УДК 519.624.3+519.677

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ СГЛАЖИВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

ПОДОСЕНОВА ТАТЬЯНА БОРИСОВНА
к.ф.-м.н., ст.науч.сотр., факультет ВМК МГУ
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики

Аннотация: Задача сглаживания зашумленной функции сводится к одномерной краевой вариационной задаче поиска минимума функционала Тихонова. Уравнение Эйлера заданного функционала представляет собой линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка. Получены численные решения краевых задач для указанного уравнения Эйлера для трех различных способов задания краевых условий.
Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение, уравнение Эйлера, краевая задача, сглаживающий функционал, краевые условия.

NUMERICAL SOLUTION OF THE EULER EQUATION FOR THE PROBLEM OF SMOOTHING EXPERIMENTAL DATA

Podosenova Tatyana Borisovna

Abstract: The problem of smoothing a noisy function is reduced to a one-dimensional boundary-value variational problem of finding the minimum of the Tikhonov functional. The Euler equation of a given functional is a linear inhomogeneous ordinary differential equation (ODE) of the 2nd order. Numerical solutions of boundary value problems for the specified Euler equation are obtained for three different ways of setting boundary conditions.
Key words: linear differential equation, Euler equation, boundary value problem, smoothing functional, boundary conditions.

1. Задача сглаживания зашумленной функции $f(x) \in L_2[a,b]$, $a \le x \le b$, сводится к минимизации функционала Тихонова [1, с. 140 - 141; 2, с. 27 - 28]: $M^{\alpha}(y) = \|y - f\|^2_{L_2} + \alpha \|y\|^2_{W_2^1}$, где $y(x) \in W_2^1[a,b]$, $\|y\|^2_{W_2^1} = \int_a^b \{y^2(t) + \{y'(t)\}^2\} dt$. У функционала $M^{\alpha}(y)$, как известно, существует единственный минимум, а функция $y(x)$, на которой достигается минимум, удовлетворяет уравнению Эйлера [3, с. 21 - 22, 46; 4, с. 502 - 503]: $y'' - q^2 y = -\gamma f$, $\gamma = \alpha^{-1}$, $q^2 = 1 + \gamma$. Это уравнение Эйлера есть линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка $ly(x) = -\gamma f$, где дифференциальный оператор есть $ly(x) = y'' - q^2 y$.

2. В работе [5] получены аналитические решения краевых задач для данного уравнения Эйлера для различных способов задания краевых условий.

Решение 1-й краевой задачи: $ly(x) = -\gamma f$, $a \le x \le b$, с условиями на значения функции в граничных точках: $y(a) = y(b) = 0$, выписывается в виде [5]:

$$y(x) = \frac{\gamma}{q \cdot sh(q(b-a))} \times \{sh(q(x-a)) \cdot \int_x^b f(t) \cdot sh(q(b-t))dt +$$

$$+ sh(q(b-x)) \cdot \int_a^x f(t) \cdot sh(q(t-a))dt\} .$$

Решение 2-й краевой задачи: $ly(x) = -\gamma f$, $a \le x \le b$, с краевыми условиями на значения производной функции: $y'(a) = y'(b) = 0$, есть

$$y(x) = \frac{\gamma}{q \cdot sh(q(b-a))} \times \{ ch(q(b-x)) \cdot \int_a^x f(t) \cdot ch(q(t-a))dt \ +$$

$$+ ch(q(x-a)) \cdot \int_x^b f(t) \cdot ch(q(b-t))dt \} \ .$$

Решение краевой задачи: $ly(x) = -\gamma f$, $a \le x \le b$, с краевыми условиями на значения 2-й производной функции, $y''(a) = y''(b) = 0$, имеет вид:

$$y(x) = \frac{\gamma q^{-2}}{sh(q(b-a))} \times \{ sh(q(b-x)) \cdot f(a) + sh(q(x-a)) \cdot f(b) \} + \frac{\gamma q^{-1}}{sh(q(b-a))} \times$$

$$\times \{sh(q(b-x)) \cdot \int_a^x f(t) \cdot sh(q(t-a))dt + sh(q(x-a)) \cdot \int_x^b f(t) \cdot sh(q(b-t))dt\}.$$

Здесь $sh(x) = 0.5(e^x - e^{-x})$, $ch(x) = 0.5(e^x + e^{-x})$.

3. Обычно экспериментально измеренный спектр $f(x) \in L_2[a,b]$ есть функция, заданная на конечном множестве точек $x_k = x_0 + kh$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $f(x_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt$, $1 \le k \le n$. Решение $y(x)$ краевой задачи вычисляется также для значений аргумента $\{x_k \ , 1 \le k \le n\}$.

Для функции $G(x)$, где задано $G(x) = sh(x)$ либо $G(x) = ch(x)$, справедливо:

$$\int_a^{x_i} f(t) \cdot G(q(t-a))dt \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{i} f(x_k) \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} G(q(t-a))d(t-a) = \sum_{k=1}^{i} f(x_k) \cdot \int_{(k-1)h}^{kh} G(q\xi)d\xi \ ,$$

$$\int_{x_i}^b f(t) \cdot G(q(b-t))dt \approx$$

$$\approx \sum_{k=i+1}^{n} f(x_k) \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} G(q(b-t))dt = \sum_{k=i+1}^{n} f(x_k) \cdot \int_{(n-k)h}^{(n-k+1)h} G(q\xi)d\xi \ .$$

Посчитаем интеграл от функции $sh(x)$ на интервале (x_{k-1}, x_k) :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} sh(qt)dt = 0.5 \cdot q^{-1} \cdot \{ \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{qt} d(qt) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-qt} d(-qt) \} =$$

$$= (2q)^{-1} \cdot \{ e^{qx_k} - e^{qx_{k-1}} + e^{-qx_k} - e^{-qx_{k-1}} \} =$$

$$= (2q)^{-1} \cdot \{ e^{q(x_{k-1}+0.5h)} \cdot (e^{0.5qh} - e^{-0.5qh}) + e^{-q(x_{k-1}+0.5h)} \cdot (e^{-0.5qh} - e^{0.5qh}) \} =$$

$$= (2q)^{-1} \cdot (e^{0.5qh} - e^{-0.5qh})(e^{q(x_{k-1}+0.5h)} - e^{-q(x_{k-1}+0.5h)}) =$$

$$= 2q^{-1} \cdot sh(0.5qh) \cdot sh(q(x_{k-1} + 0.5h)) \ ,$$

и интеграл от гиперболического косинуса $ch(x)$ -

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} ch(qt)dt = 0.5 \cdot q^{-1} \cdot \{ \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{qt} d(qt) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-qt} d(-qt) \} =$$

$$= (2q)^{-1} \cdot \{ e^{qx_k} - e^{qx_{k-1}} - e^{-qx_k} + e^{-qx_{k-1}} \} =$$

$$= (2q)^{-1} \cdot \{ e^{q(x_{k-1}+0.5h)} \cdot (e^{0.5qh} - e^{-0.5qh}) + e^{-q(x_{k-1}+0.5h)} \cdot (e^{0.5qh} - e^{-0.5qh}) \} =$$

$$= (2q)^{-1} \cdot (e^{0.5qh} - e^{-0.5qh})(e^{q(x_{k-1}+0.5h)} + e^{-q(x_{k-1}+0.5h)}) =$$

$$= 2q^{-1} \cdot sh(0.5qh) \cdot ch(q(x_{k-1} + 0.5h)) \ .$$

Интегралы от функции $G(x)$ вычисляются следующим образом:

$\int_x^{x+h} G(qt)dt = \frac{2}{q} G(q(x+0.5h)) \cdot sh(\frac{qh}{2})$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} G(q(t-a))dt = \int_{(k-1)h}^{kh} G(q\xi)d\xi$,

$\int_{x_{k-1}}^{x_k} G(q(b-t))dt = \int_{b-x_k}^{b-x_{k-1}} G(q\xi)d\xi = \int_{(n-k)h}^{(n-k+1)h} G(q\xi)d\xi$. В итоге получим:

$$\int_a^{x_i} f(t) \cdot G(q(t-a))dt \approx \sum_{k=1}^{i} f(x_k) \cdot \int_{(k-1)h}^{kh} G(q\xi)d\xi =$$

$$= 2q^{-1} \cdot sh(0.5qh) \cdot \sum_{k=1}^{i} f(x_k) \cdot G(qh\{k-0.5\}) \ ,$$

$$\int_a^{x_i} f(t) \cdot G(q(b-t))dt \approx \sum_{k=i+1}^{n} f(x_k) \cdot \int_{(n-k)h}^{(n-k+1)h} G(q\xi)d\xi =$$

$$= 2q^{-1} \cdot sh(0.5qh) \cdot \sum_{k=i+1}^{n} f(x_k) \cdot G(qh\{n-k+0.5\}) \ .$$

4. Выпишем численные решения трех краевых задач (п. 2) для уравнения Эйлера для описанных выше способов задания краевых условий.

При задании значений функции на границах отрезка, $y(a) = y(b) = 0$, решение задачи выписывается в виде:

$$y(x_i) = \frac{2\gamma \cdot sh(0.5qh)}{q^2 \cdot sh(q\{b-a\})} \times \{\, sh(qh\{n-i\}) \cdot \sum_{k=1}^{i} f(x_k) \cdot sh(qh\{k-0.5\}) \; + \;$$

$$+ \; sh(qhi) \cdot \sum_{k=i+1}^{n} f(x_k) \cdot sh(qh\{n-k+0.5\}) \,\} \; .$$

При задании значений первой производной функции на границах отрезка, $y'(a) = y'(b) = 0$, решение задачи выписывается в виде:

$$y(x_i) = \frac{2\gamma \cdot sh(0.5qh)}{q^2 \cdot sh(q\{b-a\})} \times \{\, ch(qh\{n-i\}) \cdot \sum_{k=1}^{i} f(x_k) \cdot ch(qh\{k-0.5\}) \; + \;$$

$$+ \; ch(qhi) \cdot \sum_{k=i+1}^{n} f(x_k) \cdot ch(qh\{n-k+0.5\}) \,\} \; .$$

Решение краевой задачи с условиями на значения 2-й производной функции, $y''(a) = y''(b) = 0$, имеет вид:

$$y(x_i) = \frac{\gamma}{q^2 \cdot sh(q\{b-a\})} \times \{\, sh(qh\{n-i\}) \cdot f(a) + sh(qhi) \cdot f(b) \,\} +$$

$$+ \frac{2\gamma \cdot sh(0.5qh)}{q^2 \cdot sh(q\{b-a\})} \times \{\, sh(qh\{n-i\}) \cdot \sum_{k=1}^{i} f(x_k) \cdot sh(qh\{k-0.5\}) \; + \;$$

$$+ \; sh(qhi) \cdot \sum_{k=i+1}^{n} f(x_k) \cdot sh(qh\{n-k+0.5\}) \,\} \; .$$

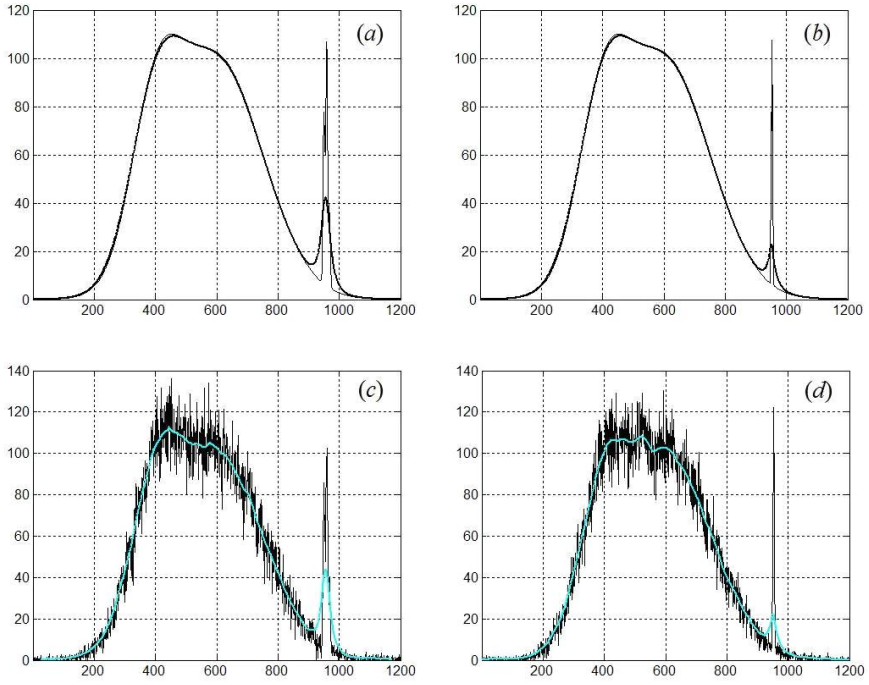

Рис. 1. Графики функции $f(x)$ и сглаженной функции $y(x)$ для случаев точных и возмущенных модельных данных. Параметр $\alpha^{-1} = 0.0006$.

5. На рисунках (рис. 1, рис. 2) показаны графики точной и возмущенной (по закону Пуассона) модельной функции $f(x)$ и сглаженной функции $y(x)$, полученной как решение краевой задачи для уравнения $ly(x) = -\alpha^{-1} f$.

Функция $f(x)$ задана суммой триплета, который есть суперпозиция трех плохо разрешенных узких гауссовых линий, и двух широких гауссианов разной ширины. Ширина резонансных линий равна 3 (рис. 1*a*,*c*) и 1 (рис. 1*b*,*d*) и 6 (рис. 2). При проведении численных расчетов были использованы значения $a = -1,\ b = 1,\ a \le x \le b,\ n = 1200$.

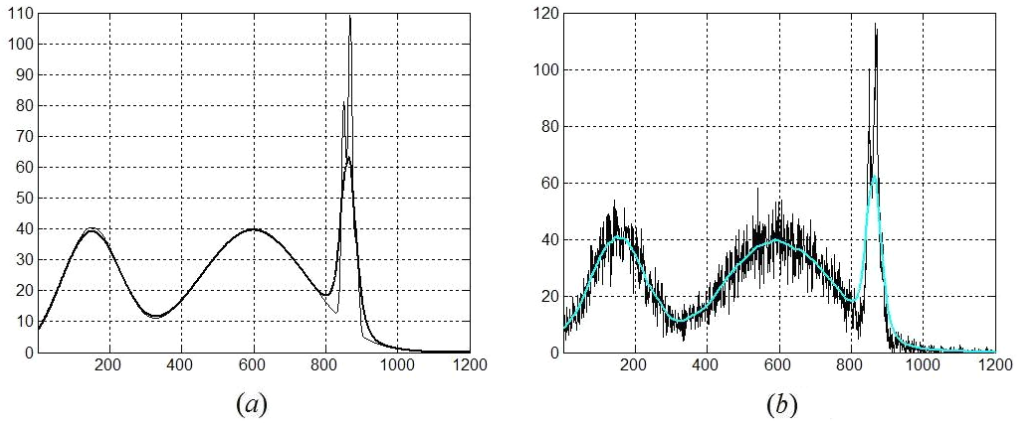

Рис. 2. Графики функции $f(x)$ и сглаженной функции $y(x)$ для случаев точных и возмущенных данных. Параметр $\alpha^{-1} = 0.0006$. Заданы нулевые краевые значения 2-й производной.

Список литературы

1. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач: учеб. пособие для вузов / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 288 с.

2. Морозов, В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В. А. Морозов. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. - 240 с.

3. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление: Учебник для ун-тов / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. - 228 с.

4. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. - 544 с.

5. Подосенова, Т. Б. Аналитическое решение уравнения Эйлера для задачи сглаживания экспериментальных данных / Т. Б. Подосенова // Science and education: problems and innovations: сб. ст. III Междунар. науч.-практич. конф. - Пенза: МЦНС «Наука и Просвещение», 2020. - Т. 1.

© Т.Б. Подосенова, 2020