ФГБОУ ВО
«Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Пахомова Анастасия Сергеевна

Отношения типа Штейнера метрических пространств

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2016

Работа выполнена на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, доцент
Иванов Александр Олегович

Официальные оппоненты: **Клячин Алексей Александрович,**
доктор физико–математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Волгоградский государственный университет», профессор, заведующий кафедрой
Овсянников Захар Николаевич,
кандидат физико–математических наук, ООО «Технологический центр Дойче Банка», инженер-программист

Ведущая организация: **ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»**

Защита диссертации состоится **26 мая 2017 г.** в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, $8^{\text{й}}$ этаж, и на сайте http://istina.msu.ru/dissertations/45255659/, http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi.

Автореферат разослан 26 апреля 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор

Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Отношения типа Штейнера тесно связаны с задачей поиска кратчайшей сети для конечного множества точек метрического пространства. Сетью мы называем геометрическую реализацию (абстрактного) связного графа, т. е. представление вершин графа точками некоторого пространства, а ребер — кривыми, соединяющими соответствующие точки. Существует несколько различных подходов к решению этой задачи. В простейшем случае разрешается соединять кривыми только точки исходного множества, а добавление новых вершин запрещено. Из соображений минимальности следует, что граф, соответствующий такой кратчайшей сети, является деревом. Этот объект называется минимальным остовным деревом для данного множества точек. Задача о поиске минимального остовного дерева хорошо известна в теории графов. Хорошо известно, что минимальное остовное дерево существует для любого конечного множества точек и может быть найдено за полиномиальное время. Сумму длин ребер минимального остовного дерева, построенного для множества точек M, будем обозначать $\mathrm{mst}(M)$.

Оказалось, что, добавляя новые точки к исходному множеству, иногда можно построить сеть, длина которой меньше, чем длина минимального остовного дерева. Первые шаги в этом направлении сделал П. Ферма, который сформулировал задачу[1]: для заданной тройки точек на плоскости найти такую точку, суммарное расстояние от которой до данных трех было бы наименьшим. Эта задача была частично решена Э. Торричелли[2], позже его конструкция была модифицирована Т. Симпсоном[3]. Я. Штейнер обобщил задачу Ферма для случая произвольного конечного множества, предлагая найти точку на плоскости, сумма расстояний от которой до точек этого множества минимальна. В. Ярник и О. Кесслер[4] предложили новое обобщение, поставив задачу поиска кратчайшей сети, проходящей через данное конечное множество точек на плоскости. В настоящее время задача Ярника и Кесслера и ее всевозможные обобщения на метрические пространства известны как задача Штейнера. Сеть, являющуюся решением

[1]Fermat P. Oeuvres /ed. P. Tannery – Paris, 1891. – vol. 1

[2]Krarup J., Vajda S. On Torricelli's geometrical solution to a problem of Fermat // IMA J. Math. Appl. Bus. Indust. – 1997. – 8 (3) – P. 215–224

[3]Simpson T. The Doctrine and Application of Fluxions – 1750.

[4]Jarnik V., Kossler M., O minimalnich grafeth obeahujicich n danich bodu // Cas. Pet. Mat. a Fys. – 1934. – 63 – P. 223–235

задачи, принято называть минимальным деревом Штейнера. Сумму длин ребер минимального дерева Штейнера, построенного для множества точек M, будем обозначать $\mathrm{smt}(M)$. Задачу Штейнера можно ставить не только для множества точек на плоскости, но и для произвольного метрического пространства.

Заметим, что в отличие от минимального остовного дерева, минимальное дерево Штейнера существует, вообще говоря, не всегда. Одной из возможных причин этого может служить неполнота объемлющего метрического пространства. Полнота пространства, однако, не является достаточным условием существования минимального дерева Штейнера для произвольного его конечного подмножества. По-видимому, первый пример полного метрического (и даже банахова) пространства, в котором для некоторого набора точек не существует кратчайшего дерева Штейнера, был построен в 1974 в работе Гаркави и Шматкова[5]. Подобные примеры строились позднее и в других работах[6,7]. Тем не менее, даже если для данного множества точек минимальное дерево Штейнера все-таки существует, задача поиска такого дерева или определения его длины имеет большую вычислительную сложность. Например, алгоритм Мелзака[8] позволяет построить дерево Штейнера для множества точек евклидовой плоскости лишь за экспоненциальное время. Быстро работают только алгоритмы, дающие приближенное решение, например, алгоритм Краскала[9], строящий минимальное остовное дерево.

Перечисленные выше трудности вынуждают искать новые подходы к решению проблемы поиска кратчайшей сети. Один из таких подходов был предложен А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным[10] и основан на понятии минимального заполнения конечного метрического пространства. Это понятие тесно связано с конструкцией, предложенной М. Громовым для римановых многообразий[11]. Громов рассматривал гладкие замкнутые многооб-

[5]Гаркави А. Л., Шматков В. А. О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб. – 1974. – 95(137):2(10) – С. 272–293

[6]Papini P. L. Two new examples of sets without medians and centers // Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Top – 2005. – 13:2 – P. 315–320

[7]Бородин П. А. Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве // Матем. заметки – 2010. – 87:4 – С. 514–518

[8]Melzak Z. A. On the problem of Steiner // Canad. Math. Bull. – 1961. – №4 – P. 143–148

[9]Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика / М.: МГТУ, 2006. – С. 306–311

[10]Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем.сб. – 2012. – 203:5 – С. 65–118

[11]Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Diff. Geom. – 1983. – №18 – P. 1–147

разия M с заданными на них функциями расстояния ρ и все возможные компактные многообразия W, с краем равным M. Метрическое пространство (W, d) называется заполнением в смысле Громова для метрического пространства (M, ρ), если d — функция расстояния на W, не уменьшающая расстояние между точками M. Определение, предложенное Ивановым и Тужилиным, получается естественным образом, если в качестве M рассматриваются конечные метрические пространства. В этом случае заполнениями будут являться одномерные стратифицированные многообразия, которые можно рассматривать как взвешенные графы с неотрицательной весовой функцией. Вес минимального заполнения, построенного для конечного множества точек M, будем обозначать $\mathrm{mf}(M)$. В дальнейшем, говоря о минимальных заполнениях, мы будем подразумевать минимальные заполнения конечных метрических пространств. Иванов и Тужилин показали, что минимальное заполнение существует для любого граничного множества, т.е. любого конечного метрического пространства.

Для произвольного метрического пространства можно определить величины, показывающие, насколько сильно отличаются длины минимальных сетей из разных классов в самом «худшем» случае. В шестидесятых годах прошлого века в работе Э. Джилберта и Г. Поллака[12] было предложено для каждого конечного подмножества метрического пространства вычислять длину минимального дерева Штейнера и минимального остовного дерева, а затем находить отношение полученных величин. Точная нижняя грань этих отношений, взятая по всем конечным подмножествам метрического пространства, была названа отношением Штейнера этого пространства. Таким образом, отношение Штейнера показывает, насколько близкими являются минимальные остовные деревья и минимальные деревья Штейнера. Введя в рассмотрение понятие минимального заполнения, А. О. Иванов и А. А. Тужилин предложили наряду с отношением Штейнера рассмотреть два других отношения. Отношение Штейнера–Громова характеризует близость минимальных заполнений и минимальных остовных деревьев, а суботношение Штейнера — близость минимальных заполнений и минимальных деревьев Штейнера. Эти три величины называются отношениями типа Штейнера. Отношения типа Штейнера могут быть использованы для оценки погрешности приближенных алгоритмов, а потому их изучение представляет интерес.

[12]Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – 16:1 – P. 1–29

Нахождение значения того или иного отношения типа Штейнера, вообще говоря, является очень сложной задачей. Так, например, до сих пор не известно, чему равно отношение Штейнера для евклидовой плоскости. Джилберт и Поллак выдвинули гипотезу, что это отношение равно $\sqrt{3}/2$ и достигается на вершинах правильного треугольника. Стоит заметить, однако, что многочисленные попытки доказать этот факт так и не привели к успеху, оставив данный вопрос открытым для исследования[13]. Тем не менее, существует много работ, в которых были получены оценки для отношения Штейнера различных частных множеств граничных точек [14,15,16], для евклидового пространства[17], пространств Банаха–Минковского[18] и многих других метрических пространств. Иногда удается найти и точное значение. Например, было вычислено значение отношения Штейнера для манхэттенской плоскости[19], для плоскости Лобачевского[20], для поверхностей Александрова отрицательной кривизны[21]. Отношение Штейнера–Громова и суботношение Штейнера также удалось вычислить для некоторых метрических пространств. Например, З. Н. Овсянников вычислил отношения типа Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с расстоянием Хаусдорфа[22], В. А. Мищенко вычислила отношение Штейнера–Громова для плоскости Лобачевского[23].

---

[13]Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Steiner Ratio Gilbert–Pollak Conjecture Is Still Open // Algorithmica – 2012. – Vol. 62, № 1-2 – P. 630–632

[14]Rubinstein J. H., Thomas D. A. A variational approach to the Steiner network problem // Annals of Operations Research – 1991. – 33 – P. 481–499

[15]De Wet P. O. Geometric Steiner minimal trees / Ph.D. thesis, Univ. of South Africa, Pretoria – 2008.

[16]Kirszenblat D. The Steiner ratio conjecture for eight points / M. Thesis, Uni. Melbourne – 2014.

[17]Du D. Z., Smith W. D. Disproofs of Generalized Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner Ratio in Three or More Dimensions // J. of Comb. Th. Series A – 1996. – 74 – P. 115–130

[18]Cieslik D. The Steiner Ratio / Kluwer Academic Publishers, Boston–London–Dordrecht – 2001.

[19]Hwang F. K. On Steiner minimal trees with rectilinear distance // SIAM Journal of Applied Mathematics –1976. – 30 – P. 104–114

[20]Innami N., Kim B. H. Steiner ratio for hyperbolic surfaces // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 2006. – 82:6 – P. 77—79

[21]Zavalnyuk E. Steiner Ratio for Hadamard Surfaces of Curvature at Most $k < 0$. // J. of Math. Sci. – 2014. – 203:6 – P. 777–788

[22]Овсянников З. Н. Отношения Штейнера, Штейнера–Громова и суботношения Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с расстоянием Хаусдорфа // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – 18:2 – С. 157–165

[23]Мищенко В. А. Оценки отношения Штейнера–Громова римановых многообразий // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – 18:2 – С. 119–124

Цель работы

Целью диссертационной работы является изучение свойств отношений типа Штейнера метрических пространств. Исследуются граничные значения для отношений типа Штейнера и условия непрерывности отношений типа Штейнера как функций на пространстве всех компактных метрических пространств с метрикой Громова–Хаусдорфа.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Теорема о точных оценках для отношений типа Штейнера произвольного метрического пространства (Теорема 8);
2. Теоремы существования метрического пространства с заданным значением отношения типа Штейнера (Теорема 9 и Теорема 10);
3. Классификация метрических пространств, отношение Штейнера–Громова которых равно единице (Теорема 22);
4. Теорема о полунепрерывности отношений типа Штейнера как функций в пространстве Громова–Хаусдорфа (Теорема 25);
5. Критерий непрерывности отношений типа Штейнера как функций в пространстве Громова–Хаусдорфа (Теорема 26).

Основные методы исследования

В диссертации применяются методы дифференциальной и дискретной геометрии, топологии, математического анализа, теории графов, теории минимальных сетей, теории минимальных заполнений конечных метрических пространств, теории геометрических оптимизационных задач, вариационного исчисления, метрической геометрии.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа носит теоретических характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области метрической геометрии, дифференциальной геометрии, геометрических оптимизационных задач, теории минимальных сетей, дискретной математики и теории графов.

Апробация результатов работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

– на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2013» (МГУ, 8-13 апреля 2013)
– на Научной конференции «Ломоносовские чтения» (МГУ, 15 апреля 2013)
– на научном семинаре «Геометрическая теория приближений» под руководством проф. П.А. Бородина (МГУ, 7 мая 2013)
– на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2015» (МГУ, 13–17 апреля 2015)
– на XII Международном научном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова (МГУ, 22 июня 2016)
– на Международной конференции «Анализ, вероятность и геометрия» (МГУ, 28 сентября 2016)
– на научном семинаре «Оптимальные сети» под руководством проф. А.О. Иванова и проф. А.А. Тужилина (МГУ, 2012–2016)
– на научном семинаре «Экстремальные задачи и нелинейный анализ» под руководством проф. А.В. Арутюнова и доц. В.Н. Розовой (Москва, РУДН, декабрь 2016)
– на научном семинаре «Геометрический анализ и вычислительная геометрия» под руководством проф. А.А. Клячина и проф. В.А. Клячина (Волгоград, ВолГУ, декабрь 2016)

Публикации

Все основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1]—[3] и тезисах [4] – [7], список которых приведен в конце автореферата, из них в журналах из перечня ВАК – 3 статьи.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка публикаций по теме диссертации, который включает в себя 7 наименований, и списка литературы, включающего в себя 36 наименований. Общий объем диссертации составляет 60 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации приводится историческая справка по исследуемым вопросам. Дается краткое содержание работы и описаны основные результаты. Также приведена информация об апробации работы.

Содержание главы 1

В первой главе даются предварительные сведения, вводятся необходимые определения и формулировки теорем, используемых в дальнейшем.

Определение. *Отношением Штейнера* метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$ называется величина

$$\operatorname{sr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M \mid M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\operatorname{smt}(M)}{\operatorname{mst}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\},$$

где $\#M$ обозначает количество элементов в множестве M.

Определение. *Отношением Штейнера–Громова* метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$ называется величина

$$\operatorname{sgr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M \mid M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\operatorname{mf}(M)}{\operatorname{mst}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\}.$$

Определение. *Суботношением Штейнера* метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$ называется величина

$$\operatorname{ssr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M \mid M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\operatorname{mf}(M)}{\operatorname{smt}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\}.$$

Эти три величины называются *отношениями типа Штейнера.*

Пусть $n \geq 2$ — фиксированное натуральное число. Если в качестве множества M, по которому берется точная нижняя грань в определении отношений типа Штейнера, рассматривать множества, содержащие не более n точек, мы получим новые величины, которые будем называть *n-точечными отношениями типа Штейнера.* Для обозначения n-точечных отношений типа Штейнера будем использовать обозначения sr_n, sgr_n и ssr_n.

Содержание главы 2

Во второй главе доказываются точные оценки для отношений типа Штейнера произвольных метрических пространств, изучается вопрос существования пространств с заданным значением отношения типа Штейнера. Полученные оценки применяются для вычисления отношений типа Штейнера некоторых метрических пространств.

Основными результатами главы являются следующие теоремы.

Теорема 8. *Пусть функция* r *обозначает одно из трех отношений типа Штейнера:* sr, sgr *или* ssr. *Для произвольного метрического пространства* $\mathbb{X}$ *справедливы следующие оценки:*

$$\frac{n}{2(n-1)} \le r_n(\mathbb{X}) \le 1; \qquad \frac{1}{2} \le r(\mathbb{X}) \le 1.$$

Более того, эти оценки являются точными.

Справедливость результата в случае отношения Штейнера была доказана Э.Муром[24], справедливость результата для двух других отношений доказана автором диссертационной работы. Доказательство теоремы для суботношения Штейнера и отношения Штейнера–Громова приведено в разделе 2.2 диссертационной работы.

Теорема 9. *Пусть функция* r *обозначает одно из трех отношений типа Штейнера:* sr, sgr *или* ssr. *Пусть* $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ *— некоторое фиксированное действительное число. Тогда существует метрическое пространство* $\mathbb{X}$, *такое что* $r(\mathbb{X}) = s$.

Теорема 10. *Пусть функция* r_n *обозначает одно из трех* n*-точечных отношений типа Штейнера:* sr_n, sgr_n *или* ssr_n. *Пусть* $s \in [\frac{n}{2(n-1)}, 1]$ *— некоторое фиксированное действительное число. Тогда существует метрическое пространство* $\mathbb{X}$, *такое что* $r_n(\mathbb{X}) = s$.

В случае отношения Штейнера теоремы были доказаны А.О. Ивановым и А.А. Тужилиным[25]. В случае двух других отношений теоремы доказаны автором диссертационной работы. Доказательству теорем посвящен раздел 2.3.

[24]Cieslik D. The Steiner Ratio / Kluwer Academic Publishers, Boston–London–Dordrecht – 2001.

[25]Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей / Москва–Ижевск, Современная математика, ИКИ – 2003.

Содержание главы 3

Третья глава посвящена пространствам с максимально возможным значением отношения Штейнера–Громова. Дана полная классификация таких пространств.

Определение. Назовем множество $\{x_1, x_2, x_3\} \subset (\mathbb{X}, \rho)$ *вырожденным треугольником*, если для некоторой перестановки (i, j, k) индексов $(1, 2, 3)$ выполнено равенство $\rho(x_i, x_j) = \rho(x_i, x_k) + \rho(x_k, x_j)$.

Пример. Зафиксируем два положительных числа a и b. Построим пространство $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$, состоящее из четырех точек $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, расстояния между которыми заданы следующим образом:

$$\rho_d(x_1, x_2) = \rho_d(x_3, x_4) = a;$$

$$\rho_d(x_2, x_3) = \rho_d(x_1, x_4) = b;$$

$$\rho_d(x_1, x_3) = \rho_d(x_2, x_4) = a + b.$$

Любое трехточечное множество данного пространства является вырожденным треугольником.

Основным результатом главы является теорема.

Теорема 22. *Пусть $(\mathbb{X}, \rho)$ — метрическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\mathrm{sgr}(\mathbb{X}, \rho) = 1$.
2. *Одновременно выполнены условия:* $\mathrm{sr}(\mathbb{X}, \rho) = 1$ *и* $\mathrm{ssr}(\mathbb{X}, \rho) = 1$.
3. *Для любого конечного множества $M \subset \mathbb{X}$ выполняется равенство* $\mathrm{mf}(M) = \mathrm{smt}(M) = \mathrm{mst}(M)$.
4. *Все треугольники в $\mathbb{X}$ вырождены.*
5. *Пространство $(\mathbb{X}, \rho)$ изометрично подмножеству евклидовой прямой или изометрично $(\mathbb{D}_{\{a,b\}}, \rho_d)$ для некоторых a и b.*
6. *Для любого $n \geq 2$ выполняется* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = 1$.
7. *Существует $n \geq 3$, такое что* $\mathrm{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = 1$.

Содержание главы 4

В четвертой главе отношения типа Штейнера рассматриваются как функции в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Определение. Пусть $(\mathbb{X}, \rho)$ — метрическое пространство с метрикой $\rho(a, b)$. Назовем *ε–окрестностью точки a* множество $U_\varepsilon(a)$, состоящее из точек b таких, что $\rho(a,b) < \varepsilon$. Объединение всех ε–окрестностей точек множества $A \subset \mathbb{X}$ назовем *ε–окрестностью множества* и обозначим через $U_\varepsilon(A)$.

Определение. Пусть A и B — замкнутые подмножества $\mathbb{X}$. Определим между ними *расстояние по Хаусдорфу* следующим образом:

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset U_\varepsilon(B) \text{ и } B \subset U_\varepsilon(A)\}.$$

Определение. Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — два метрических пространства. *Реализацией* этих пространств назовем такую тройку метрических пространств $(\mathbb{X}', \mathbb{Y}', \mathbb{Z}')$, что $\mathbb{X}'$ и $\mathbb{Y}'$ — подпространства $\mathbb{Z}'$, причем $\mathbb{X}'$ изометрично $\mathbb{X}$, а $\mathbb{Y}'$ изометрично $\mathbb{Y}$.

Определение. *Расстоянием по Громову–Хаусдорфу* между $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ назовем

$$d_{GH} = \inf\{r \in \mathbb{R} \mid \exists(\mathbb{X}', \mathbb{Y}', \mathbb{Z}'), \text{ такая что } d_H(\mathbb{X}', \mathbb{Y}') \le r\}.$$

Хорошо известно[26], что расстояние по Громову–Хаусфдорфу задает метрику на пространстве всех классов изометричных компактных метрических пространств. Пространство, снабженное данное метрикой, называется пространством Громова–Хаусдорфа. В настоящее время расстояние по Громову–Хаусдофу и его свойства активно изучаются[27,28,29].

В четвертой главе диссертационной работы изучается непрерывность и полунепрерывность отношений типа Штейнера как функций в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Определение. Числовая функция $f(x)$, определенная на некотором множестве метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$, называется *полунепрерывной сверху* в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ т.ч. } \forall x : \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Теорема 25. *Пусть $(\mathbb{X}_0, \rho)$ — компактное метрическое пространство, рассматриваемое как точка в пространстве Громова–Хаусдорфа. Тогда*

[26] Д. Ю. Бураго, Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии / Москва–Ижевск, Современная математика, ИКИ – 2004.

[27] Mémoli F. On the use of Gromov-Hausdorff distances for shape comparison // Proceedings of Point Based Graphics, Prague, Czech Republic – 2007.

[28] Kim Y. W. On the Gromov-Hausdorff convergence of geodesics // Bull. Korean Math. Soc. – 1998. – 35:1 – P. 189–193

[29] Иванов А. О., Николаева Н. К., Тужилин А. А. Метрика Громова—Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя // Матем. заметки – 2016. – 100:6 – С. 947–950

функция r, сопоставляющая пространству отношение типа Штейнера, и функция r_n, сопоставляющая пространству n-точечное отношение типа Штейнера, являются полунепрерывными сверху в точке $\mathbb{X}_0$.

Теорема 26. *Пусть $(\mathbb{X}_0, \rho)$ — компактное метрическое пространство, рассматриваемое как точка в пространстве Громова–Хаусдорфа. Пусть функция r обозначает одно из трех отношений типа Штейнера:* sr, sgr *или* ssr. *Тогда*

1. *Функция r_n является непрерывной в точке $\mathbb{X}_0$, если и только если*
$$r_n(\mathbb{X}_0) = \frac{n}{2(n-1)}.$$
2. *Функция r является непрерывной в точке $\mathbb{X}_0$, если и только если*
$$r(\mathbb{X}_0) = \frac{1}{2}.$$

Заключение

В заключении диссертационной работы перечислены основные результаты, полученные в работе, и намечены возможные пути дальнейшего исследования.

Перечислим несколько возможных направлений дальнейшего исследования и задач, которые хотелось бы решить:

1. Классифицировать метрические пространства, отношение Штейнера которых равно единице.
2. Классифицировать метрические пространства, суботношение Штейнера которых равно единице.
3. Классифицировать метрические пространства, отношения типа Штейнера которых равны минимально возможному значению.
4. Существует ли компактное метрическое пространство, для которого суботношение Штейнера равно $\frac{1}{2}$?

Благодарности

Автор благодарит профессора А.О. Иванова и профессора А.А. Тужилина за постановку задачи, научное руководство и постоянную поддержку. Автор выражает благодарность профессору П.А. Бородину за проявленный интерес к работе. Автор также благодарит всех участников семинара «Оптимальные сети» за ценные замечания и плодотворные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации

1. Пахомова А. С. Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера—Громова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.– 2014. – № 1 – С. 17—25
   [Pakhomova A. S. Estimates of Steiner subratio and Steiner—Gromov ratio // Moscow Univ. Math. Bull.– 2014. – 69:1 – P. 16–23]
2. Пахомова А. С. Критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа // Матем. заметки – 2014. – 96:1 – С. 126—137
   [Pakhomova A. S. A continuity criterion for Steiner-type ratios in the Gromov-Hausdorff space // Mathematical Notes – 2014. – 96:1 – P. 130–139]
3. Пахомова А. С. Классификация метрических пространств, отношение Штейнера–Громова которых равно единице // Фундамент. и прикл. матем. – 2016. – 21:5 – С. 181–189
4. Пахомова А. С. Отношения типа Штейнера метрических пространств // тезисы Международной научной конференции «Ломоносов–2013»
5. Пахомова А. С. Классификация метрических пространств, отношение Штейнера–Громова которых равно единице // тезисы Международной научной конференции «Ломоносов–2015»
6. Пахомова А. С. Граничные значения для отношений типа Штейнера // материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова – МГУ, 2016. – С. 365–368
7. Pakhomova A. S. Steiner type ratios and their properties // 4-th international workshop «Analysis, Geometry and Probability», book of abstracts – MSU, 2016. – P. 53–54