

Рассматриваем линейную стационарную динамическую систему:

$$\begin{cases} x^{t+1} = Ax^t + B\xi^t \\ y^t = Cx^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

где $x^t \in R^n, y^t \in R^l, \xi^t \in R^l$, а матрицы A, B, C имеют согласованные с ними размерности. Дополнительно требуем управляемость и наблюдаемость системы.

Определение 1. Вектор $(r = r_1, \dots, r_l)$ - вектор столбцового относительного порядка системы (1), если выполнены условия:

- 1) $CA^j B_i = 0, j = 1, \dots, r_i - 2; CA^{r_i-1} B_i \neq 0$, для всех $i = 1, \dots, l$.
- 2) $\det H(r_1, \dots, r_l) = \det(CA^{r_1-1} B_1, \dots, CA^{r_l-1} B_l) \neq 0$, где B_i - столбцы матрицы B .

Если для некоторой системы выполнено только первое условие, будем называть вектор, определяемый этим условием, нереализованным столбцовым относительным порядком (НСОП).

Будем обозначать $H'(r^*)$ матрицу H , составленную по правилам из второго условия определения, принимая за исходные данные столбцы матрицы B' и вектор r^* . По аналогии будем пользоваться обозначениями $H(r^*), H^*(r^*)$ и т.д.

Лемма 1. Пусть для системы $\{A, B^*, C\}$, заданной во второй канонической форме управляемости, выполнено определение столбцового относительного порядка для вектора $r = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_l^*)$. Если для системы $\{A, B', C\}$, где $B' = B^*T, |T| \neq 0$, выполнено первое условие столбцового относительного порядка для вектора r^* , то для этой системы выполнено и второе условие определения столбцового относительного порядка, т.е. $|H'(r^*)| \neq 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $r_i^* \geq r_j^*$ при $i < j$, поскольку перенумерация столбцов матрицы B' и компонент вектора r не влияет на выполнение определения (матрица $H^*(r^*)$ остается невырожденной). То же самое будем предполагать в отношении матрицы B' , так как этого можно добиться "исправлением" T . Иными словами, в рассматриваемых матрицах столбцы упорядочиваем по невозрастанию соответствующих компонент вектора столбцового относительного порядка или его нереализованного аналога. Пусть $B' = {}^*T, |T| \neq 0$.

Выделим в $H^*(r^*)$ блочную структуру, объединив в блоки элементы столбцов с совпадающими значениями r_i^* и строк, соответствующих блокам блочной структуры матрицы B' . Соответствующие блочные структуры выделим в матрицах B' и T . Имея в виду, что в векторе r^* среди

его l компонент ровно s различных, получаем:

$$\begin{pmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & \dots & B_{1l}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* & \dots & B_{2l}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1}^* & B_{s2}^* & \dots & B_{sl}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1s} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{s1} & T_{s2} & \dots & T_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} & \dots & B'_{1l} \\ B'_{21} & B'_{22} & \dots & B'_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B'_{s1} & B'_{s2} & \dots & B'_{sl} \end{pmatrix}$$

Из первого свойства определения столбцового относительного порядка можно записать блочные соотношения (предполагая $j < k$ и считая номер $i(k)$ таким, что этот компонент вектора r^* соответствует столбцам k -ой вертикальной группы блоков, обозначаемой B'_k):

$$\begin{aligned} CA^{r_{i(k)}^*} B'_k &\neq 0 \\ CA^{r_{i(k)}^*} B'_j &= 0 = CA^{r_{i(k)}^*} B^* T_j = \\ &= CA^{r_{i(k)}^*} (B_1^* T_{1j} + B_2^* T_{2j} + \dots + B_s^* T_{sj}) = \\ &= CA^{r_{i(k)}^*} B_1^* T_{1j} + CA^{r_{i(k)}^*} B_2^* T_{2j} + \dots + CA^{r_{i(k)}^*} B_s^* T_{sj} = \\ &= (CA^{r_{i(k)}^*} B_1^* = 0, \dots, CA^{r_{i(k)}^*} B_{k-1}^* = 0) = \\ &= CA^{r_{i(k)}^*} B_k^* T_{kj} + CA^{r_{i(k)}^*} B_{k+1}^* T_{k+1,j} + \dots + CA^{r_{i(k)}^*} B_s^* T_{sj} = \\ &= \sum_{t=k}^s CA^{r_{i(k)}^*} B_t^* T_{tj} = 0 \end{aligned}$$

Поочередно будем рассматривать разные значения k и j :

$$\begin{aligned} 1) j = s-1, k = s &\rightarrow CA^{r_{i(s)}^*} B_s^* T_{s,s-1} = 0 \\ 2) j = s-2, k = s &\rightarrow CA^{r_{i(s)}^*} B_s^* T_{s,s-2} = 0 \\ 3) j = s-2, k = s-1 &\rightarrow CA^{r_{i(s-1)}^*} B_{s-1}^* T_{s-1,s-2} + CA^{r_{i(s-1)}^*} B_s^* T_{s,s-2} = 0 \\ &\vdots \\ i) \forall j < k, CA^{r_{i(k)}^*} B_k^* T_{kj} + CA^{r_{i(k)}^*} B_{k+1}^* T_{k+1,j} + \dots + CA^{r_{i(k)}^*} B_s^* T_{s,j} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Проведем доказательство от противного. Предположим, что матрица $H'(r^*)$ вырождена. Запишем нетривиальную линейную комбинацию ее столбцов, равную нулю. Заметим, что $B'_k = B^* T_k$. Тогда (равенство записываем сразу для блоков, считая α_i векторами нужного размера):

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 CA^{r_{i(1)}^*} B'_1 + \\ &\quad + \alpha_2 CA^{r_{i(2)}^*} B'_2 + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \alpha_s CA^{r_{i(s)}^*} B'_s = \\ &= \alpha_1 CA^{r_{i(1)}^*} (B_1^* T_{11} + B_2^* T_{21} + \dots + B_s^* T_{s1}) + \\ &\quad + \alpha_2 CA^{r_{i(2)}^*} (B_1^* T_{12} + B_2^* T_{22} + \dots + B_s^* T_{s2}) + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \alpha_s CA^{r_{i(s)}^*} (B_1^* T_{1s} + B_2^* T_{2s} + \dots + B_s^* T_{ss}) \end{aligned}$$

Учитывая вышедоказанную группу равенств 2, это равносильно

$$\begin{aligned} & \alpha_1 C A^{r_{i(1)}^*} B_1^* T_{11} + 0 + \\ & + \alpha_2 C A^{r_{i(2)}^*} (B_1^* T_{12} + B_2^* T_{22}) + 0 + \\ & + \dots + \\ & + \alpha_s C A^{r_{i(s)}^*} (B_1^* T_{1s} + B_2^* T_{2s} + \dots + B_s^* T_{ss}) = 0 \end{aligned}$$

С учетом того, что $C A^{r_{i(k)}^*} B_j^* = 0 \forall j < k$, это эквивалентно

$$\begin{aligned} & \alpha_1 C A^{r_{i(1)}^*} B_1^* T_{11} + \\ & \alpha_2 C A^{r_{i(2)}^*} B_2^* T_{22} + \\ & + \dots + \\ & + \alpha_s C A^{r_{i(s)}^*} B_s^* T_{ss} = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, получена равная нулю линейная комбинация столбцов невырожденной (по условию) матрицы $H^*(r^*)$ с коэффициентами $\alpha_1 T_{11}, \dots, \alpha_s T_{ss}$, которые могут одновременно обращаться в ноль только в том случае, если хотя бы один диагональный блок матрицы $T (T_{ii})$ является вырожденным. Предположим, что так оно и есть. Учитывая соотношения 2, можно сделать вывод, что при домножении на некоторую невырожденную матрицу матрица T примет блочно-нижнетреугольный вид, причем хотя бы один из диагональных блоков останется вырожденным. К такому виду приводит, например, домножение на невырожденную матрицу Q , блоки которой $Q_{kj} = C A^{r_{i(k)}^*} B_j^*, k > j; Q_{kk} = I_{i(k)}; Q_{kj} = 0, k < j$. В этом случае, учитывая блочную нижнетреугольность, определитель равен произведению определителей диагональных блоков. Для матрицы $T' = TQ$ это будет ноль, учитывая вырожденность одного из диагональных блоков. Следовательно, матрица T при домножении на невырожденную матрицу становится вырожденной, что говорит о неполноте ее ранга. Таким образом, она не может являться матрицей перехода, а это противоречит ее определению. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть дана система $\{A, B, C\}$, для которой не выполнено определение столбцового относительного порядка. Пусть существует вид $\{A, B^*, C\}$, где $B^* = B T_1, |T_1| \neq 0$, при котором выполнено определение столбцового относительного порядка для вектора $r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_l^*)$. Если для системы $\{A, B_\alpha, C\}$, где $B_\alpha = B T_2, |T_2| \neq 0$, выполнено первое условие столбцового относительного порядка для вектора r_α , причем $(r_\alpha)_i \leq r_i^*$ и хотя бы в одном случае неравенство строгое, то невырожденным преобразованием выхода можно увеличить некоторую компоненту

вектора НСОП r_α , не превосходящую $(r_\alpha)_{i^*}$, до величины, не меньшей, чем $r_{i^*}^*$, где i^* - один из индексов, для которого выполнено строгое неравенство $(r_\alpha)_{i^*} \leq r_{i^*}^*$.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что столбцы в матрицах B_α и B^* упорядочены по неубыванию значений r_α и r^* , соответственно. Предположим, для системы α не существует преобразования к системе β , удовлетворяющего условиям леммы. Рассмотрим в качестве искомого значения i^* максимальное из возможных в условиях леммы, т.е. такое, что $r_i^* = (r_\alpha)_i$, при $i > i^*$. Пусть не существует элементарного преобразования столбцов матрицы B_α , увеличивающего компоненту НСОП для столбцов с номерами не больше i^* , до значения $r_{i^*}^*$ или большего. По условию леммы матрицы T_1 и T_2 являются квадратными матрицами перехода и они невырождены. Рассмотрим равенство $B^* = B_\alpha(T_2)^{-1}T_1$. Для столбца i этого матричного равенства справедливо соотношение $B_i^* = B_\alpha T_i$, где T_i - i -ый столбец матрицы $(T_2)^{-1}T_1$. Умножение столбца T_i на матрицу B_α равносильно взятию линейной комбинации ее столбцов с коэффициентами, равными элементам столбца T_i , которые одновременно в ноль не обращаются в силу невырожденности матрицы T . Данная линейная комбинация может быть представлена последовательностью элементарных преобразований столбца $(B_\alpha)_j$, если $T_{ij} \neq 0$. Если матрица T невырождена, то среди ее элементов $T_{ij}, i \geq i^*, j \leq i^*$ найдется хотя бы один ненулевой. Пусть это элемент $T_{i_0 j_0}$. Справедливо равенство $B_{i_0}^* = B_\alpha T_{i_0}$, которое можно применить для невырожденного преобразования столбца с номером j_0 . Тем самым в матрице B_α невырожденным преобразованием столбец с номером j_0 может быть приведен к виду, совпадающему со столбцом i_0 матрицы B^* , причем $i_0 \geq i^*, j_0 \leq i^*$, что таким образом приводит к увеличению j_0 -ой компоненты НСОП (как того требует утверждение леммы) и делает возможным переход от системы α к системе β . Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. При этом в процессе доказательства явно указывается, какую именно компоненту вектора НСОП удастся увеличить.

Лемма 3. Если для системы порядка n выполнено определение столбцового относительного порядка, то никакая компонента вектора столбцового относительного порядка не может быть больше n .

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что какая-то компонента столбцового относительного порядка системы больше, чем n . Это значит, что для соответствующего столбца матрицы выходов выполняются равенства $CB_i = 0, CAB_i = 0, CA^2B_i = 0, \dots, CA^{n-1}B_i = 0$. В силу теоремы Гамильтона-Кэли матрица A^n линейно выражается че-

рез предыдущие степени матрицы A , то есть через $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$. Таким образом, $CA^n B_i = C(\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}) B_i = \alpha_0 C B_i + \alpha_1 C A B_i + \alpha_2 C A^2 B_i + \dots + \alpha_{n-1} C A^{n-1} B_i = 0$. Учитывая, что аналогичным образом и более высокие, чем n , степени матрицы A линейно выражаются через предыдущие, можно сделать вывод, что равенство $CA^k B_i = 0$ справедливо для любого номера k , а это означает, что первое условие определения столбцового относительного порядка не выполнено в данном случае. Полученное противоречие доказывает утверждение.