

УТВЕРЖДАЮ

Декан
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
д.ф.-м.н., член-корр. РАН А.И.Шафаревич

«__» _____ 202__ г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**Кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова»**

Кандидатская диссертация Грозновой Анастасии Юрьевны на тему «Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств» **выполнена** на кафедре общей топологии и геометрии механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

В период подготовки кандидатской диссертации Грознова Анастасия Юрьевна обучалась в очной аспирантуре механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова на кафедре общей топологии и геометрии по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология»).

В 2018 году соискатель **окончила** ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет, по кафедре дифференциальной геометрии и приложений, специальность 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика». С 01.10.2018 по 30.09.2022 года обучалась в очной аспирантуре ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», механико-математический факультет. С 24 июня 2020 года по кафедре общей топологии и геометрии (приказ по МГУ №2037АС «Об изменении направления обучения» от 17 августа 2020 года).

Сдача кандидатских экзаменов на оценку «отлично» подтверждена **справкой** №_____, выданной «__» _____ 202__ г. отделом аспирантуры отделения математики механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, Сипачёва Ольга Викторовна, профессор кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Присутствовали: заведующий кафедрой д.ф.-м.н., профессор Садовничий Ю.В., профессора: Комбаров А.П., Богатый С.А., Илиадис С.Д., Сипачёва О.В., Филиппов В.В., доценты: Карпов А.Н., Якивчик А.Н., Фролкина О.Д., Резниченко Е.А., в.н.с. Мычка Е.Ю., ассистенты: Славина Н.С., Шавгулидзе Н.Е., а также соискатель Грознова Анастасия Юрьевна.

Повестка дня:

Обсуждение диссертационной работы Грозновой Анастасии Юрьевны «Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология»).

Слушали: доклад диссертанта.

Представленная работа является исследованием в области теории ультрафильтров, свойств типа экстремальной несвязности и однородности топологических пространств.

Цель работы – ввести и исследовать новые классы $\mathcal{R}_1$ -, $\mathcal{R}_2$ - и $\mathcal{R}_3$ -пространств, содержащие важные классы экстремально несвязных и F -пространств и имеющие существенные преимущества перед ними; в частности,

- показать, что эти классы содержатся друг в друге и находятся строго между классами F - и $\beta\omega$ -пространств;
- охарактеризовать эти классы в терминах колец и полуколец непрерывных функций;
- исследовать однородность пространств из введённых классов, их произведений и подпространств и с этой целью
- изучить порядки на классе ультрафильтров, исследовать дискретные ультрафильтры на ω , их связь с другими типами ультрафильтров и алгебраические операции на множестве дискретных ультрафильтров.

Актуальность темы.

Новые классы $\mathcal{R}_1$ -, $\mathcal{R}_2$ - и $\mathcal{R}_3$ -пространств являются естественными обобщениями классов экстремально несвязных пространств и F -пространств, которые играют чрезвычайно важную роль в функциональном анализе и теоретико-множественной топологии; в частности, им посвящена значительная часть классической книги Гиллмана и Джерисона «Кольца непрерывных функций». К тому же они обладают рядом преимуществ перед F -пространствами; например, свойство быть $\mathcal{R}_i$ -пространством для $i = 1, 2, 3$ наследуется любыми подпространствами, в отличие от экстремально несвязных пространств, которые наследуются только счётными подпространствами; кроме того, пространства из рассматриваемых классов полностью определяются их счётными подпространствами, что очень удобно.

Таким образом, задача исследования новых классов пространств является актуальной, представляя как теоретический, так и практический интерес.

Научная новизна и основные результаты диссертации.

Основные результаты диссертационной работы таковы:

1. Рассмотрены порядки Рудин–Кейслера, Рудин–Бласса и Рудин–Фролика на ультрафильтрах и связь между ними. Получены новые результаты о дискретных ультрафильтрах, которые затем применяются для исследования однородности в произведениях компактов. Доказано, что дискретные ультрафильтры образуют подполугруппу в полугруппах $(\beta\omega, +)$ и $(\beta\omega, \cdot)$.
2. Введены и исследованы новые классы $\mathcal{R}_1$ -, $\mathcal{R}_2$ - и $\mathcal{R}_3$ -пространств; в частности, показано, что они вложены друг в друга и находятся строго между F - и $\beta\omega$ -пространствами, построены примеры, различающие все эти классы. Доказано полезное общее утверждение о продолжении функций с подпространств на топологические произведения; с помощью него, в частности, показано, что свойства $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ и $\mathcal{R}_3$ не сохраняются стоун-чеховскими компактификациями.
3. Получены характеристики $\mathcal{R}_1$ - и $\mathcal{R}_3$ -пространств в терминах продолжений непрерывных функций со счётных подпространств, а также идеалов колец и полуколец непрерывных функций.
4. Исследована сходимости и однородность в $\mathcal{R}_1$ -, $\mathcal{R}_2$ - и $\mathcal{R}_3$ -пространствах, их произведениях и подпространствах. Доказано, что произведение бесконечных компактных $\mathcal{R}_2$ -пространств пространств, а при условии существования дискретного ультрафильтра $\mathcal{R}_3$ - и даже $\beta\omega$ -пространств, не бывает однородным. В

дополнительных теоретико-множественных предположениях доказана конечность компактных подпространств в конечных произведениях однородных $\beta\omega$ -пространств и метризуемость компактных подпространств в счётных произведениях однородных $\beta\omega$ -пространств.

Все полученные результаты являются **новыми**.

Апробация работы.

Результаты были подвергнуты рецензированию при публикации в журналах. Также результаты были многократно изложены на научно-исследовательских семинарах кафедры общей топологии и геометрии и международных научных конференциях.

Соискатель имеет 6 опубликованных работ, все они по теме диссертации; из них 4 работы опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности.

Публикации по теме диссертации

1. А. Ю. Грознова, *О продолжении функций со счётных подпространств*, Функци. анализ и его прил., **56**(4), 35–42 (2022).
2. A. Groznova, O. Sipacheva, *Discrete ultrafilters and homogeneity of product spaces*, Topol. Appl. Available online 14 December 2022, 108378 (2022), <https://doi.org/10.1016/j.topol.2022.108378>.
3. А. Ю. Грознова, О. В. Сипачёва, *Новые свойства топологических пространств, обобщающие экстремальную несвязность*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем., мех., №1, 19–25 (2023).
4. А. Ю. Грознова, *Об однородности произведений топологических пространств*, Матем. заметки, **113**(2), 171–181 (2023).
5. А. Ю. Грознова, *Новые свойства топологических пространств, связанные с экстремальной несвязностью*, Международная конференция по топологии и её приложениям, посвященной 100-летию со дня рождения Ю.М. Смирнова, 20–21 сентября 2021 г. (тезисы), <https://sites.google.com/view/smirnov-100/>
6. А. Ю. Грознова, *Свойства типа отделимости и их поведение при основных операциях над топологическими пространствами*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2022». Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, Е.И. Зимакова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2022, https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2022/data/25625/142091_uid241578_report.pdf.

Доклады на конференциях

- Международная конференция по топологии и её приложениям, посвященная 100-летию со дня рождения Ю.М. Смирнова, 20–21 сентября 2021 (дистанционный устный доклад).
- XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2022», имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 11–22 апреля 2022 (дистанционный устный доклад).

Доклады на научно-исследовательских семинарах

- Научно-исследовательский семинар имени П.С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 11 марта 2021 года.
- Научно-исследовательский семинар имени П.С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 11 ноября 2021 года.
- Научно-исследовательский семинар имени П.С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 10 марта 2022 года.

Все вышеперечисленные работы и доклады на конференциях соответствуют теме диссертации и отражают ее содержание. Работа подготовлена по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология») на диссертационном совете МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

По итогам рассмотрения диссертации **принято следующее заключение:**

Общая оценка выполненной соискателем ученой степени работы. Представленная диссертация является самостоятельно выполненной, законченной работой в области теории ультрафильтров и однородности топологических пространств.

Личное участие соискателя ученой степени в получении результатов, изложенных в диссертации. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками. Постановка задачи принадлежит научному руководителю, а исследование задачи и получение результатов — аспиранту.

Степень достоверности результатов, проведенных соискателем ученой степени исследований. Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств, а также были подвергнуты рецензированию при публикации в журналах и прошли апробацию на 2 международных конференциях и 3 научных семинарах.

Новизна результатов, проведенных соискателем ученой степени исследований. В диссертации получены следующие результаты. Рассмотрены порядки Рудин–Кейслера, Рудин–Бласса и Рудин–Фролика на ультрафильтрах и связь между ними, особое внимание уделено дискретным ультрафильтрам. Введены и исследованы новые классы $\mathcal{R}_1$ -, $\mathcal{R}_2$ - и $\mathcal{R}_3$ -пространств. Приведено описание $\mathcal{R}_1$ - и $\mathcal{R}_3$ -пространств в терминах продолжения функций со счётных подпространств, а также их алгебраическая характеристика. Исследована сходимости и однородность в $\mathcal{R}_1$ -, $\mathcal{R}_2$ - и $\mathcal{R}_3$ -пространствах, их произведениях и подпространствах. В дополнительных теоретико-множественных предположениях доказана конечность компактных подпространств в конечных произведениях однородных $\mathcal{R}_1$ -, $\mathcal{R}_2$ - и $\mathcal{R}_3$ -пространств и метризуемость компактных подпространств в счётных произведениях однородных $\beta\omega$ -пространств.

Все полученные результаты являются **новыми**.

Практическая значимость результатов, проведенных соискателем ученой степени исследований. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в области общей топологии, теории ультрафильтров, алгебры ультрафильтров, теории множеств и функционального анализа.

Текст диссертации соответствует установленным правилам научного цитирования, библиографические ссылки оформлены корректно.

Диссертационное исследование соответствует паспорту специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология»).

Основные идеи и положения работы изложены в 6 научных работах автора, в том числе в 4 статьях (объёмом ____ п.л.) в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ по физико-

математическим специальностям.

Диссертация соответствует критериям, определенным в пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, а также оформлена согласно положениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Диссертация к защите представляется впервые.

Диссертация Грозновой Анастасии Юрьевны «Свойства типа несвязности и однородность топологических пространств» **рекомендуется к защите** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология» (01.01.04 «Геометрия и топология») на диссертационном совете МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Заключение принято на заседании кафедры общей топологии и геометрии механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Присутствовало на заседании 13 чел. Результаты голосования: «за» – 13 чел., «против» – 0 чел., «воздержалось» – 0 чел., протокол № _____ от «___» _____ 202_ г.

**Заведующий кафедрой общей топологии и
геометрии
механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова
профессор**

Ю.В. Садовничий