}{\varepsilon^{phst} - \psi_2(q, \sigma)} \right] \quad (2)$$

с дополнительной проверкой того, что полученные решения удовлетворяют неравенству:

$$\psi_2(q, \sigma) \leq \varepsilon^{phst} \leq \psi_1(q, \sigma).$$

В терминах полной деформации определяющие соотношения (2) переписываются в виде:

$$\dot{\varepsilon}^{tot} = k \left[ \frac{\psi_1(q, \sigma) - \varepsilon^{tot} + \sigma/E}{\varepsilon^{tot} - \sigma/E - \psi_2(q, \sigma)} \right] + \frac{\dot{\sigma}}{E}.$$

§2.2.2 посвящен анализу решения задач моделирования реономного поведения СПФ, подчиняющегося данным определяющим соотношениям, при нулевых начальных условиях. В данном параграфе рассматривается процесс, начинающийся из нулевой точки, фазово-структурная деформация которого задается определяющим соотношением:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{f_1(\tau) - \varepsilon}{\varepsilon - f_2(\tau)}.$$

Для данного вида уравнения предложена замена переменных, при которой удастся доказать существование его решения, исходящего из нулевой точки. При этом доказано, что у исходной системы есть как минимум два решения, исходящих из нулевой точки (одно из которых не имеет физического смысла). Далее, предполагая возможность разложения функций  $f_i(\tau)$  в ряд Тейлора, для случая разных порядков старшего члена этого разложения предложена процедура, позволяющая выбирать начальные условия приближенной задачи в некоторой точке  $\tau$  в малой окрестности нуля так,

чтобы полученное решение приближенной задачи было близко к исходящему из нулевой точки решению исходной задачи.

Так, если старший член разложения  $f_i(\tau)$  имеет первый порядок, то предложено выбирать начальные условия в виде:  $\varepsilon(\tau_1) = \beta\tau_1$  ( $f_1(\tau) = k_1\tau + o(\tau)$ ,  $f_2(\tau) = k_2\tau + o(\tau)$ ), где:

$$\beta = \frac{(k_2 - 1) + \sqrt{(k_2 - 1)^2 + 4k_1}}{2}.$$

В случае:

$$f_1(\tau) = k_n\tau^n + k_{n+1}\tau^{n+1} + \dots$$

$$f_2(\tau) = p_n\tau^n + p_{n+1}\tau^{n+1} + \dots$$

и при  $n \geq 1$  начальные условия предложено выбирать в виде:  $\varepsilon(\tau) = k_n(\tau)^n$ , где  $k_n$  — константа при старшем члене функции  $f_1(\tau)$ .

В данном параграфе также приводятся фазовые портреты, иллюстрирующие факт устойчивости реального решения, исходящего из нулевой точки: любое решение, исходящее из произвольной точки  $\varepsilon(\tau) = c > 0$ , асимптотически стремится к реальному решению, исходящему из нулевой точки.

В §2.2.3–2.2.5 приводятся результаты моделирования процессов мягкого нагружения с фиксированной скоростью роста напряжений, жесткого нагружения с фиксированной скоростью роста деформаций, а также релаксации напряжений в режиме мартенситной неупругости. Во всех этих параграфах показано, что предложенные определяющие соотношения качественно верно описывают экспериментальные наблюдения (в частности, в случае моделирования процесса жесткого нагружения, задаваемого фиксированной скоростью роста фазово-структурных деформаций, определяющие соотношения модели 2.2 лишены недостатков определяющих соотношений модели из раздела 2.1, подробно описанных в §2.1.2).

§2.2.6 посвящен моделированию мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости. В данном параграфе показано, что при задании мгновенных скачков неупругой деформации, следующих за скачками напряжения от уровня  $\sigma - \Delta\sigma$  до уровня  $\sigma$  (где  $\varepsilon_0$  — значение фазово-структурной деформации перед скачком напряжений), в вытекающем из модели виде:

$$\Delta\varepsilon = 0 \quad \text{при} \quad \chi_2(\sigma) \leq \varepsilon_0$$

$$\Delta\varepsilon = \chi_2(\sigma) - \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad \chi_2(\sigma) \geq \varepsilon_0$$

определяющие соотношения демонстрируют нелинейную (корневую) асимптотику роста неупругих деформаций после скачка, что обеспечивает

хорошее согласование экспериментальных и модельных кривых (см. рис. 2-3, на которых демонстрируется сравнение модельных кривых, построенных по определяющим соотношениям модели раздела 2.1 (кривая с индексом 1) и по определяющим соотношениям модели раздела 2.2 (кривая с индексом 2) при скачках напряжений с 275 МПа до 325 МПа и с 325 МПа до 450 МПа соответственно).

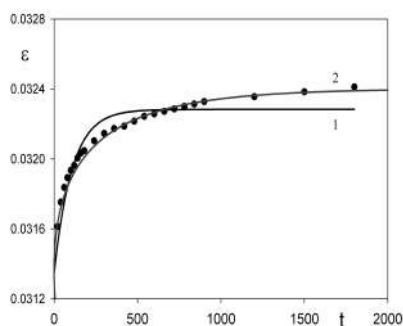


Рисунок 2

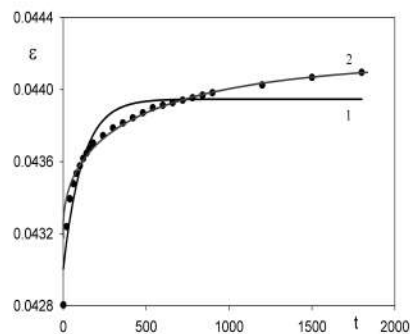


Рисунок 3

Таким образом, достоинствами модели, представленной в разделе 2.2, следует признать качественно правильное описание процессов мягкого нагружения, жесткого нагружения, контролируемого по скорости фазово-структурной компоненты деформации, релаксации напряжений, а также способность описать скачки неупругой деформации и улучшенное по сравнению с моделью, представленной в разделе 2.1, согласование модельных и экспериментальных данных для процессов мягкого ступенчатого нагружения СПФ в режиме мартенситной неупругости после скачка неупругой деформации. Достоинством данной модели также является тот факт, что, помимо естественного ограничения в виде  $\psi_2(q, \sigma) \leq \psi_1(q, \sigma)$ , определяющие соотношения модели не накладывают дополнительных ограничений на вид функций, задающих предельно медленные и предельно быстрые процессы. Недостатками данной модели следует признать возникающие проблемы математического характера при решении задачи нагружения при нулевых начальных условиях, а также нелинейный вид определяющих соотношений (которые сложно использовать для решения задач устойчивости).

В разделе 2.3 представлена вязкопластическая линейная модель, имеющая достаточно простой вид определяющих соотношений, при этом способная описать скачки неупругой деформации в процессе мягкого нагружения в режиме мартенситной неупругости. Для данной модели в §2.3.1 постулируется:  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^f + \varepsilon^r$ , где  $\varepsilon, \varepsilon^e, \varepsilon^f, \varepsilon^r$  — полные, упругие, мгновенные неупругие и реономные деформации соответственно. Определяющие соотношения данной модели для описания СПФ в рамках активного процесса в режиме мартенситной неупругости принимают вид:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k \left\langle \psi^s(\sigma) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle, \quad (3)$$

а скачки неупругой деформации определяются с помощью соотношения:

$$\Delta \varepsilon^{ne} = \int_{\sigma}^{\sigma + \Delta \sigma} \frac{d\sigma}{H(\sigma)} = \psi^f(\sigma + \Delta \sigma) - \psi^f(\sigma).$$

В упругой области для мгновенных процессов определяющее соотношение (3) переписывается в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k \left\langle \psi^s(\sigma_{\max}) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle.$$

В представленных определяющих соотношениях символ угловых скобок, как и ранее, обозначает оператора взятия положительной части. Далее в параграфе доказывается, что определяющие соотношения с угловыми скобками и без угловых скобок в процессах активного нагружения в общем случае эквивалентны тогда и только тогда, когда при любом значении напряжения выполняется условие:

$$\psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma) \geq 0. \quad (4)$$

Следует подчеркнуть, что данное условие является более строгим по отношению к условию:

$$\psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma) \geq 0. \quad (5)$$

В §2.3.2 доказано, что в случае равенства  $\psi^s(\sigma), \psi^f(\sigma)$  функциям Вейбулла

в виде  $\psi^s(\sigma) = \rho_{D1} \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^\alpha \right) \right), \psi^f(\sigma) = \rho_{D2} \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{\sigma}{\sigma_2} \right)^\alpha \right) \right)$  и при  $\beta = \rho_{D2} / \rho_{D1},$

$\gamma = \sigma_1 / \sigma_2$  для выполнения условия (4) необходимо и достаточно совместное выполнение неравенств  $\beta \leq 1, \beta \gamma^\alpha \leq 1$ . В этом же параграфе на примере процесса мягкого нагружения с заданной скоростью изменения напряжений показано, что в случае нарушения данных условий определяющие соотношения без угловых скобок и определяющие соотношения с угловыми скобками дают результаты, не согласующиеся с экспериментальными наблюдениями. Поэтому для целей моделирования реономного поведения СПФ рекомендуется использовать представленные определяющие соотношения только с коэффициентами, для которых при любом уровне напряжений выполняется условие (4).

В §2.3.2–1.3.4 показано, что при выполнении данного ограничения предложенная модель качественно правильно описывает наблюдаемое в экспериментах реономное поведение СПФ в процессах мягкого нагружения с фиксированной скоростью роста напряжений, жесткое нагружение и разгрузку после монотонного нагружения, при этом модельные кривые, полученные с



использованием определяющих соотношений как с угловыми скобками, так и без них, совпадают.

В §2.3.5 рассмотрена задача моделирования релаксации напряжений. В данном параграфе также было показано, что для корректного вида модельных кривых для определяющих соотношений данной модели необходимо ввести дополнительное требование на вид функций  $\psi^s(\sigma), \psi^f(\sigma)$ :

$$\psi^s(\sigma_0) - \psi^f(\sigma_0) \leq \frac{\sigma_0}{E}, \quad (6)$$

что не противоречит экспериментальным наблюдениям. При выполнении данного условия модельные кривые демонстрируют качественно правильное поведение, согласующееся с поведением, которое наблюдается в эксперименте.

В разделе 2.4 была предпринята попытка обобщить определяющие соотношения модели, представленной в разделе 2.3, постулируя наличие степенной зависимости с показателем  $n \geq 1$  для скорости изменения реономной деформации и для процессов активного нагружения. При этом определяющие соотношения в активном процессе переписываются в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{H(\sigma)} + k \left( \left\langle \psi^s(\sigma) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle \right)^n. \quad (7)$$

Аналогично представленному ранее, определяющие соотношения (7) в упругой области для мгновенных процессов переписываются в виде:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + k \left( \left\langle \psi^s(\sigma_{\max}) - \varepsilon + \frac{\sigma}{E} \right\rangle \right)^n.$$

В рамках §2.4.1 также было доказано, что для равенства решения с и без использования угловых скобок при активном процессе нагружения необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (4) (забегая вперед: в §2.4.3 также показано, что в случае нарушения этого условия как определяющие соотношения с наличием угловых скобок, так и определяющие соотношения без скобок дают результаты моделирования, противоречащие экспериментальным наблюдениям в режиме мягкого нагружения с фиксированной скоростью изменения деформаций, поэтому рекомендуется использовать только такие коэффициенты функций  $\psi^s(\sigma), \psi^f(\sigma)$ , при которых выполняется условие (4)).

В §2.4.2 для задачи моделирования процесса мягкого ступенчатого нагружения в режиме мартенситной неупругости была предложена процедура идентификации параметров модели (калибровки) методом МНК, а также получение начальных данных для процедуры идентификации.

На рис. 4 приведены результаты моделирования зависимости полной деформации  $\varepsilon$  от времени  $t$  [с] с использованием идентифицированных

параметров (где крестообразными символами обозначены экспериментальные точки, сплошная линия соответствует модельной кривой, построенной с использованием определяющих соотношений с параметром  $n = 3$ , а пунктирная линия — с параметром  $n = 1$ , то есть по определяющим соотношениям, представленным в разделе 2.3).

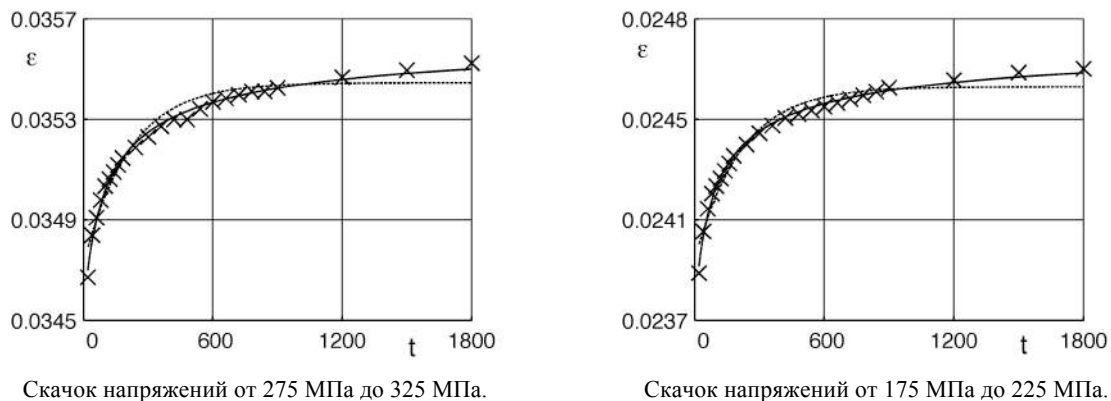


Рисунок 4

Следует отметить, что значение параметра  $n = 3$  предложено как результат поиска минимального целочисленного значения параметра  $n$ , при котором наблюдается удовлетворительное согласование модельных и экспериментальных данных.

Таким образом, было показано, что, несмотря на возможность описания скачков неупругой деформации, после скачков напряжения в модели, представленной в разделе 2.3 (определяющие соотношения которой, сохраняя относительную простоту и линейность, обеспечивают некоторое улучшение согласованности модельных и экспериментальных данных по сравнению с определяющими соотношениями раздела 2.1), определяющие соотношения данной модели недостаточно хорошо описывают развитие реономной деформации, наблюдаемое в эксперименте. При этом, вводя степенной параметр  $n$  и жертвуя линейностью вида определяющих соотношений и простотой модели, при  $n = 3$  удастся построить модельные кривые, которые достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Необходимо также отметить, что для полученных наборов параметров выполнены как условие (4), так и условие (6).

В §2.4.3–1.4.6 приведены результаты моделирования и сопоставления модельных кривых при  $n = 1$  и  $n = 3$  для процессов мягкого ступенчатого нагружения с фиксированной скоростью изменения напряжений, релаксации напряжений и разгрузки после монотонного нагружения. Во всех этих параграфах показано качественно правильное согласование модельных кривых с экспериментальными наблюдениями.

В §2.4.6 приведен общий вид зависимости полных деформаций от напряжений вне границ активного нагружения при  $n = 1$  и  $n > 1$ . Для данного вида процессов было доказано, что в рамках представленных выше ограничений решения уравнений с и без использования оператора угловых скобок совпадают. Таким образом, можно сделать вывод, что если процесс можно разбить на подпроцессы, каждый из которых является активным и монотонным, задаваемым гладкой локально ограниченной функцией нагружения, или же не является активным ни в один момент времени, то при выполнении  $\psi^s(\sigma) - \psi^f(\sigma) \geq 0$  решения, полученные с использованием определяющих соотношений модели 1.4 при  $n \geq 1$  с угловыми скобками и без них, совпадают.

Таким образом, достоинствами моделей, представленных в разделах 2.3 и 2.4, следует признать качественно правильное описание процессов релаксации напряжений, мягкого нагружения с фиксированной скоростью изменения напряжений, жесткого нагружения с фиксированной скоростью изменения деформаций при ограничениях на функции предельно медленного и быстрого процессов в виде (4) и (6). Необходимо отметить, что при всех  $n \geq 1$  определяющие соотношения позволяют описать скачки неупругих деформаций после скачкообразного увеличения напряжений в процессе мягкого ступенчатого нагружения. Достоинствами модели при  $n = 1$  является более простой вид определяющих соотношений. При  $n = 3$  достоинством определяющих соотношений также будет возможность правильного описания наблюдаемой в эксперименте характера роста реономной деформации в процессе мягкого ступенчатого нагружения. К недостаткам всего представленного класса моделей при  $n \geq 1$  следует отнести необходимость введения более строгих ограничений вида (4) (относительно базовых ограничений вида (5)), что потенциально сужает область применимости предложенного класса моделей (в отличие от модели, рассмотренной в пункте 1.2). При  $n = 1$  недостатком модели является неудовлетворительная согласованность модельных и экспериментальных данных развития реономной деформации после скачка неупругой компоненты деформации в процессе мягкого ступенчатого нагружения. При  $n = 3$  к недостаткам следует также отнести потерю простого вида модели, что существенно усложняет использование определяющих соотношений данной модели для решения прикладных задач (например, для решения задач устойчивости).

**Глава 3** данной диссертационной работы посвящена исследованию влияния реономных свойств СПФ на устойчивость простейших тонкостенных элементов, содержащих СПФ.

В разделе **3.1** рассматривается задача устойчивости жесткого стержня длины  $L$ , к верхнему концу которого приложена действующая вниз и неизменная по направлению сила  $P$ , а нижний конец скреплен с неподвижной опорой вязкопластическим шарниром, наделенным свойствами реономного поведения СПФ, которые подчиняются определяющему соотношению (аналогичному определяющим соотношениям, представленным в разделе 2.1):

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{M}}{D} + k \left\langle \rho_D \psi(M) - \varphi + \frac{M}{D} \right\rangle, \quad (8)$$

где  $D$  — аналог модуля Юнга,  $\varphi$  — угол поворота, а  $M$  — действующий в шарнире момент. Рассматривается случай малых отклонений от тривиального положения равновесия  $\varphi = 0$ .

В §3.1.1 в рамках квазистатической постановки при постоянном уровне нагружения ( $M = PL \sin \varphi, \dot{M} = PL \cos \varphi \dot{\varphi}$ ) и с учетом малости угла поворота приводится линеаризованная по переменной  $\varphi$  форма уравнения (8) в виде:

$$\dot{\varphi} = \left(1 - \frac{P}{P_E}\right)^{-1} \left\langle \rho_D \psi(PL\varphi) - \left(1 - \frac{P}{P_E}\right) \varphi \right\rangle,$$

где  $P_E = \frac{D}{L}$  — критическая Эйлера нагрузка, которая задает границу мгновенной неустойчивости.

В §3.1.2 доказано, что в случае функции  $\psi$ , соответствующей экспоненциальной функции распределения, критической силой потери устойчивости будет:

$$P_* = \frac{D_*}{L}, \quad (9)$$

где  $D_* = \frac{D}{1 + D\rho_D / M_0}$  — касательный модуль к кривой предельно медленного процесса в начальной точке.

В §3.1.3 рассматривается задача устойчивости стержня на шарнире в динамической постановке (которая из-за реономных свойств шарнира является существенно неконсервативной) в случае функции  $\psi$ , соответствующей экспоненциальной функции распределения. Для ее решения в аналитическом виде определяющее соотношение с угловыми скобками заменяется на его аналог без угловых скобок, после чего к результирующей системе применяется критерий устойчивости Гурвица. Данный метод позволяет доказать, что границей устойчивости будет являться тот же, что и для задачи в квазистатической постановке при постоянном нагружении, уровень критической силы (9). После этого в параграфе приводятся результаты

численного анализа, подтверждающего, что данная сила является критической и для определяющих соотношений с угловыми скобками.

В §3.1.4 приводится решение задачи в квазистатической постановке при постоянном уровне нагружения для функции  $\psi$ , соответствующей функции распределения Вейбулла с  $\alpha > 1$ . Так как в нулевой точке касательный модуль кривой в осях полная деформации — напряжение равен упругому модулю, то в рамках данной задачи критическим уровнем нагружения является Эйлера нагрузка. В параграфе поясняется, что причиной этому является то, что в рассматриваемой простейшей задаче отсутствует тривиальный процесс (имеется лишь невозмущенная форма равновесия).

В §3.1.5 проводится анализ влияния скорости нагружения на уровень устойчивости, результатом которого является следующий вывод: скорость нагружения не влияет на величину критической силы. Этот вывод подтверждается экспериментальными данными.

Таким образом, из анализа задачи устойчивости жесткого стержня на вязкопластическом шарнире, проведенного в разделе 3.1, можно сделать следующие выводы:

1. Для рассматриваемой реономной модели имеет смысл постановка задачи устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале.
2. Критические нагрузки, полученные при решении данной задачи в квазистатической и динамической постановках, совпадают.
3. Критическая нагрузка потери устойчивости может быть найдена по зависимости типа формулы Эйлера, в которой упругий модуль следует заменить на касательный, вычисленный по диаграмме мартенситной неупругости в случае предельно медленного нагружения.
4. Скорость нагружения не влияет на значение критической нагрузки потери устойчивости.

В разделе 3.2 рассматривается задача потери устойчивости стержня из СПФ при монотонном нагружении продольным усилием в режиме мартенситной неупругости в рамках определяющих соотношений модели, представленной в разделе 2.1.

В §3.2.1 приводится обоснование корректности постановки задачи в рамках концепции «повсеместного дополнительного структурного перехода», для которой предполагается, что все сечение стержня испытывает догрузку. Такой подход справедлив, так как даже в задачах устойчивости стержня без учета реономных свойств СПФ было доказано, что положение границы между зонами догрузки и разгрузки испытывает конечное изменение при малых возмущениях внешней силы. Поэтому решение, полученное в рамках данной

концепции, задает минимально возможное значение критической силы. При этом, так как все сечение испытывает активную деформацию, угловые скобки в определяющих соотношениях модели, в силу доказанного в разделе 2.1, можно опустить без потери смысла.

В §3.2.2 приводится вывод разрешающего уравнения, анализ устойчивости для которого, проведенный в §3.2.3, показывает, что критический уровень потери устойчивости равен:

$$P^* = \frac{E'(\sigma^*)\pi^2 J}{L^2},$$

где  $\frac{1}{E'(\sigma^*)} = \frac{1}{E} + \rho_D \psi'(\sigma^*)$ ,  $L$  — длина стержня,  $J$  — момент инерции, то есть

аналогичен первой Эйлеровой критической силе  $P_1^e = \frac{EJ\pi^2}{L^2}$ , где вместо упругого модуля  $E$  используется касательный модуль, определяемый по диаграмме мартенситной неупругости предельно медленного процесса в точке, соответствующей потере устойчивости. Исходя из этого соотношения, уравнение критической длины стержня, площадь поперечного сечения которого равна  $F$  и который должен выдержать уровень напряжений  $\sigma = P/F$ , задается в виде:

$$L^* = \pi \sqrt{\frac{EJ}{F\sigma[1 + \rho_D E\psi'(\sigma)]}}.$$

В §3.2.4 приводится исследование данного соотношения для нахождения критической длины. В этом параграфе показано, что для некоторых уровней нагружений и при малом изменении величины напряжения критическая длина скачкообразно уменьшается при переходе через некоторое критическое значение  $L_{\min}$ .

Таким образом, в разделе 3.2 в рамках модели реономного поведения СПФ, представленной в разделе 2.1, решена задача об устойчивости деформируемого стержня из СПФ, нагружаемого в режиме мартенситной неупругости. Показано, что критическое значение нагрузки может быть найдено по формуле Эйлера с заменой модуля Юнга на касательный модуль, вычисленный по диаграмме предельно медленного нагружения СПФ в точке потери устойчивости.

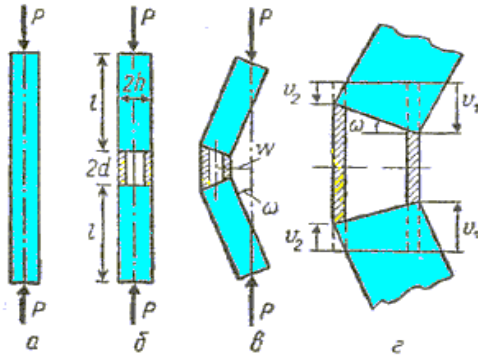


Рисунок 5

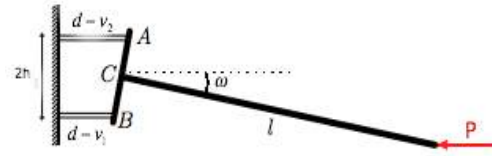


Рисунок 6

В разделе 3.3 диссертационной работы рассмотрена задача устойчивости стойки Шенли, деформируемые стержни которой выполнены из СПФ, в случае малых отклонений от тривиального процесса с учетом реономных свойств в рамках модели, представленной в разделе 2.4 (при  $n \geq 1$ ).

В §3.3.1 приведены уравнения равновесия и совместности для решения задачи устойчивости стойки Шенли в квазистатической постановке (схема рассматриваемой конструкции изображена на рис. 5):

$$\begin{cases} \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2 = 2\sigma_0 u, \\ \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 = 0, \\ \Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2 = 2\eta u. \end{cases}$$

Также в этом параграфе приводится линеаризованная в окрестности тривиального решения система уравнений движения и совместности для решения задачи устойчивости в динамической постановке (схема рассматриваемой конструкции изображена на рис. 6):

$$\begin{cases} \Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2 = 2\sigma_0 u - 2\rho\ddot{u}, \\ \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 = 0, \\ \Delta\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon_2 = 2\eta u. \end{cases}$$

В этих уравнениях символ  $\Delta$  обозначает разность значений напряжения и деформации в возмущенном и тривиальном процессе,  $m$  — масса недеформируемого стержня длины  $l$ ,  $F$  — площадь поперечного сечения каждого деформируемого стержня,  $u = w/h = l\omega/h$  — переменная, характеризующая отклонение от тривиального процесса,  $\eta = h^2/dl$ ,  $2\rho = ml/12F$ .

В §3.3.2 приведено решение задачи устойчивости в квазистатической постановке при постоянном уровне нагружения с использованием упрощенной версии определяющих соотношений, представленных в разделе 2.4, а именно таких, при которых разгрузка происходит не упруго, а так же с реономными свойствами (что аналогично концепции «повсеместного дополнительного структурного перехода», в рамках которой определяется нижняя граница значения критической силы). В данной постановке доказано, что уровень

критического напряжения как для модели с  $n = 1$ , так и для модели с  $n > 1$ , задается в неявном виде с помощью соотношения:

$$\sigma_{\text{lim}} = \frac{Eh^2 / dl}{\psi^{s'}(\sigma_{\text{lim}})E + 1}. \quad (10)$$

То есть, как и в случае исследования на устойчивость задачи деформируемого стержня из СПФ, критическая нагрузка потери устойчивости может быть найдена по зависимости типа формулы Эйлера, в которой упругий модуль следует заменить на касательный модуль, вычисленный по диаграмме мартенситной непуругости предельно медленного нагружения в момент потери устойчивости (независимо от того, что теперь используется модель, учитывающая предельно быстрые процессы неупругого деформирования).

В случае достаточно медленного малого возмущения внешней нагрузки, рассмотренного в §3.3.3, как для случая  $n = 1$ , так и для случая  $n > 1$ , получен тот же уровень критического напряжения. В §3.3.4 рассматривается задача устойчивости стойки Шенли в динамической постановке Ляпунова при постоянном уровне внешнего нагружения. Доказано, что как для  $n = 1$  (с помощью критерия Гурвица), так и для  $n > 1$  (с помощью построения функций Ляпунова и Четаева), границей устойчивости будет являться тот же уровень напряжения. То есть для неконсервативной среды, коей является СПФ с учетом реономных свойств, корректна постановка задачи устойчивости на бесконечном временном интервале. При этом критическое напряжение потери устойчивости в квазистатической постановке совпадает с критическим напряжением в динамической постановке.

Далее, в §3.3.5 снова рассматривается задача устойчивости в квазистатической постановке при постоянном уровне нагружения, но в данном случае уже в рамках определяющих соотношений, представленных в разделе 2.4 при  $n \geq 1$ , с учетом упругой разгрузки. Исходя из этого, доказано, что в данной постановке один из стержней будет разгружаться, а его неупругая компонента деформации в отличном от тривиального процессе будет равна неупругой компоненте деформации в тривиальном процессе. В данном параграфе также доказывается, что с учетом упругой разгрузки критический уровень напряжений задается с помощью соотношения:

$$\sigma_{\text{lim},E} = \frac{Eh^2 / dl}{0.5\psi^{s'}(\sigma_{\text{lim},E})E + 1}. \quad (11)$$

То есть теперь критическая нагрузка потери устойчивости может быть найдена по зависимости типа формулы Эйлера, в которой упругий модуль следует заменить на среднее гармоническое между упругим и касательным



модулем, вычисленным по диаграмме мартенситной неупругости предельно медленного нагружения в точке потери устойчивости. Это решение соответствует концепции «фиксированной нагрузки» в применении к задачам устойчивости СПФ без учета их реономных свойств. Стоит отметить, что данный критический уровень получен в рамках классического критерия Эйлера в виде границы уровня напряжений, начиная с которой возможна бесконечно близкая нетривиальная форма равновесия.

В §3.3.6 приводится анализ задачи устойчивости с учетом упругой разгрузки в случае достаточно медленной малой вариации уровня внешнего отклонения. Как и предполагалось, было доказано, что в таком случае граница устойчивости в рамках классического критерия Ляпунова значительно снижается до уровня (10). При этом показано, что при  $\sigma_{lim} < \sigma_0 < \sigma_{lim,E}$  второй стержень может активно нагружаться только в том случае, если отклонения не превышают значения  $u = \delta\tilde{\sigma}_0 / \sigma_0$ , где  $\delta\tilde{\sigma}_0$  — наибольшее допустимое значение возмущения внешнего напряжения, после чего второй стержень начнет разгружаться, и при  $\sigma_0 < \sigma_{lim,E}$  нарастание отклонений прекратится.

В §3.3.7 приводится численный анализ задачи устойчивости в динамической постановке с учетом зон активного нагружения и разгрузки каждого из стержней. Этот анализ подтверждает корректность постановки динамической задачи устойчивости на бесконечном временном интервале при постоянном уровне внешнего нагружения, а также величину критического напряжения (11), полученную в задаче устойчивости в квазистатической постановке.

Завершает раздел 3.3 §3.3.8, в рамках которого проводится анализ влияния учета реономных свойств СПФ на величину критического напряжения потери устойчивости.

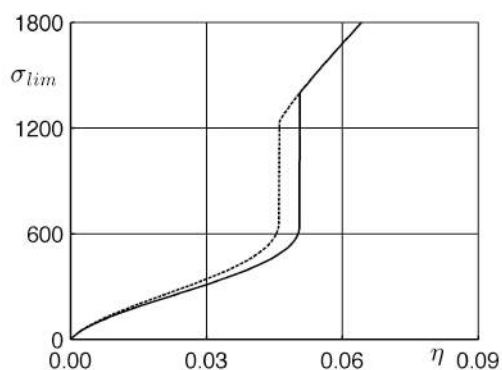


Рисунок 7

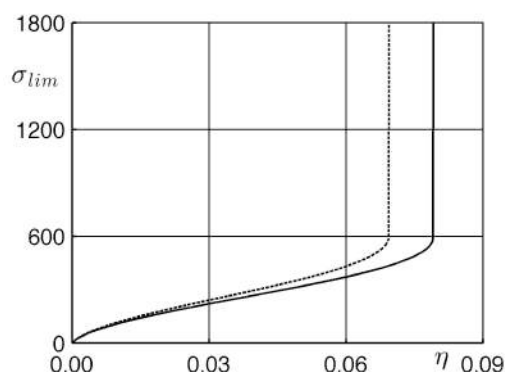


Рисунок 8

На рис. 7-8 демонстрируется зависимость уровня критического напряжения от безразмерного параметра  $\eta = h^2 / dl$  (рис. 7 построен по определяющему соотношению с учетом упругой разгрузки второго стержня,

рис. 8 — без учета). Сплошной кривой на приведенных диаграммах обозначена кривая реального уровня критического напряжения, а пунктирной линией — уровень напряжений, полученный из формул для реальных критических уровней, но с заменой касательного модуля диаграммы мартенситной неупругости в предельно медленном процессе на касательный модуль диаграммы в предельно быстром процессе. Можно видеть, что если для некоторых уровней  $\eta = h^2 / dl$  не учитывать реономные свойства, то это может приводить к кратному завышению уровня критического напряжения.

Таким образом, из исследований, проведенных в рамках раздела **3.3**, можем сделать ряд выводов:

1. Для всех рассматриваемых реономных моделей имеет смысл постановка задачи устойчивости по начальным данным на бесконечном временном интервале.
2. Критическая нагрузка потери устойчивости может быть найдена по зависимости типа формулы Эйлера, в которой упругий модуль следует заменить на касательный модуль, вычисленный по диаграмме мартенситной неупругости предельно медленного нагружения (в случае использования модели без упругой разгрузки или в рамках концепции «варьируемой нагрузки»), или на среднее гармоническое между касательным модулем, вычисленным по диаграмме мартенситной неупругости предельно медленного нагружения, и упругим модулем (в рамках концепции «фиксированной нагрузки»).
3. Реономные свойства СПФ существенно влияют на устойчивость: уровень критического напряжения, вычисленный не по кривой предельно медленного процесса, может кратно отличаться от реальной величины критической нагрузки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

- Предложен ряд моделей, призванных описать реономное поведение сплавов с памятью формы, наблюдаемое в эксперименте;
- Предложена процедура идентификации параметров модели;
- Показано хорошее качественное согласование модельных данных и экспериментальных наблюдений;
- Установлено, что для модельных систем, содержащих элементы из СПФ, с учетом реономных свойств имеет смысл постановка задачи устойчивости по Ляпунову на бесконечном временном интервале;
- Установлено, что квазистатическая (Эйлера) и динамическая (Ляпунова) постановки задачи устойчивости в рамках разных моделей при консервативных нагрузках дают одинаковое значение критической силы;
- Установлено, что критическая сила потери устойчивости может быть определена с помощью касательного модуля к кривой мартенситной неупругости предельно медленного процесса в точке потери устойчивости. Приведена точная формула вычисления этой критической силы;
- Доказано, что реономные свойства СПФ могут оказывать существенное влияние на устойчивость модельных систем, содержащих СПФ (в частности, на величину критической нагрузки потери устойчивости). Показано, что при определении критического уровня нагрузки по кривой, отличной от кривой предельно медленного процесса, возможны существенные ошибки.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

### *Статьи в журналах из списка ВАК РФ:*

1. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Моделирование реономных свойств сплавов с памятью формы. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 2. С. 255–267.
2. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Модель реономного поведения сплавов с памятью формы, использующая гипотезы о склерономности предельно медленных и предельно быстрых процессов нагружения. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 4. С. 508–522.
3. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Устойчивость жесткого стержня на вязкопластическом шарнире. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т. 18. № 3. С. 384–399.
4. Мовчан А.А., Климов К.Ю., Сильченко Т.Л. Влияние реономных свойств сплавов с памятью формы на устойчивость стержня из этих материалов. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2013. Т. 19. № 2. С. 262–277.
5. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Аналог вязкопластических определяющих соотношений для описания реономных свойств сплавов с памятью формы. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 1. С. 159–176.
6. Климов К.Ю. Вязкопластическая модель реономного поведения сплавов с памятью формы со степенной зависимостью для скорости изменения реономной деформации. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 3. С. 378–401.

### *Прочие публикации по тематике диссертационной работы:*

7. A.A. Movchan, K.Yu. Klimov. Simulation of rheonomic properties of shape memory alloys. // Composites: Mechanics, Computations, Applications, An International Journal. 2011. 2(3). P. 171–185
8. Мовчан А.А., Сильченко Т.Л., Климов К.Ю., Казарина С.А. Сплавы с памятью формы: реономные свойства и устойчивость. // Сборник трудов Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Х. Арутюняна. 08–12 октября 2012 г., Цахкадзор (Армения). С. 60–64.
9. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Две модели реономного поведения сплавов с памятью формы. // Тезисы докладов Всероссийской конференции

- «Механика наноструктурированных материалов и систем». ИПРИМ РАН. 2011. С. 48–49.
10. Мовчан А.А., Климов К.Ю., Сильченко Т.Л. Влияние реономных свойств сплавов с памятью формы на устойчивость. // Тезисы докладов Международной конференции «Современные проблемы механики», посвященной 100-летию Л.А. Галина. Москва. 20-21 сентября 2012 г. С. 56–57.
  11. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Учет мгновенных неупругих деформаций при описании реономных свойств сплавов с памятью формы. // II Всероссийская научная конференция «Механика наноструктурированных материалов и систем». Москва, ИПРИМ РАН 2013. С. 46-47.
  12. Мовчан А.А., Климов К.Ю. Реономные свойства сплавов с памятью формы и их влияние на устойчивость элементов из этих материалов. // Тезисы докладов конференции «Ломоносовские чтения». Секция механики. Апрель 2013. Издательство Московского Университета, 2013 г. С. 72.
  13. Мовчан А.А., Климов К.Ю., Казарина С.А., Сильченко А.Л. Моделирование реономных свойств сплавов с памятью формы. // Тезисы докладов конференции «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел — научное наследие Ю.Н. Работнова». 24–26 февраля 2014 г., ИМАШ РАН. Москва, 2014. С.69– 70.
  14. Климов К.Ю. Моделирование реономного поведения сплавов с памятью формы. // «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник материалов Всероссийской научной конференции. Москва, 15–17 декабря 2015 г. — М.: ИПРИМ РАН, 2015 г. С. 172–173.