ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Емельянов Данила Юрьевич

О базисах алгебры Стинрода

Специальность 01.01.04 —
«геометрия и топология»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент **Попеленский Фёдор Юрьевич**
Официальные оппоненты:	**Ахметьев Пётр Михайлович,** доктор физико-математических наук, ФГБУН «Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова» РАН, ведущий научный сотрудник **Владимир Алексеевич Смирнов,** доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», заведующий кафедрой элементарной математики и методики обучения математике
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО «Челябинский Государственный Университет»**

Защита состоится 26 мая 2017 года на заседании диссертацилнного совета Д.501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университете имени М. В. Ломоносова» по адресу: РФ, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8-й этаж и на сайтах

http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0162diss.pdf,
http://istina.msu.ru/dissertations/48135134/

Автореферат разослан 26 апреля 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84,
доктор физико-математических
наук, член-корреспондент РАН **Шафаревич Андрей Игоревич**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Алгебра Стинрода $\mathcal{A}_p$ — это алгебра стабильных когомологических операций в когомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$.

В наиболее общем определении стабильная когомологическая операция — это последовательность $\{\varphi_n\}$ гомоморфизмов $\varphi_n : H^n(X;\Pi) \to H^{n+q}(X;G)$, где Π и G — абелевы группы, естественных по X и перестановочных с изоморфизмом надстройки Σ. Множество всех таких операций образует абелеву группу, обозначим её $\mathcal{O}^S(q,\Pi,G)$.

Тривиальный пример когомологической операции представляет тождественное отображение. Бокштейном в статье[1] был описан связывающий гомоморфизм β в длинной точной когомологической последовательности, соответствующей короткой точной последовательности коэффициентов

$$0 \to \mathbb{Z}/p \to \mathbb{Z}/p^2 \to \mathbb{Z}/p \to 0.$$

Таким образом, $\beta \in \mathcal{O}^S(1,\Pi,G)$. Примерно в тоже время Л. С. Понтрягиным в статье[2] рассматривалась операция $\dot{\times}$ позволяющая описать с точностью до гомотопии всевозможные отображения трехмерной сферы в n-мерный комплекс с тривиальной фундаментальной группой. Общая конструкция таких операций была предложена Н. Стинродом в работе[3], где были описаны операции $Sq^q \in \mathcal{O}^S(q,\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$. В последствии в литературе операции Sq^i стали называться

[1]Bockstein, M. *A complete system of fields of coefficients for the ∇-homological dimension.* C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 38, (1943). 187–189.

[2]Понтрягин Л. С. *Отображение трехмерной сферы в и-мерный комплекс*, Доклады Ак. Наук СССР, XXXIV, No 2 (1942), 39-41.

[3]Steenrod N. E. *Products of cocycles and extensions of mappings*, Ann. of Math., 48 (1947), 290—320.

квадратами Стинрода, тогда как аналогичные операции $P^i \in \mathcal{O}^S(q, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$, где $p > 2$ —простое число, стали называть степенями Понтрягина.

Структура кольца в $\bigoplus\limits_q \mathcal{O}^S(q, G, G)$ задаётся при помощи композиции операций: в качестве произведения операций $\varphi' \in \mathcal{O}^S(q_1, G, G)$ и $\varphi'' \in \mathcal{O}^S(q_2, G, G)$ берётся их композиция $\varphi' \circ \varphi''$, которая также является стабильной операцией $\varphi' \circ \varphi'' \in \mathcal{O}^S(q_1 + q_2, \Pi, G)$. Введённое умножение ассоциативно и не коммутативно. Таким образом $\bigoplus\limits_q \mathcal{O}^S(q, G, G)$ является градуированной алгеброй. Среди произведений квадратов Стинрода фиксированной степени имеются соотношения. Они были найдены У[4 5], и доказаны Адемом[6 7].

Теорема (Адем[6 7]). *Имеют место следующие соотношения*

$$\text{при } a < 2b\text{: } Sq^a Sq^b = \sum_{i=0}^{[a/2]} \binom{b-i-1}{a-2i} Sq^{a+b-i} Sq^i; \tag{1}$$

$$\text{при } a < pb\text{: } P^a P^b = \sum_{i=0}^{[a/p]} (-1)^{a+i} \binom{(p-1)(b-i)-1}{a-pi} P^{a+b-i} P^i. \tag{2}$$

и

$$\text{при } a \le pb\text{: } P^a \beta P^b = \sum_{i=0}^{[a/p]} (-1)^{a+i} \binom{(p-1)(b-i)}{a-pi} \beta P^{a+b-i} P^i + \\ + \sum_{i=0}^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+i+1} \binom{(p-1)(b-i)-1}{a-pi-1} P^{a+b-i} \beta P^i. \tag{3}$$

Важную роль в описании структуры алгебры $\bigoplus\limits_q \mathcal{O}^S(q, \Pi, G)$ играет следующее утверждение.

---

[4]W-T. Wu *Classes caracteristiques et carres de Steenrod*, C. R. Acad. Sci. Paris 230 (1950) 508–511.

[5]W-T. Wu *Sur les puissances de Steenrod*, Colloq. Toplogie Strasbourg (Publ. Math. Inst. Univ.)

[6]J. Adem *The iteration of Steenrod squares in algebraic topology*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38 (1952) 720–726.512

[7]J. Adem *The relations in Steenrod powers of cohomology classes, Algebraic geometry and topology*, Symposium in honour of S. Lefschetz (Princeton University Press, 1957).

Факт. *Группа стабильных когомологических операций* $\mathcal{O}^S(q,\Pi,G)$ *изоморфна обратному пределу последовательности групп* $H^{n+q}(K(\Pi,n);G)$ *и гомоморфизмов* f_n^**, индуцированных отображением*

$$f_n : \Sigma K(\Pi,n) \to K(\Pi,n+1).$$

Ж.-П. Серром в работе[8] было проведено вычисление когомологий пространств $K(\Pi,n)$. В частности было показано, что образующие в когомологиях $H^*(K(\mathbb{Z}/p,n);\mathbb{Z}/p)$ при $p=2$ выражаются при помощи итерированных произведений $Sq^{i_r}Sq^{i_{r-1}}\cdots Sq^{i_0}$ квадратов Стинрода. Прежде чем сформулировать теорему дадим необходимые определения.

Определение. Последовательность $I=(i_r,i_{r-1},\ldots,i_0)$ называется *допустимой*, если $i_l \geq 2i_{l-1}$. Произведение квадратов Стинрода $Sq^{i_r}Sq^{i_{r-1}}\cdots Sq^{i_0}$, соответствующее допустимой последовательности, будем также называть допустимым. *Избыточностью* $e(I)$ допустимой последовательности I будем называть следующую величину $e(I)=\sum\limits_{j=1}^{r}(i_l-2i_{l-1})$.

Теорема (Серр [8]). *Алгебра* $H^*(K(\mathbb{Z}/2,n);\mathbb{Z}/2)$ *является алгеброй полиномов от образующих* $Sq^{i_r}Sq^{i_{r-1}}\cdots Sq^{i_0}\iota_n$*, где* $\iota_n \in H^n(K(\Pi,n);G)$ *— фундаментальный класс и* $I=(i_r,i_{r-1},\ldots,i_0)$ *— произвольная допустимая последовательность такая, что* $e(I)<n$.

Отметим, что в левой части соотношений Адема стоят недопустимые произведения, тогда как в правых частях — допустимые. Далее, легко можно показать, что применением соотношений Адема произвольное произведение квадратов Стинрода может быть представлено в виде суммы допустимых произведений. Таким образом, получаем, что алгебра стабильных когомологических

[8] J.-P. Serre. *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg–MacLane*, Comment. Math. Helv. 27 (1953) 198–231

операций $\bigoplus_q \mathcal{O}^S(q, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$ при $p = 2$ мультипликативно порождается квадратами Стинрода Sq^i, соотношения Адема образуют полную систему соотношений, и базисом алгебры как векторного пространства над $\mathbb{Z}/p$ служит множество допустимых мономов.

В случае $p > 2$ аналогичная теорема была доказана А. Картаном[9], однако способ доказательства отличается от предложенного Серром. Доказательство основанное на тех же идеях, что и доказательство Серра, было дано М. М. Постниковым в[10]. Мультипликативными образующими алгебры $\bigoplus_q \mathcal{O}^S(q, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$ в этом случае являются степени Понтрягина P^i и β.

В описанных случаях алгебра стабильных когомологических операций в когомологиях с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}/p$, где p — простое число, обозначается $\mathcal{A}_p$ и называется алгеброй Стинрода.

Из сказанного выше получаем, что алгебра Стинрода абстрактно может быть задана с помощью набора мультипликативных образующих $\{P^i\}$ и β и соотношений (2), (3), и $\{Sq^i\}$, (1) в случае $p = 2$.

Связь действия алгебры Стинрода $\mathcal{A}_p$ с кольцевой структурой в когомологиях устанавливается следующей формулой:

$$Sq^k(ab) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a)Sq^j(b)$$

для $a, b \in H^*(X; \mathbb{Z}/2)$. Она была получена А. Картаном в[11] и носит его имя. Милнором[12] было замечено, что отображение

$$Sq^k = \sum_{i+j=k} Sq^i \otimes Sq^j$$

---

[9] H. Cartan. *Algebres d'Eilenberg — Maclane et homotopie*, Seminaire H. Cartan r . ENS, 7e annee, 1954/55 (русский перевод: А. Картан. *Алгебры когомологий пространств Эйленберга* — Маклейна; сб. перев. «Математика» 3:5 (1959); 3:6 (1959)).

[10] М. М. Постников. *К теореме Картана*, УМН, 21:4(130) (1966), 35–46

[11] H. Cartan. *Une theorie axiomatique des carres de Steenrod*, C. R. Acad. Sci. Paris 230 (1950) 425–427.

[12] J. Milnor. *The Steenrod algebra and its dual*, Annals of Mathematics, (1958), 150–171.

может быть взято в качестве ко умножения, а отображение

$$c(Sq^i) = \sum_{i+j=k} Sq^i c(Sq^j)$$

как антиподальное отображение, в результате чего в $\mathcal{A}_p$ вводится структура алгебры Хопфа. Результатом указанной работы стало полное описание структуры двойственной алгебры $\mathcal{A}_p^*$. В частности, было показано, что $\mathcal{A}_p^* \cong \mathbb{Z}/p[\xi_i] \otimes \Lambda[\tau_j]$, где $\deg(\xi_i) = 2(p^i - 1)$ и $\deg(\tau_j) = 2(p^j - 1) + 1$. Элемент в $\mathcal{A}_p$, двойственный к $\tau_0^{\varepsilon_0}\tau_1^{\varepsilon_1}\cdots\tau_m^{\varepsilon_m} \otimes \xi_0^{r_0}\xi_1^{r_1}\cdots\xi_n^{r_n}$ в $\mathcal{A}_p^*$ обозначается $Q_0^{\varepsilon_0}Q_1^{\varepsilon_1}\cdots Q_m^{\varepsilon_m}P(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Данные элементы называются элементами Милнора. Множество элементов Милнора образует базис в $\mathcal{A}_p$. Далее, в статье была предъявлена явная формула для умножения, позволяющая представить явным образом произведение двух элементов базиса Милнора в виде линейной комбинации элементов этого же базиса. Подобная формула известна лишь для элементов Милнора. К примеру, произведение двух произвольных допустимых мономов, вообще говоря, уже не является допустимым мономом. Для того, чтобы представить получившийся моном в виде суммы допустимых, к нему необходимо несколько раз применить редукцию с помощью соотношений Адема.

Таким образом, базис допустимых мономов и базис Милнора являются первыми построенными базисами в алгебре Стинрода для всех простых p.

Несложное рассуждение[13] показывает, что вместо всех образующих Sq^i достаточно рассматривать только элементы вида Sq^{2^i} (соответственно P^{p^i} в случае $p > 2$). В частности, можно строить новые аддитивные базисы пользуясь этим набором образующих. Так для $p = 2$ в работах Арнона и Уолла[14] [15] были построены так называемые Z и X-базисы. Кроме того, Арноном в [14] был построен так

[13]Лемма 4.2, Н. Стинрод, Д. Эпстейн. *Когомологические операции*, М.: Наука, 1983.

[14]D. Arnon. *Monomial bases in the Steenrod algebr*, J. Pure Appl. Algebra, 96 (1994), 215–223.

[15]C. T. C. Wall. *Generators and relations for the Steenrod algebra*, Ann. of Math., 72:2 (1960), 429–444.

называемый C-базис, Вудом в работе[16] были построены так называемый WY и WZ-базис — элементы этих базисов записываются в образующих Sq^i. Ещё одним набором мультипликативных образующих является множество элементов Милнора вида $P(0, 0, \ldots, p^s, 0, \ldots)$. Примером базиса, строящегося с помощью таких мультипликативных образующих, является P_t^s-базис, описанный Марголисом в[17].

В работе Монкса[18] исследовался вопрос, в каких случаях при $p = 2$ матрица перехода от одного аддитивного базиса к другому имеет треугольный вид. Важность этого вопроса основывается, в частности, на том, что в явном виде формула для разложения произведения двух базисных мономов по тому же базису известна лишь для базиса Милнора. Кроме того, в работе[18] исследовался вопрос возможности рекуррентного вычисления столбцов матрицы перехода по предшествующим столбцам.

Цель диссертации

В данной работе рассматривается случай подалгебры $\bar{\mathcal{A}}_p$ алгебры $\mathcal{A}_p$ при $p > 2$, мультипликативно порожденной элементами

$$P^1, P^2, \ldots, P^n, \ldots\ ,\ \deg(P^i) = 2(p-1)i,$$

и соотношений

$$P^0 = 1,\ P^a P^b = \sum_{i=0}^{[a/p]} (-1)^{a+i} \binom{(p-1)(b-i)-1}{a-pi} P^{a+b-i} P^i \text{ при } a < pb.$$

[16] R. M. W. Wood. *A note on bases and relations in the Steenrod algebra*, Bull. London Math. Soc. 27 (1995) 380–386

[17] Глава 15, H. Margolis. *Spectra and the Steenrod algebra*, North-Holland Math. Library 29 (Elsevier, Amsterdam, 1983)

[18] K. G. Monks. *Change of basis, monomial relations, and P_s^t bases for the Steenrod algebra*, Journal of Pure and Applied Algebra, 125:1 (1998), 235–260.

Цели работы таковы:

1. Для большинства пар известных базисов в алгебре $\bar{\mathcal{A}}_p$ изучить, какой вид имеет матрица перехода от одного базиса к другому.

2. Построить новые примеры базисов в $\bar{\mathcal{A}}_p$.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Построен WY-базис для случая алгебры $\bar{\mathcal{A}}_p$ (теорема 1).

2. Доказан ряд утверждений о редукции элементов алгебры Стинрода к Z-мономам (предложения 1 и 2).

3. Доказана треугольность WZ-базиса по отношению к Z-базису (теорема 2). Доказана треугольность семейств P^s_t-базисов и X-базиса по отношению к базису Милнора (теоремы 3 и 4 соответственно).

Методы исследования

В диссертации применяются методы топологии и алгебры. Использовались системы компьютерной алгебры.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов в области алгебраической топологии и теории когомологогиеских операций.

Апробация работы

Результаты диссертации были представлены на следующих семинарах и конференциях:

- семинар «Некоммутативная геометрия и топология» под руководством профессора А. С. Мищенко, профессора В. М. Мануйлова, профессора И. К. Бабенко, доцента А. А. Ирматова;
- семинар «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А. Т. Фоменко;
- Пятая школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России (САФУ, г. Коряжма, 2015);

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в работах [1], [3] и [2], все — в журналах из перечня ВАК.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения. Библиография сдержит 19 наименование. Текст диссертации изложен на 59 страницах.

Содержание работы

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты и содержание.

Содержание главы 1

Первая глава содержит необходимые определения и известные результаты.

Содержание главы 2

В главе 2 строится новый WY-базис. Назовём *WY-мономом* произведение $\bar{Z}_{k_0}^{n_0}\bar{Z}_{k_1}^{n_1}\cdots\bar{Z}_{k_r}^{n_r}$, где последовательность пар $I = ((k_0, n_0), \ldots, (k_r, n_r))$ удовлетворяет условиям

1. $(k_r, n_r) \leq_L \cdots \leq_L (k_1, n_1) \leq_L (k_0, n_0)$;
2. если в последовательности I есть подпоследовательность одинаковых пар:

$$(k_t, n_t) <_L (k_{t+1}, n_{t+1}) = \cdots = (k_{t+s}, n_{t+s}) <_L (k_{t+s+1}, n_{t+s+1}),$$

то $s < p$ для любой такой подпоследовательности.

Теорема 1. *Множество WY-мономов образует базис в $\bar{\mathcal{A}}_p$, $p > 2$.*

Содержание главы 3

В главе 3 доказываются предложения 1 и 2, которые играют важную роль в доказательстве того, что X и Z-мономы образуют аддитивные базисы алгебры $\bar{\mathcal{A}}_p$.

Предложение 1. *Для любых $n > k$ произведение*

$$Z_k^n P^{p^n} \in \bar{\mathcal{A}}_p$$

может быть выражено в виде линейной комбинации слагаемых, меньших данного произведения в смысле правого лексикографического порядка.

Предложение 2. *Для любых $n \geqslant k$ произведение $P^{p^n} Z_k^{n+1}$ может быть представлено в виде линейной комбинации мономов, меньших дянного произведения в правом лексикографическом порядке.*

Важно отметить, что эти предложения применяются не так, как это обычно делается в теории базисов Гребнера. А именно, сначала мы доказываем, что любой элемент алгебры $\bar{\mathcal{A}}_p$ при помощи некоторых процедур (среди которых содержатся эти два предложения) сводятся к линейной комбинации Z-мономов. Затем доказывается, что в каждой градуировке подпространство, порождённое Z-мономами, имеет размерность не большую, чем размерность соответствующей градуировочной компоненты $\bar{\mathcal{A}}_p$.

Содержание главы 4

Глава 4 посвящена исселедованию треугольности некоторых базисов друг по отношению к другу в алгебре $\bar{\mathcal{A}}_p$. Будем называть базисы B_1 и B_2 треугольными друг по отношению к другу, если существуют линейные порядки на них, такие что относительно этих порядков матрица перехода от одного базиса к другому треугольна. Глава содержит следующие результаты.

Построены контрпримеры для пар базисов не являющихся, треугольными друг по отношению к другу, в частности, показано, что Z-базис не является треугольным по отношению к базису Милнора,

Z и WZ базисы. Элементы Z-базиса — это мономы вида $Z_{k_0}^{n_0} Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_r}^{n_r}$, где $Z_k^n = P^{p^k} P^{p^{k+1}} \cdots P^{p^n}$. При этом на последовательность пар индексов $((n_0, k_0), \ldots, (n_r, k_r))$ наложены условия: $(n_r, k_r) \leq_L \cdots \leq_L (n_1, k_1) \leq_L (n_0, k_0)$;

и, если в последовательности I есть подпоследовательность одинаковых пар

$$(n_t, k_t) <_L (n_{t+1}, k_{t+1}) = \cdots = (n_{t+s}, k_{t+s}) <_L (n_{t+s+1}, k_{t+s+1}),$$

то $s < p$ для любой такой подпоследовательности. Мономы, составленные из элементов $\bar{Z}_k^n = P^{p^k + p^{k+1} + \ldots + p^n}$ с теми же условиями на последовательность пар индексов называются WZ мономами.

Теорема 2. *Пусть Z^I — произвольный Z-моном, заданный набором индексов $I = ((n_0, k_0), \ldots, (n_r, k_r))$. Тогда для WZ-монома $\bar{Z}^I$ выполняется равенство*

$$\bar{Z}_{k_0}^{n_0} \bar{Z}_{k_1}^{n_1} \cdots \bar{Z}_{k_r}^{n_r} = Z_{k_0}^{n_0} Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_r}^{n_r} + L,$$

где L — линейная комбинация мономов, которые меньше Z^I в смысле правого лексикографического порядка.

Следствие 1. *Множество WZ-мономов образует базис в $\bar{\mathcal{A}}_p$. Кроме того, базисы WZ и Z треугольны друг по отношению к другу.*

Семейство P_t^s-базисов. В алгебре $\bar{\mathcal{A}}_p$ имеются элементы

$$P_t^s = P(0, \ldots, 0, p^s, 0, \ldots),$$

где p^s стоит на месте с номером t, $\deg P_t^s = 2p^s(p^t - 1)$. Произведение вида $(P_{t_1}^{s_1})^{m_1} \ldots (P_{t_k}^{s_k})^{m_k}$, где все $P_{t_j}^{s_j}$ попарно различны и $0 < m_j < p$ называется P_t^s-мономом. В каждом конечном наборе троек целых чисел $\{(s_j, t_j, m_j) : j = 1, \ldots, k, 0 < m_j < p, s_j \geq 0, t_j > 0\}$ зафиксируем линейный порядок и именно в этом порядке будем перемножать $(P_{t_j}^{s_j})^{m_j}$. Заметим, что таких базисов бесконечно много, поскольку в каждом P_t^s-мономе порядок атомарных сомножителей $(P_{t_j}^{s_j})^{m_j}$, хоть и фиксирован, однако может быть выбран произвольным образом.

Зафиксируем базис B_P и построим биекцию $\gamma : B_{Mil} \to B_P$. Для милноровского элемента $P(R) = P(r_1, r_2, \dots)$ рассмотрим p-адическое разложение каждого $r_j = \sum \alpha_k(r_j)p^k$ и рассмотрим набор троек целых чисел, построенный по последовательности R:

$$M(R) = \{(s, t, \alpha_s(r_t)) : \text{ если } \alpha_s(r_t) > 0\}.$$

Положим $\gamma(P(R))$ равным произведению элементов $(P^s_t)^{\alpha_s(r_t)}$ в том порядке, который зафиксирован для набора $M(R)$. Для $P(R)$ положим $e(P(R)) = \sum r_j$.

Определение. Для $P\langle R\rangle, P\langle S\rangle \in B_{Mil}$ будем писать $P\langle R\rangle \prec_E P\langle S\rangle$, если $e(P\langle R\rangle) < e(P\langle S\rangle)$, или $e(P\langle R\rangle) = e(P\langle S\rangle)$ и $P\langle R\rangle \prec_R P\langle S\rangle$.

Теорема 3. *Для любого $\theta \in B_P$ имеет место равенство*

$$(\theta)_{Mil} = a(\theta)\gamma^{-1}(\theta) + \sum \mu_i,$$

где $e(\mu_i) < e(\gamma^{-1}(\theta))$ и коэффициент $a(\theta) \in \mathbb{Z}/p$ отличен от 0.

Следствие 2. *P^s_t-базис треугольный по отношению к базису Милнора.*

*X***-базис.** Определение порядка $<_L$ и биекции $\gamma : B_{Mil} \to B_X$ для случая X-базиса достаточно громоздко.

Теорема 4. *Пусть* рθ *— произвольный X-моном. Тогда его разложение $(\theta)_{Mil}$ по базису Милнора имеет вид*

$$(\theta)_{Mil} = \gamma^{-1}(\theta) + \sum_i \eta_i,$$

где $\gamma^{-1}(\theta) <_L \eta_i$ для всех i.

Следствие 3. *X-базис треугольный по отношению к базису Милнора.*

Заключение

В данном разделе мы ещё раз перечислим основные результаты работы и возможные дальнейшие пути исследования.

В главе 2 был построен новый WY-базис в алгебре Стинрода $\bar{\mathcal{A}}_p$. Возможными путями для продолжения исследований является вопрос о построении новых базисов из Z или WZ-элементов.

В главе 3 доказан ряд утверждений о редукции произвольного монома в алгебре $\bar{\mathcal{A}}_p$ к линейной комбинации Z-мономов. Дальнейшая работа в данном направлении связана с исследованием соотношений в алгебре Стинрода.

В главе 4 доказан ряд утверждений о треугольности базисов. Важным вопросом в развитии данного направления является доказательство треугольности WY-базиса по отношению к какому-либо другому базису.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность Фёдору Юрьевичу Попеленскому за постановку задачи, поддержку и внимание к работе, а также академику Анатолию Тимофеевичу Фоменко и профессору Александру Сергеевичу Мищенко за полезные замечания и обсуждения.

Список публикаций по теме диссертации

[1] D. Yu. Emelyanov, Th. Yu. Popelensky, “On monomial bases in the $\mod p$ Steenrod algebra”, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 17:2 (2015), 341–353. (Емельянову Д. Ю. принадлежат формулировки и доказательства ключевых лемм 2.9 и 2.10.)

[2] Д. Ю. Емельянов, “О базисах Вуда алгебры Стинрода $\mod p$”, Фундаментальная и прикладная математика, 20:3 (2015), 83–90.

[3] Д. Ю. Емельянов, Ф. Ю. Попеленский “О заменах базисов в алгебре Стинрода $\mod p$”, Математический сборник, 208:4 (2017), 3–16. (Емельянову Д. Ю. принадлежат доказательства основных теорем.)